



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

VIENNA  
UNIVERSITY OF  
TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

---

# Methodik von Sterblichkeitsuntersuchungen

Ausgeführt am Institut für  
Wirtschaftsmathematik  
der Technischen Universität Wien

unter der Leitung von  
Dr. Stefan GERHOLD

durch  
Christian Marguerite  
1080 Wien  
Daungasse 1A/11

---

Datum

---

Unterschrift

## **Ehrenwörtliche Erklärung**

Ich versichere, dass ich die eingereichte Diplomarbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient habe. Ich erkläre weiters, dass ich diese Diplomarbeit bisher weder im In- noch im Ausland in irgendeiner Form als wissenschaftliche Arbeit vorgelegt habe.

Wien, August 2011

Christian Marguerite

## Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen Personen bedanken, die mir bei der Erarbeitung dieser Diplomarbeit geholfen haben. Mein herzlicher Dank gilt Herrn Dr. Stefan Gerhold, dem Betreuer meiner Arbeit. Vielen Dank für die hilfreichen Anregungen und die angenehme Leitung.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern, Ingrid und Helmut, die, davon abgesehen, dass sie mir das Studium ermöglichten, auch immer großes Interesse für meine Arbeit zeigten und mich soweit wie möglich unterstützten. Auch bei meinen Geschwistern und bei meiner Oma, die mich moralisch immer unterstützt und den Rücken gestärkt haben, möchte ich mich recht herzlich bedanken.

An dieser Stelle möchte ich noch meiner Mama danken, die sich als Korrekturleserin meine Arbeit sehr gewissenhaft durchgelesen hat.

Des Weiteren möchte ich mich bei Anita, Julia, Mimi, Sabrina, Stephie, André, Dominik, Gregor, Martin, Robert, Rudolf und Simon, meinen ständigen Wegbegleitern durch das Studium, bedanken, die mir durch ihre unzähligen Hilfestellungen das Studium erleichtert haben.

Abschließend geht ein großes Dankeschön an all meine Freunde, insbesondere an Judith, Lisa, Rici, Sigi, Timi, Arno, Can, Julian, Krzysztof, Max und Philipp, die dafür gesorgt haben, dass auch in schwierigen Zeiten des Studiums der Spaß nie zu kurz blieb.

Vielen herzlichen Dank,  
Christian

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Ermittlung der Sterbehäufigkeiten</b>	<b>10</b>
2.1	Das Modell . . . . .	10
2.1.1	Allgemeines . . . . .	10
2.1.2	Die Sterbedichte . . . . .	11
2.2	Definitionen . . . . .	11
2.2.1	Personengesamtheiten . . . . .	11
2.2.2	Sterbewahrscheinlichkeiten . . . . .	12
2.3	Methoden zur Ermittlung geeigneter Stichproben . . . . .	12
2.3.1	Darstellung von Personengesamtheiten . . . . .	12
2.3.2	Die Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner . . . . .	13
2.3.3	Die Sterbejahrmethode nach Raht . . . . .	14
2.3.4	Das Sterbeziffernverfahren nach Farr . . . . .	15
2.3.5	Die Verweildauer methode . . . . .	16
2.3.6	Zusammenhänge . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Ausgleichsverfahren</b>	<b>18</b>
3.1	Allgemeines zur Ausgleichung . . . . .	18
3.1.1	Das Ziel der Ausgleichung . . . . .	18
3.1.2	Zusammenstellung der Ausgleichsmethoden . . . . .	19
3.2	Mechanische Ausgleichsverfahren . . . . .	20
3.2.1	Allgemeine Form der mechanischen Ausgleichung . . . . .	20
3.2.2	Methode von Finlaison-Wittstein . . . . .	22
3.2.3	Methode von G. King . . . . .	24
3.2.4	Das Whittaker-Henderson-Verfahren . . . . .	27
3.2.5	Algorithmus des Whittaker-Henderson-Verfahrens . . . . .	30
3.3	Analytische Ausgleichsverfahren . . . . .	30
3.3.1	Allgemeine Form der analytischen Ausgleichung . . . . .	30

3.3.2	SterbeGesetze . . . . .	31
3.3.3	Die Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	32
3.3.4	Die Momentenmethode . . . . .	33
3.3.5	Die Methode von King-Hardy . . . . .	33
3.4	Ausgleichung anhand zweier Verfahren . . . . .	35
3.4.1	Beispiel mit dem Whittaker-Henderson-Verfahren . . . . .	37
3.4.2	Beispiel mit dem Verfahren der kleinsten Quadrate . . . . .	39
3.5	Gütemaße . . . . .	42
3.5.1	Gütemaße für die Glätte . . . . .	42
3.5.2	Gütemaße für die Anpassung . . . . .	43
3.5.3	Gütemaße für die Regellosigkeit . . . . .	45
3.6	Historische Bemerkungen . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Extrapolation der Sterbewahrscheinlichkeit</b>	<b>53</b>
4.1	Einleitung . . . . .	53
4.1.1	Perioden- und Generationensterbetafeln . . . . .	53
4.1.2	Trend und Extrapolation . . . . .	53
4.1.3	Altersverschiebung . . . . .	55
4.2	Basis Trend . . . . .	60
4.2.1	Parametrische Modelle . . . . .	63
4.2.2	Traditionelles Modell . . . . .	63
4.2.3	Der Likelihood-Ratio Test . . . . .	64
4.2.4	Nolfi-Ansatz . . . . .	67
4.2.5	CMI Modell . . . . .	68
4.2.6	Lee-Carter Modell . . . . .	69
4.2.7	Theoretischer Hintergrund der Lee-Carter Zerlegung . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Internationaler Vergleich</b>	<b>77</b>
5.1	Basistafel . . . . .	77
5.2	Trend . . . . .	77
5.3	Sterblichkeit . . . . .	82

5.4 Lebenserwartung . . . . .	85
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	Darstellung von Personengesamtheiten (Quelle: [3]) . . . . .	13
2	Die Geburtsjahrmethode (Quelle: [3]) . . . . .	14
3	Die Sterbejahrmethode (Quelle: [3]) . . . . .	16
4	Das Sterbeziffernverfahren (Quelle: [3]) . . . . .	17
5	Beobachtete Häufigkeiten . . . . .	36
6	Ausgleichungen mit dem Whittaker-Henderson-Verfahren . . . . .	39
7	Ausgleichung mit dem Verfahren der kleinsten Quadrate . . . . .	41
8	Ulpian's Table: Der Gebrauch dieser Tafel ist für Spezialisten heute noch unklar. (Quelle: [9]). . . . .	50
9	Todesursachen im Jahre 1632. (Quelle: [12]). . . . .	51
10	Sterbetafel nach Halley. (Quelle: [2]). . . . .	52
11	Basistafel der Altersverschiebung für die Generation 1965. (Quelle: [13]).	56
12	Vergleich der Nettoeinmalprämie zwischen einer exakten Tafel und nach der Methode der Altersverschiebung. Für das Alter 60 steigt die exakte Tafel mehr, während nach der Methode der Altersverschiebung jene Werte für das Alter 80 stärker steigen. (Quelle: [13]). . . . .	59
13	Der relative Fehler $\frac{\ddot{a}_{x+\Delta}^{AS,base}}{\ddot{a}_x(t)}$ nach der Methode der Altersverschiebung, verglichen mit jenen der exakten Tafel. Die Werte der Approximation sind in Zukunft weit geringer als die exakten Werte. Daher werden die aktuellen Nettoeinmalprämien und Reserven überschätzt. (Quelle: [13]).	60
14	Logarithmus der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten für Männer seit 1947 (Quelle: [13]). . . . .	62
15	Logarithmus der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten für Frauen seit 1947 (Quelle: [13]). . . . .	62
16	Vergleich Männer/Frauen (Quelle: [16]) . . . . .	66
17	Werte von $\hat{\alpha}_x$ (Quelle: [13]). . . . .	73
18	Werte von $\hat{\beta}_x$ (Quelle: [13]). . . . .	73
19	Werte von $\hat{\kappa}_x$ (Quelle: [13]). . . . .	73
20	Österreichischer Populationstrend, berechnet von 1972 bis 2002. (Quelle: [13]). . . . .	74

21	Vergleich der Basistafel AVÖ 2005R (bezogen auf das Jahr 2001) mit der vorherigen österreichischen und den aktuellen Rententafeln aus Deutschland und der Schweiz für das Jahr 2001. Während die Rententafeln aus Deutschland und der Schweiz einen zusätzlichen Term für zufällige Schwankungen enthalten, ist dies bei der österreichischen Rententafel nicht der Fall. (Quelle: [13]). . . . .	78
22	Trend 1. Ordnung der AVÖ 2005R verglichen mit den entsprechenden Trends der DAV 2004R, ERM/F 1999 und der AVÖ 1996R. (Quelle: [13]). . . . .	80
23	Trend 2. Ordnung der AVÖ 2005R verglichen mit den entsprechenden Trends der DAV 2004R, ERM/F 1999 und der AVÖ 1996R. (Quelle: [13]). . . . .	81
24	Vergleicht die Trends der AVÖ 2005R mit den kurz- und langfristigen Trends der AVÖ 1996R. (Quelle: [13]). . . . .	82
25	Internationaler Vergleich der logarithmierten Sterbewahrscheinlichkeiten für die Generationen 1915 und 1945. (Quelle: [13]). . . . .	83
26	Internationaler Vergleich der logarithmierten Sterbewahrscheinlichkeiten für die Generationen 1965 und 2005. (Quelle: [13]). . . . .	84
27	Der Erwartungswert der zukünftigen Lebensdauer und seine 10%- und 90%-Quantile, berechnet nach der AVÖ 2005R und der AVÖ 1996R 2. Ordnung. Der graue Bereich stellt das zentrale 80% Konfidenzintervall der zukünftigen Lebensdauer entsprechend der AVÖ2005R dar. (Quelle: [13]). . . . .	88
28	Der Erwartungswert der zukünftigen Lebensdauer und seine 10%- und 90%-Quantile: Vergleich der AVÖ 2005R 2. Ordnung mit den Rententafeln 2. Ordnung aus Deutschland und der Schweiz. (Quelle: [13]). . .	90



## 1 Einleitung

Für jeden Versicherungsbetrieb ist es unentbehrlich, sich mit den Untersuchungen über den Verlauf der Sterblichkeit zu beschäftigen. In früheren Zeiten waren die zuverlässigsten Unterlagen für Prämien- und Reservenberechnungen die aus den Versicherungsbeständen abgeleiteten Sterbetafeln. Mit dem Einbezug der Daten der gesamten Bevölkerung näherte sich die Versicherungssterblichkeit der Bevölkerungssterblichkeit, wobei seit der Einführung der Bevölkerungssterbetafel in die Kalkulation der Lebensversicherung als Grundlage für die Berechnung der Beiträge und Deckungsrückstellungen im Allgemeinen nur noch jene Bevölkerungssterbetafeln benutzt werden. Das Problem ist nur, dass diese Tafeln eben nicht mehr individuell aus den Versicherungsbeständen hergeleitet werden. Auch enthielten die Bevölkerungssterbetafeln einen ausreichenden Sicherheitszuschlag, was die fehlende Motivation für Sterblichkeitsuntersuchungen an normalen Versichertenbeständen verstärkte.

Jene Ausgangslage hat sich in den letzten Jahren allerdings geändert. In der Schweiz werden die Trends direkt aus den Daten der Rentenversicherten gewonnen. Da in Österreich keine Daten über die Sterblichkeit der Rentenversicherten zur Verfügung stehen, wird der Trend der Sterblichkeitsprojektionen aus den Daten der Gesamtbevölkerung gewonnen und dann an die Rentenversicherten angepasst. In Deutschland wird ein ähnlicher Ansatz genommen. Auch die Kalkulation mittels der Rechnungsgrundlage 2. Ordnung wird mit dem zunehmenden Wettbewerb über die Überschussbeteiligung immer wichtiger. An dieser Stelle ist der Embedded Value (EV) zu erwähnen, der zur Beurteilung der Leistung eines Versicherungsunternehmens dient. Grundsätzlich wird der Embedded Value in zwei Teile aufgespalten. Dies ist auf der einen Seite der *Present Value of Future Profits* (Barwert der künftigen Gewinne), auf der anderen Seite der *Adjusted Net Asset Value* (ausgewiesenes Eigenkapital + Anpassungen zum Eigenkapital). Gerade beim PVFP spielt die Rechnungsgrundlage 2. Ordnung eine entscheidende Rolle.

All dies hat zur Folge, dass die Sterblichkeitsuntersuchungen an den Versichertenbeständen der eigenen Gesellschaft für den Versicherungsmathematiker wieder interessant werden.

Sterbewahrscheinlichkeiten kann man nicht beobachten. Man kann lediglich die relativen Häufigkeiten von Sterbefällen in Kollektiven innerhalb bestimmter Zeitabschnitte beobachten und ermitteln. Dabei spielen nicht nur die individuell zurückgelegten Zeiten der Mitglieder eines Kollektivs eine Rolle, sondern auch der allgemeine Zeitablauf. Die Sterbehäufigkeit in einem Bestand von zum Beispiel vierzigjährigen Männern ist heute wesentlich geringer als vor zwanzig oder gar vor fünfzig Jahren. Gründe dafür sind schnell gefunden. So hat der medizinische Fortschritt zu einer deutlichen Verbes-

serung der Lebenschancen und der Lebensqualität geführt, aber auch die allgemeinen Arbeits- und Lebensumstände der Bevölkerung haben sich ständig verbessert. Letzteres erklärt auch, warum die Sterblichkeit von Beamten niedriger ist als die von Arbeitern. Aber auch eine jahreszeitliche Änderung lässt sich beobachten. So ist die Sterbehäufigkeit im Winter höher als im Sommer. Daneben beobachtet man noch Abhängigkeiten vom Geschlecht, vom Familienstand und von sozialen Umständen, wie Wohnort, Beruf, Bildung und Einkommen.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten sind also für jedes Kollektiv auf Grund seiner Zusammensetzung unterschiedlich. Beobachtet nun der Versicherungsmathematiker die Sterbehäufigkeit von Kollektiven, und leitet er aus diesen Sterbehäufigkeiten die Sterbewahrscheinlichkeiten ab und wendet diese auf andere Kollektive an, so muss er sich überlegen, ob die anderen mit den ursprünglichen Kollektiven übereinstimmen. Sollte sich die Sterblichkeit eines Kollektivs mit der Zeit ändern, dann muss nach einer Änderung seiner Zusammensetzung oder nach einer Änderung der äußeren Umstände gesucht werden. Lasst sich keine Änderung der äußeren Umstände finden, so wird der Grund für die Änderung der Sterbehäufigkeiten eines Kollektivs im Zeitablauf als Zufall oder Zufallsschwankung bezeichnet. So erscheint die Erhöhung der Sterblichkeit eines Jahres infolge einer Grippewelle im statistischen Mittel als Zufallsschwankung. Als Zufall fasst man also die Auswirkungen all der Einflussgrößen zusammen, die man entweder überhaupt nicht kennt oder deren Auswirkungen man nicht voraussehen kann.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Einleitung vgl.: [3]

## 2 Ermittlung der Sterbehäufigkeiten

Als Grundlage dieses Kapitels wurden die Bücher [1], [2] und [3] verwendet.

### 2.1 Das Modell

#### 2.1.1 Allgemeines

In unserem Modell betrachten wir eine Person im Alter von  $x$  Jahren. Wir bezeichnen mit  $T(x)$  bzw.  $T_x$  ihre zukünftige Lebensdauer. Anders gesagt ist  $T_x$  somit das Alter beim Tode dieser Person.  $T$  ist dabei eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$G(t) = \mathbb{P}[T \leq t].$$

Man geht davon aus, dass die Verteilungsfunktion von  $T$  absolut stetig ist und somit eine Dichte

$$g(t)dt = \mathbb{P}[t < T < t + dt]$$

besitzt. Man könnte nun mit den Funktionen  $G(t)$  und  $g(t)$  alle möglichen Größen beschreiben, die für uns von Interesse sind. Es gibt in der Versicherungsmathematik aber eine internationale Schreibweise, die auch hier verwendet werden soll.

Die  $t$ -jährige Sterbewahrscheinlichkeit einer  $x$ -jährigen Person bezeichnet man mit dem Symbol  ${}_tq_x$ , wobei gilt:

$${}_tq_x = G(t)$$

Umgekehrt beschreibt man mit  ${}_tp_x$  die Überlebenswahrscheinlichkeit einer  $x$ -jährigen Person:

$${}_tp_x = 1 - G(t)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beobachtete Person im Alter  $x$   $s$ -Jahre überlebt und dann innerhalb von  $t$  Jahren stirbt ist definiert als:

$${}_s|_tq_x = \mathbb{P}[s < T < s + t] = G(s + t) - G(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x$$

Der Erwartungswert der noch zu verbleibenden Lebensdauer einer  $x$ -jährigen Person kann geschrieben werden als:

$$\dot{e}_x = \mathbb{E}[T(x)] = \int_0^\infty {}_tq_x dt = \int_0^\infty (1 - G(t))dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt$$

Im folgenden wird stets die Stationaritätsbedingung<sup>2</sup> gefordert. Es gilt:

$$\mathbb{P}[T_{x+s} > t] = \mathbb{P}[T_x > s + t | T_x > s], \quad s, t, x \geq 0$$

<sup>2</sup> Vgl.: [4]

Zur Stationaritätsbedingung ist äquivalent:

$$\mathbb{P}[T_x > t] = \mathbb{P}[T_0 > x + t | T_0 > x], \quad t, x \geq 0$$

Es lassen sich nun folgende offensichtliche Größen und Identitäten herleiten:

$${}_tq_{x+s} = G_{x+s}(t) = \mathbb{P}[T(x+s) < t] = \mathbb{P}[T(x) \leq s+t | T(x) > s] = \frac{G(s+t) - G(s)}{1 - G(s)}$$

$${}_tp_{x+s} = \mathbb{P}[T \geq s+t | T > s] = \frac{1 - G(s+t)}{1 - G(s)}$$

$${}_{s+t}p_x = 1 - G(s+t) = (1 - G(s)) \frac{1 - G(s+t)}{1 - G(s)} = {}_sp_x {}_tp_{x+s}$$

$${}_{s|t}q_x = G(s+t) - G(s) = (1 - G(s)) \frac{G(s+t) - G(s)}{1 - G(s)} = {}_sp_x {}_tq_{x+s}$$

### 2.1.2 Die Sterbedichte

Die Sterblichkeitintensität eines  $x$ -jährigen im Alter  $x+t$  ist definiert als die momentane Sterberate im Alter  $x+t$ , gegeben, dass die Person die  $t$  Jahre schon überlebt hat:

$$\mu_{x+t} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[t \leq T < t + \Delta t | T \geq t]}{\Delta t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(1 - G(t)) = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x$$

Mittels Integration lässt sich  ${}_tp_x$  dann schreiben als:

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

## 2.2 Definitionen

### 2.2.1 Personengesamtheiten

Eine *Personengesamtheit* ist definiert als eine Menge von Personen, die während der Beobachtungszeit nicht statisch ist, sondern sich durch Aus- und Eintritte von Personen ständig ändern kann. So ändert sich beispielsweise die Personengesamtheit „Versicherte eines Versicherungsunternehmens“ veranlasst durch die Austrittsgründe Rückkauf, Ablauf einer Versicherung oder Tod des Versicherten beziehungsweise durch den Eintrittsgrund Abschluss einer Versicherung. Eine Personengesamtheit kann *geschlossen* oder *offen* sein. Man nennt eine Gesamtheit geschlossen, falls Personen nur durch Tod ausscheiden und Eintritte nicht zugelassen sind. Abgehende Personen dieser Gesamtheit werden jedoch nicht ersetzt. Sind zusätzliche Eintritte oder Austritte aus anderen Gründen erlaubt, so bezeichnen wir diese Gesamtheit als offen.

### 2.2.2 Sterbewahrscheinlichkeiten

Im Folgenden bezeichnen wir das Alter der Männer stets mit dem Buchstaben  $x$  und das Alter der Frauen mit  $y$ . Der Einfachheit halber werden meist die Formeln nur für  $x$  angegeben, analoges gilt natürlich auch für  $y$ .

Wir betrachten die Personengesamtheit  $L$  und bezeichnen mit  $L_x$  die Menge der zu einem Zeitpunkt  $t$  lebenden  $x$ -jährigen Männer. Es unterliegen alle Personen in  $L$  dem Todesfallrisiko. Mit  $T_x$  bezeichnen wir die Menge aller verstorbenen Männer, die zu einem Zeitpunkt  $t$   $x$  Jahre alt waren. Eine Person ist  $x$ -jährig, falls sie das  $x$ -te Lebensjahr, aber noch nicht das  $x+1$ -te Lebensjahr vollendet hat. Wenn  $A$  eine Menge ist, so bezeichnen wir mit  $|A|$  die Anzahl der Elemente von  $A$ . Es gilt:  $l_x = |L_x|$  und  $t_x = |T_x|$ .  $t$  heißt auch *absolute Sterbehäufigkeit*.

Als *relative Sterbehäufigkeit*  $q$  (auch *rohe Sterbewahrscheinlichkeit* genannt) bezeichnen wir das Verhältnis der Anzahl der Personen aus  $L$ , die gestorben sind, zur Anzahl der Personen, die unter dem Risiko standen zu sterben.

$$q_x = \frac{t_x}{l_x}$$

Die *relative Sterbehäufigkeit auf einer Risikoklasse* definieren wir durch

$$q(r_{ij}) = \frac{t(r_{ij})}{l(r_{ij})}$$

mit  $l(r_{ij}) = |L(r_{ij})|$ ,  $t(r_{ij}) = |T(r_{ij})|$ ,  $T(r_{ij}) \subseteq L(r_{ij})$  und  $T(r_{ij}) \cap L'(r_{ij}) = \emptyset$ , d.h. die  $t(r_{ij})$  Toten sind aus  $L(r_{ij})$  hervorgegangen.

$r_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m_i$ ) bezeichnet dabei die  $j$ -te Ausprägung des  $i$ -ten Risikomerkmals.  $n$  steht für die Anzahl der betrachteten Risikomerkmale,  $m_i$  für die Anzahl der Ausprägungen für das  $i$ -te Risikomerkmal. Ist das Alter das Risikomerkmal, schreibt man kurz  $L_x$ ,  $T_x$  oder  $q_x$ .

## 2.3 Methoden zur Ermittlung geeigneter Stichproben

Im Folgenden behandeln wir einige Methoden zur Ermittlung relativer Sterbehäufigkeiten. Wir werden die Ermittlung der Häufigkeiten am Beispiel des Risikomerkmals „Alter“ darstellen. Zunächst wollen wir aber noch zeigen, wie die zu beobachtenden Personengesamtheiten in einem Koordinatensystem dargestellt werden können.

### 2.3.1 Darstellung von Personengesamtheiten

Auf der  $x$ -Achse eines Koordinatensystems wird die Beobachtungszeit aufgetragen, auf der  $y$ -Achse das Geburtsdatum jedes Mitgliedes einer Personengesamtheit. Mit  $b$

bezeichnen wir die Beobachtungszeit und mit  $g$  den Geburtszeitraum. Wir verwenden folgende Schreibweisen:

$\Delta z$  ist die Länge einer Zeitperiode,  $\dot{z}$  und  $\ddot{z}$  sind Zeitpunkte.  $z$  ist somit ein Zeitraum, der zum Zeitpunkt  $\dot{z}$  beginnt,  $\Delta z$  andauert und zum Zeitpunkt  $\ddot{z}$  endet. Man erhält die Intervalldarstellung  $z = [\dot{z}, \ddot{z}]$ .

Die Strecke  $\overline{AB}$  entspricht der Lebenszeit eines Mitgliedes. Sie wird auch als *Lebenslinie* bezeichnet. Das exakte Alter einer Person entspricht zum Zeitpunkt  $\dot{b}$  somit genau der Länge  $\dot{b} - \dot{g}$ . Interessieren wir uns für die Anzahl der lebenden Personen zu einem Zeitpunkt  $\dot{b}_1$ , so zählt man die Schnittpunkte einer zur Geburtszeitachse parallelen Geraden durch  $\dot{b}_1$  mit sämtlichen Lebenslinien. Die Anzahl der Einjährigen ist gleich der Zahl der Lebenslinien, die die Strecke  $\overline{WX}$  schneiden. Die Zahl der Endpunkte von Lebenslinien im Parallelogramm WUXV beschreibt die Todesfälle  $T_1$ .

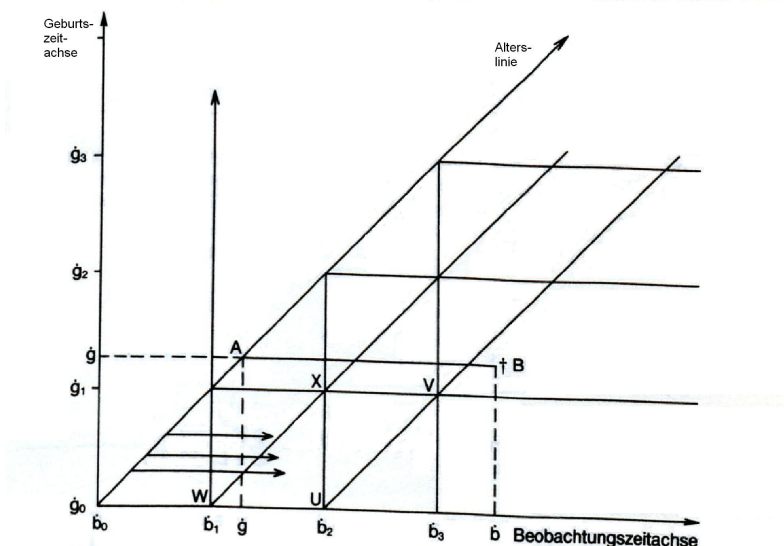


Abbildung 1: Darstellung von Personengesamtheiten (Quelle: [3])

### 2.3.2 Die Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner

Mit  $L_{x,d}(b)$  definieren wir die Gesamtheit der Personen, die während des Beobachtungszeitraumes  $b$  genau den Bruchteil  $d$  der Altersperiode  $x$  zu  $L$  gehören ( $0 < d \leq 1$ ), oder durch Tod aus  $L$  ausscheiden.

Wir betrachten nun zwei aufeinanderfolgende Beobachtungsperioden  $b_1$  und  $b_2$  (geschrieben als  $b = b_1/b_2$ ). Für eine geschlossene Personengesamtheit  $L_{x,1}(b, g_1)$  lässt

sich zur Berechnung der relativen Sterbehäufigkeit eine exakte Methode angeben:

$$q_x^G(b) = \frac{t_{x,1}(b, g_1)}{l_{x,1}(b, g_1)}$$

Wegen des Bezuges zum Geburtsjahrgang einer Person nennt man dieses Verfahren auch Geburtsjahrmethode. Jenes Verfahren ist von Vorteil, da sowohl die im Zähler als auch die im Nenner stehende Menge direkt beobachtet werden kann. Es wird jedoch auf Informationen verzichtet, da einige beobachtete Todesfälle nicht berücksichtigt werden.

