ZAHLEN, SPRACHE, WELTANSCHAUUNG

AND SPEECH CREATED THOUGHT WHICH IS THE MEASURE OF THE UNIVERSE

(SHELLEY: Prometheus unbound)

DIE SPRACHE IST DIE QUELLE DES MISSVERSTÄNDNISSES

(ST. EXUPERY: Der kleine Prinz)

NICHTS DARF UNS ABHALTEN, DIE WENDUNG DER BEOBACHTUNG AUF UNSER EIGENES WESEN UND DIE VERWENDUNG DES DENKENS ZU SEINER EIGENEN KRITIK GUT ZU HEISSEN

(Sigmund Freud: Die Zukunft einer Illusion)

INHALTSVERZEICHNIS:

VORBEMERKUNG

Die folgenden Überlegungen handeln von einer Menge, die wir als "Universalanordnung" bezeichnen, eine Menge, in der "alles" (im weitest denkbaren Sinn) abzählbar angeordnet wird.

Mit der Universalanordnung soll eine äußere Hülle dargestellt werden, die nicht überschritten werden kann und in der alles Denkbare enthalten ist.

Wenn der Mensch das Maß aller Dinge ist, wenn also "alles" nur in Bezug auf den denkenden Menschen Sinn macht, dann steht stets die Frage im Raum, wie ein denkender Mensch hier und heute Aussagen über Urteile, über ein "Messen" eines denkenden Wesens völlig anderer Art, eines anderen Menschen, überhaupt machen kann. Anders ausgedrückt: Wie kann ein denkendes Wesen absolute Wahrheiten erkennen, die nicht nur für ihn hier und heute sondern überall und zu jeder Zeit für alle möglichen denkenden Wesen richtig sein müssen?

Der Anspruch auf solche absolute Wahrheiten wird hier vermieden, einerseits dadurch, dass der Begriff Wahrheit immer nur relativ zu einem denkenden Subjekt verstanden wird (dies gilt natürlich auch für die vom Autor in seinen Überlegungen als wahr angesehenen Aussagen) und andererseits dadurch, dass auch Unwahrheiten und Widersprüche ihren Platz erhalten.

Nur dadurch erscheint es dem Autor möglich, der Vielfalt der "Welt" zu entsprechen, die ja unzweifelhaft Unwahrheiten enthält und für die bisher eine widerspruchsfreie Beschreibung nicht möglich war. Die Möglichkeit einer widerspruchsfreien Beschreibung der Welt bleibt hier jedenfalls dahingestellt.

"An etwas denken" aber auch "über etwas reden" erfordert in unserer Welt jedenfalls Raum und Zeit. Diese stehen für Aussagen nur in endlichem Maße zur Verfügung. Diese zeitliche und räumliche Begrenzung sehen wir als Schranke für die Möglichkeit unserer Erkenntnis. Im folgenden werden wir sehen, wie sich die räumliche und zeitliche Begrenzung unseres Denkens und unseres Sprechens auf die Objekte unseres Denkens auswirkt. Dabei gehen wir insbesondere auf mathematische Objekte wie etwa Zahlen ein. Wir werden sehen, dass eine auf der im vorerwähnten Sinne zu verstehende Endlichkeit unserer Erkenntnismöglichkeit aufgebaute Mathematik in einem gewissen Spannungsverhältnis zur klassischen Mathematik steht.

<u>MEHRZAHL:</u> Die Sprache legt uns nahe anzunehmen, dass vor Einführung eines Zahlbegriffes bereits eine Unterscheidung zwischen eins und viel getroffen wurde. Wir gehen dabei davon aus, dass die Sprache vor allem dazu dient, Information zu vermitteln. Ursprünglich wohl vor allem Information von einer Person an eine andere Person aber durchaus auch als Speicher für ein und die selbe Person. Die durch sprachliche Mittel gekennzeichneten Objekte waren wohl ursprünglich durch Sinnesorgane wahrnehmbare. Neben Objekten unserer Umwelt wie etwa Baum, Stein usw. können wir Eigenschaften wie leicht oder schwer bzw. kalt oder heiß zu jenen Objekten unseres Denkens zählen, für die verhältnismäßig früh ein sprachlicher Ausdruck eingeführt wurde.

Die Tatsache, dass für die Mehrzahl in den meisten Sprachen ein eigenes Wort verwendet wird (z.B. Baum, Bäume), legt die Annahme nahe, dass die Unterscheidung zwischen "ein" und "mehrere" vor Einführung eines Zahlbegriffes, also vor der Entwicklung sprachlicher Mittel für das Abzählen stattgefunden hat. Ansonsten wäre es näherliegend gewesen, die Unterscheidung zwischen Einzahl und Mehrzahl durch "ein Baum" und "mehrere Baum" vorzunehmen.

Die Unterscheidung zwischen Mengen der Mächtigkeit "eins" einerseits und "mehr als eins" andererseits ließ offenbar die Einführung eines eigenen sprachlichen Ausdrucks für jede der beiden Mächtigkeiten als notwendig oder als zweckmäßig erscheinen. Nicht so bei Mengen höherer Mächtigkeit. Im allgemeinen unterscheidet die Sprache nicht zwischen Mengen der Mächtigkeit zwei und Mengen der Mächtigkeit "mehr als zwei". Mit der Unterteilung der Mengen mit einer Mächtigkeit größer als eins nach der Anzahl der in ihnen enthaltenen Elemente begann offenbar das Zählen. Eine Bezeichnung solcher Mengen mit einem jeweils vom Einzelwort abgeleiteten Wort (z.B. Baumeme für 2 Bäume, Steinene für 2 Steine) wurde offenbar zugunsten eines einheitlichen Zahlbegriffes, der für alle Mengen anwendbar ist, vermieden.

Hier sei der Hinweis gestattet, dass für Begriffe, für die eine "Anzahl" nicht in Frage kommt, wie etwa "Wasser" oder "Sand", eine Mehrzahl ursprünglich wohl nicht vorgesehen war. Das Mehrzahlwort "Gewässer" dürfte erst bei einer übertragenen Bedeutung des Begriffes "Wasser" Anwendung gefunden haben.

Von der Unterscheidung zwischen "eins" und "viel" bis zur Unterscheidung der Mengen nach der Anzahl ihrer Elemente war offenbar eine verhältnismäßig lange Zeit erforderlich. Auch heute noch können wir feststellen, dass wir in unserer Erkenntnis der Welt, in unserer Beschreibung der Welt, zu vereinfachenden Ja-nein-Einteilungen, zu Schwarz-weiß-Beschreibungen neigen. Möglicherweise ist dies ein Grund dafür, dass wir komplexe wirtschaftliche oder allgemeiner politische Fragen nicht angemessen stellen, geschweige denn beantworten können. Vereinfachende "Gut-böse"- bzw."Richtig-falsch"-Schemata werden der komplexen Realität offenbar nicht immer gerecht.

Betrachten wir den Menschen, seine Erfahrung, sein Denken, als Messinstrument für die Welt, so ist die Möglichkeit der Erkenntnis offenbar durch die Möglichkeiten des Messinstrumentes begrenzt. Eine für unsere Überlegungen wichtige Begrenzung liegt darin, dass dem Messinstrument das Aktual-Unendliche unzugänglich und nur das Potentiell Unendliche zugänglich ist. Ein Beispiel: Eine unendliche Dezimalzahl kann nur durch ihre endliche Definition bestimmt werden. Über sie kann nur in endlicher Zeit gesprochen werden. Die dem Menschen "mögliche" Mathematik wird dadurch begrenzt. Wäre es dem Messinstrument Mensch etwa möglich, eine unendliche Dezimalzahl durch die Angabe ihrer einzelnen, unendlich vielen Dezimalziffern vollständig wiederzugeben, dann stellte dies eine Erweiterung der möglichen Mathematik dar. Die Cantorsche Diagonalzahl lässt sich aber jeweils in endlicher Form darstellen. Sie gehört daher dem Bereich der auf das potentiell Unendliche beschränkten Mathematik an. Darauf beruht das Spannungsverhältnis zur klassischen Mathematik, auf das wir am Schluss der Vorbemerkung hingewiesen haben.

