

# Kostproben vom Baum der Erkenntnis

**Die Früchte vom Baum der Erkenntnis führten Adam und Eva zum Wissen von Gut und Böse, wohl eine der ersten allgemein gültigen Wahrheiten. In der vorliegenden Arbeit behandeln wir Fragen nach der Wahrheit insbesondere am Beispiel mathematischer Aussagen.**

## **(1) Denkbjekte über die gesprochen werden kann:**

Wir betrachten alle möglichen Objekte, an die irgend eine mögliche Person in irgend einem möglichen Zeitpunkt gedacht und über die sie gesprochen haben könnte. Es handelt sich dabei nur um die Möglichkeit, an das in Rede stehende Objekt zu denken und um die Möglichkeit, über dieses Objekt zu sprechen. Tatsächliche Denkvorgänge und tatsächliche Aussagen darüber spielen zunächst keine Rolle.

## **(2) Die Individualität der Denkbjekte:**

Der Begriff eines wie oben beschriebenen Denkbjektes setzt eine mögliche denkende und sprechende Person als Subjekt voraus. Die möglichen Denkvorgänge und das Sprechen darüber sind untrennbar mit dieser möglichen Person, also mit einem Individuum verbunden. Wir sprechen daher von einer "Individualität der Denkbjekte".

## **(3) Das Raum-Zeit-Universum:**

Wir nehmen an, dass jeder mögliche Denkvorgang und das Sprechen darüber eine gewisse Mindestdauer in Anspruch nimmt und dass jede mögliche Person dabei ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnimmt. Um hier eine gewisse Ordnung zu schaffen führen wir ein vierdimensionales Koordinatensystem ein und zwar mit drei Raumkoordinaten und einer Zeitkoordinate. Den Ursprung des Koordinatensystems können wir ebenso willkürlich festlegen wie die Richtung der drei Raumkoordinaten. Das Raum-Zeit-Universum zerlegen wir jetzt mit Hilfe dieses Koordinatensystems in "Elementarwürfel EW". Dazu werden die drei Raumkoordinaten jeweils in Abschnitte der Länge 0,01 mm und die Zeitkoordinate in Abschnitte der Länge 0,01 Sek geteilt. Jeder solcherart definierte Elementarwürfel bedeckt im Raum einen Würfel der Seitenlänge 0,01 mm, ausgerichtet nach den Richtungen der drei Raumkoordinaten, und in der Zeit eine Dauer von 0,01 Sek. Diese Elementarwürfel bedecken das Raum-Zeit-Universum vollständig. Mit Hilfe des vierdimensionalen Koordinatensystems können alle Elementarwürfel unschwer abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung sei  $AO(EW)$ .

## **(4) Abzählbare Anordnung aller möglichen Aussagen:**

Wegen der Mindestdauer einer Aussage und dem Mindestvolumen jeder aussagenden Person gibt es sicher mindestens einen Elementarwürfel EW, der jede mögliche Aussage eindeutig kennzeichnet. Dies leistet nämlich jeder Elementarwürfel, der zur Gänze in dem von der aussagenden Person für die Aussage benötigten Volumen des Raum-Zeit Universums liegt. Mit Hilfe der Anordnung  $AO(EW)$  aller Elementarwürfel kann daher eine abzählbare Anordnung aller möglichen Aussagen aller möglichen Personen gewonnen werden.

**(5) Schriftliche Mitteilungen:**

Eine "Mitteilung M vom Umfang n" sei ein quadratischer Raster, gebildet aus  $n^2$  "Elementarquadraten" der Seitenlänge 0,01 mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Einem weißen Elementarquadrat wird die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zugeordnet. Es sei  $a_{jk}$  jene Ziffer (1 oder 2), die dem in der  $j^{\text{ten}}$  Zeile an  $k^{\text{ter}}$  Stelle liegenden Elementarquadrat zugeordnet ist. Jede mögliche Mitteilung  $M_n$  vom Umfang n kann dann durch die Dezimalzahl

$$a(M_n) = 0, a_{11}a_{12}\dots a_{1n}a_{21}a_{22}\dots a_{jk}\dots a_{nn}$$

eindeutig dargestellt werden.