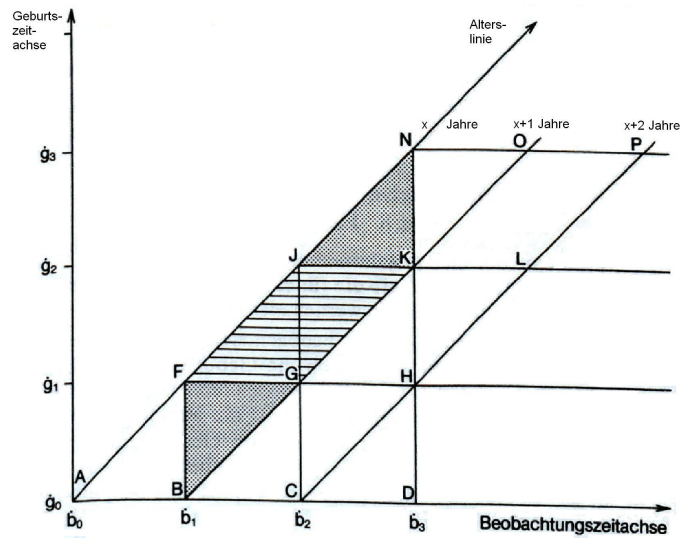


Abbildung 2: Die Geburtsjahrmethode (Quelle: [3])

### 2.3.3 Die Sterbejahrmethode nach Raht

Wir betrachten wieder den Beobachtungszeitraum  $b = b_1/b_2$ . Im Gegensatz zur Geburtsjahrmethode, die nur die Toten  $T_x(b, g_1)$  aus dem Parallelogramm FGKJ (Abbildung 2) berücksichtigen würde, werden in der Sterbejahrmethode sämtliche im Beobachtungszeitraum eingetretenen Todesfälle als Stichprobe gewählt. Alle  $x$ -jährig Gestorbenen  $T_x(b, g_0/g_1/g_2)$  aus dem Parallelogramm BKOF (Abbildung 3) werden somit berücksichtigt. Aus der Annahme, dass gilt

$$t_x(b_2, g_2) \approx t_x(b_3, g_2), \text{ d.h.}$$

$$t_x(b_2, g_2) \approx \frac{1}{2}t_x(b_2/b_3, g_2),$$

lässt sich weiter schließen, dass die  $T_x(b_2, g_2)$  auch nur aus der Hälfte von  $L_x(b_2, g_2)$  hervorgegangen sind, d.h.:

$$t_x(b_1, g_0) \approx \frac{1}{2} t_x(b_0/b_1, g_0).$$

Die relative Sterbehäufigkeit erhalten wir dann durch:

$$q_x^S = \frac{t_x(b)}{\frac{1}{2} \cdot l_x(b_0, g_0) + l_x(b_1, g_1) + \frac{1}{2} \cdot l_x(b_2, g_2)}$$

Da  $b_0$  nicht zum Beobachtungszeitraum gehört, müssen wir den Nenner noch umformen. Aus

$$l_x(b_0, g_0) = l_x(b_1, g_0) + t_x(b_0, g_0),$$

$$l_x(b_2, g_2) = l_x(b_3, g_2) + t_x(b_2, g_2),$$

$$l_x(b_1, g_1) + \frac{1}{2} \cdot l_x(b_2, g_2) = l_x(b_1/b_2, g_1/g_2) - \frac{1}{2} \cdot l_x(b_2, g_2)$$

und der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Sterbefälle über alle Geburtsjahrgänge, d.h.  $t_x(b_0, g_0) \approx t_x(b_2, g_2)$ , erhalten wir

$$q_x^S = \frac{t_x(b)}{l_x(b_1/b_2, g_1/g_2) - \frac{1}{2} \cdot l_x(\ddot{b}_2, g_2) + \frac{1}{2} \cdot l_x(\dot{b}_1, g_0)}$$

Man nennt dieses Verfahren Sterbejahrmethode, da alle Sterbefälle einer Beobachtungsperiode erfasst werden.

### 2.3.4 Das Sterbeziffernverfahren nach Farr

Beim sogenannten Sterbeziffernverfahren werden die Bestandsveränderungen im Gegensatz zur Geburtsjahrmethode und zur Sterbejahrmethode durch die Durchschnittsbildung der Personengesamtheit am Anfang und am Ende eines Jahres berücksichtigt

Wir betrachten die Sterbeziffer

$$k_x = \frac{t_x(b_1, g_0/g_1)}{\frac{1}{2}(l_x(\dot{b}_1) + l_x(\ddot{b}_1))}$$

des Beobachtungsjahres  $b = b_1$  und erhalten einen Wert für die relative Sterbehäufigkeit durch

$$q_x^Z = \frac{2k_x}{2 + k_x}.$$

Zu beachten ist, dass  $k_x$  nicht bereits als Wert für die relative Sterbehäufigkeit angesehen werden kann. Die Sterbeziffer würde eine zu hohe Sterblichkeit anzeigen, da sowohl in  $L_x(\dot{b}_1)$  und  $L_x(\ddot{b}_1)$  nicht die  $x$ -jährigen erfasst sind, die bereits vor diesen Stichtagen gestorben sind.



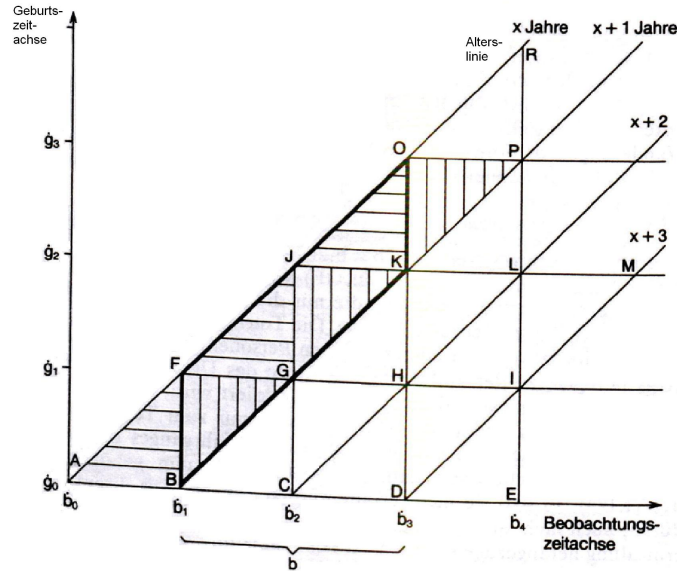


Abbildung 3: Die Sterbejahrmethode (Quelle: [3])

### 2.3.5 Die Verweildauerermethode

Sowohl bei der Geburtsjahrmethode als auch bei der Sterbejahrmethode werden für die Berechnung der relativen Sterbehäufigkeit geschlossene Personengesamtheiten betrachtet. Wanderungen werden vernachlässigt. Den Methoden fehlt also eine Bewertung der Tatsache, dass eine Person aus  $L_x(b)$  oft nicht eine ganze Altersperiode während der Beobachtungszeit  $b$  dem Todesfallrisiko ausgesetzt ist. Auch beim Sterbeziffernverfahren werden Zu- und Abgänge, die innerhalb eines Beobachtungszeitraumes stattfinden, nicht miteinbezogen. Um dies zu berücksichtigen, müssen wir die Dauer  $d$ , die eine Person zu  $L_x(b)$  gehört, in die Berechnung von  $q_x(b)$  einbeziehen. Wir bestimmen die von jeder Person in ihrer Risikoklasse verbrachte Zeit und ordnen ihr ein entsprechendes Gewicht zu. Personen erhalten das Gewicht „1“, wenn sie mit einer ganzen Altersperiode in den Beobachtungszeitraum fallen, und ein Gewicht kleiner als „1“ entsprechend dem Verhältnis tatsächliche Verweilzeit in einer Risikoklasse zu maximal möglicher Verweilzeit. Die relative Sterbehäufigkeit für eine Personengesamtheit  $L_x(b)$ , in der die Personen maximal für die Dauer einer Altersperiode unter dem Todesfallrisiko stehen, lautet:

$$q_x^D = \frac{t_x(b)}{t_x(b) + \sum_d d \cdot l'_{x,d}(b)}, \quad 0 < d \leq 1,$$

wobei  $l' = l - t$  ist.

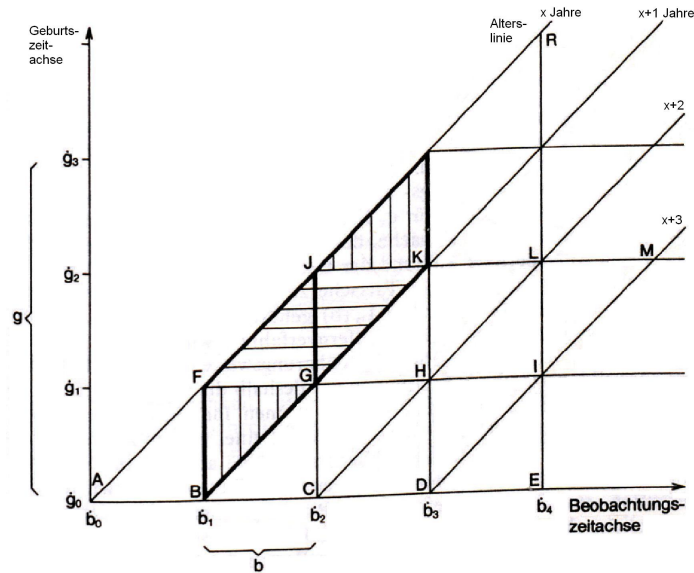


Abbildung 4: Das Sterbeziffernverfahren (Quelle: [3])

### 2.3.6 Zusammenhänge

Die grundsätzliche Form zur Berechnung der relativen Sterbehäufigkeit ist bei allen Methoden die selbe, nämlich

$$q_x = \frac{t_x}{l_x}.$$

Auch die Bestimmung der Anzahl der Toten  $t_x$  ist in allen Methoden gleich. Lediglich bei der Bestimmung der Anzahl der Lebenden  $l_x$  besteht ein Unterschied. Die Geburtsjahrmethode lässt sich nur für geschlossene Personengesamtheiten uneingeschränkt anwenden. Somit erhalten wir für geschlossene Personengesamtheiten mit der Geburtsjahr-, der Sterbejahr- und der Verweildauer methode einen exakten Wert, der bei allen drei Methoden für geschlossene Personengesamtheiten identisch ist. Für offene Personengesamtheiten liefert die Verweildauer methode die genaueste Schätzung der Sterbewahrscheinlichkeit. Bei geschlossenen Personengesamtheiten hat jede Person die Risikozeit 1, weshalb sich in diesem Fall die Verweildauer methode auf die Geburtsjahrmethode reduziert.

### 3 Ausgleichsverfahren

Das folgende Kapitel wird auf Basis der Bücher [2] und [3] behandelt.

Wir wollen uns hier mit verschiedenen Verfahren zur Ausgleichung roher Sterbewahrscheinlichkeiten beschäftigen. Im folgenden werden wir einige Verfahren angeben, um aus rohen Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$ , die „tatsächlichen“ Sterbewahrscheinlichkeiten  $q'_x$  zu berechnen.

Sterblichkeitsuntersuchungen sind keinesfalls die einzige Anwendung der Ausgleichsverfahren. Sie finden in vielen naturwissenschaftlichen Bereichen wie zum Beispiel Physik, Astronomie, etc. Verwendung. Es gibt mittlerweile eine Vielzahl von Ausgleichsverfahren. Wir werden uns hier auf jene beschränken, die für die Versicherungspraxis wichtig sind.

#### 3.1 Allgemeines zur Ausgleichung

##### 3.1.1 Das Ziel der Ausgleichung

Im vorherigen Kapitel haben wir aus den beobachteten Daten die relativen Sterbehäufigkeiten  $q_x$  bestimmt. Der Einfachheit halber betrachten wir Sterbehäufigkeiten, die nur vom Alter  $x$  abhängen. Desweiteren sei der Parameterwert  $x$  ganzzahlig und äquidistant mit dem Abstand 1.

**Definition 3.1** (Altersbereich). Sei  $x_{n+1} - x_n = 1$ . Dann ist  $x_n = x_0 + n$ . Als Altersbereich  $X$  wird das Parameterintervall  $[x_0, x_0 + n]$  bezeichnet.

**Definition 3.2.** Die Menge der  $q_x$  bezeichnen wir mit  $Q$ .  $Q = \{q_x/x \in X\}$ .

Bei der Beobachtung der ermittelten Daten können im statistischen Sinne zufällige Schwankungen auftreten. Desweiteren kann die Stichprobe unvollständig oder sogar fehlerhaft sein. Dies alles kann jedenfalls die Ursache dafür sein, dass die beobachteten Werte  $q_x$  einen im Allgemeinen sprunghaften Verlauf haben, der oftmals weder praxisgerecht noch wünschenswert ist. Insofern hätte man gerne einen gleichmäßigen Verlauf der versicherungstechnischen Grundgrößen oder eine formelmäßige Darstellung, die für eine weitere Verwendung angewendet werden kann. Das Ziel der Ausgleichung ist es nun, die beobachteten Werte  $q_x$  mit Hilfe mathematischer Verfahren so zu ändern, dass sie den Anforderungen genügen. Man nennt diesen Vorgang *Ausgleichung*, das Verfahren selber *Ausgleichsverfahren* und die abgeänderten Werte *ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten*. Im Folgenden werden die ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten mit  $q'_x$  bezeichnet. Was „tatsächliche“ Sterbewahrscheinlichkeiten sind, hängt von der Wahl des Ausgleichsverfahren ab. Jede Ausgleichung

beruht dabei auf einer Annahme über den tatsächlichen Verlauf der Sterbewahrscheinlichkeiten. Diese Annahme hängt von einigen zu treffenden Voraussetzungen ab.

### 3.1.2 Zusammenstellung der Ausgleichsmethoden

Wir betrachten nun eine Abbildungsvorschrift, die die  $q_x$  auf die ausgeglichenen Werte  $q'_x$  abbildet. Diese Abbildungsvorschrift hängt von mehreren Faktoren ab. Zum Einen von den beobachteten Werten  $q_x$ , dem Alter  $x$  und einer Anzahl unbekannter Parameter  $a_k$ . Diese  $a_k$  sind für jedes Ausgleichsverfahren und jede Folge beobachteter Werte zu bestimmen.

**Definition 3.3** (Ausgleichsfunktion und Ausgleichsparameter). *Wir definieren die Abbildungsvorschrift  $F$  wie folgt:*

$$q'_x = F(Q, x, a_k(x, Q)), \quad k = 1, \dots, r \in \mathbb{N}$$

$F$  bezeichnen wir dabei als *Ausgleichsfunktion* und  $a_k$  als *Ausgleichsparameter*.

Die Ausgleichsverfahren lassen sich nun in 3 Gruppen einteilen:

- graphische Methoden
- mechanische Methoden
- analytische Methoden

Die *graphische Ausgleichsmethode* besteht darin, dass man zuerst die beobachteten Werte in einem Diagramm als Punkte einzeichnet. Man versucht dann eine möglichst „glatte“ Kurve zu zeichnen, die von den Rohwerten nur „wenig“ abweicht. In der Regel wendet man diese Methode für Werte an, die für die Versicherungsunternehmer nicht von großem Interesse sind ( $x \geq 85$ ). Diese Altersklassen weisen häufig auch relativ große Zufallsschwankungen auf, da sie nicht mehr so stark besetzt sind. Wir werden uns mit dieser Methode aber nicht mehr weiter befassen.

Die Idee der *mechanischen Ausgleichung* besteht darin, die Zufallsschwankungen und Fehler auf mehrere Werte auszugleichen. Im Allgemeinen verringern sie sich dadurch, da sie nicht alle die selbe Richtung haben.

Sei  $F$  eine lineare Funktion der Form

$$q'_x = \sum_{k=-r}^{+s} a_k \cdot q_{x+k}, \quad r, s \in \mathbb{N}$$

und die  $a_k$  sind unabhängig von  $x$  und  $q_x$ . Um nun einen ausgeglichenen Wert  $q'_x$  zu bekommen, betrachtet man in einer Umgebung von  $x$  die beobachteten Werte  $q_x$

und bildet daraus ein gewichtetes Mittel. Entfernter liegende Werte werden meist weniger berücksichtigt, als näher liegende Werte. Zu beachten ist, dass dadurch nicht alle vorgegebenen beobachteten Werte ausgeglichen werden können. Ein jeweils linker und rechter Randbereich bleibt unausgeglichen, die sogenannten *Randwerte*. Es gibt nun verschiedene Bestimmungsmethoden für die Parameter  $a_k$ , die für jede Funktion einmal bestimmt werden und dann fest liegen. Daraus ergeben sich die verschiedenen mechanischen Ausgleichsfunktionen. Die mechanische Ausgleichung hat eine glättende Wirkung.

Bei den *analytischen Methoden* lautet die allgemeine Darstellung

$$q'_x = F(x, a_k(x, Q)).$$

Die Funktion  $F$  ist eine nichtlineare Funktion in  $x$  und  $a_k$ , wobei die Parameter  $a_k$  von  $x$  und  $q_x$  abhängig sein können. Im Gegensatz zu den mechanischen Methoden müssen bei der analytischen Ausgleichung die Parameter  $a_k$  für jeden Altersbereich und jede Wertereihe neu bestimmt werden. Man gibt nun eine Ausgleichsfunktion explizit vor, von der man annimmt, dass sie den Verlauf der tatsächlichen Sterbewahrscheinlichkeiten wiedergibt. Die Parameter  $a_k$  werden mit Hilfe von zusätzlichen Forderungen, die man an die Ausgleichsfunktion  $F$  stellt, bestimmt. Man nennt diese Forderungen auch *Ausgleichsbedingungen*.

Die Wahl, ob man eine mechanische oder analytische Ausgleichung benutzen will, hängt zum Einen von den gemessenen Werten ab und zum Anderen von den Anforderungen, die man an die ausgeglichenen Werte stellt.

## 3.2 Mechanische Ausgleichsverfahren

Prinzipiell sind mechanische Ausgleichsverfahren, wie oben beschrieben, gewichtete Mittelwertbildung. Sie haben den Vorteil, dass sie ein recht einfach zu handhabendes Verfahren sind.

### 3.2.1 Allgemeine Form der mechanischen Ausgleichung

**Definition 3.4** (mechanisch). *Eine Ausgleichsfunktion*

$$q'_x = F(Q, x, a_k(x, Q))$$

heißt *mechanisch*, wenn folgendes gilt:

- (a)  $F$  hängt nicht explizit von  $x$  ab
- (b)  $a_k \in \mathbb{R}$  sind unabhängig von  $x$  und  $Q$

(c)  $F$  ist linear in  $q_x$  und  $a_k$

(d)  $F$  lässt sich in der Form schreiben:

$$q'_x = \sum_{k=-r}^{+s} a_k \cdot q_{x+k}, \quad r + s \leq n$$

(e)

$$\sum_{k=-r}^{+s} a_k = 1.$$

Die Parameter  $a_k$  sind die Gewichte. Die Anzahl und die Größe der  $a_k$  spielen daher eine wichtige Rolle, um eine gute Wirkung zu erzielen. Bei den mechanischen Methoden hat die Wahl des Altersbereiches keine Auswirkung auf die ausgeglichenen Werte. Die Funktionen können daher unabhängig von der Festlegung der auszugleichenden Teilfolge angewendet werden.

**Definition 3.5.** Eine mechanische Ausgleichsfunktion

$$q'_x = \sum_{k=-r}^{+s} a_k \cdot q_{x+k} \quad \text{heißt}$$

(a) zentral, wenn gilt  $r = s$

(b) symmetrisch, wenn sie zentral ist und  $a_k = a_{-k}$  gilt. (Für alle  $k = 1, \dots, r$ )

(c) invariant gegen die Funktion  $f(x)$ , wenn gilt

$$\sum_{k=-r}^{+s} a_k \cdot f(x+k) = f(x), \quad \text{für alle } x \in X$$

(d) exakt vom Grade  $m$ , wenn sie invariant gegen ein Polynom

$$P(x) = \sum_{v=0}^m b_v \cdot x^v \quad \text{vom Grade } m \text{ ist.}$$

**Satz 3.6.** Eine Ausgleichsfunktion

$$q'_x = \sum_{k=-s}^{+r} a_k \cdot q_{x+k}$$

ist invariant gegen ein Polynom

$$P(x) = \sum_{v=0}^m b_v \cdot x^v$$

vom Grade  $m \geq 1$  genau dann, wenn für die  $a_k$  gilt:

$$\sum_{k=-s}^{+r} k^v \cdot a_k = 0 \quad \text{für alle } v = 1, \dots, m$$

**Folgerung 3.7.** Aus Satz 3.6 und Definition 3.5 können wir schließen:

(1) Ist eine Ausgleichsfunktion exakt vom Grade  $m$ , so ist sie invariant gegen alle Polynome vom Grade  $m$ .

(2) Für eine symmetrische Ausgleichsfunktion vereinfacht sich die Bedingung aus 3.6 zu

$$\sum_{k=1}^r k^{2v} \cdot a_k = 0 \quad \text{für alle } v \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

(3) Ist eine symmetrische Ausgleichsfunktion exakt vom Grade  $2m$ , so ist sie auch exakt vom Grade  $2m + 1$ .

(4) Jede symmetrische Ausgleichsfunktion ist exakt mindestens vom Grade 1.

### 3.2.2 Methode von Finlaison-Wittstein

Man bildet zunächst für alle  $x$

$$q_x'' = \frac{1}{5}(q_{x-2} + q_{x-1} + q_x + q_{x+1} + q_{x+2}). \quad (1)$$

Dann wiederholt man diesen Vorgang und erhält

$$q_x' = \frac{1}{5}(q_{x-2}'' + q_{x-1}'' + q_x'' + q_{x+1}'' + q_{x+2}''). \quad (2)$$

Nun setzt man (1) in (2) und erhält

$$\begin{aligned} q_x' &= \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{5}(q_{x-4} + q_{x-3} + q_{x-2} + q_{x-1} + q_x) + \frac{1}{5}(q_{x-3} + q_{x-2} + q_{x-1} + q_x + q_{x+1}) \right. \\ &\quad + \frac{1}{5}(q_{x-2} + q_{x-1} + q_x + q_{x+1} + q_{x+2}) + \frac{1}{5}(q_{x-1} + q_x + q_{x+1} + q_{x+2} + q_{x+3}) \\ &\quad \left. + \frac{1}{5}(q_x + q_{x+1} + q_{x+2} + q_{x+3} + q_{x+4}) \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Durch das Zusammenfassen der Terme kommt man auf das Ausgleichsverfahren von Finlaison-Wittstein:

$$\begin{aligned} q_x' &= 0,2q_x + 0,16(q_{x-1} + q_{x+1}) + 0,12(q_{x-2} + q_{x+2}) \\ &\quad + 0,08(q_{x-3} + q_{x+3}) + 0,04(q_{x-4} + q_{x+4}) \quad (4) \end{aligned}$$

Man kann diese Methode auch wie folgt beschreiben:

Zunächst lege man durch je 2 Werte auf der  $x$ -Achse eine Gerade. Diese zwei Werte sollen den Abstand 5 haben.  $g_n$  sei die Gerade, die durch  $(n, q_n)$  und  $(n + 5, q_{n+5})$  geht.

$$g_n(z) = q_n + \frac{q_{n+5} - q_n}{5}(z - n). \quad (5)$$

Die ausgeglichenen Werte  $q'_x$  ergeben sich dann, in dem man das arithmetische Mittel aus  $g_{x-i}(x)$  für  $0 \leq i \leq 4$  bildet. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 g_{x-i}(x) &= \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 \left( q_{x-i} + \frac{q_{x-i+5} - q_{x-i}}{5}(x - x + i) \right) \\ &= \frac{1}{5} \left( \sum_{i=0}^4 q_{x-i} + \frac{i}{5}(q_{x-i+5} - q_{x-i}) \right) = \frac{q_x}{5} + \frac{1}{25} \sum_{i=1}^4 (i \cdot q_{x-i+5} + (5-i)q_{x-i}) \\ &= \frac{q_x}{5} + \frac{1}{25} \sum_{i=1}^4 (5-i) \cdot (q_{x-i} + q_{x+i}). \quad (6) \end{aligned}$$

Vergleicht man (6) nun mit (4), so erhält man

$$q'_x = \frac{q_x}{5} + \frac{1}{25} \sum_{i=1}^4 (5-i) \cdot (q_{x-i} + q_{x+i}). \quad (7)$$

Diese Methode besteht im Grunde aus 2 Schritten:  $Q = \{q_x/x \in X\}$  wird in  $w$  Klassen aufgeteilt. Eine Interpolationsfunktion wird dann durch eine geeignete Anzahl benachbarter Werte in den einzelnen Klassen gelegt. Im zweiten Schritt wird über alle  $w$  Klassen der Mittelwert gebildet. Diese Methode wird häufig angewendet.



### 3.2.3 Methode von G. King

Die Darstellung der folgenden Methode hält sich an die Ausarbeitung von Walter Saxer in [5].

G. King hat ein mechanisches Ausgleichsverfahren entwickelt, das zum Einen rechnerisch sehr bequem ist, zum Anderen aber auch wahrscheinlichkeitstheoretisch gute Resultate liefert. Dabei ist jedoch zu beachten, dass es vielleicht nicht für das ganze Lebensintervall  $[0, w]$  eines Menschen geeignet ist, sondern nur für ein Teilintervall. Beispielsweise Männer, Alter 16 - 82 Jahre, und Frauen, Alter 15 - 81 Jahre.

Zunächst werden bei dieser Methode die sogenannten *Kardinalwerte* bestimmt. Diese sind die ausgeglichenen Werte  $q'_x$  für das Alter  $x$ , welche sich jeweils um 5 Jahre unterscheiden. Die Form der Kardinalpunktfolge ist demnach:

$$x, x + 5, x + 10, \dots$$

Um nun die ausgeglichenen Werte  $q'_x$  an den Kardinalstellen zu bestimmen, verwendet man die *Newton'sche Interpolationsformel*, die wiederum auf den folgenden Spezialfall angewendet wird.