<u>DIE ANZAHL:</u> Wie schon das Wort sagt, hängt dieser Begriff mit Zählen zusammen. Dieser Vorgang dient dem Vergleich der Mächtigkeiten von Mengen verschiedener Elemente lediglich nach der Anzahl dieser Elemente. Es wäre durchaus denkbar, dass bei der Bezeichnung der Mächtigkeiten ursprünglich ein Vergleich mit der Menge von Fingern der zählenden Person vorgenommen wurde. In vielen Sprachen existieren originäre Worte für die Zahlen 1 bis 10, während darüber hinaus mehr oder weniger direkt auf die bisherigen Worte zurückgegriffen wird. Offensichtlich ist dies bei den Worten dreizehn, vierzehn usw. Aber auch die Worte elf (eilf) ujnd zwölf zeigen eine sprachliche Nähe zu den Worten eins und zwei (ähnlich in anderen Sprachen).

Um größere Zahlen zu benennen bediente man sich dann offenbar der Technik, in der Reihe der Zahlen gewisse Fixpunkte zu benennen wie z.B. 10, 100, 1000 usf., aber auch etwa 10, 50, 100, 500 usw. wie in den römischen Ziffern, um von diesen Fixpunkten ausgehend die Bezeichnung vorzunehmen. Also etwa 3227. Die Sprechweise "siebenundzwanzig" statt "zwanzigsieben" lässt auf eine gewisse Unsicherheit darüber schließen, ob Dezimalzahlen nun von links nach rechts oder von rechts nach links zu lesen sind.

NATÜRLICHE ZAHLEN: Die Menge der natürlichen Zahlen erschloss sich erst, als man begann ihr "Konstruktionsprinzip", nämlich zu einer jeweils bekannten Zahl 1 zu addieren, zu erfassen. Man erkannte, dass es keine Beschränkung der Zahlenmenge gab, keine größte Zahl. Damit fand das Unendliche in die Zahlenmenge Eingang. Aber dieses Unendliche wurde eigentlich durch eine fehlende Eigenschaft gekennzeichnet, nämlich dadurch, dass es keine größte Zahl geben kann. "Potentiell unendlich" erwies sich als brauchbare Bezeichnung.

Es erscheint aber wichtig, darauf hinzuweisen, dass uns beliebig große Zahlen nur scheinbar jederzeit zur Verfügung stehen. Es darf nicht übersehen werden, dass uns für große Zahlen zunächst nur das Konstruktionsprinzip (Addition von 1) zur Verfügung steht. Um große Zahlen verbal oder schriftlich darzustellen ist es daher nötig, ausreichend Zeit bzw. Raum (Schreibpapierfläche) zur Verfügung zu haben.

Um lediglich durch die Addition von 1 zu sehr großen Zahlen zu gelangen, braucht man sehr lange Zeit bzw. sehr viel Schreibfläche. Man hat aber andere Konstruktionsprinzipien eingeführt, die es gestatten, rascher zu großen Zahlen zu kommen. So etwa die Vorgänge des Multiplizierens und des Potenzierens.

Damit werden neben der Addition neue Konstruktionsprinzipien eingeführt. Aber auch durch Multiplizieren bzw. durch Potenzieren bleiben wir im Bereich der natürlichen Zahlen. Um zu besonders großen Zahlen zu gelangen wurden eigene Techniken entwickelt, doch wollen wir diesen Weg hier nicht weiter verfolgen.

Die bisher genannten Konstruktionsprinzipien (addieren, multiplizieren, potenzieren) bilden zunächst aus zwei vorgegebenen natürlichen Zahlen eine dritte. Man kann nun, etwa bei der Addition, den Vorgang umkehren und fragen: Welche natürliche Zahl muss zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl addiert werden, um eine zweite vorgegebene natürliche Zahl zu erhalten. Damit gelangt man zur Umkehrfunktion der Addition, zur Subtraktion. Dabei stellt sich heraus, dass die Aufgabe der Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen nicht immer lösbar ist. Fragt man etwa, welche natürliche Zahl zu 3 hinzugefügt werden muss um 2 zu erhalten, dann erweist sich diese Aufgabe als unlösbar.

Diese Schwierigkeit wird überwunden, indem man neue "Zahlen" einführt. Man definiert sogenannte negative Zahlen. Der begriffliche Hintergrund der negativen Zahlen ist völlig verschieden von dem der natürlichen Zahlen. Die natürlichen Zahlen werden durch den Vorgang des Abzählens gewonnen, also etwa durch die Zuordnung der einzelnen Elemente einer Menge zu den Fingern der zählenden Person. Die negativen Zahlen beruhen ursprünglich wohl auf der Umkehrung eines Konstruktionsprinzips, nämlich des Konstruktionsprinzips der Addition.

Wir wollen diese Überlegungen nicht mehr im Detail weiterentwickeln. Es soll aber darauf hingewiesen werden, dass die sich bei Einführung der negativen Zahlen angekündigte Erweiterung des Zahlenbegriffs mit Hilfe beliebiger anderer Konstruktionsprinzipien fortgesetzt werden kann. Dabei spielt auch die Reihenfolge der Verwendung neuer Konstruktionsprinzipien eine Rolle. Wird etwa die Umkehrfunktion des Potenzierens vor der Umkehrfunktion des Addierens, also vor Erweiterung des Zahlbegriffes auf negative Zahlen verwendet, dann bleibt man im Bereich der reellen Zahlen, also jener Zahlen, die sich auf der sogenannten Zahlengeraden anordnen lassen. Führt man hingegen zuerst die negativen Zahlen ein und wendet dann erst die Umkehrfunktion des Potenzierens an, dann gelangt man zu den komplexen Zahlen, also über den Bereich der reellen Zahlen hinaus.

Will man alle Zahlen "erfassen", dann ist es offenbar notwendig, alle ins Auge gefassten Konstruktionsprinzipien in beliebiger Reihenfolge und beliebig oft anzuwenden um sicher zu sein, zu allen "möglichen" Zahlen Zugang zu erhalten.

<u>WEITERE KONSTRUKTIONSPRINZIPIEN:</u> Das zur Erschließung der Menge der natürlichen Zahlen verwendete Konstruktionsprinzip der Addition von 1, also der einfache Vorgang des Zählens, bedeutet aber auch eine Definition immer neuer Zahlbegriffe. Das soll so verstanden werden: Die beim Vorgang des Abzählens verwendeten Begriffe 1, 2, usw. sind bei ihrer erstmaligen Verwendung Definitionen. Die natürlichen Zahlen werden also durch den Vorgang des Zählens erst definiert. Der Vorgang des Zählens ist uns heute so selbstverständlich geworden, dass uns nicht bewusst wird, wie wir durch ihn erst Zahlen definieren. Wir betrachten daher die natürlichen Zahlen als etwas, das unabhängig von denkenden Wesen, wie es die Menschen sind, existiert. Wir sind daher nicht nur der Überzeugung, dass es sinnvoll ist, etwa von der "Menge aller reellen Zahlen" zu sprechen, sondern dass wir auch zu jeder einzelnen reellen Zahl wenigstens prinzipiell stets Zugang haben.

Der Aufwand dessen es bedarf um "besonders große Zahlen" zu erzeugen sollte uns aber nachdenklich stimmen. Da das Benennen von Zahlen Raum und Zeit erfordert, muss angenommen werden, dass die Größe jener Zahlen, zu denen ein Mensch im Laufe seines Lebens Zugang haben kann, begrenzt ist.

Konstruktionsprinzipien die in der Verknüpfung von mehreren natürlichen Zahlen bestehen erfordern unter Umständen entsprechend größeren Aufwand an Zeit und Raum. Dies gilt etwa für Zahlen aus der Menge der algebraischen Zahlen.

Noch aufwändiger sind Konstruktionsprinzipien wie das "Diagonalverfahren". Dies soll am Beispiel der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 erläutert werden.

Es werden unendlich viele reelle Zahlen zwischen 0 und 1 in Form von Dezimalzahlen untereinander geschrieben. Die Dezimalzahl in der n-ten Zeile laute $a_n = 0,a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots\ldots$ Dabei steht jede Dezimalstelle a_{nm} für eine der Ziffern 0 bis 9. Nun wird eine sogenannte Diagonalzahl b wie folgt gebildet. $b = 0,b_1b_2 \ldots b_n \ldots\ldots$ wobei $b_n = a_{nn} + 1$ wenn a_{nn} kleiner als 9 ist und $b_n = 0$ wenn $a_{nn} = 9$.