**(6) Abzählbare Anordnung aller schriftlichen Mitteilungen:**

Alle möglichen schriftlichen Mitteilungen M ordnen wir folgendermaßen abzählbar an: Zunächst werden die Mitteilungen  $M_n$  von gleichem Umfang n in Gruppen  $G(M_n)$  zusammengefasst und diese Gruppen nach der Größe von n angeordnet. Innerhalb jeder Gruppe  $G(M_n)$  werden sodann die Mitteilungen  $M_n$  nach der Größe der jeweiligen Dezimalzahl  $a(M_n)$  angeordnet. Es sei  $AO(M)$  die so gewonnene Anordnung aller möglichen schriftlichen Mitteilungen.

**(7) Über die Wahrheit einer Mitteilung:**

Wir wollen nur dann von der Wahrheit einer Mitteilung M sprechen wenn es irgend eine Person P gibt, die in irgendeinem Zeitpunkt T diese Mitteilung M als wahr bezeichnen würde. Mit dieser Bedingung verzichten wir auf den Begriff einer absoluten Wahrheit und verwenden nur mehr den Begriff "relative Wahrheit einer Mitteilung M" und zwar bezogen auf jeweils eine Person P und einen Zeitpunkt T.

**(8) Über die relative Wahrheit einer Mitteilung:**

Um eine Mitteilung M als wahr für eine Person P in einem Zeitpunkt T zu bezeichnen, wollen wir nicht voraussetzen, dass P die Mitteilung M im Zeitpunkt T tatsächlich bereits gelesen hat. Es reicht für uns aus, annehmen zu dürfen, dass die Person P im Zeitpunkt T die Mitteilung M als wahr bezeichnen würde, hätte sie M zuvor gelesen. Völlig außer Betracht bleibt hierbei die Beurteilungen des Wahrheitsgehaltes der Mitteilung M durch Außenstehende wie etwa den Autor oder den Leser dieser Arbeit.

**(9) Über das Fehlen eines allgemeinen Wahrheitskriteriums:**

Voraussetzung einer relativen Wahrheit ist nach unserer Definition ausschließlich die Aussage einer Person P in einem Zeitpunkt T über die Wahrheit einer Mitteilung M. Unterschiedliche Beurteilungen durch verschiedene Personen oder durch eine Person in verschiedenen Zeitpunkten können auf unterschiedlichem Wissensstand ebenso wie auf bewusst falschen Aussagen beruhen. Der Möglichkeiten gibt es viele, ein allgemeines Wahrheitskriterium aber nicht. Für unsere weiteren Überlegungen genügt der in (7) eingeführte Begriff "relative Wahrheit".

**(10) Abzählbare Anordnung aller relativ wahren Mitteilungen:**

Positive Urteile jeder möglichen Person P in jedem möglichen Zeitpunkt T über die Wahrheit jeder möglichen Mitteilung M können jeweils durch ein Tripel (P,T,M) gekennzeichnet werden. Das Tripel (P,T,M) bedeutet dabei, dass die Person P die Mitteilung M im Zeitpunkt T als wahr bezeichnet. T ist dabei der "früheste" Zeitpunkt aus einem diese Aussage von P eindeutig kennzeichnenden Elementarwürfel EW aus (4). Mit Hilfe der abzählbaren

Anordnung  $AO(EW)$  aller möglichen Aussagen gemäß (4) und der abzählbaren Anordnung  $AO(M)$  aller schriftlichen Mitteilungen gemäß (6) können auch alle durch ein Tripel  $(P, T, M)$  gekennzeichneten relativ wahren Mitteilungen abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung sei  $AO(P, T, M)$ .

**(11) Die Individualanordnung:**

So wie eine Denkobjekt aus (2) setzt auch jedes Urteil über die Wahrheit einer Mitteilung aus (10) eine mögliche denkende und sprechende Person als Subjekt voraus. Das Tripel  $(P, T, M)$  bedeutet jeweils ein individuelles Urteil der Person  $P$ . Es ist daher naheliegend, eine Anordnung  $AO(P, T, M)$  aus (10) als "Individualanordnung" zu bezeichnen.