Wir bilden zunächst die Summe aus den rohen Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$ :

$$S_x = \sum_{k=x_0}^{x-3} q_k, \quad \text{wobei } x_0 \leq x - 3 \quad (8)$$

Wir betrachten diese Summe für  $x = x_0, x_0 + 5, x_0 + 10, \dots$  und berechnen die Werte  $w$  nach folgender Gleichung

$$w_x = \frac{S_{x+5} - S_x}{5} = \frac{q_{x+2} + q_{x+1} + q_x + q_{x-1} + q_{x-2}}{5}. \quad (9)$$

$w$  kann als Hilfsgröße angesehen werden, die als Durchschnitt von 5 rohen Werten eine Glättung bewirkt. Die zu interpolierenden Werte  $S_x = S_{5\varrho}$  seien für  $\varrho = 0, 1, 2, 3$  bekannt. Gemäß der Newton'schen Interpolationsformel 3. Ordnung soll der Wert von  $S_{5(\varrho+\sigma)}$  bestimmt werden. Dazu setzen wir folgende Werte

$$\begin{aligned} n = 3, \quad h = 1, \quad x_0 = \varrho, \quad x_1 = \varrho + 1, \quad x_2 = \varrho + 2, \quad x_3 = \varrho + 3, \\ x = \varrho + \sigma \end{aligned}$$

in das Newton'sche Interpolationspolynom  $n$ -ter Ordnung

$$\begin{aligned} f(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0 (x - x_0)}{h \cdot 1!} + \frac{\Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1)}{h^2 \cdot 2!} \\ + \dots + \frac{\Delta^n y_0 (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})}{h^n \cdot n!} \quad (10) \end{aligned}$$

und erhalten

$$S_{5\varrho+5\sigma} = S_{5\varrho} + \binom{\sigma}{1} \Delta S_{5\varrho} + \binom{\sigma}{2} \Delta^2 S_{5\varrho} + \binom{\sigma}{3} \Delta^3 S_{5\varrho}. \quad (11)$$

Wenn die Funktionswerte an den Stellen  $x, x+h, \dots, x+nh$  gegeben sind durch die Werte  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , können diese Differenzen gemäß dem folgenden Schema berechnet werden:

$$\begin{array}{r|l} x_0 = x & y_0 \\ x_1 = x + h & y_1 \\ x_2 = x + 2h & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n = x + n \cdot h & y_n \end{array} \begin{array}{l} \Delta y_0 \\ \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_{n-1} \end{array} \begin{array}{l} \Delta^2 y_0 \\ \vdots \\ \Delta^2 y_{n-1} \end{array} \dots$$

wobei  $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ ,  $\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$ , usw.

Setzt man für  $\sigma = \frac{8}{5}$  bzw.  $\sigma = \frac{7}{5}$ , so erhalten wir

$$S_{5\varrho+8} = S_{5\varrho} + 1,6\Delta S_{5\varrho} + 0,48\Delta^2 S_{5\varrho} - 0,064\Delta^3 S_{5\varrho} \quad (12)$$

$$S_{5\varrho+7} = S_{5\varrho} + 1,4\Delta S_{5\varrho} + 0,28\Delta^2 S_{5\varrho} - 0,056\Delta^3 S_{5\varrho} \quad (13)$$

Durch Subtraktion dieser beiden Werte erhalten wir

$$S_{5\varrho+8} - S_{5\varrho+7} = 0,2\Delta S_{5\varrho} + 0,2\Delta^2 S_{5\varrho} - 0,008\Delta^3 S_{5\varrho}, \quad (14)$$

oder unter Benutzung der  $w$ -Werte

$$S_{5\varrho+8} - S_{5\varrho+7} = w_{5\varrho} + \Delta w_{5\varrho} - 0,04\Delta^2 w_{5\varrho}. \quad (15)$$

Nach der Definition von  $S_x$  steht auf der linken Seite von (15)

$$S_{5\varrho+8} - S_{5\varrho+7} \approx \sum_{k=x_0}^{5\varrho+8-3} q_k - \sum_{k=x_0}^{5\varrho+7-3} q_k = q_{5\varrho+8-3} = q_{5\varrho+5}.$$

Da auf der rechten Seite von 15 lauter geglättete Werte stehen, kann man die gefundene Größe  $q_{5\varrho+5}$  als ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeit betrachten. Allgemein gilt:

$$q'_{x+5} = w_x + \Delta w_x - 0,04\Delta^2 w_x \quad (16)$$

Lösen wir die Differenzen auf und gehen wir zum Alter  $x$  über, gilt folgendes:

$$q'_{x+5} = w_x + w_{x+5} - w_x - 0,04(w_{x+10} - 2w_{x+5} + w_x) \quad (17)$$

$$q'_{x+5} = 1,08w_{x+5} - 0,04(w_{x+10} + w_x) \quad (18)$$

$$q'_x = 1,08w_x - 0,04(w_{x+5} + w_{x-5}) \quad (19)$$

Beginnt man mit dem Alter  $x_0$ , muss man den frühesten Kardinalpunkt  $x_0 + 7$  betrachten, da bei der Berechnung von  $q'_x$  der Wert  $w_{x-5}$  vorkommt und in  $w_{x-5}$  der Wert  $q_{x-7}$ . Demnach hängt der ausgeglichene Wert  $q'_x$  vom rohen Wert  $q_{x\pm 7}$  ab. Die Methode von G. King liefert brauchbare Ergebnisse, allerdings eben nur in den mittleren Bereichen einer Sterbetafel.

Durch Verschiebung des Ausgangsalters  $x_0$  sind prinzipiell fünf verschiedene Folgen von Kardinalpunkten möglich, d.h. (7, 12, 17, ...), (8, 13, 18, ...), (9, 14, 19, ...), (10, 15, 20, ...) und (11, 16, 21, ...) stehen zur Auswahl. Damit die richtige Wahl der Kardinalpunkte getroffen wird, werden statistische Tests herangezogen.

Nach Berechnung der ausgeglichenen Werte in den Kardinalpunkten, folgt die Bestimmung der zwischen  $x$  und  $x + 5$  liegenden ausgeglichenen Werte  $q'_{x+\xi}$  mit Hilfe der *Karup'schen Interpolationsformel*.

Zuerst bildet man das Karup'sche Polynom 3. Ordnung:

$$f(x+h) = y_h + x\Delta y_{h-1} + \frac{x(x+1)}{2}\Delta^2 y_{h-1} + \frac{x^2(x-1)}{2}\Delta^3 y_{h-1} \quad (20)$$

Diese Formel benutzen wir für den folgenden Spezialfall:  $h = t$ ,  $x = \frac{\xi}{5}$ , wobei  $\xi$  die Werte 1,2,3,4 annehmen kann.

$$f\left(t + \frac{\xi}{5}\right) = y_t + \frac{\xi}{5}\Delta y_{t-1} + \frac{\xi^2 + 5\xi}{50}\Delta^2 y_{t-1} + \frac{\xi^3 - 5\xi^2}{250}\Delta^3 y_{t-1} \quad (21)$$

Die  $y_t$  sollen in der Gleichung (21) schon die ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten bedeuten,  $t$  sei  $x$  und  $t + 1$  sei  $x + 5$ . Weiteres sei  $t + \frac{\xi}{5} = x + 1, x + 2, x + 3, x + 4$  und  $q'_{x+\xi}$  ist von den Kardinalwerten  $q'_{x-5}$ ,  $q'_x$ ,  $q'_{x+5}$  und  $q'_{x+10}$  abhängig, also von 30 rohen Sterbewahrscheinlichkeiten. Benutzen wir in Gleichung (21) die Definition der Differenzen und setzen für  $t$  die Werte  $x$  ein, erhalten wir demnach:

$$q'_{x+\xi} = q'_x + \frac{\xi}{5}\Delta q'_{x-5} + \frac{\xi^2 + 5\xi}{50}\Delta^2 q'_{x-5} + \frac{\xi^3 - 5\xi^2}{250}\Delta^3 q'_{x-5}$$

$$q'_{x+\xi} = \frac{1}{250}[-\xi(5-\xi)^2 q'_{x-5} + (5-\xi)(50+10\xi-3\xi^2)q'_x + \xi(25+20\xi-3\xi^2)q'_{x+5} - \xi^2(5-\xi)q'_{x+10}] \quad (22)$$

Schließlich verwenden wir die Gleichung (19) für die Größen  $q'_x, q'_{x+5}, \dots$  und finden das folgende Rechenschema:

$$q'_x = -0,04000w_{x-5} + 1,08000w_x - 0,04000w_{x+5}$$

$$q'_{x+1} = 0,00256w_{x-10} - 0,10560w_{x-5} + 0,98080w_x + 0,14560w_{x+5} \\ - 0,02400w_{x+10} + 0,00064w_{x+15}$$

$$q'_{x+2} = 0,00288w_{x-10} - 0,10560w_{x-5} + 0,73760w_x + 0,43200w_{x+5} \\ - 0,06880w_{x+10} + 0,00192w_{x+15}$$

$$q'_{x+3} = 0,00192w_{x-10} - 0,06880w_{x-5} + 0,43200w_x + 0,73760w_{x+5} \\ - 0,10560w_{x+10} + 0,00288w_{x+15}$$

$$q'_{x+4} = 0,00064w_{x-10} - 0,02400w_{x-5} + 0,14560w_x + 0,98080w_{x+5} \\ - 0,10560w_{x+10} + 0,00256w_{x+15}$$

### 3.2.4 Das Whittaker-Henderson-Verfahren

Die in diesem Kapitel bisher beschriebenen mechanischen Ausgleichsverfahren haben den Nachteil, dass jeweils ein linker und rechter Randbereich nicht ausgeglichen werden kann. Das Verfahren von Whittaker-Henderson eröffnet die Möglichkeit, auch die Randwerte einer Beobachtungsreihe auszugleichen. Die Ausarbeitung dieses Unterkapitels folgt u.a. T. N. E. Greville in [6] und [7].

Die Idee dieser Methode besteht darin, die Bestimmungsgleichungen für die  $a_k$  aus einer Optimierungsaufgabe herzuleiten. Generell basiert das Verfahren auf der Minimierung eines Anpassungsmaßes bezüglich der ausgeglichenen an die beobachteten Werte in (23), mit gleichzeitiger Minimierung der Glattheit der Ausgleichskurve (Glättemaß) in (24).

Whittaker wählt bei einer vorgegebenen Wertereihe  $Q$  als Anpassungsmaß

$$\sum_{k=0}^n (q'_{x_0+k} - q_{x_0+k})^2 \quad (23)$$

und als Glättemaß

$$\sum_{k=0}^{n-s} (\Delta^s q'_{x_0+k})^2, \quad s \in \mathbb{N} \quad (24)$$

mit

$$\Delta^s q'_{x_0+k} = \sum_{v=0}^s (-1)^v \binom{s}{v} q'_{x_0+k+v}, \quad (25)$$

der  $s$ -ten Differenz von  $q'_{x_0+k}$ .

Wir präzisieren dann (23) und (24) und formulieren die Optimierungsaufgabe als

$$\sum_{k=0}^n w_k (q'_{x_0+k} - q_{x_0+k})^2 + g \cdot \sum_{k=0}^{n-s} (\Delta^s q'_{x_0+k})^2 \rightarrow \min. \quad (26)$$

Die Parameter  $w_k$  sind zusätzliche positive Gewichte, für die gilt

$$\sum_{k=0}^n w_k = 1,$$

und  $g$  ist eine positive Konstante, die die Glätte vorgibt.

Man erhält als Lösung dieses Problems keine Ausgleichsfunktion, sondern eine Matrix, deren  $k$ -te Zeile eine mechanische Ausgleichsfunktion für  $q_{x_0+k}$  darstellt, ( $k = 0, \dots, n$ ). Damit werden alle beobachteten Werte, auch die Randwerte, ausgeglichen. Die Matrix ist allerdings von der Anzahl der auszugleichenden Werte ( $= n + 1$ ) abhängig. Wir bedienen uns hier folgender Matrixdarstellung:

Sei nun

- $W$  die  $(n + 1) \times (n + 1)$  Diagonalmatrix der  $w_k$ ,
- $I$  die  $(n + 1) \times (n + 1)$  Einheitsmatrix,
- $Q$  bzw.  $Q'$  der Vektor der  $n + 1$  beobachteten bzw. ausgeglichenen Werte.
- $K$  die  $(n - s + 1) \times (n + 1)$  Matrix der  $s$ -ten Differenzen.

Der Aufbau der Matrix  $K$  ist wie folgt. In der  $i$ -ten Zeile ( $i = 1, \dots, n - s + 1$ ) werden die ersten  $i - 1$  Werte gleich 0 gesetzt, die nächsten  $s + 1$  Werte sind die alternierenden Binomialkoeffizienten  $k_r = (-1)^r \binom{s}{r}$  für  $r = 0, \dots, s$  und die letzten  $n - s - i + 1$  Werte sind wieder auf 0 gesetzt.

**Beispiel 3.8.** Für  $K$  mit  $s=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Für  $K$  mit  $s=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir das Minimierungsproblem in (26) schreiben als

$$(Q' - Q)^T W (Q' - Q) + g(KQ')^T KQ' \rightarrow \min. \quad (27)$$

Dieser Ausdruck wird genau dann minimal, wenn folgendes gilt:

$$(W + gK^T K)Q' = WQ \quad (28)$$

Die Matrix  $W + gK^T K$  ist nicht-singulär und positiv definit. Deshalb gilt weiters:

$$Q' = (W + gK^T K)^{-1} WQ \quad (29)$$

Bei der Wahl von  $s$  und  $g$  sollten folgende grobe Richtlinien beachtet werden:

- Je glatter die Kurve im Sinne des minimierten Glättemaßes sein soll, um so größer ist  $g$  anzusetzen.
- Sind die Ausgangswerte (Rohwerte) schon glatt, dann kann  $g$  klein gewählt werden, um die gewünschte Glätte zu erhalten.
- Je höher die Ordnung der Differenzen  $s$  vorgegeben wird, desto größer sollte  $g$  bestimmt werden.
- Je mehr auszugleichende Werte mit dem Verfahren bearbeitet werden, um so größer muss  $g$  gewählt werden.

### 3.2.5 Algorithmus des Whittaker-Henderson-Verfahrens

Der Algorithmus lässt sich nun wie folgt zusammenfassen.

Gegeben seien  $n + 1$  Werte  $q_x$ :

$$Q = \{q_x | x \in [x_0, x_0 + n]\}, \quad x_0, n \in \mathbb{N}$$

**Schritt 1:** Wähle die Gewichte  $w_k$  für die beobachteten Werte und bilde die  $(n + 1) \times (n + 1)$  Diagonalmatrix  $W$  der Gewichte  $w_k$ .

**Schritt 2:** Lege die Ordnung  $s$  der Differenzen fest und bilde die  $(n - s + 1) \times (n + 1)$  Matrix  $K$  der  $s$ -ten Differenzen wie oben beschrieben.

**Schritt 3:** Gebe ein Glättemaß  $g > 0$  vor.

**Schritt 4:** Berechne die  $(n + 1) \times (n + 1)$  Ausgleichsmatrix

$$D = (W + gK^T K)^{-1}W.$$

**Schritt 5:** Berechne die  $(n + 1)$  ausgeglichenen Werte

$$Q' = DQ.$$

## 3.3 Analytische Ausgleichsverfahren

### 3.3.1 Allgemeine Form der analytischen Ausgleichung

**Definition 3.9** (analytisch). *Ein Ausgleichsverfahren heißt analytisch, wenn für die Ausgleichsfunktion*

$$q'_x = F(Q, x, a_k(x, Q)), \quad k = 1, \dots, r$$

folgendes gilt:

- (a)  $F$  hängt nicht explizit von  $Q$  ab
- (b)  $F$  ist eine reellwertige, stetige Funktion in  $x$  und den  $a_k$ .
- (c) Die Ausgleichsparameter  $a_k$  können von  $x$  und  $Q$  abhängen.

Bei der analytischen Ausgleichung ist es notwendig, für jede auszugleichende Wertereihe eine Funktion, das sogenannte SterbeGesetz, vorzugeben. Man kann im Allgemeinen beliebige SterbeGesetze in einem analytischen Ausgleichsverfahren verwenden. Jenes SterbeGesetz charakterisiert somit nicht das einzelne Ausgleichsverfahren.

Das bedeutet eben auch, dass man die Parameter  $a_k$  für jeden Altersbereich und jede Wertereihe neu zu bestimmen hat. Die Parameter sind dann so zu wählen, dass die Funktion die Meßwerte gut ausgleicht.

### 3.3.2 SterbeGesetze

Bei der analytischen Ausgleichung geht man davon aus, dass die tatsächlichen Sterbewahrscheinlichkeiten Werte einer analytischen Funktion  $F$  sind. Auch wenn man heute nicht mehr annimmt, dass auf Grund der fortlaufenden starken Schwankungen die Sterblichkeit einer Gesetzmäßigkeit folgt, so sind jene Verfahren nicht gänzlich obsolet. Diese spielen gerade in der Ausgleichung auch heute noch eine erhebliche Rolle. Beschränkt man sich auf gewisse Teilbereiche, erhält man recht brauchbare Beschreibungen der Sterblichkeitsentwicklung. Folgende historische Entwicklung der mathematischen SterbeGesetze und die nachfolgenden Methoden stammen von Walter Saxer in [5].

1. Formel von De Moivre.

Das erste SterbeGesetz stammt von De Moivre bereits aus dem Jahre 1724. Hier wird die Zahl  $l_x$  vom 12. bis 86. Jahre linear durch folgende Formel

$$l_x = 86 - x, \quad 12 \leq x \leq 86$$

ausgedrückt.

2. Formel von B. Gompertz.

Benjamin Gompertz hat genau 100 Jahre später (1824) ein SterbeGesetz aufgestellt, welches den exponentiellen Anstieg der Sterbewahrscheinlichkeiten berücksichtigt. Es beruht auf einer Hypothese über die Abnahme der menschlichen Lebenskraft. Diese Lebenskraft ist der reziproke Wert der Sterbeintensität  $\mu(x)$ .

Sei  $h$  ein Proportionalitätsfaktor, dann soll gelten

$$d\left(\frac{1}{\mu(x)}\right) = -h \frac{dx}{\mu(x)}.$$

Die Integration ergibt

$$\mu(x) = b \cdot e^{hx} = b \cdot c^x,$$

wobei  $b$  die Integrationskonstante ist und  $c = e^h > 0$ .

Für  $l_x$  ergibt sich

$$-\frac{dl(x)}{l(x)} = b \cdot c^x dx$$

$$l(x) = l(0) \cdot e^{-\frac{bc^x}{\ln c} + \frac{b}{\ln c}} = k \cdot g^{(c^x)},$$

wobei

$$k = l(0) \cdot e^{\frac{b}{\ln c}} \quad \text{und} \quad g = e^{-\frac{b}{\ln c}}.$$



## 3. Formel von W. M. Makeham.

1860 verbesserte Makeham diesen Ansatz von Gompertz. Es lautet

$$\mu(x) = a + b \cdot c^x.$$

Die Integration ergibt

$$l(x) = k \cdot s^x \cdot g^{(c^x)}, \quad \text{für } a = -\ln(s) \quad \text{und} \quad b = -\ln(g) \cdot \ln(c).$$

Im Intervall [25, 80] beschreibt diese Formel den Sterblichkeitsverlauf recht gut.

**3.3.3 Die Methode der kleinsten Quadrate**

Dieses Verfahren verlangt, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal wird. Mit der Anwendung auf die Ausgleichung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten erhält man folgende Formeln.

Wir betrachten das Intervall  $[x_1, x_2]$ . Für dieses Intervall sind die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  gegeben. Sei  $f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)$  die Ausgleichsfunktion. Die ausgeglichenen Werte  $q'_x$  berechnen sich dann gemäß der Gleichung

$$q'_x = f(x, a_0, a_1, \dots, a_k), \quad (30)$$

sobald die Parameter  $a_0, a_1, \dots, a_k$  festgelegt sind.

Der Fehler für das Alter  $x$  beträgt  $q'_x - q_x$  und die Summe der Fehlerquadrate

$$F(x_1, x_2, a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{\xi=x_1}^{x_2} [f(\xi, a_0, a_1, \dots, a_k) - q_\xi]^2. \quad (31)$$

Die Parameter  $a_0, a_1, \dots, a_k$  sind in dieser Funktion so zu bestimmen, dass  $F$  minimal wird. Die Ausgleichsfunktion  $f$  wird als eine in  $a_0, a_1, \dots, a_k$  stetige und mindestens einmal nach allen  $a_i$  differenzierbare Funktion vorausgesetzt. Damit (31) minimal wird, muss notwendigerweise gelten

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial a_j} = \sum_{\xi=x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial a_j} [f(\xi, a_0, a_1, \dots, a_k) - q_\xi] = 0 \quad (32)$$

für  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ .

Wir erhalten somit ein Gleichungssystem von  $k+1$  Gleichungen für die  $k+1$  Unbekannten  $a_0, a_1, \dots, a_k$ . Ob man es numerisch behandeln kann, hängt von der Ausgleichsfunktion ab. Angenommen die Ausgleichsfunktion hängt linear von den Parametern ab, so reduziert sich das Gleichungssystem auf ein lineares Gleichungssystem.

### 3.3.4 Die Momentenmethode

Die Meßwerte werden durch eine Funktion  $f$  gut ausgeglichen, wenn die  $m$ -ten Momente für  $m \leq j$  der Ausgleichsfunktion mit den  $m$ -ten Momenten der Meßwerte übereinstimmen. Das folgende Gleichungssystem muss erfüllt sein.

$$\begin{aligned}
 0. \text{ Moment: } \quad m_0 &= \sum_{\xi=x_1}^{x_2} q_\xi, & m'_0 &= \sum_{\xi=x_1}^{x_2} q'_\xi = \sum_{\xi=x_1}^{x_2} f(\xi, a_0, a_1, \dots, a_k) \\
 1. \text{ Moment: } \quad m_1 &= \sum_{\xi=x_1}^{x_2} \xi q_\xi, & m'_1 &= \sum_{\xi=x_1}^{x_2} \xi q'_\xi = \sum_{\xi=x_1}^{x_2} \xi f(\xi, a_0, a_1, \dots, a_k) \\
 & & & \vdots \\
 j\text{-tes Moment: } \quad m_j &= \sum_{\xi=x_1}^{x_2} \xi^j q_\xi, & m'_j &= \sum_{\xi=x_1}^{x_2} \xi^j q'_\xi = \sum_{\xi=x_1}^{x_2} \xi^j f(\xi, a_0, a_1, \dots, a_k)
 \end{aligned}$$

Nun stellt man die Momentenbedingung auf:

$$m_v = \sum_{\xi=x_1}^{x_2} \xi^v q_\xi = m'_v = \sum_{\xi=x_1}^{x_2} \xi^v f(\xi, a_0, a_1, \dots, a_k), \quad (33)$$

wobei  $v = 0, 1, \dots, k$ .

Mit (33) erhält man nun für Polynome vom Grade  $k$   $k + 1$  viele lineare Gleichungen für die Bestimmung der Unbekannten  $a_0, a_1, \dots, a_k$ .

### 3.3.5 Die Methode von King-Hardy

Die Methode von King-Hardy basiert auf der Makeham'sche Absterbeordnung als Ausgleichsfunktion. In der Vergangenheit wurde ein Verfahren entwickelt, nach dem Parameter der Überlebenswahrscheinlichkeiten zu bestimmen ist. Dazu benötigen wir zunächst einige Definitionen.

Es gilt offenbar

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}. \quad (34)$$

Man findet auch häufig folgende Darstellung

$${}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \dots \cdot p_{x+n-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdot \dots \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x}. \quad (35)$$

Für die  $n$ -jährige Sterbewahrscheinlichkeit eines  $x$ -jährigen gilt

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}. \quad (36)$$

Es gelten offenbar  ${}_1p_x = p_x$  und  ${}_1q_x = q_x$ . Gemäß der 3. Formel von W. M. Makeham gilt

$$l(x) = k \cdot s^x \cdot g^{(c^x)} \quad (37)$$

Aus (34) und (37) folgt

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{s^{x+1} \cdot g^{(c^{x+1})}}{s^x \cdot g^{(c^x)}} = s \cdot g^{(c^{x+1}-c^x)} = s \cdot g^{(c^x(c-1))} \quad (38)$$

und

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = s^n \cdot g^{(c^{x+n}-c^x)} = s^n \cdot g^{(c^x(c^n-1))}. \quad (39)$$

Daraus ergibt sich

$$\ln p_x = \ln(s) + c^x(c-1) \ln g = a + b \cdot c^x \quad (40)$$

und

$$\ln {}_np_x = n \cdot \ln(s) + c^x(c^n-1) \ln g = n \cdot a + b \cdot c^x, \quad (41)$$

wobei  $a = \ln(s)$  und  $b = (c^n-1) \ln g$ .

Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit hat dann die Form

$$q_x = 1 - p_x = 1 - s \cdot g^{(c^x(c-1))}. \quad (42)$$

Auf Grund der Tatsache, dass wir die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten kennen, besitzen wir somit auch die einjährigen rohen Überlebenswahrscheinlichkeiten.