Offenbar ist b von allen ursprünglich angeschriebenen Dezimalzahlen a_n verschieden. Auch bei diesem Konstruktionsprinzip werden neue Zahlen durch die Anwendung von Verknüpfungsregeln auf bereits bekannte Zahlen gewonnen. Der Begriff "Konstruktionsprinzip muss im weitesten Sinn verstanden werden. So setzt etwa die Anwendung des Diagonalverfahrens eine genaue Beschreibung der Anordnung der zugrunde gelegten Zahlen voraus. Aber auch andere Beschreibungen sind möglich, für die der Ausdruck "Konstruktions"prinzip eher unangemessen scheint. Fragt man etwa nach der Zahl dr Geburten auf der Erde seit dem Jahre 100.000 vor Christi Geburt bis heute, dann weiß man zwar, dass es sich um eine natürliche Zahl handeln muss, es wird aber kaum jemals möglich sein, sie zu bestimmen. Wir wollen beliebige Zahlbeschreibungen auch als Konstruktionsprinzip bezeichnen.

Man kann neue Zahlen aber auch auf andere Weise einführen. So kann man etwa den Zahlen Farben zuordnen. Neben den bisher verwendeten Zahlen, die man z.B. als schwarze Zahlen bezeichnet, führt man rote Zahlen ein. Die roten Zahlen sollen die Eigenschaft haben, dass ein rotes a stets größer als ein schwarzes a ist, aber stets kleiner als jede schwarze Zahl größer als a. Bei dem Versuch, diese neuen Zahlen auf der Zahlengeraden aufzufinden kommt man in fatale Nähe des Begriffes der "unendlich benachbarten" Punkte. Die Differenz zwischen einem roten und einem schwarzen a ist offenbar eine "unendlich kleine Zahl". Auch für die Naturwissenschaften bringen die roten Zahlen gegenüber den schwarzen kaum einen Gewinn. Sie lassen sich aber widerspruchsfrei in ein System von Zahlen einfügen.

Will man nun von der "Menge aller Zahlen" reden, muss wohl vorher Übereinstimmung über den dieser Menge zugrunde liegenden Zahlbegriff gefunden werden. Wie soll das aber bei den unendlich vielen möglichen Konstruktionsprinzipien überhaupt möglich sein?

Hierzu noch eine weitere Überlegung: Eine Zahl sei dadurch definiert, dass sie vermehrt um 2 genau so groß ist wie vermehrt um 4. Offenbar wird diese Forderung nur durch die "Zahl Unendlich" erfüllt. Noch problematischer erscheint etwa folgende Definition: Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl größer als 5 aber kleiner als 3. Diese Zahl enthält bereits in ihrer Definition einen Widerspruch.

Die Verknüpfung solcher Zahlen mit anderen Zahlen nach den üblichen Rechenregeln wird immer wieder zu Widersprüchen führen. Trotzdem können solche Zahlen hier definiert werden, kann über sie gesprochen werden. Wir lassen im weiteren zu, dass zur "Menge aller Zahlen" auch Zahlen gerechnet werden, deren Definition in sich einen Widerspruch birgt.

Wir wollen nun versuchen über die "Menge aller Zahlen" Aussagen zu treffen, die allgemeine Gültigkeit haben. Dazu reichen aber Urteile über Zahlen hic et nunc nicht aus. Es wäre ja möglich, dass an irgendeinem Ort der Welt zu irgendeinem Zeitpunkt ein denkendes Wesen dem Zahlbegriff einen engeren oder weiteren Inhalt gibt, als wir dies heute tun. Der Zugang zu solch allfälligen Erweiterungen des Zahlbegriffes muss uns heute und hier verschlossen bleiben. Trotzdem erscheint es uns notwendig, die Möglichkeit völlig neuer Zahlbegriffe bei unseren Überlegungen über die "Menge aller Zahlen" zu berücksichtigen. Im Gegensatz zu vielen Autoren werden wir dabei einen Begriff "Menge aller Zahlen" definieren und zwar, wie wir glauben, hinreichend weit.

<u>DIE MENGE ALLER ZAHLEN:</u> Was können wir nun als "Menge aller Zahlen" ansehen? Wer diesen Begriff unkritisch übernimmt setzt sich dem Vorwurf aus "nicht zu wissen, worüber er spricht". Anders ausgedrückt: Um die in diesem Begriff enthaltene Information weiterzugeben, erscheint es dringend geboten, ihn näher zu präzisieren. Dies geschieht üblicherweise nicht!

Ohne diesen Gedanken sofort weiter zu verfolgen, wollen wir uns zunächst der Frage zuwenden, ob es möglich ist, eine gewisse Ordnung in die "Menge alles Zahlen" zu bringen. Um die Frage zu vereinfachen, beschränken wir uns zunächst auf die reellen Zahlen. Hier bietet sich als Ordnung etwa die Anordnung nach ihrer Größe an (Diesem Ordnungsprinzip genügt auch die "unendlich kleine Zahl")

Was den Zugriff zu den reellen Zahlen betrifft, ist mit dieser Anordnung allerdings wenig gewonnen..Bei einer Anordnung der natürlichen Zahlen nach ihrer Größe ist durch das Konstruktionsprinzip der Addition von 1 "der Reihe nach" ein Zugriff auf jede einzelne der natürlichen Zahlen möglich. Ein analoges Zugriffsystem für die reellen Zahlen ist nicht bekannt. Verlangt man den schrittweisen Zugriff zu allen reellen Zahlen, dann ist offenbar die Anordnung der Größe nach keine Hilfe.

Das gleiche gikt übrigens schon für die rationalen Zahlen. Auch hier ist eine abzählbare Anordnung der Größe nach nicht möglich. Es wird ein anderes Ordnungsprinzip angewendet, nämlich zunächst die Anordnung nach der Summe der natürlichen Zahlen im Zähler und im Nenner und innerhalb dieser Anordnung die Ordnung nach der Größe des Zählers. Ebenso lassen sich die Wurzeln algebraischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten unschwer anordnen und daher ebenfalls die Wurzeln algebraischer Gleichungen mir rationalen Koeffizienten. Aber damit sind immer erst Zahlen aus wenigen Konstruktionsprinzipien angeordnet. Wir stellen uns daher die Frage, ob es möglich ist, eine Ordnung in die "menge aller Zahlen" zu bringen, die der Ordnung der natürlichen Zahlen entspricht. Anders ausgedrückt: Wir fragen nach einer abzählbaren Anordnung aller "Zahlen".

Wir haben gesehen, dass bei der abzählbaren Anordnung der natürlichen Zahlen sowie der rationalen Zahlen und der algebraischen Zahlen das jeweilige Konstruktionsprinzip eijne große Rolle gespielt hat. Bedenken wir, dass bei der Einführung neuer Zahlen auch die Reihenfolge der Anwendung neuer Konstruktionsprinzipien eine Rolle spielt, dann wird uns nahe gelegt, dass bei der "Anordnung aller Zahlen" eine "Anordnung aller Konstruktionsprinzipien" hilfreich sein könnte. Wir erinnern daran, dass der Ausgangspunkt unserer Überlegungen die natürlichen Zahlen waren, mit deren Hilfe wir durch die Anwendung von Konstruktionsprinzipien neue Zahlen einführen konnten. Aber auch neue Begriffe, wie z.B. die "Zahl Unendlich" oder die "unendlich kleine Zahl", können bei der Einführung neuer Zahlen Verwendung finden.

Vordringlich erscheint es also , Ordnung in das System der Konstruktionsprinzipien zu bringen. Die hier in Frage kommenden Konstruktionsprinzipien haben eines gemeinsam: Sie lassen sich verbal darstellen (sprachlich formulieren) und sie lassen sich schriftlich, besser gesagt grafisch, darstellen. Das gleiche gilt übrigens auch für die natürlichen Zahlen, die wir ja zumindest bis zu einer gewissen Größe benennen können bzw. die wir grafisch darstellen können. Auch für die erwähnte "Zahl Unendlich" bzw. die "unendlich kleine Zahl" gibt es eine verbale Beschreibung bzw. eine grafische Darstellung.

Wir sehen also, sowohl die netürlichen Zahlen als auch willkürliche Erweiterungen wie die "Zahl Unendlich" oder die "unendlich kleine Zahl" lassen sich verbal bzw. grafisch darstellen. Das gleiche gilt für alle (möglichen) Konstruktionsprizipien, selbst wenn diese, wie weiter oben, einen Widerspruch in sich besitzen. Es sind daher auch alle Zahlen, die in Anwendung beliebiger Konstruktionsprinzipien in beliebiger Reihenfolge auf beliebige vorher bekannte Zahlen beschrieben werden können, grafisch darstellbar.

