

Individualanordnung¹

Die Zahl wurde nicht entdeckt, sie wurde erfunden², und es gibt nichts ihr ebenbürtiges im Reich der Erfindungen.

(Ernst Jünger)

Durch die meisten Arbeiten auf dieser Website zieht sich wie ein roter Faden der Gedanke der Relativität jeder Wahrheit. Eine schriftlich, mündlich oder sonst wie verfasste Aussage kann nur von einer möglichen Person, welche diese Aussage liest, hört oder sonst wie empfängt, einen Sinn gewinnen und als "wahr" oder als "nicht wahr" angesehen werden³. Gleiches gilt für Begriffe wie "Mitteilung" oder "Information". Auch sie können nur durch eine die Mitteilung oder die Information erhaltende Person einen Sinn gewinnen ebenso wie der Sinngehalt einer Lochkarte erst mit Hilfe eines Kartenlesers erkennbar wird⁴. Aussagen, Mitteilungen oder Informationen sind daher für sich allein nur "potentiell" sinnvoll. Ihr Sinn wird erst durch eine sie erhaltende Person "actual".

Ist man grundsätzlich bereit, solchen Gedanken zu folgen, dann ergibt sich daraus unmittelbar eine Begrenzung sinnvoller wahrer Mitteilungen M . Für solche, nämlich für sinnvolle wahre Mitteilungen M , ist offenbar vorauszusetzen, es müsse zumindest möglich sein, dass irgendein genügend kleines Zeitintervall $IT = (T, T+\varepsilon)$ existiert, in dem irgendeine Person P bereit ist, die Mitteilung M als "wahr" zu bezeichnen. Offenbar wäre $\varepsilon = 0,01$ Sek. ausreichend. Davon ausgehend ist es unschwer möglich, alle sinnvollen wahren Mitteilungen M abzählbar anzuordnen und zwar mit Hilfe von abzählbaren Anordnungen aller möglichen Mitteilungen M , aller möglichen Zeitintervalle IT und aller möglichen Personen P . Dabei gilt eine Beurteilung von M als "wahr" jeweils nur für genau diese Person P und dieses Zeitintervall IT . Jede Beurteilung von M durch eine andere Person PA , also etwa durch den Autor oder durch den Leser dieser Arbeit, ist dabei irrelevant.

Wir beginnen zunächst mit einer abzählbaren Anordnung $AO(M)$ aller möglichen Mitteilungen M und beschränken uns - wie wir später zeigen werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit - vorerst auf schriftliche Mitteilungen. Eine "Mitteilung M vom Umfang n " sei ein quadratisches Raster, bestehend aus n^2 "Elementarquadraten" der Seitenlänge $1/100$ mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist, und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit a_{jk} . Jede mögliche Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl

¹ Die Arbeit basiert auf "Wolff, 'Zur Problematik der absoluten Überabzählbarkeit', PHILOSOPHIA NATURALIS, Bd. 13, Heft 4, 3. Vierteljahr 1972, S 399 - 404". (Druckfehler in 6.1, Zeilen 5 und 6).

² "Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker." Ludwig Wittgenstein, Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik, Werkausgabe Bd. 6, Teil I, 168. Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft 506.

³ Zum "Sinn einer Aussage" vgl. Ludwig Wittgenstein, Werkausgabe Bd. 6, 'Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik', Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft 506.

⁴ vgl. "L'homme ordinateur", <http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/>.

$a(M) = 0, a_{11}a_{12} \dots a_{1n} a_{21}a_{22} \dots a_{jk} \dots a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Im weiteren fassen wir alle Mitteilungen M vom Umfang n zuerst in Gruppen nach ihrem Umfang n und anschließend innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von $a(M)$ in einer Anordnung $AO(M)$ abzählbar an. Eine solche Mitteilung M vom Umfang n kann z.B. ein quadratisches Stück weißes Papier oder ein quadratischer Bildschirm, jeweils mit der Seitenlänge $n/100$ mm sein, auf dem schwarze Zeichen (Schriftzeichen, Formeln etc.) angebracht sind. Wie man sieht, lassen sich mit Hilfe solcher Mitteilungen alle nur möglichen Schwarz-Weiß-Informationen darstellen.