Analog (35) gilt

$${}_np_x = \prod_{i=0}^{n-1} p_{x+i}. \quad (43)$$

Wir definieren dann

$$\begin{aligned} H_1 &= \ln({}_mp_x), \\ H_2 &= \ln({}_mp_{x+m}), \\ H_3 &= \ln({}_mp_{x+2m}) \end{aligned} \quad (44)$$

und mit (40)

$$H'_1 = \ln({}_mp'_x) = \sum_{i=0}^{m-1} \ln p'_{x+i} = m \cdot a + b \cdot \sum_{i=0}^{m-1} c^{x+i} = m \cdot a + b \cdot c^x \cdot \frac{c^m - 1}{c - 1},$$

$$\begin{aligned}
H'_2 &= \ln({}_m p'_{x+m}) = \sum_{i=0}^{m-1} \ln p'_{x+m+i} = m \cdot a + b \cdot c^{x+m} \cdot \frac{c^m - 1}{c - 1}, \\
H'_3 &= \ln({}_m p'_{x+2m}) = \sum_{i=0}^{m-1} \ln p'_{x+2m+i} = m \cdot a + b \cdot c^{x+2m} \cdot \frac{c^m - 1}{c - 1}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Beim Ausgleich nach King-Hardy wird nun gefordert, dass

$$H'_1 = H_1, H'_2 = H_2, H'_3 = H_3, \tag{46}$$

gelten, und erhält damit 3 Gleichungen für die Berechnung der Unbekannten  $a, b, c$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
H_1 &= m \cdot a + b \cdot c^x \cdot \frac{c^m - 1}{c - 1}, \\
H_2 &= m \cdot a + b \cdot c^{x+m} \cdot \frac{c^m - 1}{c - 1}, \\
H_3 &= m \cdot a + b \cdot c^{x+2m} \cdot \frac{c^m - 1}{c - 1}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Aus den Gleichungen erhalten wir sofort

$$\begin{aligned}
c &= \left( \frac{H_3 - H_2}{H_2 - H_1} \right)^{\frac{1}{m}}, \\
b &= \frac{(H_2 - H_1)^{(c-1)}}{c^x (c^m - 1)^2}, \\
a &= \frac{1}{m} \left( H_1 - \frac{b \cdot c^x (c^m - 1)}{c - 1} \right).
\end{aligned} \tag{48}$$

### 3.4 Ausgleichung anhand zweier Verfahren

Die in Tabelle 1 und Abbildung 5 dargestellten Werte sind eine leicht gestörte Stichprobe, die aus der Sterbetafel 2010 der STATISTIK AUSTRIA gezogen wurde. Anhand dieser Werte wird das Whittaker-Henderson-Verfahren und das Verfahren der kleinsten Quadrate erläutert.

x	$q_x \cdot 10^5$	x	$q_x \cdot 10^5$	x	$q_x \cdot 10^5$
1	34,93	18	57,09	35	107,80
2	19,79	19	85,47	36	78,47
3	19,87	20	120,34	37	110,27
4	7,34	21	100,56	38	118,86
5	14,49	22	103,99	39	121,22
6	9,57	23	91,34	40	110,74
7	7,17	24	61,83	41	161,89
8	14,49	25	77,06	42	144,19
9	7,19	26	74,55	43	192,75
10	7,03	27	67,76	44	158,01
11	4,61	28	61,36	45	214,01
12	11,17	29	65,07	46	241,23
13	10,59	30	66,02	47	302,85
14	14,66	31	79,17	48	284,70
15	41,20	32	61,24	49	369,12
16	31,78	33	80,31	50	393,23
17	50,22	34	111,39		

Tabelle 1: leicht gestörte Stichprobe aus der Sterbetafel 2010 der STATISTIK AUSTRIA

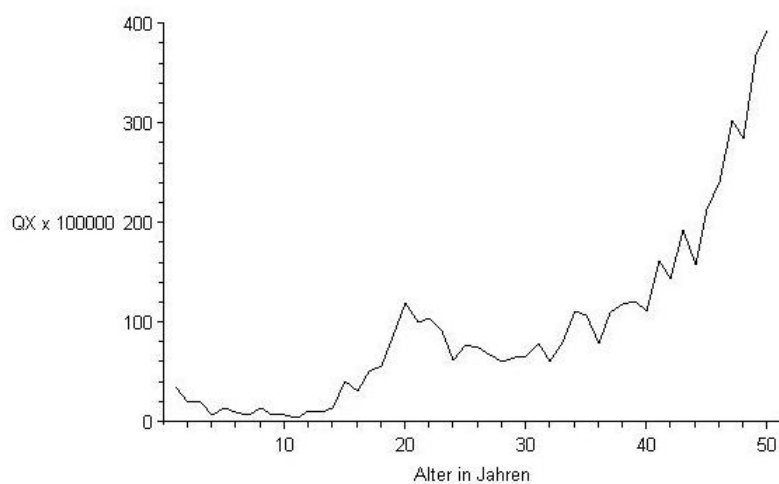


Abbildung 5: Beobachtete Häufigkeiten

### 3.4.1 Beispiel mit dem Whittaker-Henderson-Verfahren

Zunächst einmal der Maple Code nach Algorithmus 3.2.5:

```
restart:
with(LinearAlgebra):
with(CurveFitting):

n := 49:
s := 3:
z := n - s + 1:
sp := n + 1:

K := Matrix(z, sp):

for i from 0 while i < n - s + 1 do
for j from i while j < n + 1 do
K[(i + 1, j + 1)] := (-1)^(j-i) * binomial(s, (j-i));
end do;
end do;

W := IdentityMatrix(sp):

Q := Vector([34.93, 19.79, 19.87, 7.34, 14.49, 9.57, 7.17,
14.49, 7.19, 7.03, 4.61, 11.17, 10.59, 14.66, 41.20, 31.78,
50.22, 57.09, 85.47, 120.34, 100.56, 103.99, 91.34, 61.83,
77.06, 74.55, 67.76, 61.36, 65.07, 66.02, 79.17, 61.24,
80.31, 111.39, 107.80, 78.47, 110.27, 118.86, 121.22, 110.74,
161.89, 144.19, 192.75, 158.01, 214.01, 241.23, 302.85,
284.70, 369.12, 393.23]):

KT := Transpose(K):

H := MatrixVectorMultiply(MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse
(MatrixAdd(W, 40*MatrixMatrixMultiply(KT, K))), W), Q):
J := MatrixVectorMultiply(MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse
(MatrixAdd(W, 0.5*MatrixMatrixMultiply(KT, K))), W), Q):

data := [seq([i, H[i]], i = 1 .. 50)]:
data1 := [seq([i, J[i]], i = 1 .. 50)]:
```

```

data2 := [seq([i, Q[i]], i = 1 .. 50)]:

cubfit := Spline(data, x):
cubfit1 := Spline(data1, x):

plots[display](
plot(data2,color=[black],labels=["Alter in Jahren","QX x 100000"]),
plot(cubfit,x=1..50),
plot(cubfit1,x=1..50,color=[blue])):

```

Als Glättfaktor wurde einmal  $g = 0,5$  und zum Vergleich  $g = 40$  gewählt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 sowie Abbildung 6 dargestellt.

Es ist zusehen, dass wir für  $g = 40$  eine deutlich glattere Kurve als für  $g = 0,5$  erhalten. Der Ausreißer bei  $x = 20$  wird komplett ausgeglichen.

x	$q_x \cdot 10^5$	$q'_x \cdot 10^5$		x	$q_x \cdot 10^5$	$q'_x \cdot 10^5$		x	$q_x \cdot 10^5$	$q'_x \cdot 10^5$	
		$g = 0,5$	$g = 40$			$g = 0,5$	$g = 40$			$g = 0,5$	$g = 40$
1	34,93	34,01	30,85	18	57,09	65,01	70,52	35	107,80	100,55	95,67
2	19,79	22,59	24,01	19	85,47	87,86	82,51	36	78,47	98,86	101,33
3	19,87	15,82	18,62	20	120,34	105,92	91,20	37	110,27	104,33	107,08
4	7,34	11,87	14,57	21	100,56	108,84	95,38	38	118,86	112,16	113,34
5	14,49	10,81	11,67	22	103,99	100,99	95,01	39	121,22	118,93	120,57
6	9,57	10,28	9,58	23	91,34	87,21	90,94	40	110,74	128,45	129,33
7	7,17	10,24	8,02	24	61,83	75,14	84,71	41	161,89	144,20	140,14
8	14,49	10,33	6,78	25	77,06	71,57	77,96	42	144,19	157,28	153,41
9	7,19	8,67	5,88	26	74,55	70,48	71,93	43	192,75	169,68	169,73
10	7,03	6,79	5,60	27	67,76	67,78	67,45	44	158,01	182,27	189,70
11	4,61	6,24	6,47	28	61,36	64,97	65,10	45	214,01	208,83	213,95
12	11,17	8,20	9,05	29	65,07	64,72	65,08	46	241,23	244,13	242,58
13	10,59	12,54	13,89	30	66,02	66,49	67,31	47	302,85	280,33	275,42
14	14,66	20,21	21,31	31	79,17	69,28	71,43	48	284,70	313,20	312,26
15	41,20	29,63	31,31	32	61,24	73,80	76,93	49	369,12	354,00	353,15
16	31,78	37,02	43,44	33	80,31	85,47	83,24	50	393,23	396,39	397,97
17	50,22	47,82	56,94	34	111,39	97,76	89,66				

Tabelle 2: Beispiel für Ausgleichungen mit dem Whittaker-Henderson-Verfahren

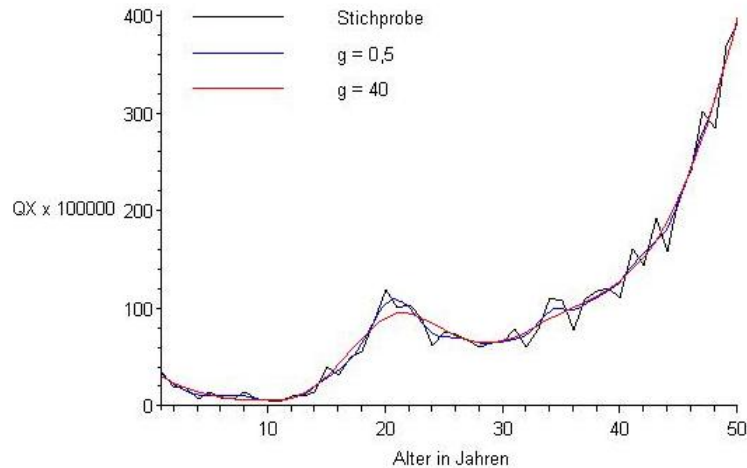


Abbildung 6: Ausgleichungen mit dem Whittaker-Henderson-Verfahren

### 3.4.2 Beispiel mit dem Verfahren der kleinsten Quadrate

Als Beispiel für ein analytisches Ausgleichsverfahren benutzen wir das Verfahren der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung unserer Werte aus der Tabelle 1.

Auch hier zunächst der Maple Code:

```
restart:
with(CurveFitting):

q := vector([34.93, 19.79, 19.87, 7.34, 14.49, 9.57, 7.17, 14.49,
7.19, 7.03, 4.61, 11.17, 10.59, 14.66, 41.20, 31.78, 50.22,
57.09, 85.47, 120.34, 100.56, 103.99, 91.34, 61.83, 77.06, 74.55,
67.76, 61.36, 65.07, 66.02, 79.17, 61.24, 80.31, 111.39, 107.80,
78.47, 110.27, 118.86, 121.22, 110.74, 161.89, 144.19, 192.75,
158.01, 214.01, 241.23, 302.85, 284.70, 369.12, 393.23]):

Grad := 4:

for i from 0 to Grad do
gl[i] := diff(sum((a[4]*x^4+a[3]*x^3+a[2]*x^2+a[1]*x+a[0]-q[x])^2,x=1..50),a[i])
end do;

for j from 0 to Grad do
```



```
a[j] := solve(gl[j]=0,a[j])
end do;
for i from Grad by (-1) to 0 do
a[i];
end do;

data := [seq([i, q[i]], i = 1 .. 50)]:

plots[display](
plot(data,color=[black]),
plot(a[0]+a[1]*x+a[2]*x^2+a[3]*x^3+a[4]*x^4, x = 1 .. 50,color=[blue]));
```

Als Ausgleichsfunktion nehmen wir ein Polynom 4. Grades:

$$q'_x = F(x, a_k(x, Q)) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Durch Differenzieren nach den  $a_k$  erhält man ein in den  $a_k$  lineares, inhomogenes Gleichungssystem mit folgenden Werten als Lösung:

$$a_4 = 0,0007082138327$$

$$a_3 = -0,06217295068$$

$$a_2 = 1,797629569$$

$$a_1 = -15,85197716$$

$$a_0 = 47,83748160$$

Mit jenen Parameterwerten berechnen wir aus dem Polynom 4. Grades die in Tabelle und Abbildung 7 dargestellten ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten.

Anhand der Abbildung 7 kann man erkennen, dass der sprunghafte Verlauf der beobachteten Werte völlig beseitigt wurde.

x	$q_x \cdot 10^5$	$q'_x \cdot 10^5$	x	$q_x \cdot 10^5$	$q'_x \cdot 10^5$	x	$q_x \cdot 10^5$	$q'_x \cdot 10^5$
1	34,93	33,72	18	57,09	56,69	35	107,80	92,21
2	19,79	22,84	19	85,47	61,45	36	78,47	95,68
3	19,87	14,84	20	120,34	65,78	37	110,27	100,33
4	7,34	9,39	21	100,56	69,65	38	118,86	106,41
5	14,49	6,19	22	103,99	73,03	39	121,22	114,18
6	9,57	4,93	23	91,34	75,92	40	110,74	123,92
7	7,17	5,33	24	61,83	78,31	41	161,89	135,94
8	14,49	7,14	25	77,06	80,25	42	144,19	150,55
9	7,19	10,10	26	74,55	81,78	43	192,75	168,08
10	7,03	13,99	27	67,76	82,93	44	158,01	188,87
11	4,61	18,60	28	61,36	83,81	45	214,01	213,31
12	11,17	23,72	29	65,07	84,51	46	241,23	241,76
13	10,59	29,19	30	66,02	85,13	47	302,85	274,63
14	14,66	34,85	31	79,17	85,80	48	284,70	312,34
15	41,20	40,54	32	61,24	86,68	49	369,12	355,33
16	31,78	46,15	33	80,31	87,92	50	393,23	404,03
17	50,22	51,56	34	111,39	89,70			

Tabelle 3: Beispiel für ein analytisches Ausgleichsverfahren

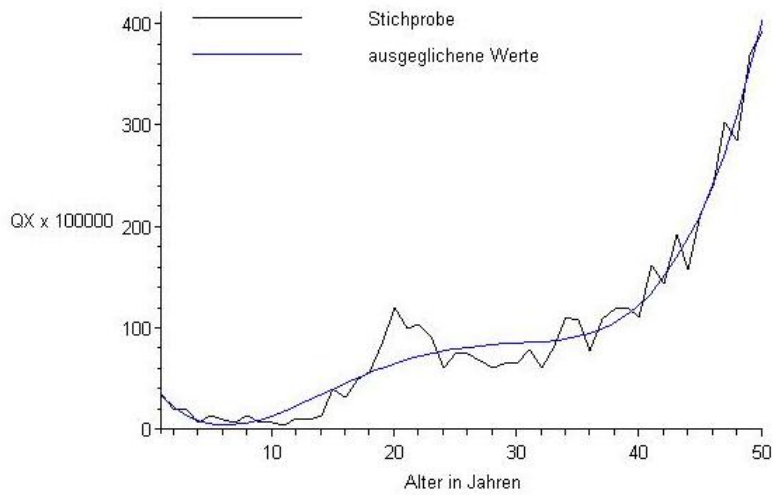


Abbildung 7: Ausgleichung mit dem Verfahren der kleinsten Quadrate

### 3.5 Gütemaße

Es entsteht zunächst die Frage, welche Anforderungen man an eine Sterbetafel stellen soll. Es gibt hier eine Reihe von Kriterien, die oft zur Beurteilung herangezogen werden. Die am häufigsten verwendeten sind die „Glätte“ bzw. glatter Kurvenverlauf und die „Anpassung“ - der Wahrscheinlichkeiten an die relativen Häufigkeiten. Ziel des Glättekriteriums ist es, Zufallsschwankungen zu eliminieren, während die Aufgabe des Anpassungskriterium es ist, dass die systematischen Besonderheiten erhalten bleiben. In diesem Sinne wirken die beiden Kriterien Glätte und Anpassung in entgegengesetzter Richtung.

Es gibt aber noch weitere sinnvolle Kriterien, wie zum Beispiel

- Regellosigkeit,
- Trend,
- vorgegebener Kurvenverlauf.

Die Kriterien „Regellosigkeit“ und „Trend“ überprüfen, ob die beobachteten Werte unregelmäßig über oder unter den Wahrscheinlichkeiten liegen. Bei der Regellosigkeit wird die Richtung der Abweichung mit einbezogen, während beim Trend noch zusätzlich die Beiträge der Abweichungen berücksichtigt werden.

Die Beurteilung eines vorgegebenen Kriteriums erfolgt nun über das Gütemaß. Es wird gemessen, wie weit die Tafel der Anforderung entspricht. Auch gibt es für jedes Kriterium eine Reihe von denkbaren Gütemaßen:

#### 3.5.1 Gütemaße für die Glätte

Die Glätte einer Kurve in einem Punkt ist gegeben durch die Krümmung  $K$  der Kurve in diesem Punkt. Für eine Kurve in der expliziten Darstellung  $f(x)$  ergibt sich die Krümmung im Punkt  $(x, f(x))$  aus

$$K = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (49)$$

Diese Formel für  $K$  ist insofern ein Maß für die Glätte in einem Punkt, dass die Kurve um so glatter ist, je kleiner  $K$  ist. Setzt man voraus, dass  $f'(x)$  klein ist, können wir die Formel vereinfachen zu

$$K \approx f''(x).$$

Da man bei Sterblichkeitsuntersuchungen nur über endliche Wertereihen

$Q = \{q_x | x \in X\}$  verfügt, greift man auf die zweiten Differenzen zurück:

$$K = \Delta^2 q_x$$

Oft werden auch die dritten Differenzen  $\Delta^3 q_x$  benutzt, da sie für kleine zweite Differenzen ungefähr 0 sind. Allgemeiner werden weiterhin die  $m$ -ten Differenzen als Maß für die Glätte in einem Punkt herangezogen (Vgl. 3.2.4).

Das in (49) beschriebene Maß für die Glätte bezieht sich auf einen Punkt aus dem Definitionsbereich. Um jedoch die Glätte einer Sterbetafel zu beurteilen, benötigt man ein Maß für den untersuchten Altersbereich. Man kann nun in Anlehnung an die obigen Punktmaße als Maß  $G$  für einen Bereich  $I$  beispielsweise heranziehen:

- $G = \int_I \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$
- $G = \int_I f''(x)^2 dx,$
- $G = \left( \sum_{x \in I} (\Delta^m q_x)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$
- $G = \max_{x \in I} \{|\Delta^m q_x|\}.$

Die Frage, wann ein Kurve glatt ist, kann nur im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung beantwortet werden. Insofern können sich auch noch andere sinnvolle Glättemaße ergeben. So schlägt zum Beispiel Ammeter ([8]) für das Glättemaß

$$R_m = \left( \sum_{x \in I} (\Delta^m q_x)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

vor, die Wertereihe dann als ausreichend glatt anzusehen, wenn

$$\sum_{x \in I} (10^k \cdot \Delta^m q_x)^2 < |I| \cdot 2^{2(m-1)}$$

ist.  $k$  bezeichnet hier die Anzahl der Dezimalstellen von  $q_x$ .

### 3.5.2 Gütemaße für die Anpassung

Der Begriff „Anpassung“ steht für die Übereinstimmung zweier Kurven. Im Allgemeinen bezieht man diese Übereinstimmung auf die Lage der Kurven, oft kann es jedoch auch sinnvoll sein, zusätzlich oder alternativ die Gestalt heranzuziehen. Im Normalfall gehen daher die Maße für die Anpassung auch von dem Abstand zweier vergleichbarer Kurvenpunkte aus und definieren somit den Abstand eines Bereiches.

- Der  $\chi^2$ -Test

Beim  $\chi^2$ -Test ist der Grundgedanke, dass die beobachteten Daten nur dann eine Realisation der Erwarteten sein können, wenn die Abweichungen dementsprechend nicht zu groß werden.

Die Nullhypothese ist in diesem Fall, dass die Sterbetafel der Stichprobe (gegeben durch die unter einjährigem Sterberisiko stehenden Lebenden  $l_1, \dots, l_n$  der Altersklassen  $1, \dots, n$  und die beobachteten Toten  $t_1, \dots, t_n$ ) mit einer vorgegebenen Sterbetafel (gegeben durch die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten  $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$ ) übereinstimmt. Eine Übereinstimmung ist dann gegeben, wenn die Abweichungen der Sterbehäufigkeiten zu den vorgegebenen Sterbewahrscheinlichkeiten gering sind über den gesamten Altersbereich.

Sei  $X_{jk}$  die Zufallsvariable, die den Wert 1 annimmt, falls die  $k$ -te Person der  $j$ -ten Altersklasse stirbt und sonst den Wert 0 ( $k = 1, \dots, l_j$  und  $j = 1, \dots, n$ ).

Die Zufallsvariable  $X_{jk}$  ist unter der Nullhypothese, dass die Sterbehäufigkeiten nur zufällig um die vorgegebene Sterbetafel ( $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$ ) schwanken, binomialverteilt mit dem Erwartungswert  $q_j$ :

$$X_{jk} \sim B(1, q_j)$$

Die Anzahl der beobachteten Toten  $t_j$  wird dann als Realisation der  $B(L_j, q_j)$ -verteilten Zufallsvariablen  $X_j = \sum_{k=1}^{l_j} X_{jk}$  aufgefasst.

$L_j$  ist gegenüber  $q_j$  sehr groß, und daher ist  $X_j$  näherungsweise poissonverteilt mit dem Erwartungswert und der Varianz  $L_j \cdot q_j$ :

$$X_j \sim P(L_j, q_j)$$

$X_j$  ist somit die Anzahl der unter der Nullhypothese erwarteten Toten  $e_j = l_j \cdot q_j$ .

Bildet man die standardisierte Abweichung

$$\chi_j = \frac{t_j - e_j}{\sqrt{e_j}},$$

so erhält man eine Zufallsvariable  $\chi_j$ , die asymptotisch standardnormalverteilt ist:

$$\chi_j \sim N(0, 1)$$

Die Prüfgröße für den Test

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^n \chi_j^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(t_j - e_j)^2}{e_j},$$

misst die Größe der Abweichung.

Die Prüfgröße  $\chi^2$  ist damit näherungsweise  $\chi^2$ -verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden. Damit lautet der  $\chi^2$ -Test:

$$\delta(t_1, \dots, t_n : l_1, \dots, l_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sum_{j=1}^n \frac{(t_j - e_j)^2}{e_j} > \chi_{n;1-\alpha}^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wobei im Falle  $\delta(t_1, \dots, t_n : l_1, \dots, l_n) = 1$  die Nullhypothese abgelehnt wird.  $\chi_{n;1-\alpha}^2$  ist das  $\alpha$ -Fraktile der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden.

Beim  $\chi^2$ -Test wird also gefordert, dass die Beobachtungswerte sich möglichst gut an die Erwartungswerte anpassen. Diese Prüfung auf Anpassung ist eine positive Eigenschaft. Genauso ist auch die Handhabung positiv zu beurteilen. Die Prüfgröße kann relativ einfach ermittelt werden. Es ist jedoch als negative Eigenschaft festzuhalten, dass die Richtungen der Abweichungen nicht in die Prüfgröße eingehen, da die Abweichungen quadriert werden. Dies hat zur Folge, dass jene Abweichungen, die von ihrer Größe her nicht bedeutend sind, von ihrer Richtung her aber größtenteils einseitig, vom  $\chi^2$ -Test nicht erkannt werden.

Es stellt sich auch hier die Frage, wann von einer guten Anpassung gesprochen werden kann. Wird beispielsweise das  $\chi^2$ -Maß für die Anpassung benutzt, so wird dann von einer guten Anpassung gesprochen, wenn der  $\chi^2$ -Grenzwert für eine vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit und Anzahl der Freiheitsgrade nicht überschritten wird.

### 3.5.3 Gütemaße für die Regellosigkeit

Unter dem Kriterium „Regellosigkeit“ versteht man, dass eine Kurve zufällig um die andere schwankt. Es ergeben sich beispielsweise als Gütemaße:

- $Z = n - \frac{n'}{2}$  (vgl. Zeichentest),
- $Z = \frac{v}{n'-1} - \frac{1}{2}$ ,

wobei  $n'$  die Anzahl der von Null verschiedenen Differenzen,  $n$  die Anzahl der Differenzen mit positivem Vorzeichen und  $v$  die Anzahl der Iterationen ist.

- Der (Vor-)Zeichentest

Hier werden zwei Meßreihen  $x = x_1, \dots, x_n$  und  $y = y_1, \dots, y_n$  darauf überprüft, ob die zugehörigen stochastischen Variablen  $X = X_1, \dots, X_n$  und  $Y = Y_1, \dots, Y_n$  der gleichen Verteilung unterliegen. Man setzt voraus, dass die stochastisch unabhängigen Differenzen  $X_i - Y_i (i = 1, \dots, n)$  einem einheitlichen Verteilungsgesetz  $P$  genügen. Es werden nun Annahmen gemacht, die als Nullhypothese dienen:

1. Die erste Annahme ist, dass es gleich viele positive wie negative Vorzeichen gibt. Der Median der Verteilung  $P$  ist unter dieser Nullhypothese gleich Null.  $P$  ist somit ein Element der Teilmenge der Menge der zugelassenen Verteilungen, die einen Median von Null haben. Unter dieser Annahme wird der Zeichentest auch oft als Mediantest bezeichnet. Eine Ablehnung der Nullhypothese entspricht der Aussage, dass die beiden Meßreihen unterschiedlich sind, weil die Beobachtungen nicht aus derselben Grundgesamtheit stammen können.
2. Die zweite Annahme ist, dass es mehr positive (negative) als negative (positive) Vorzeichen gibt. Betrachtet man zum Beispiel beobachtete Sterbehäufigkeiten als Meßreihe  $X$  und rechnermäßige Sterbehäufigkeiten als Meßreihe  $Y$ . Dies ergibt dann die Nullhypothese, dass die der untersuchten Personengesamtheit zugrunde liegenden Sterbewahrscheinlichkeiten eher über (unter) den rechnermäßigen liegen.

Praktisch bedeutet dies, dass die Differenzen aus den Paaren gebildet und anschließend die positiven Vorzeichen  $z$  gezählt werden (daher der Name). Auch die Anzahl  $n'$  der Beobachtungspaare, deren Differenz ungleich Null ist, werden gezählt:

$$z = \sum_{\substack{i=1, \\ x_i > y_i}}^n 1,$$

$$n' = \sum_{\substack{i=1, \\ x_i \neq y_i}}^n 1.$$

Die Testfunktionen lauten für die angegebenen Hypothesen wie folgt:

1. für den Mediantest:

$$\delta(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } z \notin \{c_\alpha, c_\alpha + 1, \dots, n' - c_\alpha\} \\ \gamma, & \text{für } z \in \{c_\alpha, n' - c_\alpha\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\gamma$  und  $c_\alpha$  werden bestimmt aus

$$\gamma \binom{n'}{c_\alpha} + \sum_{r=0}^{c_\alpha-1} \binom{n'}{r} = 2^{n'-1} \cdot \alpha \quad \text{und} \quad 0 \leq \gamma \leq 1.$$

- 2.

$$\delta(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } z < n' - c_\alpha \\ \gamma, & \text{für } z = n' - c_\alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$\delta(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } z > c_\alpha \\ \gamma, & \text{für } z = c_\alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\gamma$  und  $c_\alpha$  werden bestimmt aus

$$\gamma \binom{n'}{c_\alpha} + \sum_{r=0}^{c_\alpha-1} \binom{n'}{r} = 2^{n'} \cdot \alpha \quad \text{und} \quad 0 \leq \gamma \leq 1.$$

$c_\alpha$  ist eine von der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  abhängige Schranke. Im Fall  $\delta(z) = \gamma \in (0, 1)$  ist ein Zufallsexperiment, das der  $(1, \gamma)$ -Binomialverteilung unterliegen soll, durchzuführen, dessen Ausgang entscheidet, ob die Nullhypothese abgelehnt oder angenommen wird.  $\gamma$  ist in diesem Fall die Ablehnungswahrscheinlichkeit der Nullhypothese.

Auf Grund der Binomialkoeffizienten sind die Formeln für  $\gamma$  und  $c_\alpha$  nicht einfach zu lösen. Für bestimmte  $n'$  und  $\alpha$  kann man  $c_\alpha$  aus Tabellen entnehmen. Stehen keine ausgewählte Tabellen zur Verfügung, so wird auf asymptotische Tests ausgewichen:

1.

$$\delta(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } \frac{|2z-n'|}{\sqrt{n'}} > c_\alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

2.

$$\delta(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } \frac{2z-n'}{\sqrt{n'}} > c_\alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$\delta(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } \frac{2z-n'}{n'} < c_\alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

In diesem Fall ist  $c_\alpha$  das  $\alpha$ -Fraktil der  $(0, 1)$ -Normalverteilung. Jener Wert, für den die Verteilungsfunktion gerade den Wert  $\alpha$  erreicht.

- Der Iterationstest

Genau so wie der Zeichentest geht es auch beim Iterationstest darum, ob zwei Meßreihen demselben Verteilungsgesetz genügen. Auch hier wird wieder vorausgesetzt, dass die stochastisch unabhängigen Differenzen  $X_i - Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  einem einheitlichen Verteilungsgesetz  $P$  unterliegen.



Bei der praktischen Durchführung des Tests bildet man die Differenzen aus den Paaren und notiert die Vorzeichen der von Null verschiedenen Differenzen. Aus den Vorzeichen „+“ und „-“ entsteht somit ein  $n'$ -Tupel  $t = (t_1, \dots, t_{n'})$ . Nun definiert man aus der Menge aller Teiltupel von  $t$  eine Teilmenge:

Es sei  $\forall i = 1, \dots, n'$   $t^{(i)}$  das Teiltupel von  $t$ , das sowohl aus der maximalen Anzahl benachbarter, gleicher Zeichen besteht und  $t_i$  enthält.  $t^{(i)}$  wird als *Iteration* und die Anzahl der Elemente von  $t^{(i)}$  als zugehörige *Länge* bezeichnet.