**(12) Individualanordnungen reeller Zahlen:**

Es sei  $M = M[RZ(0, 1)]$  eine Mitteilung, die für irgendeine Person  $P$  in irgendeinem Zeitpunkt  $T$  die reelle Zahl  $RZ(0, 1)$  zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Das Tripel  $\{P, T, M[RZ(0, 1)]\}$  bedeutet, dass die Person  $P$  die Aussage, "M beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei" im Zeitpunkt  $T$  als wahr bezeichnet. Damit ist  $M$  eine relativ wahre Mitteilung im Sinne von (8). So wie die Tripel  $(P, T, M)$  aus (10) können auch alle durch ein Tripel  $\{P, T, M[RZ(0, 1)]\}$  gekennzeichneten reellen Zahlen  $RZ(0, 1)$  abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung sei  $AO\{P, T, M[RZ(0, 1)]\}$ . Sie beruht wie die Anordnung  $AO(P, T, M)$  aus (10) auf individuellen Urteilen von Personen  $P$  und wir bezeichnen sie analog zu (11) als Individualanordnung reeller Zahlen.

**(13) Eine Individualanordnung aller reellen Zahlen:**

Man erkennt leicht, dass in der Anordnung  $AO\{P, T, M[RZ(0, 1)]\}$ , wenn alle möglichen Mitteilungen  $M[RZ(0, 1)]$  herangezogen werden, jede reelle Zahl durch jeweils unendlich viele Tripel  $\{P, T, M[RZ(0, 1)]\}$  gekennzeichnet wird. Man kann aber unschwer eine Individualanordnung  $AO[RZ(0, 1)]$  aller reellen Zahlen  $RZ(0, 1)$  zwischen 0 und 1 bilden, die jede reelle Zahl genau einmal enthält, etwa indem diese reellen Zahlen jeweils nur einmal und zwar in der Reihenfolge angeführt werden, in der sie in der Anordnung  $AO\{P, T, M[RZ(0, 1)]\}$  erstmals auftreten.

**(14) Die Vollständigkeit der Individualanordnung aller reellen Zahlen:**

Die Individualanordnung  $AO[RZ(0, 1)]$  ist insoweit vollständig, als jeder Versuch, eine angeblich in ihr nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei anzugeben, wie im Folgenden gezeigt wird, misslingt. Behauptet nämlich ein Kritiker der Vollständigkeit (er werde als kritische Person  $P_k$  bezeichnet) in irgendeinem Zeitpunkt  $T_k$ , eine reelle Zahl  $r_k$  mit  $0 < r_k < 1$  sei nicht in  $AO[RZ(0, 1)]$  enthalten, dann kann diese Behauptung in Form einer Mitteilung  $M_k$  dargestellt werden. Diese Mitteilung  $M_k$  beschreibt also nach Ansicht der Person  $P_k$  im Zeitpunkt  $T_k$  die reelle Zahl  $r_k$  zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei und sie enthält die Feststellung, nach Ansicht von  $P_k$  sei  $r_k$  nicht in  $AO[RZ(0, 1)]$  enthalten, es gelte also  $r_k \notin AO[RZ(0, 1)]$ . Nun werden aber gemäß (13) in  $AO[RZ(0, 1)]$  genau alle jene reellen Zahlen angeordnet, die durch ein Tripel  $\{P, T, M[RZ(0, 1)]\}$  gekennzeichnet werden.  $r_k$  wird dabei gemäß (12) durch das Tripel  $\{P_k, T_k, M_k[RZ(0, 1)]\}$  gekennzeichnet. Dieses Tripel bedeutet aber ebenfalls gemäß (12), dass der Kritiker  $P_k$  die Aussage "M<sub>k</sub> beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1" im Zeitpunkt  $T_k$  als wahr bezeichnet. Daraus folgt wieder per definitionem  $r_k \in AO\{P, T, M[RZ(0, 1)]\}$  und im weiteren  $r_k \in AO[RZ(0, 1)]$  im Widerspruch zur obigen Feststellung  $r_k \notin AO[RZ(0, 1)]$ . Dem Kritiker  $P_k$  ist es also nicht gelungen, eine in  $AO[RZ(0, 1)]$  nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei anzugeben.