Dass die Einschränkung auf derartige Schwarz-Weiß-Informationen zu keiner Beschränkung der Allgemeinheit führt, wird durch folgende Überlegungen einleuchtend: Im allgemeinen bedeutet der Begriff "Mitteilung", dass eine Information von einer Person an eine andere übermittelt wird. Lässt man die Einschränkung auf Schwarz-Weiß-Informationen weg, bleibt als Aufgabe jeder möglichen Information die Übermittlung des Inhaltes der Mitteilung an eine Person so, dass diese den Inhalt der Mitteilung mit Hilfe ihrer Sinnesorgane erfassen kann. Man kann unschwer erkennen, dass alle Sinnesorgane nur jeweils abzählbar viele Eindrücke aufzunehmen in der Lage sind. Der für uns hier wesentliche Grundsatz der Abzählbarkeit aller möglichen Informationen bleibt also auch bei Wegfall der oben erwähnten Einschränkung auf optisch erfassbare Schwarz-Weiß-Informationen gewahrt.

Als nächsten Schritt zeigen wir, dass alle möglichen Mitteilungen M zusammen mit allen möglichen Zeitintervallen IT und allen möglichen Personen P , die in irgendeinem solchen Zeitintervall irgendeine mögliche Mitteilung M als "wahr" bezeichnen, in einer Anordnung $AO(M,IT,P)$ abzählbar angeordnet werden können. Das Tripel (M,IT,P) bedeutet dabei, dass die Person P , falls sie die Mitteilung M im Zeitintervall IT tatsächlich läse, sie als "wahr" bezeichnete.

Dazu wählen wir ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum (drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate) und zerlegen es in Raum-Zeit-Elemente RZE . Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein (vierdimensionaler) Elementarwürfel EW der Seitenlänge $0,01$ mm (drei Raumkoordinaten) und der Dauer $0,01$ Sek. (eine Zeitkoordinate). Mit Hilfe des vorhin gewählten Koordinatensystems im Raum-Zeit-Universum lassen sich dann alle Elementarwürfel EW in einer Anordnung $AO(EW)$ abzählbar anordnen.

Wir können annehmen, dass jede mögliche Person, die in irgendeinem möglichen Zeitintervall IT irgendeine Mitteilung M als "wahr" bezeichnet, dabei im Raum-Zeit-Universum ein gewisses Volumen einnimmt. Die Größe der Elementarwürfel EW wurde so klein gewählt, dass in jedem zu einer Beurteilung einer Mitteilung M als "wahr" erforderlichen Volumen im Raum-Zeit-Universum sicher mindestens ein Elementarwürfel EW zur Gänze liegt. Durch diesen Elementarwürfel EW ist daher ein Tripel (M,IT,P) , besagend, dass die Person P im Zeitintervall IT die Mitteilung M als "wahr" bezeichnet, eindeutig bestimmt. Diese Überlegungen gelten für alle möglichen Mitteilungen M , alle möglichen Zeitintervalle IT und alle möglichen Personen P . Es werden daher jeder möglichen Person P in jedem möglichen Zeitintervall IT alle möglichen Mitteilungen M zur Stellungnahme vorgelegt.

Mit Hilfe der abzählbaren Anordnung $AO(M)$ aller möglichen Mitteilungen M und der abzählbaren Anordnung $AO(EW)$ aller möglichen Elementarwürfel EW kann daher wie gewünscht eine abzählbare Anordnung $AO(M,IT,P)$ aller jener Fälle gefunden werden, in de-

nen irgendeine Mitteilung M in irgendeinem Zeitintervall IT von irgendeiner Person P als "wahr" bezeichnet wird. Es sei darauf hingewiesen, dass hier lediglich über Urteile von Personen P über die "Wahrheit" von Mitteilungen M in irgendeinem Zeitintervall IT gesprochen wird. Eine allfällige "Wahrheit" oder "Nicht-Wahrheit" von M in anderen Zeitintervallen IT oder für andere Personen PA bleibt außer Betracht. Auch ein allfälliger "Sinngehalt einer Mitteilung M " für den Autor und/oder für den Leser dieser Arbeit ist irrelevant. Daher die Bezeichnung "Individualanordnung".

