

Cantors zweites Diagonalargument enthält einen Widerspruch

Zur Problematik von Kardinalzahlen \aleph_α mit $\alpha \geq 1$

(Fassung Juli 2010)

Cantor will mit seinem Diagonalargument die Existenz überabzählbarer Mengen zeigen. Als ein Beispiel dient ihm die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Der von uns zu zeigende Widerspruch beruht darauf, dass die von Cantor zugrunde gelegte Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 als Dezimalzahlen der Gestalt $0,a_1a_2\dots$ bereits das Transfinite impliziert. Mit diesen Dezimalzahlen argumentiert Cantor so, als könnten sie alle wie Dezimalzahlen mit endlich vielen Stellen als etwas aktuell Unendliches vollständig angeschrieben werden. Dem ist aber nicht so. Selbst unter der Annahme, es sei möglich, von jeder ausreichend definierten reellen Zahl zwischen 0 und 1 jede beliebige Dezimalstelle zu errechnen, berücksichtigt Cantors Argument nicht, dass in jeder endlichen Zeitspanne - und mehr hat man nicht zur Verfügung - nur potentiell Unendliches mit endlich vielen Dezimalstellen tatsächlich errechnet werden kann. Der gedankliche Schritt von der Möglichkeit unendlicher Dezimalzahlen zu unendlichen Dezimalzahlen zu gelangen, deren Dezimalstellen tatsächlich alle bereits zur Verfügung stehen, führt zu dem von uns zu zeigenden Widerspruch.

Um diesen Widerspruch herzuleiten werden wir eine vollständige Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 angeben, die so gewählt ist, dass von reellen Zahlen außerhalb von ihr per definitionem nicht gesprochen werden kann.

1. Wir beginnen mit der Definition einer Mitteilung M vom Umfang n.
 - 1.1. Unter einer Mitteilung M vom Umfang n verstehen wir einen quadratischen Raster bestehend aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge 1/100 mm, die jeweils entweder weiß oder schwarz sind. Ein solcher Raster kann etwa ein Blatt Papier oder ein Monitor sein, auf dem sichtbare Zeichen angebracht wurden.
 - 1.2. Alle möglichen derartigen Mitteilungen M können abzählbar angeordnet werden.
 - 1.2.1. Wir ordnen die Mitteilungen M zunächst in Gruppen nach ihrem Umfang n. Jede Mitteilung vom Umfang n besteht aus n^2 Elementarquadraten, die in n Zeilen angeordnet sind. Jedes dieser Elementarquadrate ist entweder weiß oder schwarz.
 - 1.2.2. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu.
 - 1.2.3. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit EQ_{jk} und die zugeordnete Ziffer (1 oder 2) mit a_{jk} .
 - 1.2.4. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl
$$a(M) = 0,a_{11}a_{12}\dots a_{1n}a_{21}\dots a_{jk}\dots a_{nn}$$
eindeutig dargestellt.
 - 1.2.5. Alle möglichen Mitteilungen M ordnen wir nun nach der Größe von $a(M)$ in einer Anordnung $AO(M)$ abzählbar an.
2. Eine Mitteilung M ist für sich allein genommen "sinnleer". M ist zunächst nichts anderes als eine physikalische Gegebenheit, etwa ein Blatt Papier oder ein Monitor. Eine Seite Mayaschrift oder eine Seite chinesischer Schriftzeichen ist z.B. für den Autor ohne "Sinn", da er diese Sprachen bzw. diese Schriften nicht kennt.