Für die  $t^{(i)}$  gilt somit:

$$t^{(i)} = (t_{i-r_i}, \dots, t_i, \dots, t_{i+s_i})$$

mit

1.  $r_i \in \{0, \dots, i-1\}$  und  $s_i \in \{0, \dots, n'-i\}$ ,
2.  $t_i = t_j$  für  $j \in \{i-r_i, \dots, i, \dots, i+s_i\}$ ,
3.  $t_i \neq t_{i-r_i-1}$ , falls  $1 < i-r_i$ , und  
 $t_i \neq t_{i+s_i+1}$ , falls  $i+s_i < n'$ .

Die Prüfgröße für den Iterationstest ist die Anzahl der Iterationen minus Eins. Diese ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in  $t$ .

Als Nullhypothese wählt man, dass die Anzahl der Zeichen „+“ und „-“ gleich wahrscheinlich ist. Auf Grund der Unabhängigkeit folgt, dass auch jede Kombination der Vorzeichen gleich wahrscheinlich ist. Die Anzahl der Vorzeichenwechsel, was der Prüfgröße des Iterationstestes entspricht, ist somit binomialverteilt  $B(n, p)$  mit  $n = n' - 1$  und  $p = \frac{1}{2}$ .

Die Testfunktion in Abhängigkeit von der Anzahl der Vorzeichenwechsel  $z$  lautet damit:

$$\delta(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } z \notin \{c_\alpha, c_\alpha + 1, \dots, n' - 1 - c_\alpha\} \\ \gamma, & \text{für } z \in \{c_\alpha, n' - 1 - c_\alpha\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\gamma$  und  $c_\alpha$  werden bestimmt aus

$$\gamma \binom{n'-1}{c_\alpha} + \sum_{r=0}^{c_\alpha-1} \binom{n'-1}{r} = 2^{n'-2} \cdot \alpha \quad \text{und} \quad 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Im Fall  $\delta(z) = \gamma$  ist auch hier ein Zufallsexperiment nach einer Binomialverteilung  $B(1, \gamma)$  durchzuführen. Mit Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  wird auch hier dann die Nullhypothese abgelehnt.

Wann eine Kurve „regellos“ um die andere schwankt, kann man auch in diesem Fall über die zugehörige Verteilungsfunktion definieren. Man legt zum Beispiel fest, das Regellosigkeit dann vorliegt, wenn das Gütemaß innerhalb eines Konfidenzintervalles bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit liegt.

### 3.6 Historische Bemerkungen

Zusätzlich dient [9] als Hilfestellung bei der Ausarbeitung.

Bereits vor 4000 Jahren gab es nachweislich ein Interesse an demografischen Bevölkerungsmerkmalen. So führt Ägypten etwa anlässlich des Pyramidenbaus um 2600 v. Chr. schon erste Volkszählungen durch<sup>3</sup>.

Erste erwähnenswerte Versuche, die Entwicklung der Bevölkerung zu quantifizieren, liefert der römische Jurist Domitius Ulpianus (\* um 170 in Tyros; † 223 in Rom). In einer seiner zahlreichen Veröffentlichungen befasst er sich mit der restlichen Lebenserwartung in Abhängigkeit vom erreichten Lebensalter. Diese galt lange Zeit als einzigartig. Die Datenqualität jener Arbeit entspricht natürlich nicht den heutigen Maßstäben. So ist zum Beispiel Unklar, auf welches geografische Gebiet der Autor genau seine Aussagen bezieht, bzw. welchen statistischen Hintergrund diese haben.

---

<sup>3</sup> Vgl.: [10]

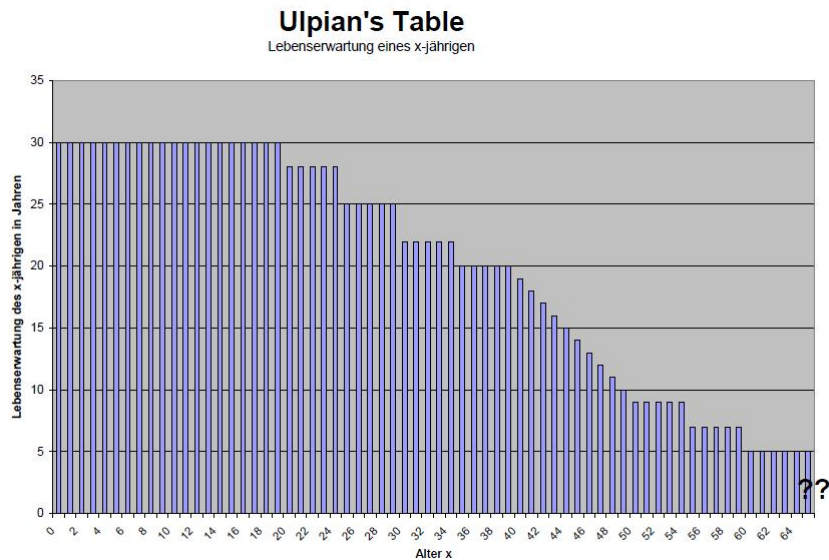


Abbildung 8: Ulpian's Table: Der Gebrauch dieser Tafel ist für Spezialisten heute noch unklar. (Quelle: [9]).

Die Stadt Augsburg beginnt im Jahre 1501 mit der Führung des ersten offiziellen Sterberegisters. Verantwortlich hierfür sind hauptsächlich Kirchen und Klöster. Im Jahre 1538 bzw. 1555 folgen die Städte London („Bills of Mortality“) und Breslau.

Wegweisend für die Entwicklung der Sterbetafeln ist das Werk von John Graunt (\* 24. April 1620 in London; † 18. April 1674 ebenda), mit dem Titel „Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality“<sup>4</sup> aus dem Jahr 1662. Dieser Arbeit entnimmt man, dass seit etwa 1590 die Verstorbenen in London und Umgebung wöchentlich registriert wurden. Es wurde dabei unterschieden nach Geschlecht, Wohnort und Todesursache. Diese wöchentlichen Todesregister wurden am Jahresende zusammengefasst, wobei jedoch nicht auf ein ganzes Kalenderjahr abgegrenzt wurde. Die Gliederung nach Todesursachen für das Jahr 1632 ist in Abbildung 9 dargestellt.

<sup>4</sup> Vgl.: [11]

**A generall Bill for this present year,**  
ending the 19 of December 1665. according to  
the Report made to the KINGs most Excellent Majesty.  
By the Company of Parish Clerks of London, &c.

*The Diseases and Casualties this year.*

<b>A</b> Bortive and Stillborne	617	Executed	21	Palfie	30
Aged	1545	Flox and Small Pox	655	Plague	68596
Ague and Feaver	5257	Found dead in Streets, fields, &c.	20	Plannet	6
Appoplex and Suddenly	116	French Pox	86	Plurisie	15
Bedrid	10	Frighted	23	Poyfoned	1
Blasted	5	Gout and Sciatica	27	Quinsie	35
Bleeding	16	Grief	46	Rickets	557
Bloody Flux, Scowring & Flux	185	Gripping in the Guts	1288	Rising of the Lighes	397
Born and Scalded	8	Hangd & made away themselves	7	Rupture	34
Calenture	3	Headmouldihoe & Mouldfallen	14	Scurvy	105
Cancer, Gangrene and Fistula	56	Jaundies	110	Shingles and Swine pox	2
Canker, and Thrush	111	Impostume	227	Sores, Ulcers, broken and bruised	82
Childbed	625	Kild by severall accidents	46	Limbs	14
Chrisomes and Infants	1258	Kings Evil	86	Spleen	1929
Cold and Cough	68	Leprosie	14	Spotted Feaver and Purples	332
Collick and Winde	134	Lethargy	26	Stopping of the stomach	98
Consumption and Tiffick	4808	Livergrown	12	Stone and Surangury	1252
Convulsion and Mother	2036	Meagrom and Headach	7	Surfet	2614
Distracted	5	Measles	9	Teeth and Worms	52
Dropfie and Timpany	1478	Murthered and Shor	45	Vomiting	52
Drowned	50	Overlaid & Starved	45	VVenh	2
Christned	Males 51147	Buried	Males 48569	Of the Plague	68596
	Females 48533		Females 48737		
	In all 9967		In all 97306		
Increased in the Burials in the 130 Parishes and at the Pest-house this year		79009			
Increased of the Plague in the 130 Parishes and at the Pest-house this year		68596			

Abbildung 9: Todesursachen im Jahre 1632. (Quelle: [12]).

Graunt hat diese Daten mit der Anzahl der Geburten in London in Verbindung gebracht. Er stellte aufgrund dieser Zahlen Überlegungen an, wie sich die Bevölkerung Londons entwickeln wird. Will man nun Aussagen über die Entwicklung der Londoner Bevölkerung oder gar der Bevölkerung eines Landes erhalten, so sind diese Zahlen allerdings nur begrenzt brauchbar. Verallgemeinerung sind insofern nicht zulässig. So bemerkte schon Graunt den Einfluss der Wanderung auf die Londoner Bevölkerungsstruktur. Die Anzahl der Lebenden konnte deshalb nicht angegeben, sondern bestenfalls geraten werden. Obwohl es daher unmöglich war, verlässliche Sterbewahrscheinlichkeiten zu bestimmen, gelten die Werke von John Graunt als die ersten statistischen Bevölkerungsanalysen.

Die Mängel der Graunt'schen Untersuchungen erkannte auch schon der englische Mathematiker und Astronom Edmund Halley (\* 8. November 1656 in London; † 25. Januar 1742 ebenda) und sorgte mit einer Totenregister der Stadt Breslau für eine bessere Datenquelle. Halley leitete aus den Kirchenbüchern der Stadt Sterbeziffern ab. Aus diesen Untersuchungen über die Bevölkerungsentwicklung in den Jahren 1687 bis

1691 ging 1693 die erste bekannte Sterbetafel hervor.

Age. Curt	Per-sons	Age. Curt	Per-sons	Age. Curt	Per-sons	Age. Curt	Per-sons	Age. Curt	Per-sons	Age. Curt	Per-sons
1	1000	8	680	15	628	22	586	29	539	36	481
2	855	9	670	16	622	23	579	30	531	37	472
3	798	10	661	17	616	24	573	31	523	38	463
4	760	11	653	18	610	25	567	32	515	39	454
5	732	12	646	19	604	26	560	33	507	40	445
6	710	13	640	20	598	27	553	34	499	41	436
7	692	14	634	21	592	28	546	35	490	42	427
Age. Curt	Per-sons	Age. Curt	Per-sons	Age. Curt	Per-sons	Age. Curt	Per-sons	Age. Curt	Per-sons	Age. Curt	Per-sons
43	417	50	346	57	272	64	202	71	131	78	58
44	407	51	335	58	262	65	192	72	120	79	49
45	397	52	324	59	252	66	182	73	109	80	41
46	387	53	313	60	242	67	172	74	98	81	34
48	367	55	292	62	222	69	152	76	78	83	23
49	357	56	282	63	212	70	142	77	68	84	20

Abbildung 10: Sterbetafel nach Halley. (Quelle: [2]).

Der holländische Mathematiker Struyck (1687 - 1769) erstellte rund 50 Jahre später in seinem Werk „Inbiding tot de Algemeene Geographie benevens eenige Sterrekundige en andere Verhandelingen“ eine Sterbetafel mit einer Altersgruppenbildung.

Als einer der Grundväter der demografischen Forschung in Deutschland gilt Johann Peter Süßmilch (\* 3. September 1707 in Zehlendorf bei Berlin; † 22. März 1767 in Berlin). Im Jahr 1741 veröffentlichte er sein Hauptwerk „Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen“, welches als bahnbrechendes Werk in der Geschichte der Bevölkerungsstatistik gilt. Die Süßmilch-Baummannsche Sterbetafel aus dem Jahre 1775 fand in Deutschland etwa ein Jahrhundert lang Anwendung.

In Bezug auf Österreich gilt es den Schriftsteller und Versicherungsmathematiker Leo Perutz (\* 2. November 1882 in Prag; † 25. August 1957 in Bad Ischl) zu nennen. Im Oktober 1907 war Perutz als Versicherungsmathematiker bei der Assicurazioni Generali tätig. Ein Jahr später ging er zurück nach Wien, wo er eine Anstellung bei der Versicherungsgesellschaft Anker fand. Als Versicherungsmathematiker berechnete er Sterbetafeln und darauf basierende Versicherungssätze.

## 4 Extrapolation der Sterbewahrscheinlichkeit

Die folgende Einleitung und die nachfolgenden Modelle folgen - wenn nichts anderes erwähnt - [13].

### 4.1 Einleitung

#### 4.1.1 Perioden- und Generationensterbetafeln

Grundsätzlich unterscheidet man bei Sterbetafeln zwischen *statischen Sterbetafeln*, sogenannte Periodentafeln, und *dynamischen Tafeln*, auch Generationentafeln genannt. Eine Periodentafel gibt die gemittelte Sterblichkeit über einen fixen Zeitraum an, wie beispielsweise die allgemeine österreichische Sterbetafel 2000/2002. Solche statische Sterbetafeln sind jedoch für die Kalkulation von Rentenversicherungen ungeeignet, da die Reduktion der Sterblichkeit keine Berücksichtigung findet.

Daher werden für die Kalkulation von Rentenversicherungen dynamische Sterbetafeln verwendet. Bei derartigen Generationentafeln ist die Sterblichkeit nicht nur vom Alter, sondern auch vom Geburtsjahr abhängig. Ein 60-jähriger Mann der 1950 geboren wurde kann eine andere Sterblichkeit haben, als ein 60-jähriger Mann mit Geburtsjahr 1970, weil der später geborene von den medizinischen Fortschritten in den Jahren 2010 - 2030 profitieren wird.<sup>5</sup> In Österreich sind die Sterbetafeln von der STATISTIK AUSTRIA statische Sterbetafeln, weshalb einige Überlegungen zur Vorhersage der Sterblichkeit notwendig sind, um dynamische Sterbetafeln zu erhalten.

#### 4.1.2 Trend und Extrapolation

Keiner kann mit Sicherheit sagen, wie sich die Sterbeintensität  $\mu_x(t)$  oder die Sterbewahrscheinlichkeit  $q_x(t)$  einer  $x$ -jährigen Person zur Zeit  $t$  in der Zukunft entwickelt. Man kann aber einen Trend, basierend auf historische Daten und Expertenmeinungen, für die zukünftige Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeit abschätzen. Dieser wird jedoch immer ein gewisses Maß an Unsicherheit beinhalten. Da die Rentenverträge oft eine sehr lange Laufzeit haben, ist es wichtig, gute Vorhersagen der Sterblichkeitsentwicklung mit ausreichender statistischer Signifikanz über mehrere Jahrzehnte zu haben.

Um die Sterbewahrscheinlichkeit in die Zukunft extrapolieren zu können, wird eine statische Basistafel  $q_x^{base}$  (entweder von einem gegebenen Jahr oder einer Generation) als Startpunkt benutzt. Diese Tafel erhält man typischerweise entweder direkt von einer Rententafel, falls vorhanden, oder von einer offiziellen Sterbetafel, die mit soge-

<sup>5</sup> Vgl.: [14]

nannten *Selektionsfaktoren* angepasst wird.

Anhand dieser Basistafel wird dann für jedes extrapolierte Jahr ein Faktor ermittelt, der genau die Sterblichkeitsreduktion beschreibt. Es gibt mehrere Methoden um diesen alters- bzw. geburtsabhängigen Extrapolationsfaktor aus den Rohdaten zu ermitteln. Diese werden später noch genauer beschrieben.

Da in Österreich nicht genügend statistische Daten über Rentenverträge zur Verfügung stehen, werden die Rohdaten aus den Bevölkerungskennzahlen berechnet. Die Basistafel wird dann mit einem altersspezifischen Selektionsfaktor  $f_x^{Sel}$  multipliziert. Dieser Faktor berücksichtigt die verschiedenen Sterbewahrscheinlichkeiten von Annuitäten im zugrundeliegenden Jahr, verglichen mit der Gesamtbevölkerung. Der durch den Faktor erzielte Selektionseffekt ist notwendig, da die Sterblichkeit von Rentenversicherten sich von der Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung deutlich unterscheidet. Zum Einen schließen Personen mit einem höheren Einkommen eher einen Rentenvertrag ab, da sie eine höhere Lebenserwartung und auch leichter Zugang zu teurer medizinischer Versorgung haben, zum Anderen sind gesunde Personen eher dazu geneigt einen Rentenvertrag zu unterzeichnen, da sie länger davon profitieren, als Personen, die sich in einem schlechteren Gesundheitszustand befinden.

Nicht nur die Basistafel wird durch den Selektionsfaktor beeinflusst, sondern auch die *jährliche Reduktion* (Trend). Dies haben schweizer Untersuchungen der Annuitäten-Sterblichkeit und deutsche Untersuchungen der Sozialversicherungsdaten gezeigt.

Nachforschungen haben gezeigt, dass dieser Trend nicht konstant ist, sondern, verglichen mit dem Langzeittrend ab 1870, in den letzten Jahrzehnten gewachsen ist. Um eine mögliche Abnahme der derzeitigen hohen Werte gemeinsam mit dem Langzeittrend zu modellieren, oder einen zukünftigen Anstieg zu berücksichtigen, ist es vorteilhaft eine zeitabhängige Modifikation des Trends in die Extrapolation einzubauen.

Verwendet man allerdings einen konstanten oder steigenden Trend um in die Zukunft zu extrapolieren, führt dies zu einer verschwindenden Sterbewahrscheinlichkeit für jedes Alter. Obwohl es zu diesem Effekt erst klar außerhalb des beobachteten Zeitraumes kommt, ist es dennoch ein Mangel des Modells. Eine Möglichkeit das Modell zu verbessern wäre, es um einen sinkenden Langzeittrend zu erweitern, welcher keinen wirklich Einfluss auf die Lebenszeit der Tafel hat, sondern die Sterbewahrscheinlichkeit für  $t$  gegen unendlich begrenzt.

$$t \mapsto G(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} t_\infty < \infty.$$

Die Beschränktheit der Funktion  $G$  ist insofern wichtig, dass die Sterblichkeit auf lange Sicht gegen einen angemessenen Grenzwert der Sterbetafel konvergiert.

### 4.1.3 Altersverschiebung

Die generelle Form einer dynamischen Sterbetafel ist, wie schon erwähnt, zweidimensional hinsichtlich der Dimensionen Alter  $x$  und Kalenderjahr  $t$ , gleichbedeutend mit dem Geburtsjahrgang  $\tau = t - x$ . Daher hat jede Generation seine eigene Sterbetafel und die Kalkulationen müssen für jede Generation getrennt durchgeführt werden. Infolgedessen hängen alle versicherungsmathematischen Werte aus einer dynamischen Sterbetafel vom Geburtsjahrgang der versicherten Person ab.

Einige Versicherungsunternehmen ziehen es der Einfachheit halber und aus rechnerischen Gründen jedoch vor, auch eindimensionale Approximationen anstatt der eigentlichen zweidimensionalen dynamischen Sterbetafel zu verwenden. Eine beliebte Möglichkeit ist dabei die Methode der Altersverschiebung. Anstatt für jede Generation eine separate Sterbetafel zu erstellen, wird bei dieser Methode eine repräsentative Generation mit Geburtsjahr  $\tau_0$  ausgewählt, für die eine Basistafel angegeben wird. Jede Person, die nicht in diesem Referenzjahr  $\tau_0$  geboren wurde, wird behandelt, als wäre sie in jenem Jahr geboren. Die Kalkulationen werden jedoch mit einem modifizierten technischen Alter  $x \mapsto x + \Delta(\tau)$  durchgeführt. Der Term  $\Delta(\tau)$  ist, abhängig davon, ob die Person vor oder nach dem Jahr  $\tau_0$  geboren ist, entweder positiv oder negativ:

$$\Delta(\tau) \geq 0, \quad \text{für } \tau \leq \tau_0$$

$$\Delta(\tau) \leq 0, \quad \text{für } \tau \geq \tau_0$$

Für die Approximation der versicherungstechnischen Werte gilt dann

$$\ddot{a}_x(\tau) \approx \ddot{a}_{x+\Delta(\tau)}^{AS,base}(\tau_0).$$

Im weiteren Verlauf wird einfach  $\ddot{a}_x^{AS,base}$  anstelle von  $\ddot{a}_x^{AS,base}(\tau_0)$  geschrieben.

Die Werte von  $\Delta(\tau)$ , die lediglich vom Geburtsjahr  $\tau$  abhängen, sind so gewählt, dass die wichtigsten versicherungsmathematischen Werte in einer bestimmten Zeitperiode so gut wie möglich wiedergegeben werden. Typischerweise bedeutet dies, dass die Nettoeinmalprämien einer vorschüssigen Rente von Personen im Alter zwischen 50 und 80 Jahren für die Altersverschiebung verwendet werden.

Der Zeitraum, in der die AVÖ<sup>6</sup> 2005R<sup>7</sup> für neue Rentenverträge angewendet werden soll, soll ungefähr von 2006 bis 2015 reichen. In der Regel werden neue Verträge im Alter zwischen 30 und 60 Jahren (oder 25 bis 65 Jahre) abgeschlossen. Nimmt man den Mittelwert dieser beiden Bereiche, so bilden die Sterbewahrscheinlichkeiten der

<sup>6</sup> Aktuarvereinigung Österreichs

<sup>7</sup> Ist seit Anfang des Jahres 2006 in Österreich für neu abgeschlossene Rentenversicherungen anzuwenden.



Generation  $\tau_0 = 1965$  eine geeignete Basistafel für die Altersverschiebung, wie von der zweidimensionalen exakten Rententafel bestimmt. Für die unter 35-jährigen werden die Sterbewahrscheinlichkeiten direkt von den Beobachtungen der STATISTIK AUSTRIA mit den entsprechenden Selektionsfaktoren hergenommen. Da die Sterbewahrscheinlichkeiten in jungem Alter sowohl steigen als auch fallen („accident hump“), muss die Basistafel monotonisiert werden, um eine monotone Altersverschiebung zu gewährleisten. Dies geschieht entsprechend der Rück-Rekursion

$$q_x^{AS,base}(1965) = \begin{cases} 1, & \text{für } x = 121, \\ \min(q_x(1965 + x), q_{x+1}^{AS,base}(1965)), & \text{für } x = 120, 119, \dots, 0. \end{cases}$$

Die Werte  $q_x(1965 + x)$  sind die Sterbewahrscheinlichkeiten der Generation 1965 nach der exakten Tabelle für  $x \geq 35$  und die beobachteten Werte für  $x < 35$  mit den entsprechenden Selektionsfaktoren. Das maximale Alter wurde mit  $\omega = 121$  Jahren gewählt. Die daraus resultierende Basistafel wird in Abbildung 11 gezeigt.



Abbildung 11: Basistafel der Altersverschiebung für die Generation 1965. (Quelle: [13]).

Da eine eindimensionale Sterblichkeitskurve sicherlich nicht die Werte einer exakten zweidimensionalen Sterbetafel wiedergibt, betrachtet man die Verschiebung  $\Delta(\tau)$  als einen gewichteten Mittelwert über die erforderlichen Shifts, um die Leibrentenbeiträge

so gut wie möglich zu erhalten. Die meisten sonstigen versicherungstechnischen Werte können daraus abgeleitet werden.

Für ein gegebenes Geburtsjahr  $\tau$ , definiere für jedes Alter  $x$  die Altersverschiebung  $\Delta(\tau)$  einer Nettoeinmalprämie, bezogen auf die Basistafel, als

$$\Delta_x(\tau) = \hat{x} - x + \frac{\ddot{a}_{\hat{x}}^{AS,base} - \ddot{a}_x(\tau + x)}{\ddot{a}_{\hat{x}}^{AS,base} - \ddot{a}_{\hat{x}+1}^{AS,base}}.$$

Es gilt

$$\ddot{a}_x(\tau + x) \in \left( \ddot{a}_{\hat{x}+1}^{AS,base}, \ddot{a}_{\hat{x}}^{AS,base} \right].$$

Der Term  $\ddot{a}_x(t)$  ist in beiden Gleichungen die Nettoeinmalprämie einer vorschüssigen Leibrente entsprechend der exakten Sterbetafel. Die Altersverschiebung  $\Delta(\tau)$  für das Geburtsjahr  $\tau$  ist dann gegeben durch das gewichtete Mittel über alle  $\Delta_x(\tau)$ :

$$\Delta(\tau) = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} \frac{\omega_x}{\sum_{\tilde{x}=x_{min}}^{x_{max}} \omega_{\tilde{x}}} \cdot \Delta_x(\tau),$$

mit

$$x_{min} = \max \{ 50, 2005 - \tau \},$$

und

$$x_{max} = \max \{ 90, 2010 - \tau \}.$$

Die Gewichte sind in Tabelle 4 gegeben. Die allgemeine Altersspanne der betrachteten Approximation ist zwischen 50 und 90 Jahren. Der untere Summationsindex für das Geburtsjahr  $\tau$  zwischen 1920 und 1955 wird zu  $2005 - \tau$  angepasst, so dass einzig die aktuellen und zukünftigen Rentenwerte im Durchschnitt enthalten sind. Für Geburtsjahrgänge vor 1920 werden die oberen und unteren Grenzen der Summation so justiert, dass nur die nächsten fünf Jahre verwendet werden, um die Altersverschiebung für sehr hohes Alter anzupassen.

Alter $x$	50-59	60-70	71-90	> 90
Gewicht $\omega_x$	1	5	3	1

Tabelle 4: Gewichte für den Mittelwert der Altersverschiebung

Die Wahl der Gewichte legt den Schwerpunkt auf die Altersspanne zwischen 60 und 70 Jahren, da hier in der Regel die Rentenzahlungen beginnen. Die Altersgruppe zwischen 71 und 90 Jahren, in der die Versicherungen versuchen müssen, Reserven

für zukünftige Zahlungen zu sparen, wird nicht so stark gewichtet. Der Altersbereich von 50 bis 59 Jahren wurde lediglich einbezogen, falls die Zahlungen früher starten. Interessant ist auch, dass für frühe Geburtsjahrgänge die Altersverschiebung wieder abnimmt, was zu einer Erhöhung der Nettoeinmalprämie und der Rückstellungen für Personen, die früher geboren werden, führen würde. Um diese unerwünschte Wirkung zu vermeiden, wird die fertige Altersverschiebung nochmal monotonisiert.

Da diese Methode der Altersverschiebung bezüglich dem Referenzjahr  $\tau_0$  nur eine eindimensionale Approximation einer zweidimensionalen Oberfläche widerspiegelt, sind große Abweichungen von den exakten Werten möglich und wurden tatsächlich auch beobachtet.

In der Tat funktioniert die Methode der Altersverschiebung dann am besten, wenn die Basistafel, altersverschoben um  $\Delta\tau$ , die korrekte Sterbewahrscheinlichkeit der Generation  $\tau$  entsprechend der exakten Tafel approximiert. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die Logarithmen  $\log q_x(\tau + x)$  der exakten Generationensterbetafeln linear in  $x$  sind. Nur unter bestimmten Voraussetzungen ist eine derartige Näherung möglich.