Wir wollen also den Weg zur Anordnung "aller Zahlen" über eine Anordnung aller Konstruktionsprinzipien bzw. aller verbalen Beschreibungen und grafischen Darstellungen finden. Dazu stellen wir noch einige Überlegungen an.

DIE BILDSCHIRMMITTEILUNG: Unter einer Bildschirmmitteilung wollen wir einen quadratischen Raster aus n^2 Elementarquadraten verstehen. Ein Elementarquadrat habe die Seitenlänge 1/100 mm und sei entweder weiß oder schwarz. Die Bildschirmmitteilungen können abzählbar angeordnet werden und alle möglichen grafischen Darstellungen lassen sich in Form einer Bildschirmmitteilung darstellen.

Eine abzählbare Anordnung ist leicht gefunden. Man ordne etwa jedem weißen Elementarquadrat die Zahl 0 und jedem schwarzen Elementarquadrat die Zahl 1 zu. Jeder Bildschirmmitteilung wird nun eine $(n^2 + 1)$-stellige Zahl zugeordnet deren erste Stelle 1 und deren $(m + 1)$-te Stelle 0 oder 1 ist, je nachdem, ob das m-te Elementarquadrat (zeilenweise gelesen) weiß oder schwarz ist. Die Bildschirmmitteilungen werden nun nach der Größe der ihnen so zugeordneten Zahlen angeordnet.

Die Bildschirmmitteilungen bieten für den Betrachter ein gleiches Bild wie etwa ein beschriebenes Blatt Papier oder ein Fernsehbildschirm. Es ist offensichtlich, dass alle möglichen grafischen Darstellungen - etwa alles, was mit Bleistift auf Papier geschrieben und gezeichnet werden kann - in Form solcher Bildschirmmitteilungen darstellbar sind. Die Tatsache, dass es sich bei diesen Bildschirmmitteilungen um schwarz-weiß Bilder handelt, schränkt die Allgemeinheit nicht entscheidend ein. Man überlegt sich leicht, dass auch farbige Bildschirmmitteilungen abzählbar angeordnet werden können. Dazu reicht es ja aus, jedem Elementarquadrat eine z.B. fünfstellige Zahl zuzuordnen, die der Farbe dieses Elementarquadrates entspricht.

Die physikalische Realisierbarkeit derartiger grafischer Darstellungen spielt, wie wir sehen werden, bei den weiteren Schlussfolgerungen keine Rolle.

Die Menge der so definierten Bildschirmmitteilungen beinhaltet nicht nur eine grafische Darstellung aller natürlicher Zahlen (und zwar beliebiger Größe), sondern sie beinhaltet auch alle möglichen Konstruktionsprinzipien (in beliebiger Reihenfolge) bzw. alle möglichen verbalen Beschreibungen und grafischen Darstellungen. Es müsste also möglich sein, jeder denkbaren Zahl eine Bildschirmmitteilung zuzuordnen, welche diese Zahl und nur diese Zahl eindeutig beschreibt. Gelänge dies, dann wäre aus der abzählbaren Anordnung der Bildschirmmitteilungen eine abzählbare Anordnung aller Zahlen gewonnen.

Bevor wir diesen Gedankengang weiter fortsetzen, noch eine Bemerkung zu den Bildschirmmitteilungen: Verdoppeln wir einfach das durch eine Bildschirmmitteilung dargestellte Bild, dann erhalten wir ein quadratisches Bild der Seitenlänge 2n statt n. Sofern nun die absolute Größe der grafischen Darstellung keine Rolle spielt, wie dies etwa in der Regel für alle schriftlichen Arbeiten und Aufsätze gilt, ist die Bedeutung der Bildschirmmitteilung doppelter Größe genau die selbe wie die Bedeutung der Bildschirmmitteilung einfacher Größe. Insbesondere würde etwa durch beide Bildschirmmitteilungen die selbe Zahl beschrieben werden. Im Regelfall - wenn also die absolute Größe der grafischen Darstellung keine Rolle spielt - wird jede Zahl in der Anordnung aller Bildschirmmitteilungen unendlich oft eine Bildschirmmitteilung finden, die sie eindeutig beschreibt. Für unsere Überlegungen entscheidend erscheint uns aber, dass zu jeder Zahl *mindestens* eine Bildschirmmitteilung gefunden werden kann, die dieser Zahl eindeutig zugeordnet ist. Mit anderen Worten: In unserer Anordnung der Bildschirmmitteilungen ist für jede grafisch darstellbare Zahl mindestens ein Platz reserviert, der nur dieser Zahl zukommt.

<u>DAS RAUM-ZEIT-ELEMENT:</u> Wir haben von allen grafisch darstellbaren Zahlen gesprochen und wir haben diesen Zahlen Bildschirmmitteilungen zugeordnet. Dabei haben wir offenbar davon abgesehen, dass Bildschirmmitteilungen grundsätzlich Mitteilungen an denkende Subjekte sind. Sehen wir von der Einschränkung der durch Bildschirmmitteilungen darzustellenden Dinge auf Zahlen ab, dann können wir die Zuordnung von Bildschirmmitteilungen auf eine Zuordnung zu allen möglichen Denkobjekten eines denkenden Subjektes erweitern.

Der Sinn einer Mitteilung, etwa welche Zahl durch eine Mitteilung beschrieben wird, wurde bisher als eindeutig betrachtet. Dies erscheint aber nicht zulässig. Zum einen hängt der Sinn einer schriftlichen Mitteilung sicher von der verwendeten Sprache ab. Je nachdem, welche Sprache eine die Bildschirmmitteilung betrachtende Person spricht, kann diese Mitteilung verschiedene Bedeutung für den Betrachter haben. Aber auch der Wissensstand des Betrachters kann eine Rolle spielen. Der Sinn einer schriftlichen Mitteilung wird sichr vom sogenannten Vorwissen des Betrachters abhängen. Ein und die selbe Bildschirmmitteilung kann daher nicht nur für verschiedene Personen unterschiedliche Bedeutung haben, sondern auch für ein und die selbe Person, wenn diese die Bildschirmmitteilung in verschiedenen Zeitpunkten zu Gesicht bekommt.

Wir erinnern daran, dass die Sprache ursprünglich zur Informationsübermittlung von einer Person zu einer anderen diente, vielleicht auch von einer Person zur Erinnerung für sich selbst. Jedenfalls erscheint es uns unzulässig, vom Sinn einer Mitteilung losgelöst von einem Betrachter bzw. Leser dieser Mitteilung zu sprechen. Dazu noch folgende Überlegung: Definitionen, Erklärungen setzen ebenso wie Urteile a priori im Kantschen Sinn Übereinstimmung hinsichtlich der verwendeten Worte, der verwendeten Sprache voraus. Diese aber sind für jedes Denksubjekt irgendeinmal Gegenstand der Erfahrung gewesen, deren Sinn, deren Bedeutung "erlernt" werden musste. Worte und Sprache sind also nur für mögliche Denksubjekte sinnvoll. Die weitgehende Übereinstimmung über Worte bzw. Sprache, eine Folge der gleichartigen Lernvorgänge für verschiedene Denksubjekte hat dazu geführt, dass wir uns angewöhnt haben, vom Sinn von Worten und Sprache unabhängig von konkreten Denksubjekten zu reden. Übereinstimmende Meinung über den Sinn wird unausgesprochen vorausgesetzt.

Wir haben eine Zuordnung zwischen den Elementen der Menge aller Bildschirmmitteilungen und der Menge aller grafisch darstellbaren Zahlen betrachtet. Etwas allgemeiner erhalten wir eine Zuordnung zwischen der Menge aller Bildschirmmitteilungen und der Menge aller Denkobjekte. Eine solche Zuordnung von Bildschirmmitteilungen zu Denkobjekten darf aber nicht ohne Bezugnahme auf ein diese Zuordnung vornehmendes Denksubjekt vorgenommen werden. Wir müssen daher neben allen möglichen Mildschirmmitteilungen und allen möglichen Denkobjekten auch alle möglichen Denksubjekte in die Überlegungen einbeziehen.

Ein Ziel unserer Überlegungen war es, Ordnung in die Menge aller Zahlen zu bringen. Dies sollte mit Hilfe der Anordnung der Bildschirmmitteilungen gelingen. Auf

Grund der weiteren Überlegungen müssen wir die Aufgabe erweitern und Ordnung in die Menge aller Denkobjekte bringen.