**(15) Folgerungen für das erste Hilbert-Problem:**

Die in (14) dargestellte Vollständigkeit von  $AO[RZ(0,1)]$  löst unter anderem auch das erste Hilbert-Problem für die Menge der reellen Zahlen. Die abzählbaren Anordnungen aller Tripel  $AO(P,T,M)$  aus (10) und  $AO\{P,T,M[RZ(0,1)]\}$  aus (13) werden hier nur als Aussagen über die jeweilige Mächtigkeit der Menge aller Tripel verwendet. In beiden Fällen erweist es sich aber als grundsätzlich unmöglich, diese Mengen tatsächlich abzählbar anzuordnen. Grundlagen solcher Anordnungen sind ja unter anderem Urteile aller möglichen Personen  $P$  in allen möglichen Zeitpunkten  $T$  über den Inhalt von Mitteilungen  $M$  und diese Urteile sind offensichtlich nie vollständig bekannt, da nie alle möglichen Personen in allen Zeitpunkten  $T$  über die Wahrheit von Mitteilungen  $M$  befragt werden können.

**(16) Individualanordnungen beliebiger Mengen:**

Die bisherigen Überlegungen zur Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen lassen sich auf beliebige Mengen erweitern. Wir betrachten dazu Mengen  $M(\epsilon)$ , bestehend aus Elementen  $E_\epsilon$ , welche alle eine Eigenschaft  $\epsilon$  aufweisen, die sie zu einem Element der Menge  $M(\epsilon)$  macht. Analog zu (10) werden Tripel  $(P,T,M_\epsilon)$  gebildet<sup>1</sup>. Das Tripel  $(P,T,M_\epsilon)$  bedeutet dabei, dass die Person  $P$  die Behauptung, " $M_\epsilon$  beschreibt ein Element  $E_\epsilon \in M(\epsilon)$  eindeutig und widerspruchsfrei", im Zeitpunkt  $T$  als wahr bezeichnet. Analog zu (12) entspricht jedes einzelne der Tripel  $(P,T,M_\epsilon)$  diesem Element  $E_\epsilon$  der  $M \in M(\epsilon)$ . Analog zu (10) und (13) erhält man eine abzählbare Individualanordnung  $AO(E_\epsilon)$  aller Elemente  $E_\epsilon$  der Menge  $M(\epsilon)$ .

**(17) Die Vollständigkeit der Individualanordnungen beliebiger Mengen:**

Analog zu (14) zeigt man unschwer, dass jeder Versuch eines Kritikers, die Unvollständigkeit von  $AO(E_\epsilon)$  durch die Angabe eines in  $AO(E_\epsilon)$  angeblich nicht enthaltenen Elementes  $E_\epsilon \in M(\epsilon)$  misslingt. Damit ist das erste Hilbert-Problem auch für beliebige Mengen gelöst. Der Begriff "überabzählbare Menge" führt stets zu einem Widerspruch. Man verwendet daher besser den Begriff "nicht abzählbar anordenbare Menge" und versteht darunter eine Menge von der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen, für die eine abzählbare Anordnung ihrer Elemente etwa aus dem in (15) genannten Grund nicht möglich erscheint. Der Widerspruch im Begriff "überabzählbare Menge" führt auch zu einem Widerspruch im Begriff "transfinite Kardinalzahl  $\aleph_n$  mit  $n > 0$ ". Insbesondere sind derartige von Cantor eingeführte Mengen in sich widersprüchlich. Daraus ergeben sich auch Widersprüche in einigen Bereichen der Mengenlehre.

**(18) Anwendung der Mäeutik des Sokrates:**

Die in (14) und (17) angesprochenen Kritiker  $P_k$  spielen hier die Rolle des Gesprächspartners von Sokrates in dessen Mäeutik, der Hebammenkunst. Um die entscheidenden Widersprüche herauszuarbeiten wird  $P_k$  selbst in die Diskussion einbezogen. Die Ergebnisse der Arbeit beruhen letztlich darauf, dass Mathematik nur von Personen innerhalb des Raum-Zeit-Universums betrieben werden kann und dass alle Ergebnisse mathematischer Untersuchungen durch Mitteilungen  $M$  gemäß (5) dargestellt werden können.

---

<sup>1</sup> Es ist zwischen der Menge  $M(\epsilon)$  von Elementen  $E_\epsilon$  mit der Eigenschaft  $\epsilon$  und einer nach dem Urteil von  $P$  im Zeitpunkt  $T$  ein Element  $E_\epsilon$  eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilung  $M_\epsilon$  zu unterscheiden.