Betrachtet man die aktuelle Entwicklung der Nettoeinmalprämie einer vorschüssigen Rente für einen Mann zwischen 60 und 80 Jahren, so zeigt die Abbildung 12 die Konsequenz dieser Nichtlinearität.

Während für das Alter 60 die exakte Tafel schneller steigt als die approximierte Tafel, wächst jene exakte Tafel für das Alter 80 langsamer. Abbildung 13 zeigt eine Quantifizierung dieses Effekts durch den Vergleich der approximierten Werte mit den Werten der exakten Tafel. Da die approximierten zukünftigen Werte weit geringer sind als die exakten Werte, müssen die aktuellen Werte nach der Methode der Altersverschiebung die aktuellen Werte der exakten Tafel überschätzen, um zukünftige Fehler auszugleichen. Daher führt die Methode der Altersverschiebung zu aktuellen Rückstellungen, die weit größer sind als tatsächlich benötigt.

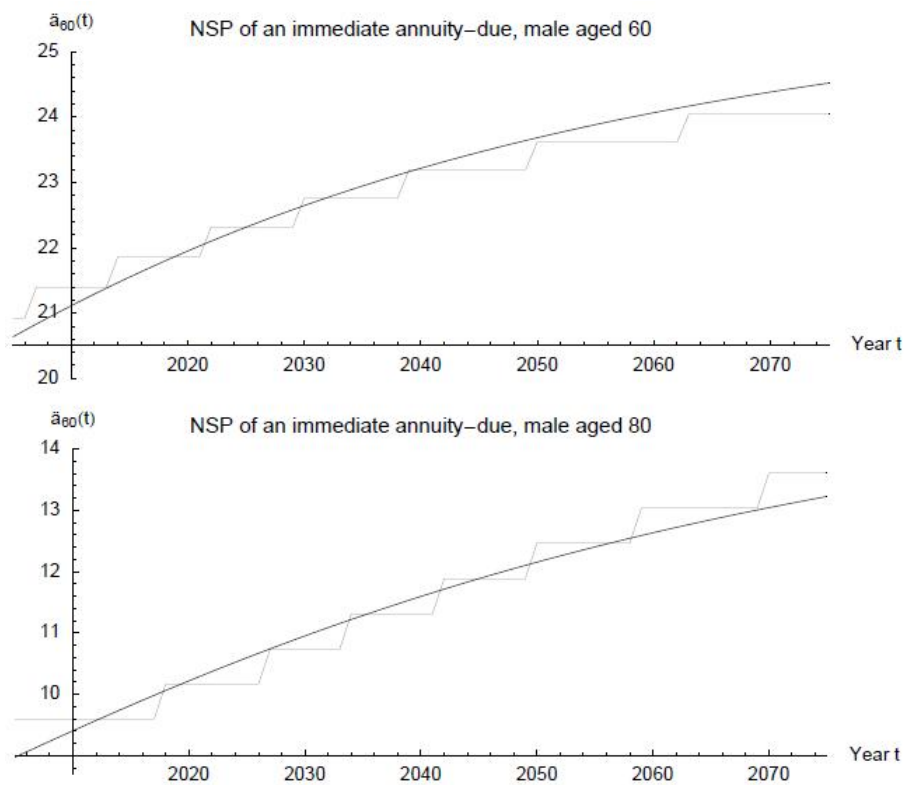


Abbildung 12: Vergleich der Nettoeinmalprämie zwischen einer exakten Tafel und nach der Methode der Altersverschiebung. Für das Alter 60 steigt die exakte Tafel mehr, während nach der Methode der Altersverschiebung jene Werte für das Alter 80 stärker steigen. (Quelle: [13]).

Bei der Rententafel AVÖ 2005R kann unter Verwendung der Methode der Altersverschiebung keine ausreichend gute Qualität der Approximation sichergestellt werden und es treten große Ungenauigkeiten auf. Von einer Verwendung dieser Methode wird daher abgeraten und es wird empfohlen, die exakte Tafel zu verwenden.

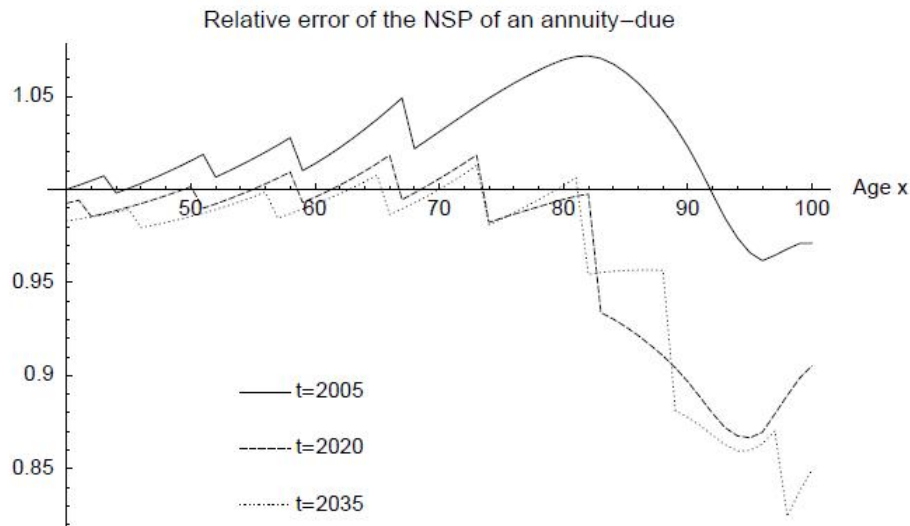


Abbildung 13: Der relative Fehler  $\frac{\ddot{a}_{x+\Delta}^{AS,base}}{\ddot{a}_x(t)}$  nach der Methode der Altersverschiebung, verglichen mit jenen der exakten Tafel. Die Werte der Approximation sind in Zukunft weit geringer als die exakten Werte. Daher werden die aktuellen Nettoeinmalprämien und Reserven überschätzt. (Quelle: [13]).

## 4.2 Basis Trend

Da in Österreich keine Daten über die Sterblichkeit der Rentenversicherten zur Verfügung stehen, wird der Trend der Sterblichkeitsprojektionen aus den Daten der Gesamtbevölkerung gewonnen und dann an die Rentenversicherten angepasst. In Deutschland wurde ein ähnlicher Ansatz für die DAV<sup>8</sup> 2004R genommen. In der Schweiz hingegen war ein solcher Umweg nicht nötig, und die Trends konnten direkt aus den Daten der Rentenversicherten gewonnen werden.

Zur Abschätzung der Trends ist es vorteilhaft, die Sterbewahrscheinlichkeiten als eine Matrix mit den Komponenten  $q_x(t)$  zu sehen, wobei das Alter  $x$  für die Zeilen und das Jahr  $t$  für die Reihen steht. Die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten werden nun mit dem entsprechenden Verfahren (z.B.: Whittaker-Henderson-Verfahren) ausgeglichen. Abbildung 14 und 15 - erhältlich von der STATISTIK AUSTRIA - zeigen einen Plot der ausgeglichenen Werte für die jährliche Sterbewahrscheinlichkeit seit 1947.

Es handelt sich um eine dreidimensionale Darstellung, wobei an der  $x$ -Achse die Jahreszahl, an der  $y$ -Achse das Alter und an der  $z$ -Achse die logarithmierten Sterbewahrscheinlichkeiten abgebildet werden. Bei näherer Betrachtung der beiden Abbildungen

<sup>8</sup> Deutsche Aktuarvereinigung e. V.

ist eine kontinuierlich abnehmende Säuglingssterblichkeit zu erkennen. Es fällt auch im Vergleich zu den Frauen die erhöhte Sterblichkeit der Männer bis zum 25. Lebensjahr auf. Dieser deutlicher Anstieg zwischen 18 und 25 Jahren ist den Verkehrsunfällen zuzuschreiben („accident hump“) und ist immer mehr von Bedeutung.<sup>9</sup> Ein erhöhter Anstieg der Sterbewahrscheinlichkeit ist bei Männern dann wieder ab dem 60. Lebensjahr, bei Frauen ab dem 70. Lebensjahr zu beobachten. Wir kommen nun zu den verschiedenen Methoden.

---

<sup>9</sup> Vgl.: [15]

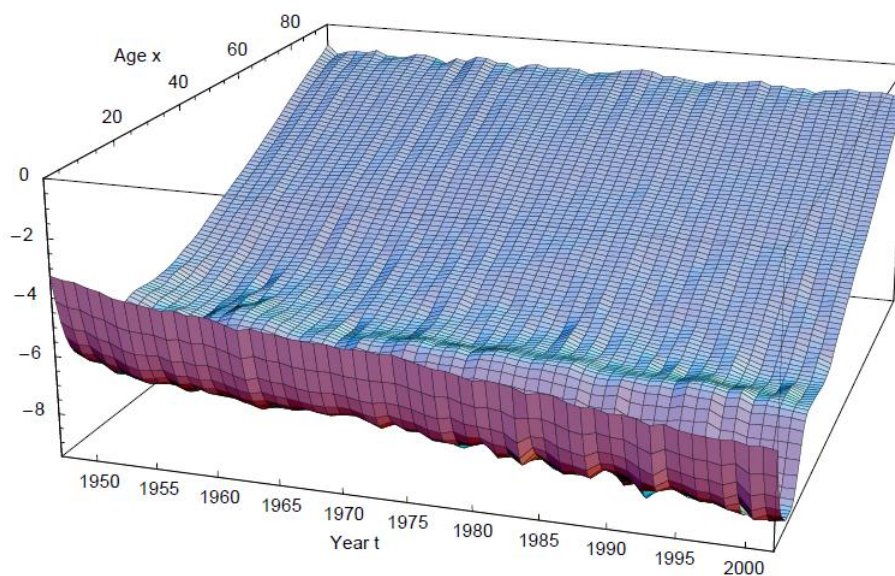


Abbildung 14: Logarithmus der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten für Männer seit 1947 (Quelle: [13]).

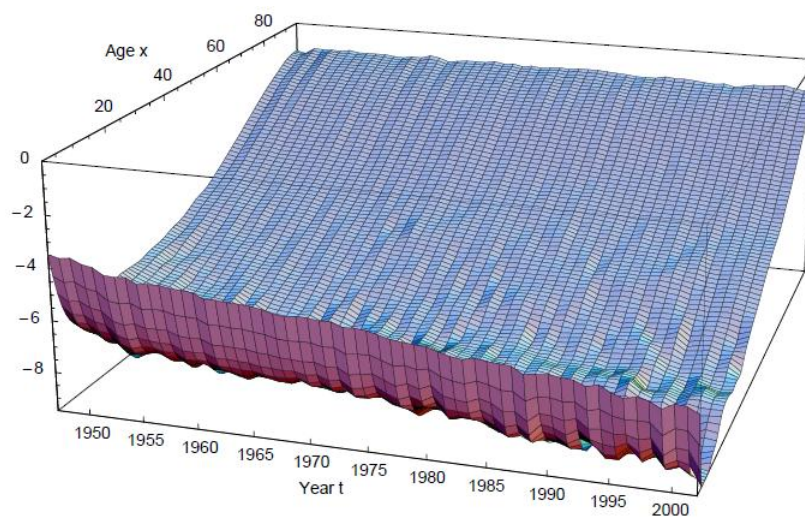


Abbildung 15: Logarithmus der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten für Frauen seit 1947 (Quelle: [13]).

### 4.2.1 Parametrische Modelle

Wie in den Folien [15] von Michel Denuit nachzulesen ist, werden üblicherweise parametrische Modelle, wie zum Beispiel das Makeham oder Heligman-Polland Modell, für jedes einzelne Kalenderjahr einzeln angepasst. Zur Motivation der parametrischen Modelle, betrachten wir das Makeham Modell.

$$\ln \mu_x(t) = a_t + b_t c_t^x$$

Die Variablen  $(a_t, b_t, c_t)$  werden für jedes  $t$  mittels dem Maximum-Likelihood-Verfahren an die Daten gefittet.

$\{\hat{a}_t\}$ ,  $\{\hat{b}_t\}$  und  $\{\hat{c}_t\}$  sind unabhängige Zeitreihen, welche in die Zukunft extrapoliert werden. Wir betrachten als Beispiel einen ARIMA (0,1,0) (Random Walk mit Drift) Prozess, der definiert ist als

$$a_{t+1} = a_t + \Delta a + \epsilon_t,$$

für  $t > t_{max}$  und  $t_0, \dots, t_{max}$ .  $\epsilon_t$  ist eine  $N(0, \sigma^2)$  Zufallsschwankung.

Ein Problem ist, dass dieses Modell sehr stark von dem verwendeten SterbeGesetz abhängt und die Zeitreihen  $\{\hat{a}_t\}$ ,  $\{\hat{b}_t\}$  und  $\{\hat{c}_t\}$  in der Praxis nicht unabhängig sind.

### 4.2.2 Traditionelles Modell

Beim traditionellen Modell, welches der Darstellung von der DAV-Unterarbeitsgruppe Rentnersterblichkeit in [16] folgt, sind die Sterblichkeitsverbesserungen nur vom Alter abhängig:

$$\frac{q_x(t+1)}{q_x(t)} = \exp(-F(x))$$

Die altersspezifischen Trendfaktoren werden mit der Methode der kleinsten Quadrate (least-square fit) durch lineare Regression aus den Werten  $\langle \ln q_x(t) \rangle$  für  $t_0 \leq t \leq t_1$  bestimmt. Der Trendfaktor  $F$  ist hier offensichtlich altersabhängig.

Eine Alternative zu diesem Modell ist das *Kohortenmodell*. Es basiert auf Untersuchungen von Sterblichkeiten aus Großbritannien, bei denen ein Kohorteneffekt festgestellt wurde. Hier ist der Trendfaktor vom Geburtsjahr  $(t - x + 1)$  abhängig:

$$\frac{q_x(t+1)}{q_x(t)} = \exp(-G(\underbrace{t - x + 1}_{\text{Geburtsjahr}}))$$

Eine Verallgemeinerung der beiden vorhergehenden Modelle ist das *Synthesemodell*. Es enthält das traditionelle Modell sowie das Kohortenmodell als Spezialfälle.

$$\frac{q_x(t+1)}{q_x(t)} = \exp(-F(x) - G(t - x + 1))$$



Die Trendfaktoren  $F$  und  $G$  sind in diesem Modell sowohl alters- als auch geburtsjahrabhängig.

Es stellt sich nun die Frage, welches Modell zur Auswahl für Sterblichkeitsprojektionen am besten geeignet ist. Es muss daher ein Modell gefunden werden, welches die statistischen Werte der Vergangenheit sowie die Extrapolation der Sterblichkeiten in die Zukunft am besten modellieren kann.

Das traditionelle Modell und das Kohortenmodell sind Spezialfälle des Synthesemodells mit  $F = 0$  bzw.  $G = 0$ . Die Koeffizienten werden jeweils auf 0 restringiert. Das Ziel ist es nun herauszufinden, ob die Einschränkung auf eines dieser Modelle sinnvoll ist. Um das herauszufinden gibt es eine einfache und effiziente Methode, der sogenannte *Likelihood-Ratio Test*.

#### 4.2.3 Der Likelihood-Ratio Test

Bei diesem Test wird das Maximum der Likelihoodfunktion der unrestringierten Schätzung zum Maximum der Likelihoodfunktion der restringierten Schätzung ins Verhältnis gesetzt. Die Testgröße  $\mathbf{L}$  des Likelihood-Ratio Tests lässt sich folgendermaßen beschreiben

$$\mathbf{L} = \frac{MSE(R) - MSE(U)}{MSE(U)} \cdot \frac{(T - K)}{J},$$

mit folgenden Definitionen:

- $MSE(R)$ : Fehlerquadratsumme (*mean squared error*) des restringierten Modells (also das traditionelle Modell oder das Kohortenmodell).
- $MSE(U)$ : Fehlerquadratsumme des unrestringierten Modells (Synthesemodell).
- $T$ : Anzahl der Beobachtungen
- $K$ : Anzahl der Parameter des unrestringierten Modells
- $J$ : Anzahl der auf 0 gesetzten Koeffizienten des restringierten Modells

Die Testgröße  $\mathbf{L}$  folgt einer  $F$ -Verteilung mit  $J$  und  $T - K$  Freiheitsgraden, d.h.  $\mathbf{L} \sim F(J, T - K)$ .

Die Nullhypothese  $H_0$  muss zu einem Signifikanzniveau von  $\alpha$  abgelehnt werden, wenn  $\mathbf{L} > F(J, T - K; \alpha)$ , wobei der letzte Ausdruck das obere  $\alpha$ -Quantil der  $F$ -Verteilung ist.

**Beispiel 4.1.** Zur Motivierung werden obige Feststellungen am Beispiel<sup>10</sup> der DAV 2004R gezeigt.

Der Test wird jeweils für Männer und Frauen und jeweils für die Altersbereiche 0–89 Jahre und 20–89 Jahre durchgeführt. Es sei  $J = 119$ ,  $T = 2880$  und  $K = 299$ . Als Grundlage dienen hier die Sterbetafeln des deutschen Statistischen Bundesamtes.

Dabei ergeben sich folgende Ergebnisse:

	$H_0$ : das traditionelle Modell gilt $H_1$ : das Synthesemodell gilt	$H_0$ : das Kohortenmodell gilt $H_1$ : das Synthesemodell gilt
Männer (0-89 Jahre)	$\mathbf{L} = \frac{(8.0553-6.0250)}{6.0250} \cdot \frac{(2880-299)}{119}$ $= 7.31$ $F(119, 2581; 0.05) = 1.22$ $F(119, 2581; 0.01) = 1.32$	$\mathbf{L} = \frac{(9.4451-6.0250)}{6.0250} \cdot \frac{(2880-299)}{89}$ $= 16.46$ $F(89, 2581; 0.05) = 1.27$ $F(89, 2581; 0.01) = 1.40$
Frauen (0-89 Jahre)	$\mathbf{L} = 4.51$ $F(119, 2581; 0.05) = 1.22$ $F(119, 2581; 0.01) = 1.32$	$\mathbf{L} = 11.93$ $F(89, 2581; 0.05) = 1.27$ $F(89, 2581; 0.01) = 1.40$
Männer (20-89 Jahre)	$\mathbf{L} = 13.39$ $F(99, 2001; 0.05) = 1.27$ $F(99, 2001; 0.01) = 1.40$	$\mathbf{L} = 10.35$ $F(69, 2001; 0.05) = 1.32$ $F(69, 2001; 0.01) = 1.47$
Frauen (20-89 Jahre)	$\mathbf{L} = 10.63$ $F(99, 2001; 0.05) = 1.27$ $F(99, 2001; 0.01) = 1.40$	$\mathbf{L} = 7.93$ $F(69, 2001; 0.05) = 1.32$ $F(69, 2001; 0.01) = 1.47$

Tabelle 5: Ergebnisse des Likelihood-Ratio Tests

Es zeigt sich, dass der Testwert  $\mathbf{L}$  in allen Bereichen deutlich größer ist, als der kritische Wert aus der  $F$ -Verteilung, sogar auf dem Sicherheitsniveau von  $1 - \alpha = 99\%$ . Daher ist eine Einschränkung aus statistischer Sicht nicht gerechtfertigt. Sowohl für Männer als auch für Frauen ist das Synthesemodell am besten geeignet und auf den ersten Blick spricht somit alles gegen die Nullrestriktionen. Es ist allerdings zu beachten, dass die beim Likelihood-Ratio Test verwendeten Schätzwerte nur auf Vergangenheitsdaten basieren. Somit kann man also nur mit Sicherheit sagen, dass das Synthesemodell am besten zur Modellierung der Vergangenheit geeignet ist. Über die Extrapolationseigenschaften des Synthesemodells kann man an dieser Stelle noch nichts sagen.

<sup>10</sup>Vgl.: [16]

Deutsche Untersuchungen haben gezeigt, dass das Synthesemodell nicht geeignet ist für die Sterblichkeitsprojektionen. Die Sterblichkeit 89-jähriger Männer nach dem Jahr 2050 beträgt laut Synthesemodell weniger als 50% der Sterblichkeit 89-jähriger Frauen. (Abbildung 16 zeigt das Verhältnis der Sterblichkeit 89-jähriger Männer in Prozent der Sterblichkeit 89-jähriger Frauen nach den verschiedenen Modellen)

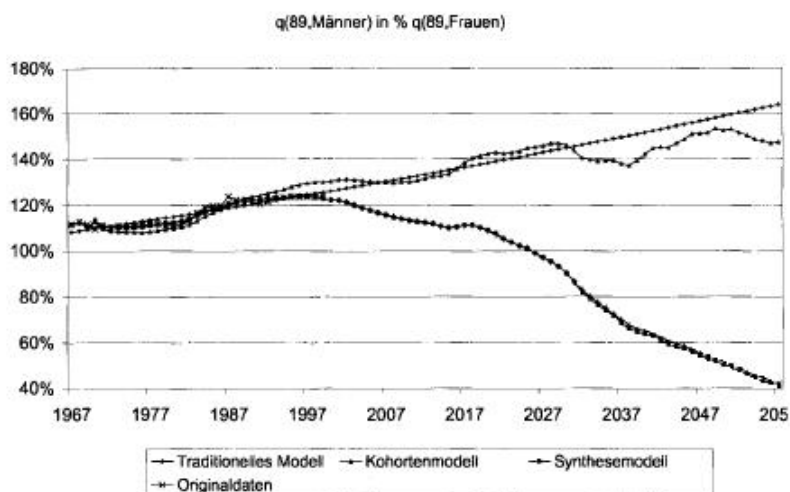


Abbildung 16: Vergleich Männer/Frauen (Quelle: [16])

Dies erscheint im Hinblick auf die Entwicklungen in der Vergangenheit höchst un-plausibel und hat folgende Ursache:

Wie wir oben gesehen haben, sind die Trendfaktoren beim Synthesemodell sowohl alters- als auch geburtsjahrabhängig. Um die beste Approximation der Vergangenheitsdaten mit Trendfunktionen für Männer zu erreichen, müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

Vergleicht man die altersabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen zum Beispiel im Altersbereich 70 bis 89 Jahre mit dem Altersbereich 25 bis 45 Jahre., so fällt auf, dass sie für höhere Alter wesentlich größer sind, als für niedrige Alter. Die geburtsjahrabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen sind, zum Beispiel verglichen mit Kohorten 1970 bis 1980 und mit jenen Kohorten 1925 bis 1945, für spätere Kohorten größer als für frühere Kohorten. Solche Sterblichkeitsprojektionen mit diesen Trends führen nun dazu, dass die hohen Sterblichkeitsverbesserungen für das hohe Alter und späte Kohorten in der Zukunft zusammenwirken und daher keine realistischen und logischen Sterblichkeitsprojektionen ermöglichen. Zum Einen sterben die frühen Kohorten in der Projektion aus, während jedoch die hohe Sterblichkeitsverbesserung der hohen Alter bei den Männern bleibt.

Beim Synthesemodell sorgen also die beiden Komponenten der Sterblichkeitsverbesserung (alters- und geburtsjahrabhängig) in der Zukunft für andere Kombinationen von Alter und Geburtsjahr als in der Vergangenheit. Somit ergeben sich diese unplausiblen Auswirkungen und das Synthesemodell erscheint daher grundsätzlich ungeeignet für Sterblichkeitsprojektionen.

Für die Konstruktion der DAV 2004R wurde das traditionelle Modell verwendet. Da laut Likelihood-Ratio Test weder das traditionelle Modell noch das Kohortenmodell deutlich besser geeignet ist als das jeweils andere Modell, ist bei der Entscheidungsfindung zwischen jenen Modellen folgendes zu beachten:

Da die Schätzungen der Trendfaktoren für Geburtsjahrgänge ab 1970 auf immer kürzeren Beobachtungsperioden beruhen, ist das Kohortenmodell mit steigenden Unsicherheiten behaftet. Jene Geburtsjahrgänge ab 1970 haben nämlich einen großen Anteil am Bereich der Geburtsjahrgänge, für welche die DAV 2004R voraussichtlich von Bedeutung sein wird. Dies erklärt die Verwendung des traditionellen Modells für Sterblichkeitsprojektionen.

#### 4.2.4 Nolfi-Ansatz

In der Schweiz wird der sogenannte Nolfi Ansatz (Vgl.: [1]) verwendet. Das Sterblichkeitsgesetz ist hier gegeben durch:

$$q_x(t) = q_x(t_0) \exp(-\lambda_x \cdot (t - t_0)),$$

$$\lambda_x = -\frac{\ln(0.5)}{T_x},$$

$$T_x = \max(40, x).$$

Dieser Ansatz ist ein Spezialfall des traditionellen Modells mit  $F(x) = \lambda_x$ . Die Größe  $T_x$  nennt man *Halbwertszeit*, da sich nach Ablauf dieser Zeit die Sterblichkeit halbiert hat. Bei der Berechnung der Formel für die Halbwertszeit beruht sich Nolfi auf den Sterblichkeitsverlauf von 1921 bis 1953 der schweizer Bevölkerung.

Auch beim verallgemeinerten Nolfi-Ansatz wird eine exponentielle Abnahme der Sterblichkeit angenommen. Im Gegensatz zu der Arbeit von Nolfi, wird hier jedoch  $\lambda_x$  direkt geschätzt. Es gilt also das folgende Sterblichkeitsgesetz:

$$q_x(t) = q_x(t_0) \exp(-\lambda_x \cdot (t - t_0)),$$

Auch beim folgenden Modell wird eine exponentielle Abnahme der Sterblichkeit angenommen, jedoch mit dem Unterschied, dass die Sterblichkeit gegen eine Grenzsterblichkeit konvergiert. Diese Schätzung der Grenzsterblichkeit, welche nicht direkt zu

beobachtet ist, ist das Problem bei dieser Art des Ansatzes. In diesem Fall lautet das Sterblichkeitsgesetz:

$$q_x(t) = q_x(t_0)(\alpha_x + (1 - \alpha_x) \exp(-\lambda_x \cdot (t - t_0))). \quad (50)$$

Die Grenzsterblichkeit für das Alter  $x$  ist die Größe  $q_x(t_0) \cdot \alpha_x$ .

Geht man von einem unter- oder überexponentiellen Rückgang der Sterblichkeit aus, lautet das Modell

$$q_x(t) = q_x(t_0) \exp(-\lambda_x \cdot (t - t_0)^{c_x}). \quad (51)$$

Ist  $c_x > 1$ , liegt eine überexponentielle Abnahme, wenn  $c_x < 1$ , eine subexponentielle Abnahme der Sterblichkeit vor. Die Probleme bei dieser Art des Modells liegen darin, dass einerseits die Schätzungen von  $c_x$  nicht sehr einfach sind, andererseits die Schätzungen von  $c_x$  relativ stark vom Alter abhängig sind.

Kombiniert man nun (50) mit (51), erhält man folgenden Ansatz:

$$q_x(t) = q_x(t_0)(\alpha_x + (1 - \alpha_x) \exp(-\lambda_x \cdot (t - t_0)^{c_x})).$$

Dieses Modell umfasst all die obigen Modelle und approximiert die Daten somit besser, als die anderen Modelle. Am schwierigsten hier jedoch ist das Schätzen der Parameter.