Um nun die erforderliche Beziehung zu den Denkobjekten herzustellen, erscheint es notwendig auch alle möglichen Denksubjekte in eine Anordnung zu bringen. Dies ist aber unschwer möglich. Zunächst überlegen wir , dass jedes Denksubjekt für den Vorgang des Denkens eine bestimmte Zeit benötigt. Außerdem erfordert der Vorgang des Denkens einen bestimmten Raum, den der Körper des Denksubjektes einnimmt. Wählen wir nun ein Raumelement aus dem Körper des Denksubjektes und ein Zeitelement aus dem Zeitraum, in dem das Denken stattfindet, dann wird durch eine Kombination des Raumelementes mit dem Zeitelement der Denkvorgang eindeutig erfasst.

Diese Raumelemente und diese Zeitelemente fassen wir nun in "Raum-Zeit-Elemente" zusammen. Diese lassen sich leicht abzählbar anordnen. Man wählt etwa ein räumliches dreidimensionales Koordinatensystem in unserem Weltall und teilt dieses Weltall in Würfel von der Seitenlänge 1/100 mm. Diese Raumelemente sind offenbar abzählbar anzuordnen. Weiters teilen wir die Zeitachse in Zeitabschnitte von der Länge 1/100 sek. und beginnen etwa mit dem Urknall. Diese Zeitelemente können nach ihrer Lage auf der Zeitachse abzählbar angeordnet werden. Eine Kombination der so angeordneten Raumelemente mit den so angeordneten Zeitelementen führt nun wie gewünscht zu einer abzählbaren Anordnung aller Raum-Zeit-Elemente entsprechend sie eindeutig kennzeichnenden Ordnungszahlen.

DIE UNIVERSALANORDNUNG: Was bedeutet nun eine Kombination einer Bildschirmmitteilung mit einem Raum-Zeit-Element? Diese Kombination soll jenen Sinn symbolisieren, den die in Rede stehende Bildschirmmitteilung für ein durch das Raumelement gekennzeichnete Denksubjekt in dem durch das Zeitelement bestimmten Zeitintervall bedeutet. Dabei handelt es sich natürlich nicht um aktuelle sondern stets um potentielle Denkvorgänge. Es geht also darum, welche Aussage ein bestimmtes Denksubjekt in einem bestimmten Zeitpunkt über eine bestimmte Bildschirmmitteilung macht oder machen würde.

Kehren wir zu unseren Zahlen zurück. Das Denksubjekt hat oder hatte also zu entscheiden, ob in einem bestimmten Zeitpunkt durch eine Bildschirmmitteilung eine Zahl eindeutig beschrieben wird. Allgemeiner lautet die Frage, ob für ein bestimmtes

Denksubjekt in einem bestimmten Zeitpunkt durch eine bestimmte Bildschirmmitteilung ein bestimmtes Denkobjekt eindeutig beschrieben wird.

Wir weisen darauf hin, dass in unseren Überlegungen die Frage ob die Aussage des Denksubjektes richtig oder falsch ist, keine Rolle spielt. Es sind also durchaus auch widersprüchliche Aussagen zulässig. "Verantwortlich" für die Aussagen ist lediglich das jeweilige Denksubjekt. Darüber hinaus kann grundsätzlich eine Klasse von in sich widersprüchlichen Denkobjekten gebildet werden.

Wir wollen nun eine Zuordnung der Kombination der Menge aller Bildschirmmitteilungen und der Menge aller Raum-Zeit-Elemente zur Menge aller Bildschirmmitteilungen allein vornehmen. Dazu betrachten wir nur Bildschirmmitteilungen mit geradzahliger Seitenlänge n, deren obere Hälfte eine Bildschirmmitteilung im bisherigen Sinn enthält, also eine Bildschirmmitteilung, deren Sinn für ein Denksubjekt zur Diskussion steht und deren untere Hälfte jene Ordnungszahl enthält, die das Raum-Zeit-Element, also den möglichen Denkvorgang, eindeutig beschreibt.

Die abzählbare Anordnung der Menge dieser Bildschirmmiteilungen bezeichnen wir als UNIVERSALANORDNUNG.

Wir ordnen nun einem Element dieser Menge genau dann ein Denkobjekt zu, wenn ein dem Raum-Zeit-Element entsprechendes Denksubjekt im entsprechenden Zeitraum bereit ist - oder für den Fall, dass er die Bildschirmmitteilung tatsächlich liest, bereit wäre - festzustellen, dass durch die betreffende Bildschirmmitteilung dieses Denkobjekt eindeutig beschrieben wird.

Der Ausdruck "Universalanordnung" lässt sich damit begründen, dass durch sie wirklich alle möglichen Denkobjekte abzählbar angeordnet werden können. Tatsächlich ist es ja unmöglich, an Denkobjekte außerhalb dieser Anordnung widerspruchsfrei zu denken. Dass es sich hierbei stets um durch Bildschirmmitteilungen beschriebene Denkobjekte handelt, stellt keinen Einschränkung dar. Stellt irgendeine Person etwa fest, sie denke in einem bestimmten Zeitpunkt T an ein Objekt, das für sie durch keine Bildschirmmitteilung beschreibbar ist, so genügt es, zunächst folgende Bildschirmmitteilung zu bilden: "Das Objekt, an welches ich im Zeitpunkt T gedacht habe". Diese Bildschirmmitteilung, ergänzt durch die Nummer eines Raum-Zeit-Elementes, welches die betreffende Person in einem Zeitpunkt T + t beschreibt, ist nun offenbar dem in Rede stehenden Denkobjekt zugeordnet. Im Zeitpunkt T + t muss ja die betreffende Person zugeben, dass sie im Zeitpunkt T an das betreffende Denkobjekt gedacht hat, wie dies in der Bildschirmmitteilung zum Ausdruck kommt, oder sie widerspricht sich selbst.

Dass jedem einzelnen Denksubjekt der Zugang grundsätzlich nicht zu allen Denkobjekte möglich ist, kann leicht eingesehen werden. Zum einen bringt es die endliche Lebensdauer von Denksubjekten mit sich, dass Bildschirmmitteilungen nur bis zu einer gewissen Größe vollständig erfasst werden können. Potentielle Denkobjekte, zu deren Beschreibung zu große Bildschirmmitteilungen nötig wären, entziehen sich dem tatsächlichen Zugriff. Zum anderen ist es einem Denksubjekt heute und hier nicht möglich festzustellen, wie andere Denksubjekte zu irgendeiner Zeit bestimmte Bildschirmmitteilungen beurteilen bzw. beurteilen würden. Die Leistung der Universalanordnung besteht also darin, dass sie für alles - worüber gesprochen werden kann, woran gedacht werden kann - mindestens einen Platz reserviert.

Die Universalanordnung reserviert also zwar für alle möglichen Denkobjekte aller möglichen Denksubjekte Plätze (im Regelfall sogar unendlich viele für jedes einzelne Denkobjekt), sie kann aber zu keinem Zeitpunkt von irgend einem Denksubjekt zur Gänze "gelesen" werden. Sie gleicht einer Anordnung von unendlich vielen Schubladen, von denen im Laufe eines Lebens eines Denksubjektes nur endlich viele geöffnet werden können.

<u>NOCHMALS DIE MENGE ALLER ZAHLEN:</u> Denkobjekte können zu Mengen zusammengefasst werden. Damit jemand, der von einer Menge spricht, weiß wovon er spricht, müssen natürlich Kriterien angegeben werden, wonach die Zugehörigkeit zu dieser Menge zu beurteilen ist. Es ist aber nicht sehr sinnvoll zu fordern, dass ein Zugang zu den einzelnen Elementen auch tatsächlich möglich ist. Wir erinnern daran, dass Denkobjekte existieren können, deren zugeordnete Bildschirmmitteilungen sich ihrer Größe wegen der tatsächlichen Beurteilung durch ein Denkobjekt entziehen.

Wir definieren nun den Begriff "Menge aller Zahlen". Die Menge bestehe aus allen Denkobjekten, die irgendein Denksubjekt in irgendeinem Zeitpunkt durch irgendeine Bildschirmmitteilung als Zahl eindeutig beschrieben bezeichnet bzw. zu bezeichnen bereit wäre. Manchen Denksubjekten wird diese Definition als zu weit erscheinen doch uns kommt es nur darauf an, dass sie nicht zu eng ist.

