DEFINITION, ERKLÄRUNG UND MATHEMATISCHER BEWEIS

(Karl-Heinz Wolff)

Definitionen und Erklärungen haben gemeinsam, daß sie einen unbekannten oder nicht vollständig bekannten Begriff durch bekannte Begriffe erläutern bzw. darstellen. Der Unterschied zwischen Definition und Erklärung liegt (m.E.) darin, daß durch eine Definition (im Gegensatz zur einfachen Erklärung) eine eineindeutige Zuordnung von „Begriff“ und „Definition dieses Begriffes“ gegeben wird.

Zur Bezeichnung der „Begriffe“ werden ebenso wie zur „Definition“ oder zur „Erklärung“ Worte und Sätze verwendet. Offenbar sind Definitionen ebenso wie Erklärungen nur dann sinnvoll, wenn die zu ihrer Darstellung verwendeten Worte und Sätze als „bekannt“ vorausgesetzt werden können. Ist auch nur ein in einer Definition verwendetes Wort, auch nur ein verwendeter Satz nicht „bekannt“, also nicht verständlich, dann muß dieses Wort, dieser Satz, selbst definiert werden. Eine Definition (und ebenso eine Erklärung) ist daher nur dann vollständig, wird nur dann ihrer Aufgabe gerecht, wenn sie nur mehr „bekannte“, also verständliche Worte und Sätze enthält.

Daraus folgt, daß Definition, Erklärung, ja daß ganz allgemein ein Sprechen über etwas nur sinnvoll sein kann, wenn vorher über den Sinn eines gewissen Grundstocks von Worten und Wortkombinationen Einvernehmen besteht.

Anders ausgedrückt, Definitionen und Erklärungen verschieben nur die Frage nach dem Sinn, nach der Bedeutung von Worten und Sätzen im Bereich der Worte und Sätze, also in einer Sprache hin und her. Soll die Sprache zur Verständigung zwischen zwei verschiedenen Individuen dienen, muß zwischen ihnen bereits Einvernehmen über die Bedeutung eines solchen Grundstocks von Worten und Wortkombinationen bestehen. (Vgl. die Kategorien Kants).

In der Mathematik bieten sich die natürlichen Zahlen als ein solcher Grundstock an, also als etwas, worüber Einvernehmen vorausgesetzt werden darf. Sie lassen sich durch das einfache Experiment des Abzählens verstehen. Ein Experiment, das jeder Mensch im Laufe seines Lebens (lernend) vollzogen hat. Die Einführung der natürlichen Zahlen mit Hilfe eines Axiomensystems ist natürlich ebenfalls möglich. Fraglich ist nur, ob die dabei verwendeten Begriffe, die zum Verständnis des Systems notwendig sind, eher (früher) vorausgesetzt werden können als die natürlichen Zahlen. Für mich möchte ich diese Frage verneinen.

Das Heranziehen der natürlichen Zahlen als Grundstock hat unter anderem auch den Vorteil, daß „12 = 3 x 4“ nicht (nach Kant) als synthetisches Urteil a priori sondern als Ergebnis eines „Experiments“, nämlich des Abzählens von drei Reihen á vier Elementen, verstanden wird.

Das Hin- und Herschieben der Frage nach der Bedeutung von Worten und Sätzen im Bereich der Worte und Sätze birgt m.E. die große Gefahr, sich in immer komplexere Strukturen zu verlieren. Dies scheint mir z.B. für den Bereich der axiomatischen Mengenlehre ebenso zu gelten wie für sogenannte überabzählbare Mengen.

Die Anwendung der vorstehenden Überlegungen auf mathematische Beweise ist offensichtlich. Auch jede mathematische Beweisführung setzt ein vorheriges Einvernehmen über die Bedeutung eines Grundstocks von Worten und Wortkombinationen voraus. Dies implizit vorauszusetzen erscheint mir unzulässig. Nur so fand - ungerechtfertigt - das sogenannte „aktual Unendliche“ Eingang in die Mathematik.