Die schweizer Rententafel ERM/F 1999 verwendet die einfache Form des Nolfi-Ansatzes, indem  $a_x = 0$  und  $c_x = 1$  gewählt wird.

#### 4.2.5 CMI Modell

Es wird der Arbeit von Renshaw und Haberman in [17] gefolgt. Sei  $x$  das Alter,  $t$  die Zeit mit ausreichenden Daten in  $t = 0$ , und  $\mu_x(t)$  die Sterbeintensität im Alter  $x$  und zur Zeit  $t$ . Der Sterblichkeitsreduktionsfaktor (RF) ist dann gegeben durch die Gleichung

$$\mu_x(t) = \mu_x(0) RF(x, t) \quad \forall t \geq 0,$$

mit der Nebenbedingung

$$RF(x, 0) = 1 \quad \forall x.$$

Die weiteren Einschränkungen

$$1 \geq RF(x, t) > 0 \quad \forall x, t > 0,$$

mit nicht steigender Monotonie für wachsendes  $t$ , folgen implizit. Ansonsten würde der RF als Korrekturfaktor dienen. Es ist vorgesehen, dass  $\mu_x(0)$  vollständig angegeben

ist, in der Regel in Form einer Sterbetafel. Das Problem ist nun den RF vorherzusagen, so dass die zukünftigen Abnahmen in  $\mu_x(0)$  berechnet werden können.

Der RF kann auch dargestellt werden als

$$q_x(t) = q_x(0) RF(x, t) \quad \forall t \geq 0,$$

mit den selben Bedingungen wie oben.

Es gilt

$$q_x(0) = 1 - \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+s}(0) ds\right),$$

und

$$RF(x, t) = \alpha(x) + (1 - \alpha(x))(1 - f(x))^{\frac{t}{20}},$$

mit

$$\alpha(x) = \begin{cases} c, & x < 60, \\ 1 + (1 - c) \cdot \frac{(x-10)}{50}, & 60 \leq x \leq 110, \\ 1, & x > 110 \end{cases}$$

wobei  $c = 0.13$  ist, und

$$f(x) = \begin{cases} h, & x < 60, \\ \frac{h(110-x)+k(x-60)}{50}, & 60 \leq x \leq 110, \\ k, & x > 110 \end{cases}$$

wobei  $h = 0.55$  und  $k = 0.29$  ist.

#### 4.2.6 Lee-Carter Modell

Das Ziel dieses Modells ist nicht die Zusammenfassung der Daten in ein paar Parameter, sondern die Reduktion der Dimensionalität. Es wird ein Zeittrend erstellt, der dann in die Zukunft extrapoliert werden kann.

In den USA wird dieses Modell als Standardmodell benutzt. Auch in Österreich wird mit Hilfe der Lee-Carter Methode eine altersabhängige jährliche Reduktion der logarithmierten Sterblichkeit bestimmt.

Die Basis der eleganten Lee-Carter Methode [19] ist eine bilineare Zerlegung der logarithmischen Sterbeintensität  $\ln \mu_x(t)$ .

Für  $x = 0, \dots, x_{max}$  und  $t = t_{min}, t_{min} + 1, \dots, t_{min} + d = t_{max}$  gilt für die Sterbeintensität der Altersgruppe  $x$  im Jahr  $t$

$$\ln \hat{\mu}_x(t) = \ln \mu_x(t) + \epsilon_{x,t},$$

wobei

$$\mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)$$

und

$$\epsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{iid. ZV.}$$

Daraus folgt

$$\ln \hat{\mu}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t}, \quad (52)$$

mit den altersspezifischen Konstanten  $\alpha_x$  und  $\beta_x$ , dem zeitabhängigen Mortalitätsindex  $\kappa_t$  und dem Störterm  $\epsilon_{x,t}$ . Man nimmt für die Parameter wegen Eindeutigkeit an, dass

$$\sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \kappa_t = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{x=0}^{x_{max}} \beta_x = 1. \quad (53)$$

Die Bedeutung der einzelnen Parameter ist wie folgt definiert (Vgl.: [18]):

- Die Funktion  $\exp(a_x)$  stellt die allgemeine Form der Sterblichkeit abhängig vom Alter dar.
- Aus der Ableitung  $\frac{d}{dt} \log q_x(t) = \beta_x \frac{d\kappa}{dt}$  folgt die Interpretation der altersspezifischen Konstanten  $\beta_x$ . Sie beschreibt die Sensitivität der Sterblichkeit mit der Zeit in Abhängigkeit vom Alter. Sprich, ob sie schneller bzw. langsamer hinsichtlich der Veränderungen in  $\kappa_t$  sinkt.
- $\kappa_t$  beschreibt einen Zeittrend.
- Der Fehlerterm  $\epsilon_{x,t}$  mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sigma^2$  spiegelt die zufälligen, nicht durch das Modell abgebildeten Einflüsse wieder (Zufall, Schwankungen, historische Einflüsse, etc.).
- Um negative Sterbeziffern in der Vorhersage zu verhindern, wird das logarithmische Modell verwendet.

Um die Parameter des Lee-Carter Modells für die vorhandenen Daten zu schätzen, sucht man nach einer Lösung der Gleichung (52) mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.

Im **ersten Schritt** bestimmt man  $\hat{\mu}_x(t)$ .

Es gilt

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{d_x(t)}{L_x(t)},$$

wobei für  $L_x(t)$  gilt

$$L_x(t) = -\frac{l_x(t) \cdot q'_x(t)}{\ln(1 - q'_x(t))}.$$

$d_x(t)$  steht für die Anzahl der Toten im Alter  $x$  und zum Zeitpunkt  $t$ .

Im **zweiten Schritt** folgt die Berechnung der  $\hat{\alpha}_x$ .

Aus den Gleichungen (52) und (53) folgt für  $\hat{\alpha}_x$  folgendes Verhältnis:

$$\sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \ln \hat{\mu}_x(t) = (t_{max} - t_{min} + 1)\alpha_x + \beta_x \underbrace{\sum_{t_{min}}^{t_{max}} \kappa_t}_{=0}$$

Daraus folgt, dass man  $\hat{\alpha}_x$  wie folgt definieren kann:

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_{max} - t_{min} + 1} \sum_{t_{min}}^{t_{max}} \ln \hat{\mu}_x(t) = \frac{1}{d+1} \sum_{t_{min}}^{t_{max}} \ln \hat{\mu}_x(t)$$

Im **dritten Schritt** folgt nun die Berechnung von  $\hat{\beta}_x$  und  $\hat{\kappa}_t$ .

Da auf der rechten Seite von (52) keine Regressoren, sondern nur zu schätzende Parameter zusammen mit dem unbekanntem Index  $\kappa_t$  stehen, können keine Standardregressionsverfahren angewendet werden. Daher wird für die Schätzung des Modells die „Singular Value Decomposition“ (SVD, Singulärwertzerlegung) verwendet.

Sei  $Z$  eine nicht quadratische Matrix der Dimension  $(x_{max} - x_{min} + 1) \times (t_{max} - t_{min} + 1)$  mit den Einträgen

$$z_{x,t} = \ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x = \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t}.$$

Mittels Singulärwertzerlegung bekommt man

$$Z = U \cdot S \cdot V^t.$$

Dabei ist  $U$  eine  $(m \times n)$  Matrix,  $V$  eine  $(n \times n)$  Matrix ( $U$  und  $V$  orthogonal) und  $S$  ist die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten, die der Größe nach geordnet sind. Üblicherweise beinhaltet der erste Term dieser Zerlegung (erste Spalte von  $U$  und  $V$ ) schon den größten Beitrag. Damit werden etwa 90% der Schwankungen beschrieben. Daher liefert der erste Term der SVD von  $Z$  genau die Zerlegung in  $\beta_x \kappa_t$ , welche der OLS-Approximation (OLS = method of least squares, Methode der kleinsten Quadrate) entspricht. Der Rest beschreibt die statistischen Schwankungen und durch Weglassen dieser hinteren Terme, erhält man einen glättenden Effekt.

$$Z = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ u_{m,1} & u_{m,2} & \cdots & u_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,n} \end{pmatrix}$$

Der erste Spaltenvektor der Matrix  $U$  entspricht dem Vektor der altersspezifischen Parameter  $\beta_x$ . Der erste Spaltenvektor der Matrix  $V$  multipliziert mit dem größten Eigenwert  $s_1$  liefert die Schätzwerte des zeitabhängigen Parameters  $\kappa_t$ .



Dabei sind  $\hat{\beta}'_x = u_x$  und  $\hat{\kappa}'_t = s_t v_t$  die nicht normierten Parameter.

Durch Normierung erhält man

$$\hat{\beta}_x = \frac{\vec{u}_1}{\sum_j u_{1,j}},$$

und

$$\hat{\kappa}_t = s_1 \left( \sum_j u_{1,j} \right) \vec{v}_1.$$

Sollten die Sterbezahlen bekannt sein, dann werden die  $\hat{\kappa}_t$  so angepasst, dass sie uns die genauen Zahlen der Toten für das Jahr  $t$  liefern.

Es gilt:

$$\sum_x D_{xt} = \sum_x L_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t)$$

wobei:

$$\beta_x^* = \hat{\beta}_x,$$

$$\kappa_t^* = \hat{\kappa}_t - \bar{\kappa},$$

$$\alpha_x^* = \alpha_x + \beta_x \bar{\kappa},$$

und

$\bar{\kappa}$  ist der Mittelwert der  $\hat{\kappa}_t$ .

In den Abbildungen 17, 18 und 19 werden die Lee-Carter Parameter graphisch motiviert. Die Daten beruhen auf der österreichischen Sterbetafel von 1972 bis 2002.

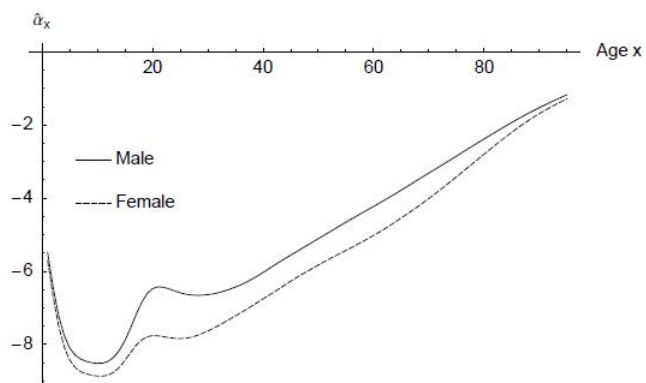


Abbildung 17: Werte von  $\hat{\alpha}_x$  (Quelle: [13]).

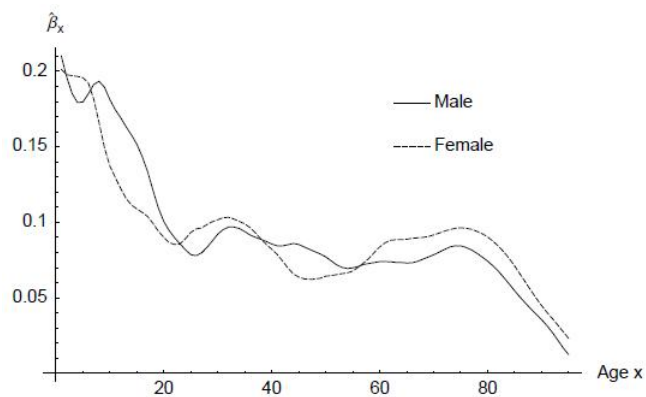


Abbildung 18: Werte von  $\hat{\beta}_x$  (Quelle: [13]).

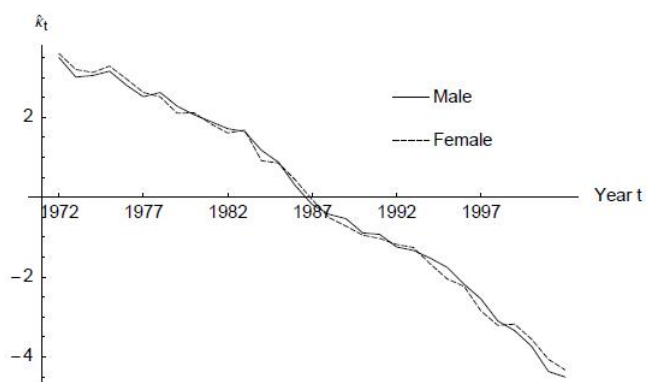


Abbildung 19: Werte von  $\hat{\kappa}_x$  (Quelle: [13]).

Im **vierten Schritt** betrachtet man die Extrapolation in die Zukunft.  $\kappa_t$  beschreibt den Zeittrend und erweitert diesen mittels Random Walk mit Drift = ARIMA(0,1,0). Man bekommt dann folgende Gleichung:

$$\kappa_{t+1} - \kappa_t = \kappa + \epsilon_{t+1}$$

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + \kappa + \epsilon_{t+1}$$

Wobei gilt:

$$\epsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma^2)$$

$\kappa$  wird aus bekannten Werten bestimmt. Dann folgt die Extrapolation mit Steigung  $\lambda_x$ :

$$\kappa_t = \kappa_{t_0} + \kappa(t - t_0)$$

und

$$\ln \mu_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t = \alpha_x + \beta_x [\kappa_{t_0} + \kappa(t - t_0)] = (\alpha_x + \beta_x \kappa_{t_0}) + \underbrace{\beta_x \kappa}_{\hat{= -\lambda_x}} (t - t_0)$$

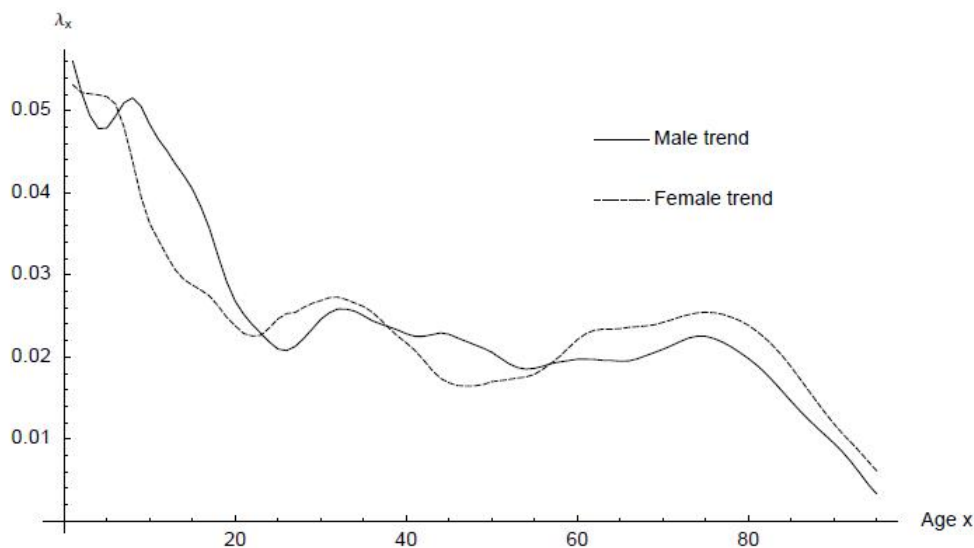


Abbildung 20: Österreichischer Populationstrend, berechnet von 1972 bis 2002. (Quelle: [13]).

#### 4.2.7 Theoretischer Hintergrund der Lee-Carter Zerlegung

Wir werden nun beweisen, dass der erste Term der Singulärwertzerlegung einer Matrix  $\mathbf{A}$  der bilineare Schätzer  $\mathbf{xy}^t$ , im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate dieser Matrix, ist.

**Lemma 4.2.** Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine Matrix mit Rang  $r \leq n$ . Die Singulärwertzerlegung von  $\mathbf{A}$  ist dann

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^t,$$

mit

$$\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Dabei sind  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  orthogonale Matrizen und  $\hat{\mathbf{D}}$  ist eine Diagonalmatrix mit nicht negativen Elementen  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > s_{r+1} = \dots = s_n = 0$ . Diese Elemente heißen Singulärwerte (singuläre Werte) von  $\mathbf{A}$ .

Die beste bilineare Approximation (im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate) der Form  $\mathbf{xy}^t$ , mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , ist dann gegeben durch den ersten Term der Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{xy}^t = s_1 \mathbf{u}\mathbf{v}^t,$$

wobei  $s_1$  der größte singuläre Wert von  $\mathbf{A}$ , mit entsprechenden (nicht unbedingt eindeutigen) links- und rechtssingulären Vektoren  $\mathbf{u} = \mathbf{U}_{\cdot,1}$  und  $\mathbf{v} = \mathbf{V}_{\cdot,1}$ , ist.

**Beweis.** Den Beweis für die Existenz der Singulärwertzerlegung findet sich zum Beispiel in [20].

Die singulären Werte sind die Wurzeln der Eigenwerte von  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ . Die Spalten  $\mathbf{u}_j$  von  $\mathbf{U}$  sind die entsprechenden Eigenvektoren von  $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$  und die Spalten  $\mathbf{v}_j$  von  $\mathbf{V}$  sind die entsprechenden Eigenvektoren von  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ .

Wir wollen die euklidische Matrixnorm der Abweichungen

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{xy}^t\|_E^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (A_{i,j} - x_i y_j)^2$$

über alle  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^t \in \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$  minimieren. Da für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} f(\mathbf{0}, (1, 0, \dots, 0)^t), & \text{wenn } \mathbf{y} = \mathbf{0}, \\ f(\mathbf{x} \|\mathbf{y}\|, \mathbf{y} / \|\mathbf{y}\|), & \text{wenn } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

genügt es, unter der Nebenbedingung  $\|\mathbf{y}\|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1$  zu minimieren.

Für eine Matrix  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit den Spalten  $c_1, \dots, c_n$ , impliziert die Orthogonalität von  $\mathbf{U}$

$$\|\mathbf{UC}\|_E^2 = \sum_{j=1}^n \|\mathbf{U}c_j\|^2 = \sum_{j=1}^n \|c_j\|^2 = \|\mathbf{C}\|_E^2$$

und mit einem ähnlichen Argument für die orthogonale Matrix  $\mathbf{V}$

$$\|\mathbf{CV}^t\|_E^2 = \|\mathbf{VC}^t\|_E^2 = \|\mathbf{C}^t\|_E^2 = \|\mathbf{C}\|_E^2,$$

da

$$\|\mathbf{UCV}^t\|_E^2 = \|\mathbf{C}\|_E^2.$$

Definiere

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)^t = \mathbf{U}^t \mathbf{x}$$

und

$$\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)^t = \mathbf{V}^t \mathbf{y}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{A} - \mathbf{xy}^t\|_E^2 = \|\mathbf{UDV}^t - \mathbf{U}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}^t\mathbf{V}^t\|_E^2 = \|\mathbf{D} - \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}^t\|_E^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left( (s_i - \tilde{x}_i \tilde{y}_i)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \tilde{x}_i^2 \tilde{y}_j^2 \right) + \sum_{i=n+1}^m \sum_{j=1}^n \underbrace{\tilde{x}_i^2 \tilde{y}_j^2}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von  $\|\tilde{\mathbf{y}}\|^2 = 1$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\geq \sum_{i=1}^n (s_i^2 - 2s_i \tilde{x}_i \tilde{y}_i + \tilde{x}_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{(\tilde{x}_i - s_i \tilde{y}_i)^2}_{\geq 0} + \sum_{i=1}^n s_i^2 - \sum_{i=1}^n \underbrace{s_i^2 \tilde{y}_i^2}_{\leq s_i^2} \\ &\geq \sum_{i=2}^n s_i^2. \end{aligned}$$

Für  $\tilde{\mathbf{x}} = (s_1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^m$  und  $\tilde{\mathbf{y}} = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$  erhalten wir diese untere Schranke.

Daher folgt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{x}} = s_1 \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{v}$$

minimiert

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{xy}^t\|_E^2.$$

□

## 5 Internationaler Vergleich

Die Darstellung des folgenden Kapitels halten sich an die Ausarbeitung von [13].

### 5.1 Basistafel

Die Abbildung 21 zeigt einen internationalen Vergleich der Periodentafel für das Jahr 2001, welches auch das Basisjahr für die Extrapolation der AVÖ 2005R ist. Während alle drei neuen Rententafeln (AVÖ 2005R, DAV 2004-R und ERM/F 1999) im wesentlichen unterhalb der extrapolierten Rententafel AVÖ 1996R für das Jahr 2001 liegen, stimmen sie insbesondere für die wichtige Altersgruppe zwischen 60 und 85 Jahren weitgehend überein. Für sehr hohes Alter liegt die neue AVÖ 2005R sogar über der alten Rententafel. Dies beruht auf der Tatsache, dass die extrapolierte Sterblichkeit der offiziellen österreichischen Sterbetafel sogar für jenes Alter über 95 Jahre, im Vergleich zu den Sterbewahrscheinlichkeiten der AVÖ 1996R, gestiegen ist. Darüber hinaus wurde für ein hohes Alter keine Verringerung der Sterblichkeit beobachtet, während die AVÖ 1996R eine leichte Tendenz für diese Altersgruppe annahm. Daher liegt die Sterblichkeitsprojektion unter dem tatsächlichen Wert. Weiteres ist die geringe Sterblichkeitsrate in Deutschland ab dem Alter 95 zu erwähnen, welche auf die verwendete Methode für die DAV 2004-R zurückzuführen ist. Dies ist einer der Gründe, abgesehen von der Tatsache, dass keine Sicherheitsspanne für zufällige Schwankungen enthalten sind, warum die österreichischen versicherungstechnischen Werte der neuen Tafel deutlich niedriger berechnet werden, als die deutschen Werte.

### 5.2 Trend

Der Trend für die AVÖ 2005R bezieht sich auf den mittelfristigen Trend seit 1972 der jährlich angepassten Sterbetafeln der STATISTIK AUSTRIA. Die alte Rententafel AVÖ 1996R verwendete dagegen den kurzfristigen Trend seit 1980 für die Jahre bis 2000. Das Jahr 1972 ist so gewählt, dass der Zeitraum über 30 Jahre reicht, aber nicht die letzte Grippe-Epidemie im Jahr 1970 umfasst. Zusätzlich zu der Anforderung der Lee-Carter-Methode ausreichend viele Zeitpunkte zu benützen, war gerade auch dies eines der Argumente, die jährlich rohe Sterblichkeitsrate der STATISTIK AUSTRIA zu verwenden.

Abbildungen 22 und 23 zeigen die Trends der ersten und zweiten Ordnung für die AVÖ 2005R, verglichen mit jenen der DAV 2004R, der ERM/F 1999 und der AVÖ 1996R. Die größte Auffälligkeit ist, dass die Trends der neuen Tafeln weit über dem langfristigen und sogar über dem kurzfristigen Trend der AVÖ 1996R liegen.

Obwohl unterschiedliche Daten und verschiedene Modelle verwendet wurden, stim-

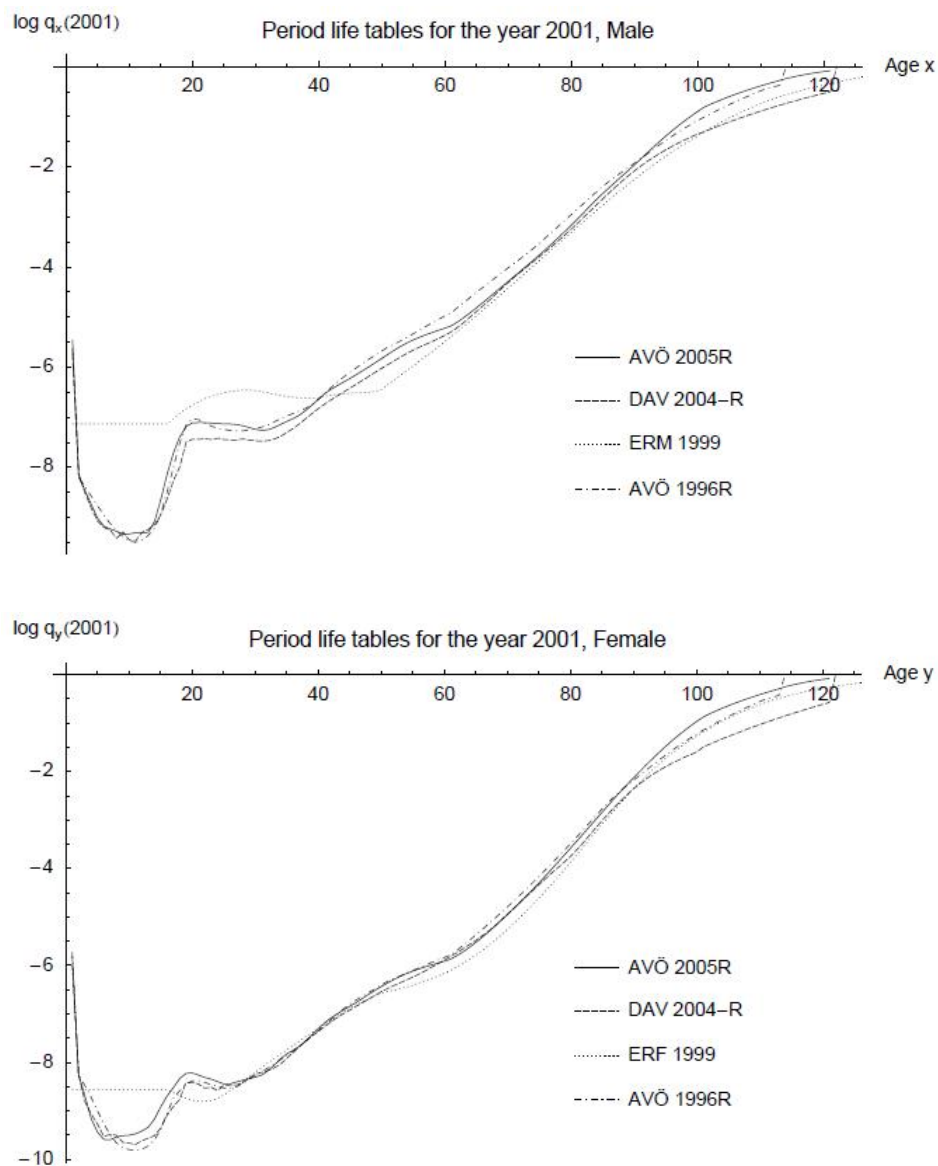


Abbildung 21: Vergleich der Basistafel AVÖ 2005R (bezogen auf das Jahr 2001) mit der vorherigen österreichischen und den aktuellen Rententafeln aus Deutschland und der Schweiz für das Jahr 2001. Während die Rententafeln aus Deutschland und der Schweiz einen zusätzlichen Term für zufällige Schwankungen enthalten, ist dies bei der österreichischen Rententafel nicht der Fall. (Quelle: [13]).

men die Formen und Größen der österreichischen und deutschen Trends in hohem Maße überein. Dies ist ein weiterer Hinweis darauf, dass die Bevölkerungsstruktur in Österreich und Deutschland sehr ähnlich ist und dass die verwendeten Methoden der DAV 2004-R auch für die österreichische Tafel benutzt werden können. Der Hauptunterschied ist die Altersspanne der über 100-jährigen, in der die deutsche Sterbetafel 2. Ordnung eine künstliche untere Schranke  $\lambda_x \geq 0.01$  verwendet, die durch eine andere Sicherheitsspanne für den Trend 1. Ordnung verschoben wird. Dieser Ansatz bedeutet eine unnötig große Sicherheitsspanne für das hohe Alter, da insbesondere keine Sterblichkeitsreduktion für diesen Altersbereich in den letzten 50 Jahren beobachtet wurde. Im Gegensatz dazu lässt die neue österreichische Tafel den Trend gegen Null gehen, der - zumindest für Frauen - auch mit dem schweizer Trend übereinstimmt. Der Trend für Männer im hohen Alter ist in der Schweiz auch deutlich höher als in Österreich. Um diesen Effekt im hohen Alter zu quantifizieren, konstruiert man Sterbetafeln ähnlich der AVÖ 2005R, wobei jedoch der Trend für hohes Alter mit jenen aus Deutschland oder der Schweiz ersetzt wurde. Die Ergebnisse der Nettoeinmalprämie einer vorschüssigen Rente beginnend ab dem Alter von 65 Jahren sind in der folgenden Tabelle ersichtlich.