In dieser Definition haben wir die beliebigen Denksubjekte und die beliebigen Zeitpunkte aus den weiter oben angeführten Gründen einbezogen. Sie führt natürlich dazu, dass alle etwa irrtümlich oder absichtlich fehlerhaft als Zahl bezeichneten Denkobjekte in die hier definierte Menge einbezogen werden. Ist ein Leser der Auffassung, dass durch von ihm gelesene Bildschirmmitteilungen allein alle möglichen Denkobjekte, also auch alle möglichen Denkobjekte anderer Denksubjekte, eindeutig beschrieben werden können, dann könnte er auf die Einführung der Raum-Zeit-Elemente verzichten. Da für uns aber die Frage der Anordenbarkeit der Denkobjekte im Vordergrund steht, stört die Einbeziehung der Raum-Zeit-Elemente nicht.

Es sei nochmals darauf verwiesen, dass infolge der Unbeschränktheit der zugrundegelegten Bildschirmmitteilungen eine Entscheidung darüber, ob durch eine bestimmte Bildschirmmitteilung eine Zahl eindeutig beschrieben wird, nicht immer getroffen werden kann, auch ohne dass das Urteil anderer Denksubjekte dabei eine Rolle spielt.

Die von uns hier definierte Menge aller Zahlen ist offenbar eine Untermenge der Menge jener Denkobjekte, die Gegenstand der Universalanordnung sind. Durch die abzählbare Universalanordnung werden die von ihr erfassten Denkobjekte abzählbar angeordnet. Daraus folgt, dass sich auch die von uns definierte Menge aller Zahlen abzählbar anordnen lässt.

Es liegt nahe, dieses Ergebnis einem der bekannte Beweise der Überabzählbarkeit des Kontinuums gegenüberzustellen.

Wir gehen dabei von der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 un 1 und dem Beweis der Überabzählbarkeit nach Cantor aus. Die Cantorsche Diagonalzahl heben wir im Abschnitt "Weitere Konstruktionsprinzipien" weiter oben beschrieben. Wir behaupten nun, auch für jede Cantorsche Diagonalzahl ist in unserer Universalanordnung ein Platz reserviert. Wir können diesen Beweis allerdings nur dann führen, wenn es irgendeine Person gibt (gegeben hat, geben wird), die behauptet, mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 beweisen zu können (z.B. Cantor selbst). Dazu beschreiben wir durch eine Bildschirmmitteilung zunächst die Universalanordnung und anschließend eine mit Hilfe dieser Anordnung konstruierte Cantorsche Diagonalzahl. Diese Bildschirmmitteilung legen wir der Person, welche die Überabzählbarkeit behauptet, vor. Die Person muss die Frage, ob durch diese Cantorsche Diagonalzahl eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 definiert ist, bejahen. Damit erhält diese Zahl aber einen Platz in der Anordnung aller Zahlen, wie wir sie oben definiert haben.

Da nach Meinung des Kritikers durch die unter Zugrundelegung der Universalanordnung gebildete Diagonalzahl tatsächlich eine Zahl zwischen 0 und 1 definiert ist,

ist für sie auch ein Platz in der Universalanordnung reserviert. Sie stehe dort an n-ter Stelle und ihre n-te Dezimalstelle müsste ihrer Definition nach ungleich ihrer n-ten Dezimalstelle sein. Die Diagonalzahl des Kritikers gehört zur Klasse der in sich widersprüchlichen Denkobjekte (Seite 15), aber sie hat ihren sicheren Platz (ihre sicheren Plätze) in der Universalanordnung.

Grundsätzlich unterscheidet sich hier die Cantorsche Diagonalzahl nicht von anderen Zahlen, in deren Definition ein Widerspruch steckt, wie z.B. die kleinste natürliche Zahl, größer als 5, aber kleiner als 3 (vgl. S. 9).

In gleicher Weise verfährt man bei anderen Überabzählbarkeitsbeweisen, die in der Konstruktion eines angeblich in der bisher abzählbar angeordneten Menge von Elementen nicht enthaltenen Elementes bestehen. Immer zeigt sich, dass in der Anordnung genügend Platz - genügend Schubladen - vorhanden sind. Auch für jenes Element, für welches in der abzählbaren Anordnung angeblich kein Platz vorhanden ist, gibt es eine Definition und ein Denksubjekt (den Kritiker), das irgendeinmal behauptet, durch diese schriftlich darstellbare Definition werde ein Element der Menge eindeutig beschrieben. Damit gibt es einen Platz in der Anordnung.

Wir wollen auf diese Gegenüberstellung der abzählbaren Universalanordnung und der Überabzählbarkeit des Kontinuums noch einmal näher eingehen. Dazu führen wir eine "Summe zweier BSM" ein. Gegeben seien die beiden Bildschirmmitteilungen BSM_1 und BSM_2. Unter der BSM_{1+2} wollen wir jene Bildschirmmitteilung verstehen, die aus den hintereinandergeschriebenen Bildschirmmitteilungen BSM_1 und BSM_2 besteht. Die beiden Bildschirmmitteilungen sollen dabei so hintereinandergeschrieben werden, dass zuerst die BSM_1 und dann die BSM_2 gelesen wird.

Weiters erinnern wir daran, dass eine Bildschirmmitteilung für sich allein gelesen in der Universalanordnung nicht vorkommt. In dieser Universalanordnung scheinen nur Bildschirmmitteilungen auf, die neben einer grafischen Darstellung im der oberen Hälfte ein genau bezeichnetes Raum-Zeit-Element in der unteren Hälfte besitzen.

Will man eine Diagonalzahl in einer Bildschirmmitteilung ausdrücken, dann muss man zunächst die Regeln für die Anordnung der zeilenweise geschriebenen Zahlen vollständig angeben und anschließend das Bildungsgesetz der Diagonalzahl auf Grund dieser zeilenweisen Anordnung.

Wir wählen nun als Regel für die Anordnung der zeilenweise geschriebenen Zahlen die aus der Universalanordnung gewonnene Anordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Diese Regel kann in einer Bildschirmmitteilung, nennen wir sie

BSM_1, ausgedrückt werden. Das von uns gewählte Bildungsgesetz der Diagonalzahl (Seite 8) schreiben wir in Form einer Bildschirmmitteilung, die wir BSM_2 nennen, an. Die Bildschirmmitteilung BSM_{1+2} beschreibt nun unsere Diagonalzahl, wie wir sie auf Seite 8 nach Cantor gebildet haben. Setzen wir nun diese BSM_{1+2} in die obere Hälfte einer Bildschirmmitteilung und ein Raum-Zeit-Element, das den Kritiker der Abzählbarkeit in einem Zeitpunkt, in dem er diese Kritik aufrecht hält, bezeichnet, in die untere Hälfte dieser Bildschirmmitteilung und bezeichnen sie mit BSM, dann muss der Kritiker die Frage, ob die obere Hälfte von BSM eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 eindeutig beschreibt, in dem betreffenden Zeitpunkt bejahen.

Damit hat die Bildschirmmitteilung BSM einen Platz in der Universalanordnung. Dieser Platz liege an der n-ten Stelle. Man überlegt sich nun leicht, dass für die n-te Dezimalstelle b_n der Diagonalzahl auf Grund ihrer Definition sowohl $b_n = a_{nn}$ als auch $b_n \neq a_{nn}$ gelten muss. Die vom Kritiker angestrebte Beweisführung ist daher inkonsistent und wir bezeichnen den von ihm angestrebten Beweis der Überabzählbarkeit als misslungen.

EXISTENZ: In der Mathematik wird oft die Frage gestellt, ob eine Zahl mit bestimmten Eigenschaften existiert oder nicht. Vielfach werden Existenzbeweise früher als die entsprechende Zahl selbst gefunden. Die Frage nach der Existenz ist aber nicht nur auf den Bereich der Mathematik beschränkt. Oft wird der Begriff "Existenz" so gebraucht, als gäbe es über seinen Inhalt allgemeine Übereinstimmung. In den Naturwissenschaften ist man manchmal zufrieden, wenn das Ergebnis einer Theorie mit den Experimenten, mit der Beobachtung übereinstimmt. Inwieweit die dabei verwendeten Denkobjekte tatsächlich existieren, ist dabei von sekundärer Bedeutung.

So wie wir weiter oben die Menge aller Zahlen so definiert haben, dass jedenfalls von keiner in ihr nicht enthaltenen Zahl sinnvoll gesprochen werden kann, wollen wir auch die Menge der existierenden Denkobjekte hinreichend umfangreich definieren.

Wir können uns dabei auf Denkobjekte aus der Universalanordnung beschränken, denn von anderen Denkobjekten kann ja niemals sinnvoll gesprochen werden. Wir bezeichnen nun alle jene Denkobjekte als existent, die von irgendeinem Denksubjekt in irgendeinem Zeitpunkt als durch irgendeine Bildschirmmitteilung eindeutig beschrieben angesehen wurden.