- 2.1. **Erst durch einen Leser, also durch eine Person P, welche eine Mitteilung M liest, kann M einen "Sinn" gewinnen und zwar für diese Person P.** Dieser Sinn ist offenbar ein Objekt des Denkens der Person P. Wir können ihn daher als Denkobjekt $DO(M,P)$ bezeichnen. Ob überhaupt und wenn ja welchen Sinn M für den Autor oder für den Leser dieser Studie hat, ist gegenstandslos.
- 2.2. Wir sprechen im folgenden vom Sinn einer Mitteilung M für eine Person P gemäß 2.1. unabhängig davon, ob P die Mitteilung M tatsächlich liest. $DO(M,P)$ bezeichnet also jenen Sinn, den M für P für den Fall hat, dass P die Mitteilung M tatsächlich liest.
- 2.3. Wir sind davon ausgegangen, dass eine Mitteilung M für sich allein genommen "sinnleer" ist und erst für einen Leser P einen Sinn gewinnen kann. Diesen Sinn haben wir als Objekt des Denkens von P mit $DO(M,P)$ bezeichnet. Der Sinn einer Mitteilung M für eine Person P kann aber auch vom Zeitpunkt T, in dem die Person P die Mitteilung M liest, abhängen. Der Sinn der Mitteilung "Heute" wird für den Autor im allgemeinen vom Tag abhängen, an dem er diese Mitteilung liest. Ein anderes Beispiel: Die Mitteilung "i" kann den Buchstaben i ebenso bedeuten wie etwa $\sqrt{-1}$, je nachdem in welchem Zusammenhang die Mitteilung gelesen wird. Wir wollen einer solchen Abhängigkeit durch die Bezeichnung $DO(M,P,T)$ Rechnung tragen. $DO(M,P,T)$ besagt also, dass die Person P im Zeitpunkt T angibt, die Mitteilung M habe den Sinn $DO(M,P,T)$ und zwar unabhängig davon, ob P die Mitteilung M wahrheitsgemäß oder (absichtlich oder irrtümlich) unrichtig interpretiert. Es gibt kein Kriterium über die "Wahrheit" einer Aussage von P. Wir stellen lediglich fest, dass P seine Aussage über den Sinn von M im Zeitpunkt T gemacht hat und diese Tatsache unveränderlich bleibt, was immer P etwa in einem späteren Zeitpunkt hinsichtlich des Sinns der Mitteilung M angibt.
- 2.4. Wir wollen nun Ordnung in die Menge aller möglichen Denkobjekte bringen.
- 2.4.1. Dabei beginnen wir mit der Anordnung aller möglichen Lesevorgänge.
- 2.4.1.1. Jeder mögliche Lesevorgang LPT irgend einer Person P in irgend einem Zeitpunkt T besteht darin, dass die Person P im Zeitpunkt T irgendeine Mitteilung M liest, die dann als Denkobjekt von P den Sinn $DO(M,P,T)$ gemäß 2.2. hat. Dabei ist $DO(M,P,T)$ wie in 2.2. postuliert unabhängig davon, ob P die Mitteilung M tatsächlich liest.
- 2.4.1.2. Jede mögliche Person P wird während jedes möglichen Lesevorganges LPT ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnehmen und jeder mögliche Lesevorgang wird eine gewisse Mindestzeit dauern. Um Ordnung in alle möglichen Lesevorgänge zu bringen wählen wir ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum mit drei Raumkoordinaten und einer Zeitkoordinate und zerlegen es in Raum-Zeit-Elemente RZE.
- 2.4.1.3. Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm und der Dauer 0.01 Sek. . Diese Elementarwürfel können wir mit Hilfe des Koordinatensystems aus 2.4.1.2. in einer Anordnung $AO(EW)$ abzählbar anordnen.
- 2.4.1.4. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass in jedem Volumen, das jede mögliche Person PT einnimmt und während jedes möglichen Lesevorganges LPT mindestens ein solcher Elementarwürfel $EW = EW(PT)$ des Raum-Zeit-Universums zur Gänze liegt, der den Lesevorgang LPT eindeutig kennzeichnet.

2.4.1.5. Alle möglichen Lesevorgänge LPT ordnen wir nun mit Hilfe der sie eindeutig kennzeichnenden Elementarwürfel $EW(PT)$ und deren abzählbarer Anordnung $AO(EW)$ in einer Anordnung $AO(LPT)$ abzählbar an.

2.4.2. Wir betrachten abschließend noch einmal alle möglichen Lesevorgänge LPT und alle möglichen Mitteilungen M . Aus ihnen gewinnen wir alle möglichen Denkobjekte $DO(M,P,T) = DO[M,EW(PT)]$. Diese Denkobjekte bezeichnen also jeweils den Sinn, den die Mitteilung M für die Person P im Zeitpunkt T gemäß 2.2. hat, wobei der Elementarwürfel $EW(PT)$ den Lesevorgang LPT eindeutig kennzeichnet.

2.4.3. Aus der abzählbaren Anordnung $AO(M)$ aller möglichen Mitteilungen M gemäß 1.2.5. und der abzählbaren Anordnung $AO(LPT)$ aller möglichen Lesevorgänge gemäß 2.4.1.5. gewinnen wir nun unschwer eine abzählbare Anordnung $AO(M,P,T)$ aller möglichen Denkobjekte aller möglichen Personen P .

3. Bei den reellen Zahlen zwischen 0 und 1 handelt es sich offenbar um Denkobjekte. Die mit Hilfe des zweiten Cantorschen Arguments hergeleitete Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 steht daher im Widerspruch zur abzählbaren Anordnung $AO(M,P,T)$ aller möglichen Denkobjekte gemäß 2.4.3.. Wir wollen im folgenden zeigen, worauf dieser Widerspruch zurückzuführen ist.