Ein Beispiel sind etwa Mitteilungen $M = M[RZ(0,1)]$, die eine reelle Zahl $RZ(0,1)$ zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben⁵. Das Tripel $\{M[RZ(0,1)], IT, P\}$ besagt in diesem Fall, dass die Person P im Zeitintervall IT die Aussage " $M[RZ(0,1)]$ beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei", als wahr bezeichnet. Es werden also aus allen abzählbar vielen Tripeln (M, IT, P) alle jene herausgefiltert, die besagen, dass die Mitteilung $M = M[RZ(0,1)]$ für die Person P im Zeitintervall IT eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Daraus ergibt sich eine Anordnung $AO\{M[RZ(0,1)], IT, P\}$ aller dieser Tripel $\{M[RZ(0,1)], IT, P\}$. Jedes einzelne dieser Tripel beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei. Aus der abzählbaren Anordnung $AO\{M[RZ(0,1)], IT, P\}$ erhält man daher gleichzeitig eine abzählbare Anordnung $AO[RZ(0,1)]$ von reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Wir nennen diese Anordnung $AO[RZ(0,1)]$ "Individualanordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1" und behaupten, sie ist vollständig.

Tatsächlich muss jeder Versuch, die Unvollständigkeit von $AO[RZ(0,1)]$ durch die Angabe einer in $AO[RZ(0,1)]$ angeblich nicht enthaltenen reellen Zahl zwischen 0 und 1 zu zeigen, misslingen. Behauptet nämlich ein Kritiker der Vollständigkeit von $AO\{M[RZ(0,1)], IT, P\}$ - nennen wir ihn kritische Person PK - in irgendeinem Zeitintervall ITK , eine reelle Zahl $r = r_K$ zwischen 0 und 1 - etwa die aus der Anordnung $AO[RZ(0,1)]$ mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor gewonnene Diagonalszahl - sei in dieser Anordnung nicht enthalten, es gelte also $r_K \notin AO\{M[RZ(0,1)], IT, P\}$, dann verlangen wir von ihm, diese seine Behauptung in die Form einer Mitteilung MK zu bringen - etwa durch eine schriftliche Darstellung der aus der Anordnung $AO[RZ(0,1)]$ mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor gewonnenen Diagonalszahl. MK besagt also nach Meinung von PK , es ist wahr, dass die reelle Zahl r_K zwischen 0 und 1 liegt und eindeutig und widerspruchsfrei durch MK dargestellt wird. Nach unserer Definition der Individualanordnung folgt daraus aber gerade $r_K \in AO(M, IT, P)$. Der Kritiker PK behauptet hingegen $r_K \notin AO(M, IT, P)$ und dies ist ein Widerspruch⁶.

In gleicher Weise kann die Abzählbarkeit anderer angeblich überabzählbarer Mengen nachgewiesen werden⁷.

Die Abzählbarkeit aller Tripel $\{M[RZ(0,1)], IT, P\}$ ist als Aussage über die Mächtigkeit der Menge aller solcher Tripel, also auch der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, zu verstehen. Sie darf nicht als Möglichkeit einer tatsächlichen vollständigen Anordnung der

⁵ vgl. "Das Münchhausen-Paradoxon" et al., <http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/>.

⁶ Der eigentliche Kern der Überlegungen.

⁷ vgl. "Ein Widerspruch in überabzählbaren Mengen" et al., <http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/>.

reellen Zahlen missverstanden werden⁸. Eine derartige Anordnung ist allein schon deshalb nicht möglich weil diese die Beurteilung aller möglichen Mitteilungen M durch alle möglichen Personen P in allen möglichen Zeitintervallen IT als bekannt voraussetzt. Die Kenntnis solcher Beurteilungen durch andere Personen PA bleibt dem Autor und dem Leser dieser Arbeit aber grundsätzlich versagt. Ganz abgesehen davon, dass jede mögliche Person nur Mitteilungen von endlichem Umfang zu lesen in der Lage sein kann. Dessen ungeachtet können derartige Mengen von jeder möglichen Person P schrittweise aufgebaut werden⁹.

Einer tatsächlich vollständigen, also einer "actualen" Anordnung der reellen Zahlen stellt sich somit die Tatsache entgegen, dass zwar die Menge aller Tripel $\{M[RZ(0,1)], IT, P\}$ abzählbar ist, die Tripel selbst aber nur "potentiell" sinnvoll sind. Sie können daher auch nur zu einer "potentiellen" nicht aber zu einer "actualen" Anordnung führen.

Es ist also nicht möglich, eine abzählbare Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 tatsächlich anzugeben. Aber als wesentliche Aussage verbleibt die Thesis: "Jeder Beweis der Existenz von Mengen mit einer Mächtigkeit $\aleph > \aleph_0$ enthält einen Widerspruch".

⁸ Ein sehr häufiges Missverständnis.

⁹ vgl. "Ein schrittweiser Aufbau des Kontinuums", <http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/>.