Diese Definition wird sicher für manchen Leser als viel zu weitgehend bezeichnet werden. Es genügt uns aber zu zeigen, dass außerhalb der so definierten existierenden Denkobjekte mit Sicherheit nicht von Existenz widerspruchsfrei gesprochen werden kann. Die Universalanordnung berücksichtigt ja alle Denkobjekte, die überhaupt jemals möglich waren, möglich sind oder möglich sein werden. Ein darüber Hinausgehen wäre ein Widerspruch in sich.

Mit anderen Worten: Es kann in keiner Weise etwas existieren (existiert haben, in Zukunft existieren) dem nicht in der Universalanordnung ein Platz reserviert wäre.

Auf den ersten Blick erscheint durch diese Definition der Existenz ein großer Teil des Innenlebens zu kurz zu kommen. Wie sollte es möglich sein, den zweifellos existierenden emotionalen Teil des Menschen oder gar das Unbewusste in einer auf Bildschirmmitteilungen beschränkten Universalanordnung einzufangen? Hier muss daran erinnert werden, dass in der Universalanordnung lediglich von der für ein Denksubjekt eindeutigen Beschreibung eines Denkobjektes durch eine Bildschirmmitteilung die Rede ist. Natürlich ist es im allgemeinen unmöglich, den gesamten Informationsgehalt etwa einer bestimmten Emotion in einer Bildschirmmitteilung wiederzugeben Dies liegt wohl an der Komplexität und damit auch an der Einmaligkeit der meisten Emotionen. Um eine solche Emotion eindeutig zu beschreiben, ist es aber gar nicht notwendig, ihren Informationsgehalt wiederzugeben. Es genügt ja, di Person, welche die Emotion empfindet, und den Zeitpunkt der Empfindung so wie die Art der Empfindung eindeutig zu beschreiben, und dies ist zweifellos durch eine Bildschirmmitteilung möglich. Man könnte etwa die eine Emotion empfindende Person als eine Art Messgerät für diese Emotion betrachten und die Emotion selbst durch den Zustand dieses Messgerätes beschreiben. Eine Ungenauigkeit dieses Messgerätes muss dabei nicht befürchtet werden, da eine solche Emotion ja nicht mehr als Teil des "Gesamtzustandes" der Person ist. Das Herauslösen dieses Teiles aus dem Gesamtzustand geschieht eben mit Hilfe der Sprache.

Die durch die Universalanordnung erfassten Denkobjekte sind ihrer Definition nach alles Denkbare. Der Versuch, diese Denkobjekte in einer Menge zusammenzufassen und sie dann sozusagen von außen zu betrachten, gleicht dem Versuch Münchhausens, sich selbst an seinem Zopf aus dem Sumpf zu ziehen.

Es ist sinnlos, das Wort vom Sprecher und von dem, an den es gerichtet ist, oder den Gedanken vom Denksubjekt trennen zu wollen.

WAS IST DIE WELT?: Hier handelt es sich offenbar um einen sehr komplexen Begriff. Wir sind gewohnt, Begriffe von uns als Person abzulösen und ihnen Selbständigkeit zuzubilligen. Es wäre nun naheliegend zu fordern, dass nur jenen Begriffen Selbständigkeit zukommt, die zu allen Zeiten und für alle Denksubjekte den gleichen Sinn ergeben. Diese Forderung erscheint dem Autor als zu einschränkend.

Wir wollen so wie weiter oben für die Begriffe "Zahl" und "Existenz" nunmehr eine Definition des Begriffes "Welt" geben, die wir jedenfalls als hinreichend weit erachten.

Als "Welt" bezeichnen wir die Gesamtheit aller Denkobjekte, die durch die Universalanordnung erfasst werden.

Eine so definierte Welt ist natürlich wegen der Unbegrenztheit der in ihre Definition eingehenden Bildschirmmitteilungen und wegen der notwendigen Bezugnahme auf alle möglichen Denksubjekte niemals in allen Einzelheiten erfassbar. So wie bei den Begriffen Zahl und Existenz geht es uns aber auch hier wieder darum, dass kein Teil der Welt vergessen wurde. Dies ist aber leicht zu sehen. Jede Behauptung, die obige Definition der Welt sei zu eng, erfordert ja ein Sprechen über etwas außerhalb dieser Gesamtheit, also ein Sprechen über Denkobjekte, die in der Universalanordnung nicht erfasst sind. Dies ist aber nach Definition der Universalanordnung ein Widerspruch in sich.

Das steht natürlich nicht im Widerspruch damit, dass in der Welt, wie wir sie definiert haben, Denkobjekte auftreten, die in sich widerspruchsvoll sind. So ist die kleinste natürliche Zahl, größer als 5 und kleiner als 3 (vgl. Seite 9), zweifellos ein mögliches Objekt unseres Denkens, obwohl dieses Denkobjekt einen Widerspruch beinhaltet. Desgleichen kann man über Denkobjekte sprechen, die nicht in der von uns definierten Welt enthalten sind. Gerade durch diese Möglichkeit, über sie sprechen zu können, werden sie nach unserer Definition Teil der Welt. Die Behauptung, durch solche Denkobjekte werde die Unvollständigkeit des Begriffes "Welt" nach der obigen Definition *bewiesen*, enthält daher einen Widerspruch.

Halten wir also fest: Unsere Definition der "Welt" schließt Widersprüche ein. Widersprüche sind für uns nur dort von Bedeutung, wo sie in einer Behauptung bzw. in einem Beweis auftreten. Widersprüchliche Behauptungen bezeichnen wir als falsch, und Beweise, in denen Widersprüche auftreten, bezeichnen wir als misslungen. Obwohl wir also etwa der Diagonalzahl, angewendet auf die Universalanordnung, durchaus Existenz zubilligen, müssen wir den Versuch, durch sie die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zu beweisen, als misslungen erachten.

Der wesentlichste Inhalt der vorstehenden Ausführungen kann im folgenden gesehen werden: Die Sprach wurde als Möglichkeit der Informationsübermittlung geschaffen. Eine solche Mitteilung ist nur sinnvoll im Zusammenhang mit einer Person, an die diese Mitteilung gerichtet ist. Eine solche Person muss zumindestpotentiell vorhanden sein. Die Verwendung von Worten in Mitteilungen ist nur insoweit sinnvoll, als sichergestellt ist, dass der Empfänger einer Mitteilung diese Worte im selben Sinn versteht wie der Mitteilende. Ein Personenunabhängiges Kriterium hierfür ist nicht bekannt. Die Verwendung der Sprache folgt gewissen Spielregeln. Nur im Rahmen solcher Spielregeln darf Sprache angewendet werden.

In der Universalanordnung werden auch Denkobjekte beschrieben, die in sich widerspruchsvoll sind. Dies liegt in der Natur unseres Denkens. Es konnte bis jetzt auch kein Nachweis der Widerspruchsfreiheit für alle wissenschaftlichen Systeme erbracht werden. Für den religiösen Bereich ist etwa auf Tertullians "credere quia absurda" hinzuweisen. Widersprüche sind formulierbar und als solche existent. Wir definieren daher

DIE WELT IST ALLES, WORÜBER GESPROCHEN WERDEN KANN

Auch wenn wir in Platons Höhle gefangen nur die Schatten der Wirklichkeit wahrnehmen können, so können wir doch über Denkobjekte außerhalb der Höhle sprechen. Insoweit, aber auch nur insoweit, können Denkobjekte existieren. Hier liegen die Grenzen unserer Welt.

<u>SCHLUSSBEMERKUNGEN:</u> Die Universalanordnung erhebt den Anspruch, die Welt zu umfassen. Sie beansprucht also eine gewisse Gültigkeit nicht nur hier und heute sondern überall und jederzeit, also für alle möglichen Denksubjekte. Warum gründet sie dann so entscheidend auf Bildschirmmitteilungen? Zwar haben wir es vermieden, uns bei den Bildschirmmitteilungen auf hier und heute lesbare und verständliche Schriften zu beschränken, doch bestand die wichtigste Eigenschaft einer Bildschirmmitteilung zweifellos in ihrer optischen Lesbarkeit.