3.1. Ausgangspunkt dieser Untersuchung ist die von Cantor verwendete Diagonalzahl die wir hier folgendermaßen darstellen wollen:

Es sei $AO(RZ) = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ eine beliebige Anordnung von reellen Zahlen zwischen 0 und 1, von der behauptet wird, sie enthalte alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Man stellt nun jede Zahl a_n in Form einer Dezimalzahl $0, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}, \dots$ dar und stellt sie in Form des folgenden Rasters zusammen:

$$a_1 = 0, a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \dots$$

$$a_2 = 0, a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \dots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_n = 0, a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \dots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

3.1.1. Auf Grund dieses Rasters bildet man eine Dezimalzahl $b = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ mit $b_n = 1$ für $a_{nn} \neq 1$ und $b_n = 2$ für $a_{nn} = 1$.

3.1.2. Die reelle Zahl b liegt zwischen 0 und 1 und unterscheidet sich an der n^{ten} Dezimalstelle b_n von a_{nn} , der jeweiligen n^{ten} Dezimalstelle von a_n . Es gilt also $\forall n: b_n \neq a_{nn}$ und daraus folgt $\forall n: b \neq a_n$. Da alle a_{nn} auf der Diagonale des Rasters nach 3.1. liegen, nennt man b auch "Diagonalzahl". Wegen $\forall n: b \neq a_n$ ist die Diagonalzahl b in der Anordnung $AO(RZ)$ nicht enthalten. Für Cantor folgt daraus die Unvollständigkeit dieser Anordnung.

3.2. Wir wollen nun die Eigenschaften des Rasters aus 3.1. näher untersuchen.

3.2.1. Die Schlussfolgerung aus 3.1.2., wonach die Anordnung der Zahlen a_n die Diagonalzahl nicht enthält, ist trivial, solange der Raster 3.1. endlich viele Zahlen a_n enthält. Wir werden aber im folgenden zeigen, dass eine Erweiterung dieser Schlussfolgerung auf einen Raster mit unendlich vielen Zahlen a_n unzulässig ist und zu einem Widerspruch führt.

- 3.2.2. Die Wahl der Dezimalstellen a_{jk} jeweils in der j^{ten} Zeile an k^{ter} Stelle des Rasters nach 3.1. haben wir in keiner Weise eingeschränkt. Daraus folgt unter anderem, dass zwei verschiedene a_n trotz unterschiedlicher Dezimalzahl-Darstellung die selbe Zahl darstellen können. So gilt z.B. $0,199\dots = 0,200\dots$ usw. (Das Beispiel $1 = 0,999\dots$ kann ausgeschlossen werden, da vorausgesetzt wurde alle a_n liegen **zwischen** 0 und 1). Der Raster aus 3.1. hat aber eine viel grundlegendere Schwäche. Er impliziert bereits unerlaubterweise transfinite Elemente. Erst auf Grund dieser transfiniten Elemente, deren mögliche Existenz ja gerade erst bewiesen werden soll, führt die Cantorsche Anordnung zu einem **scheinbaren** Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.
- 3.2.3. Als Beispiel eines solchen transfiniten Elementes im Raster 3.1. wählen wir die Zahl $1/\pi$, offenbar eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. So wie auch andere transzendente Zahlen kann sie nie in endlicher Zeit zur Gänze als Dezimalzahl angeschrieben werden, obwohl die Berechnung jeder einzelnen ihrer Dezimalstellen in endlicher Zeit grundsätzlich möglich ist. Ein Raster nach 3.1. muss daher stets - in welchem Zeitpunkt auch immer - unvollständig sein.
- 3.2.4. **Wir wollen im folgenden eine Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorstellen, die keine derartige transfinite Schwäche aufweist.** Wir werden weiter zeigen, dass jeder Versuch, eine Unvollständigkeit dieser Anordnung zu zeigen, misslingt. Dies zeigen wir insbesondere Am Beispiel des zweiten Cantorschen Diagonalarguments.
- 3.2.4.1. Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind die Mitteilungen M aus 1. Eine abzählbare Anordnung aller möglichen Mitteilungen M in Form von $AO(M)$ haben wir in 1.2.5. gegeben.
- 3.2.4.2. Im Hinblick auf unser Ziel, eine vollständige Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 anzugeben, wollen wir alle jene Mitteilungen M herausfiltern, die eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben.
- 3.2.4.3. Wie in 2. dargelegt sind aber Mitteilungen M für sich allein genommen sinnlos. Sie können, wie in 2.1. erläutert, erst im Zusammenhang mit einem möglichen Leser P einen Sinn erhalten, Für ein mögliches Lesen im Zeitpunkt T haben wir diesen Sinn in 2.3. als Denkobjekt $DO(M,P,T)$ bezeichnet.
- 3.2.4.4. Wir führen daher die folgende "**Individual-Anordnung**" **$AO[M,P,T,RZ(01)]$** ein. Sie besteht aus der Anordnung aller jener Denkobjekte $DO [M,P,T,RZ(01)]$ aus der Menge der Denkobjekte $DO(M,P,T)$, die eine reelle Zahl $RZ(01)$ zwischen 0 und 1 darstellen. Dabei handelt es sich also um alle Mitteilungen M von denen irgend eine Person P in irgend einem Zeitpunkt T im Sinne von 2.2. bejaht, dass die Mitteilung M eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Wie in 2.3. festgehalten, gibt es kein Kriterium über die "Wahrheit" dieser Aussage von P . Die Bezeichnung "Individual-Anordnung" soll darauf hinweisen, dass die Frage der Aufnahme eines Denkobjektes in diese Anordnung von der persönlichen Meinungsäußerung eines Individuums P abhängt.
- 3.2.4.5. Wir behaupten nun: Die Individual-Anordnung aus 3.2.4.4. enthält als Denkobjekte alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Dies ist eine universelle Aussage. Sie besagt nämlich, dass nicht nur für den Autor alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 durch eine Mitteilung M nach 1.1. eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben

werden können, sondern dass dies auch für alle möglichen Personen gilt. Da die Denköbekte aus 3.2.4.4. abzählbar sind, steht diese Behauptung im Widerspruch zu Cantor, der die Unvollständigkeit jeder abzählbaren Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 postuliert und diese Unvollständigkeit mit Hilfe seines zweiten Diagonalarguments beweisen will. Wir zeigen im folgenden, dass dieser Beweis misslingen muss.

3.2.4.6. Jeder Kritiker der Vollständigkeit der Individual-Anordnung muss eine mögliche Person P sein. Wir nennen ihn PK. Er muss in irgend einem Zeitpunkt $T = TK$ die Unvollständigkeit der Individual-Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 aus 3.2.4.4. behaupten. Wir werden zeigen, dass Cantors zweites Diagonalargument nicht geeignet ist, eine solche Behauptung zu beweisen.

3.2.4.6.1. Dazu bilden wir zunächst eine Mitteilung MK, welche die Beschreibung der Individual-Anordnung aus 3.2.4.4. sowie eine auf Grund dieser Anordnung mit Hilfe des zweiten Cantorschen Diagonalarguments gebildete Diagonalzahl enthält. Eine solche Mitteilung kann unschwer etwa aus den Formulierungen dieser Studie gebildet werden. Will PK ein so formuliertes zweites Cantorsches Diagonalargument zum Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung aus 3.2.4.4. verwenden, muss er in irgend einem Zeitpunkt TK bejahen, dass MK für ihn eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt.

3.2.4.6.2. Das kritische Denköbekt $DOK = DO[MK,PK,TK,RZ(0,1)]$ stellt also in TK nach Aussage von PK selbst eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 dar und ist somit gemäß 3.2.4.4. in der Individualanordnung enthalten. Das Problem für PK liegt darin, dass er einerseits irgend einmal bejahen muss, DOK stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 dar, denn durch sie soll ja gerade die Unvollständigkeit der Individual-Anordnung gezeigt werden, und andererseits gerade dadurch das Denköbekt DOK gemäß 3.2.4.4. in die Individual-Anordnung einbringt. Damit ist der eingangs behauptete Widerspruch in Cantors zweitem Diagonalargument für die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 herbeigeführt. qed.

4. Die Abzählbarkeit aller möglichen Denköbekte $DO(M,P,T)$ gemäß 2.4.3. hat Folgerungen für alle Bereiche, in denen von überabzählbaren Mengen die Rede ist.

4.1. Cantor wollte mit seinem zweiten Diagonalargument auch die Überabzählbarkeit aller einstelligigen ganzzahligen Funktionen natürlicher Zahlen sowie die der Potenzmenge der natürlichen Zahlen beweisen. Diese Beweisversuche können analog zu 3.2.4.4. jeweils durch die Einführung einer passenden Individual-Anordnung aller jener Denköbekte widerlegt werden, die einstellige ganzzahlige Funktionen bzw. solcher, die Mengen natürlicher Zahlen darstellen.

4.2. Eine andere Folgerung betrifft Untersuchungen, die sich mit dem ersten Hilbert-Problem bzw. allgemein mit Kardinalzahlen \aleph_α mit $\alpha \geq 1$ befassen. Alle Beweise der Existenz solcher Mengen stehen im Widerspruch zu 2.4.3.