Die zentrale Bedeutung der Bildschirmmitteilungen beruht auf fundamentalen Eigenschaften menschlicher Erkenntnis. Wie kommt es zu Erkenntnissen und wie zu "wahren Aussagen"? Ausgangspunkt sind unsere Sinnesorgane, die ein Abbild der Außenwelt in unser Inneres vermitteln. Dieser Satz ist durchaus auch physikalisch-räumlich zu verstehen. Ein (verhältnismäßig sehr kleiner) Teil dieser Abbildungwird uns "bewusst". Sowohl die bewussten als auch die unbewussten Bilder der Außenwelt in uns können der "Bewältigung des Lebens" dienen. Es hat sich offenbar als zweckmäßig erwiesen, über die Abbildungen der Außenwelt in uns "Aussagen" zu machen, d.h. etwas "aus dem Inneren hinaus" zu sagen uhnd dabei unter anderem zwischen wahren, falschen und sonstigen Aussagen zu unterscheiden.

Wir haben es also zunächst mit einer Abbildung der Außenwelt auf unser Inneres zu tun und anschließend mit einer von uns bewusst gesteuerten Abbildung dieser Abbildung nach außen. Diese Abbildungen nach außen, die Aussagen, können offenbar in Form von Bildschirmmitteilungen formuliert werden.

Analoge Überlegungen können natürlich für gänzlich anders geartete "Denksubjekte" mit gänzlich anders gearteten "Mitteilungen" angestellt werden. Etwa für andersartige Organismen in anderen Sternensystemen. Voraussetzung ist lediglich, dass auch dort "Abbildungen" in beide Richtungen auftreten, die aus (universell gültigen) "physikalischen" Gründen gequantelt und daher abzählbar sind.

Die Universalanordnung enthält alle möglichen Aussagen (aller möglichen Denksubjekte). Da die die Außenwelt in unseren Überlegungen auch das (physische) Denksubjekt selbst als mögliches Objekt enthält, sind natürlich "Aussagen" auch ohne zugrunde liegende "äußere" Sinneseindrücke möglich. Da alle möglichen Aussagen auch alles Denkbare enthalten, wäre es ein Widerspruch, von etwas außerhalb der Universalanordnung zu sprechen. Derartige Aussagen müssen von uns als falsch bezeichnet werden. Es kann daher auch nichts außerhalb der Universalanordnung "existieren". Alle möglichen (auch alle falschen) Aussagen über "Existenz" sind in der Universalanordnung enthalten.

Für unsere Überlegungen hier und heute reicht die Universalanordnung also jedenfalls aus. Man sollte sich aber immer bewusst sein, dass nach Sigmund Freud: "unsere Organisation, d.h. unser seelischer Apparat, eben im Bemühen um die Erkundung der Außenwelt entwickelt worden ist, also ein Stück Zweckmäßigkeit in seiner Struktur realisiert haben muss, dass er selbst ein Bestandteil jener Welt ist, die wir erforschen sollen, und dass er solche Erforschung sehr wohl zulässt, dass die Aufgabe der Wissenschaft voll umschrieben ist, wenn wir sie darauf einschränken zu zeigen, wie uns die Welt infolge der Eigenart unserer Organisation erscheinen muss, dass die endlichen Resultate der Wissenschaft gerade wegen der Art ihrer Erwerbung nicht nur durch unsere Organisation bedingt sind, sondern auch durch das, was auf diese Organisation gewirkt hat, und endlich, dass das Problem einer Weltbeschaffenheit ohne Rücksicht auf unseren wahrnehmenden seelischen Apparat eine leere Abstraktion ist, ohne praktisches Interesse. Nein unsere Wissenschaft ist keine Illusion. Eine Illusion aber wäre es zu glauben, dass wir anderswoher bekommen könnten, was sie uns nicht geben kann":

Dennoch wäre ein Weltbild unangemessen, wenn es auf uns zugängliche absolute Wahrheiten beschränkt bliebe. Es muss zumindest dahingestellt bleiben, ob der Begriff von absoluter Wahrheit, die nicht nur hier und heute für ein Denksubjekt, sondern immer und überall für alle Denksubjekte, eben absolut gilt, sinnvoll ist. Eine RELATIVIERUNG DES WAHRHEITSBEGRIFFES erscheint uns insbesondere dann erforderlich, wenn wir das Problem der Mitteilung einer Wahrheit von einem Denksubjekt an ein anderes betrachten. Nicht nur das unterschiedliche "Vorwissen" an sich erschwert oft die Wahrheitsübermittlung. Oft scheint es "schon schwierig genug, überhaupt zu bemerken, dass der andere eine eigene, von uns selber verschiedene Sprache redet. Wenn *er* von Vater, Mutter, Baum oder Haus, Kirche oder Schule, Bruder oder Schwester, Lehrer oder Meister,, Gott oder Teufel, Madonna oder Engel, Tier oder Pflanze, Stern oder Gebirge, Fluss oder Wald spricht, so glauben wir zunächst von Dingen und Gegebenheiten zu hören, die wir bereits hinlänglich kennen. Irgendwie sind wir überzeugt, dass der andere in den uns bekannten Wörtern ebenfalls nur das uns bekannte sagen und meinen könne. In Wirklichkeit aber verbinden sich mit allen Begriffen im Munde des anderen Erfahrungen, Erinnerungen und Assoziationen, die unvertauschbar *seiner* Biographie zugehören... " (Drewermann, Grimms Märchen, Tiefenpsychologisch gedeutet).

Dennoch haben uns die Wissenschaft "so herrlich weit gebracht". Die Relativität der Wahrheit ist demnach offenbar kein Hindernis für einen wohl definierten Fortschritt.

ANHANG: FRAGEN ZUM NACHDENKEN

- Was ist eine Zahl?

- Gegeben sei ein Setzkasten mit den üblichen Zeichen (Buchstaben, Ziffern, Plus-Minuszeichen usw.) sowie ein Raster mit 35 Zeilen zu 60 Plätzen für je ein Zeichen (etwa eine Schreibmaschinenseite). Welches ist die größte natürliche Zahl, die auf diesem Raster mit Hilfe der Zeichen dargestellt werden kann.

- Was ist Wahrheit? D.h. welche Voraussetzungen müssen gegeben sein, dass auch nur zwei Personen von ein und demselben Satz "zu Recht", also oh ne Missverständnisse (!) sagen können, er sei wahr?

DIE ZITATE AUF SEITE 2 DIENEN EBENSO WIE DIE FRAGEN ZUM NACHDENKEN AUF SEITE 22 DER EINSTIMMUNG AUF DIE HIER BEHANDELTE PROBLEMATIK. SIE SOLLEN DAS VERSTÄNDNIS FÜR DEN UNTERSCHIED ZWISCHEN DER UNIVERSALANORDNUNG UND EINER UNIVERSALBIBLIOTHEK FÖRDERN. ALS UNIVERSALBIBLIOTHEK KÖNNTEN WIR DIE GESAMTHEIT ALLER BILDSCHIRMMITTEILUNGEN ANSEHEN. DURCH SIE WÄRE ABER NICHT VIEL GEWONNEN, DA IN IHR LEDIGLICH ZEICHEN, NICHT ABER DENKOBJEKTE ANGEORDNET WERDEN. IN DER UNIVERSALANORDNUNG WERDEN DEMGEGENÜBER ALLE MÖGLICHEN DENKSUBJEKTE ANGEORDNET. SPRACH SPIELT DABEI NUR INSOWEIT EINE ROLLE, ALS SIE DEM JEWEILIGEN DENKSUBJEKT IM JEWEILIGEN ZEITPUNKT ZUR EINDEUTIGEN BESCHREIBUNG DES JEWEILIGEN DENKOBJEKTES DIENT.

DAZU NOCH ENMAL DAS BEISPIEL DES BEWEISES DER ÜBERABZÄHLBARKEIT DER REELLEN ZAHLEN, MIT HILFE EINER CANTORSCHEN DIAGONALZAHL. DIE WIDERLEGUNG DIESES BEWEISES WIRD NICHT DURCH DIE ANGABE EINES PLATZES AN SICH FÜR DIE DIAGONALZAHL IN DER UNIVERSALANORDNNG GEFÜHRT, SOMDERN DURCH DIE ANGABE VON PLÄTZEN FÜR DIE BEHAUPTUNGEN ALLER MÖGLICHEN DENKOBJEKTE IN ALLEN MÖGLICHEN ZEITPUNKTEN, DASS EINE SOLCHE DIAGONALZAHL EXISTIERE. FÜR JEDE DIESER MÖGLICHEN BEHAUPTUNGEN LÄSST SICH EIN WIDERSPRUCH IN DER DEFINITION DIESER DIAGONALZAHL ANALOG DEM AUF SEITE 19 ANGEGEBENEN ZEIGEN.