	AVÖ 2005R	ERM-Trend für $x \geq 100$		ERM-Trend für $x \geq 90$		DAV-Trend für $x \geq 95$	
		NSP	rel. change	NSP	rel. change	NSP	rel. change
$\ddot{a}_{65}$ M	21.335	21.456	0.6%	21.742	1.9%	21.611	1.3%
$\ddot{a}_{65}$ F	22.703					22.931	1.0%

Tabelle 6: Der Einfluss der Trends für hohes Alter auf die Nettoeinmalprämie einer vorschüssigen Rente von 1 beginnend ab dem Alter von 65 Jahren (für die Generation 1990).

Die erste Spalte ist die Nettoeinmalprämie einer vorschüssigen Rente für eine 65-jährige Person (geboren 1990, 2.25 % Zinsen, NEP zum Zeitpunkt wenn die Zahlungen beginnen) entsprechend der AVÖ 2005R. Verwendet man die schweizer Trends für Männer ab dem Alter  $\geq 100$ , so beträgt die relative Änderung nur 0.57%. Benutzt man jedoch die ERM Trends bereits ab dem Alter  $x \geq 90$ , so ist der Anstieg erheblich (relative Änderung 1.93 %). Unter Verwendung der unteren Schranke von 0.01 plus eine Sicherheitsspanne von 0.0025, führt der DAV-Trend für  $x \geq 95$  zu einem erheblichen Anstieg für Männer (1.3 %). Für Frauen ist der schweizer Trend etwas niedriger als der österreichische Trend und wurde somit nicht verglichen. Benutzt man wiederum die untere Schranke so führt dies bei den Frauen zu einem Anstieg von 1.00%. Obwohl dieser Anstieg niedriger ist als bei den Männern, ist er immer noch erheblich hoch und erklärt zu einem großen Teil den Unterschied zwischen den neuen österreichischen und den deutschen Tafeln.



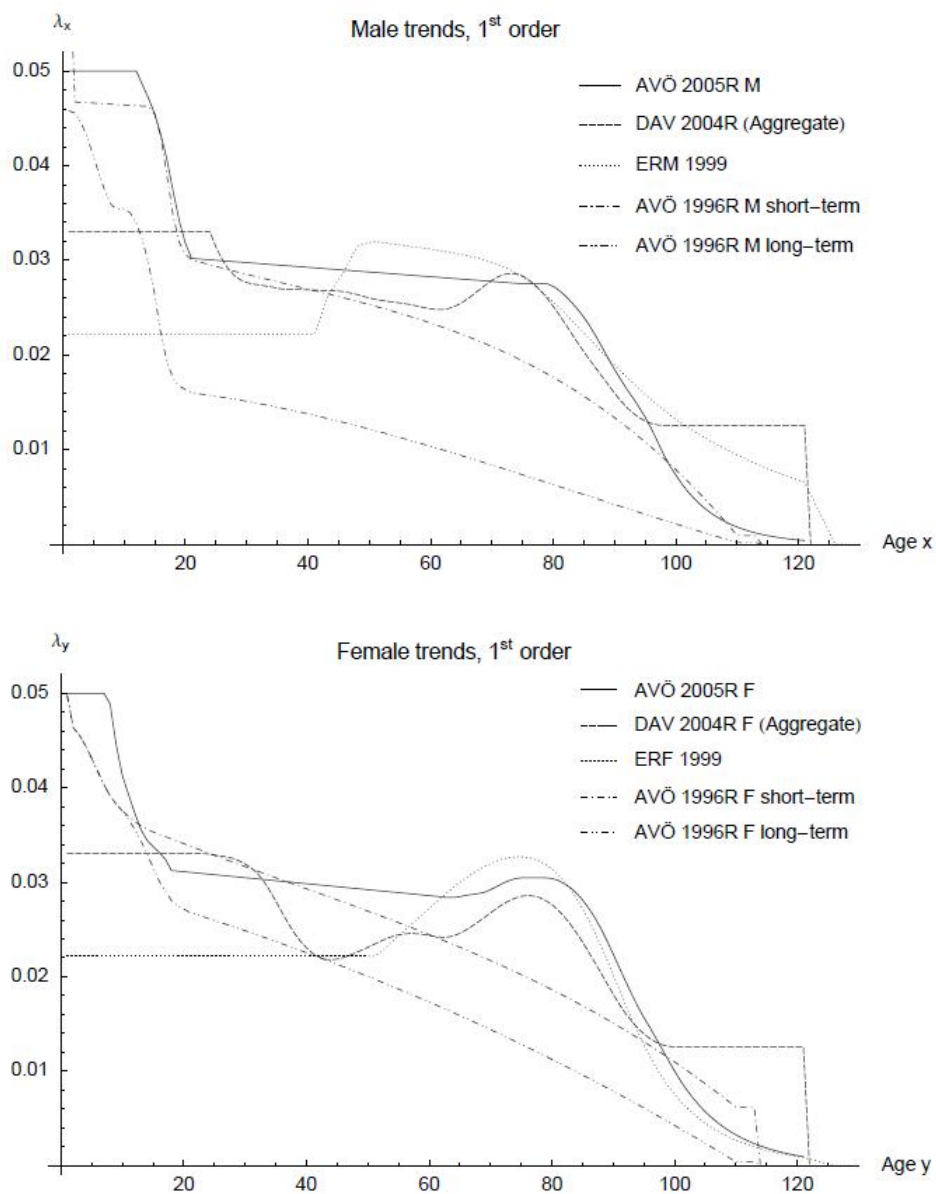


Abbildung 22: Trend 1. Ordnung der AVÖ 2005R verglichen mit den entsprechenden Trends der DAV 2004R, ERM/F 1999 und der AVÖ 1996R. (Quelle: [13]).

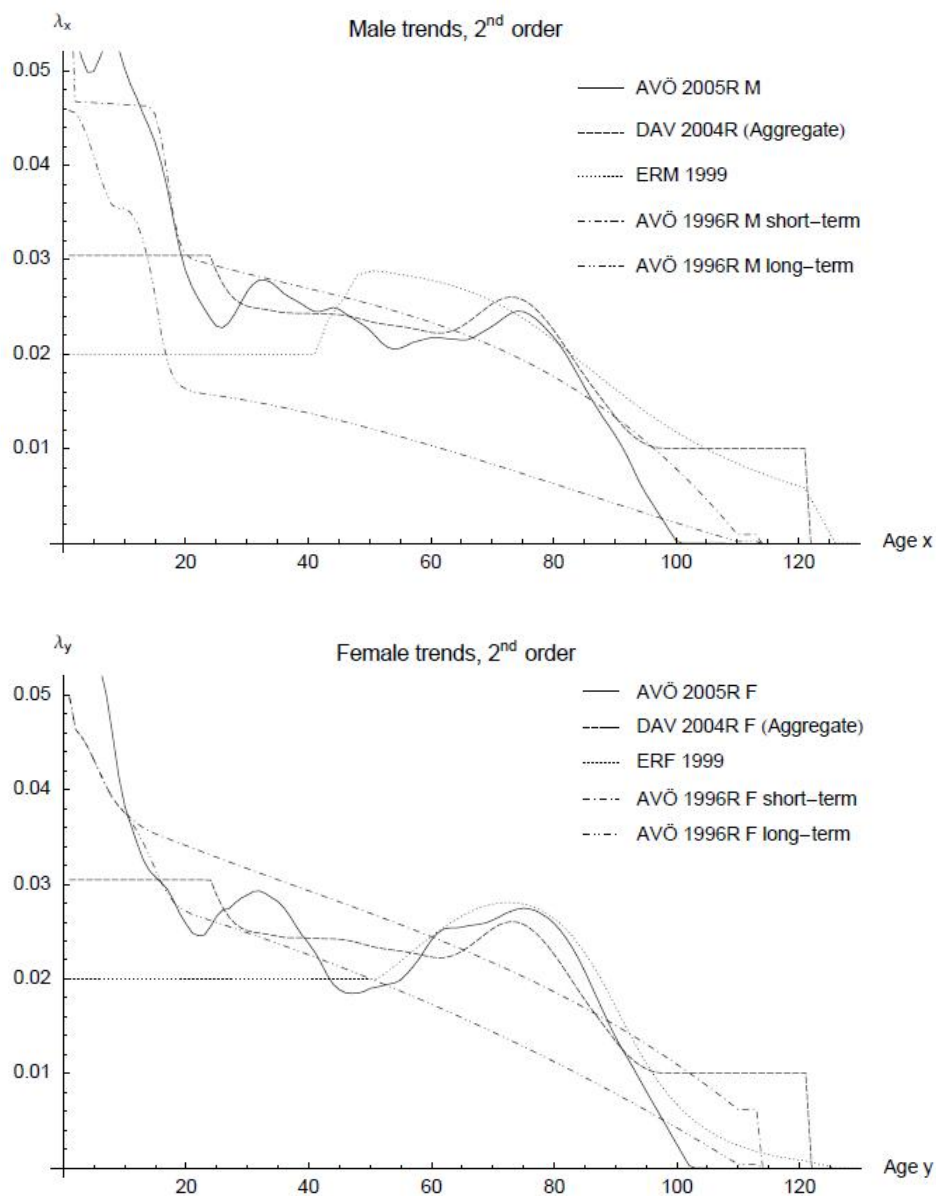


Abbildung 23: Trend 2. Ordnung der AVÖ 2005R verglichen mit den entsprechenden Trends der DAV 2004R, ERM/F 1999 und der AVÖ 1996R. (Quelle: [13]).

Zum Abschluss sei noch erwähnt, dass ein großer Teil der Unterschiede in der Nettoeinmalprämie, zwischen der AVÖ 2005R und der DAV 2004-R, auf die untere Schranke in der deutschen Tafel zurückgeführt werden kann. Für Männer verwendet auch die schweizer Tafel einen Trend für hohes Alter. Er wird durch gewisse Veränderungen des Bevölkerungstrends erhalten und ist erheblich größer als der österreichische Trend. Der Altersbereich über 100 Jahre scheint nicht so von großer Bedeutung zu sein. Die Spanne zwischen 90 und 100 Jahren hingegen spielt eine große Rolle. Wie Abbildung 24 zeigt, ist für Männer der Trend 1. Ordnung in der AVÖ 2005R im Alter von 95 Jahren bereits doppelt so groß wie der Trend 2. Ordnung, der wiederum größer ist als der Bevölkerungstrend. Obwohl die Trends für Männer der AVÖ 2005R deutlich unter jenen der Schweiz und Deutschland für das hohe Alter liegen, wird in Anbetracht dessen daraus geschlossen, dass sie für die österreichische Tafel ausreichen.

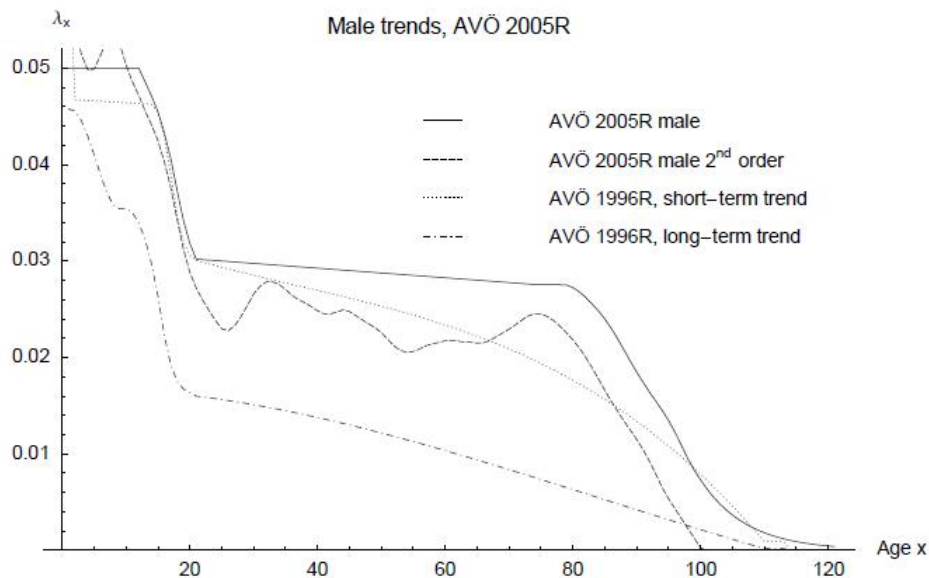


Abbildung 24: Vergleicht die Trends der AVÖ 2005R mit den kurz- und langfristigen Trends der AVÖ 1996R. (Quelle: [13]).

### 5.3 Sterblichkeit

In diesem Abschnitt werden die daraus resultierenden Sterbewahrscheinlichkeiten einiger ausgewählter Generationen der neuen österreichischen Sterbetafel mit den entsprechenden Werten der deutschen und der schweizer Tafel verglichen. Abbildung 25 und 26 zeigen die Sterblichkeit der nachfolgenden Generationen:

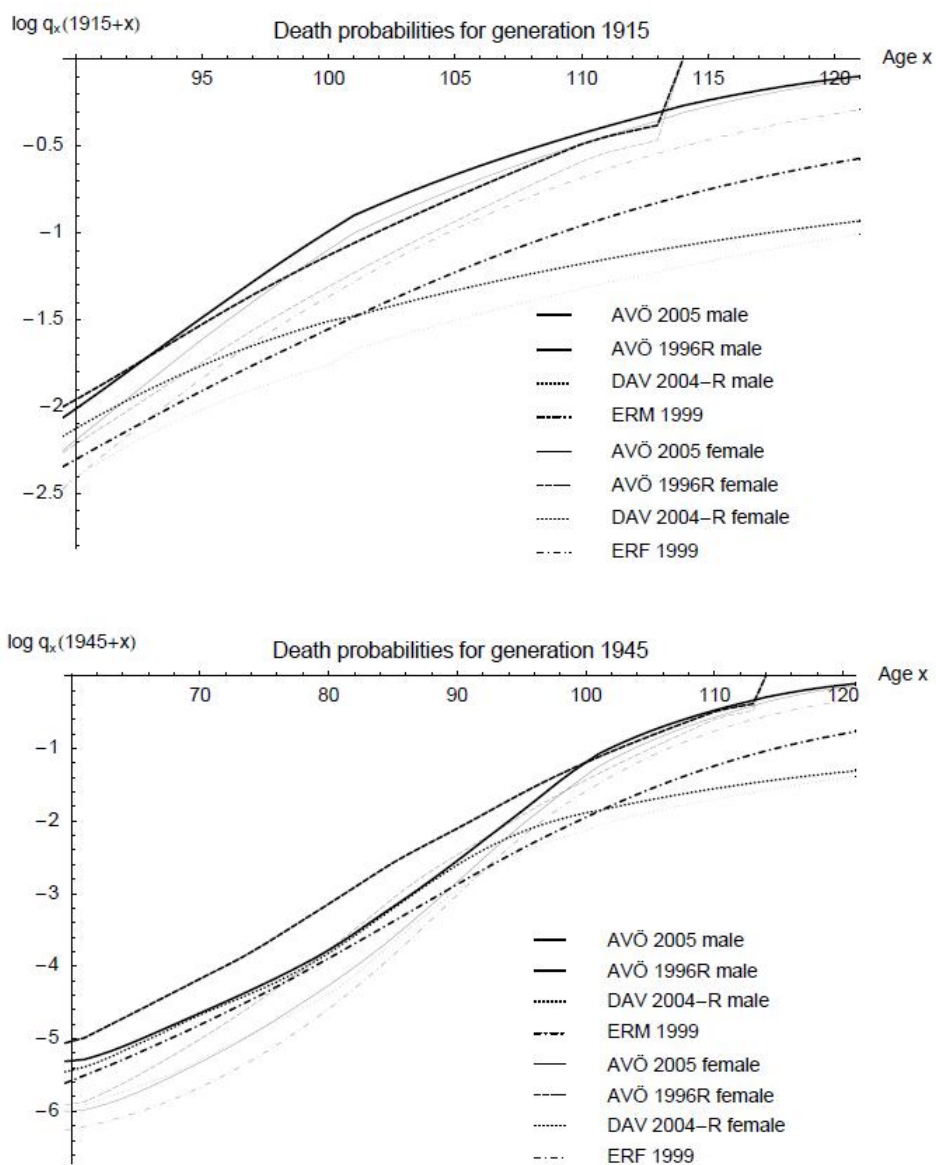


Abbildung 25: Internationaler Vergleich der logarithmierten Sterbewahrscheinlichkeiten für die Generationen 1915 und 1945. (Quelle: [13]).

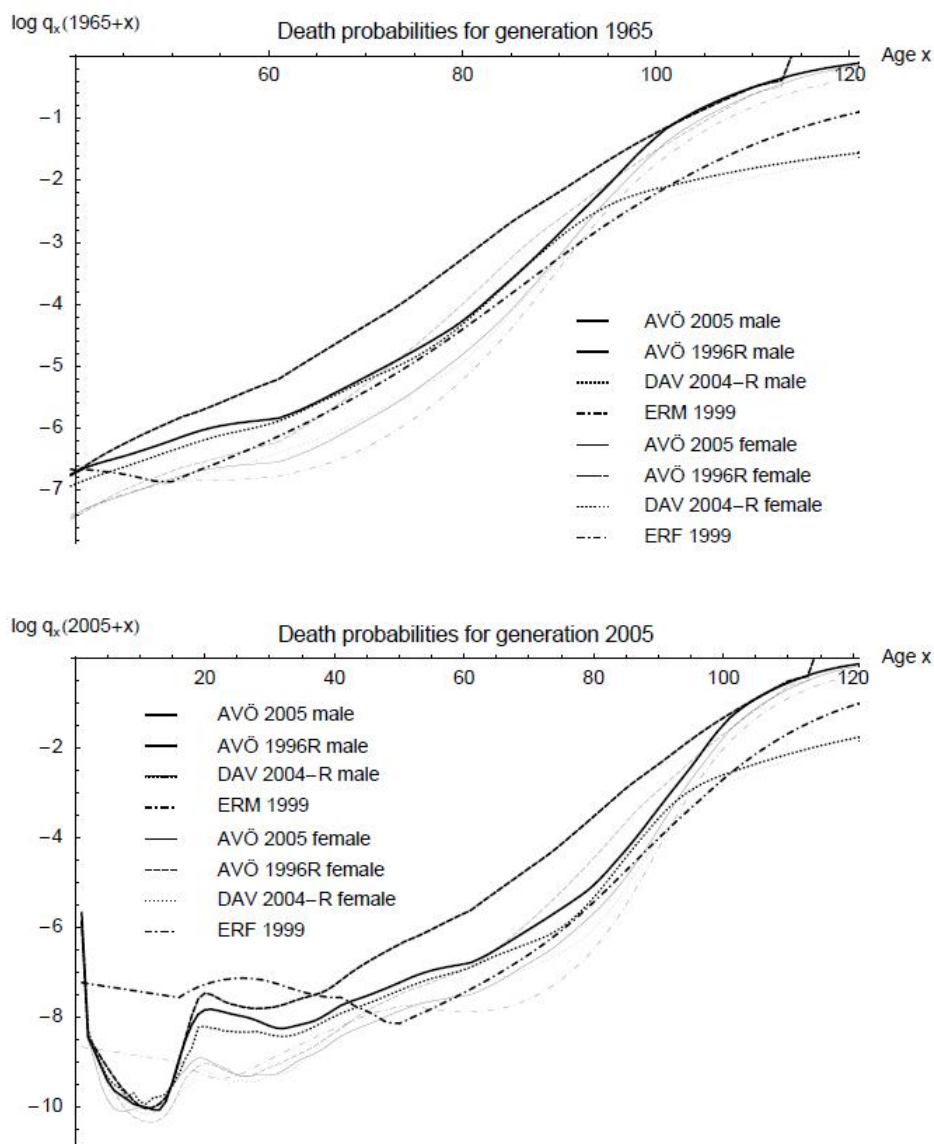


Abbildung 26: Internationaler Vergleich der logarithmierten Sterbewahrscheinlichkeiten für die Generationen 1965 und 2005. (Quelle: [13]).

- Die Generation 1915: Derzeit - bezogen auf die AVÖ 2005R - 90 Jahre alt, die im oberen Altersbereich für die Reserven relevant ist.
- Die Generation 1945: Derzeit 60 Jahre alt. Dies ist die typische Generation für die die Rentenzahlungen beginnen.
- Die Generation 1965: Derzeit im Alter von 40 Jahren. Dies ist, berechnet mit der AVÖ 2005R, die durchschnittliche Generation für neue Verträge.
- Die Generation 2005: Jene, die jetzt geboren werden, und für die künftige Entwicklung nützlich sein können.

Zu erkennen ist, dass die AVÖ 2005R für die meisten Altersgruppen eine etwas höhere Sterbewahrscheinlichkeiten prognostiziert als sowohl die deutsche und die schweizer Tafel (mit Ausnahme für das hohe Alter).

## 5.4 Lebenserwartung

Unter Verwendung der Sterblichkeitsvorhersagen 2. Ordnung  $q_x^{(2)}(t)$  kann der Erwartungswert der Lebensdauer  $\dot{e}_x(t)$ , der Erwartungswert der reduzierten Lebensdauer  $e_x(t)$  und die entsprechenden Quantile für das Alter  $x \in \mathbb{N}_0$  im Jahr  $t$  leicht berechnet werden.

Die Zufallsvariable  $T_x(t)$  der zukünftigen Lebensdauer kann in

$$T_x(t) = K_x(t) + S_x(t)$$

zerlegt werden, wobei die reduzierte Lebensdauer

$$K_x(t) = \lfloor T_x(t) \rfloor$$

die Anzahl der vollendeten zukünftigen Jahre einer  $x$ -jährigen Person im Jahr  $t$  ist.

$$S_x(t) = T_x(t) - K_x(t)$$

ist der Bruchteil des Todesjahres bevor die Person stirbt. Der Erwartungswert der reduzierten Lebensdauer

$$e_x(t) = \mathbb{E}[\lfloor T_x(t) \rfloor] = \mathbb{E}[K_x(t)]$$

kann immer mit den jährlichen Sterbewahrscheinlichkeiten berechnet werden. Der Erwartungswert der zukünftigen Lebensdauer

$$\dot{e}_x(t) = \mathbb{E}[T_x(t)]$$

kann jedoch nur mit bestimmten Annahmen für die Sterbewahrscheinlichkeiten unter einem Jahr berechnet werden. Eine beliebte Annahme ist

$$\mathbb{E}[S_x(t)] = \frac{1}{2} \quad \text{und somit} \quad \dot{e}_x(t) = e_x(t) + \frac{1}{2},$$

die insbesondere dann der Fall ist, wenn man die Linearität von

$$[0, 1) \ni u \mapsto {}_uq_{x+k}(t+k) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } P(K_x(t) = k) > 0$$

annimmt. In diesem Fall ist  $S_x(t)$  gleichmäßig in  $[0, 1)$  verteilt und sogar unabhängig von  $K_x(t)$ .

Unter der Annahme einer jährlich konstanten Sterbeintensität  $\mu_{x+u}(t+u) = \mu_x(t)$  für  $0 \leq \mu < 1$  gilt

$$\mathbb{E}[S_x(t)] \neq \frac{1}{2}$$

und  $K_x(t)$  und  $S_x(t)$  sind im Allgemeinen abhängig, sogar für  $x \in \mathbb{N}$  und  $t \in \mathbb{N}$ . Der Ausdruck (54) für die zukünftige Lebensdauer ist dann nicht mehr ganz so intuitiv.

Insbesondere gilt dann

$$\begin{aligned} e_x(t) &= \mathbb{E}[[T_x(t)]] = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x^{(2)}(t), \\ \dot{e}_x(t) &= \mathbb{E}[T_x(t)] = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{}_k p_x^{(2)}(t) \cdot q_{x+k}^{(2)}(t+k)}{\log p_{x+k}^{(2)}(t+k)}, \end{aligned} \quad (54)$$

für die Zufallsvariable  $T_x(t)$  der zukünftigen Lebensdauer einer  $x$ -jährigen Person im Jahr  $t$ .

**Lemma 5.1.** *Sei  $q_x(t)$  die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit einer Person im Alter  $x \in \mathbb{N}$  und im Kalenderjahr  $t$  unter der Annahme, dass die Sterbeintensität  $\mu_{x+k+u}(t+k+u)$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $u \in [0, 1)$  konstant in  $u$  ist. Sei  $T_x(t)$  die zukünftige Lebensdauer einer  $x$ -jährigen Person im Kalenderjahr  $t$ . Der Erwartungswert der zukünftigen Lebensdauer ist dann gegeben durch*

$$\dot{e}_x(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{}_k p_x(t) \cdot q_{x+k}(t+k)}{\log p_{x+k}(t+k)}.$$

**Beweis.** Die Verteilung von  $T_x(t)$  wird mit Hilfe der zeitabhängigen Sterbeintensität  $\{\mu_{x+s}(t+s)\}_{s \geq 0}$  bestimmt durch

$$\mathbb{P}(T_x(t) > s) = {}_s p_x(t) = \exp\left(- \int_0^s \mu_{x+u}(t+u) du\right), \quad s \geq 0.$$

Man beachte, dass  ${}_{k+u}p_x(t) = {}_k p_x(t) \cdot {}_u p_{x+k}(t+k)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $u \in [0, 1)$ . Unter der Annahme einer jährlich konstanten Sterbeintensität

$$\mu_{x+k+u}(t+k+u) = -\log p_{x+k}(t+k), \quad u \in [0, 1),$$

folgt, dass  ${}_u p_{x+k}(t+k) = p_{x+k}^u(t+k)$ .

Wegen Satz von Fubini kann der Erwartungswert dargestellt werden als

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_x] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T_x(t) > s) ds = \int_0^\infty {}_s p_x(t) ds = \sum_{k=0}^\infty {}_k p_x(t) \int_0^1 \underbrace{{}_u p_{x+k}(t+k)}_{=p_{x+k}^u(t+k)} du \\ &= \sum_{k=0}^\infty {}_k p_x(t) \left. \frac{p_{x+k}^u(t+k)}{\log p_{x+k}(t+k)} \right|_{u=0}^1 = - \sum_{k=0}^\infty {}_k p_x(t) \frac{q_{x+k}(t+k)}{\log p_{x+k}(t+k)}. \end{aligned}$$

□

Abbildung 27 zeigt einen Vergleich mit der AVÖ 2005R. Während der Erwartungswert der zukünftigen Lebensdauer bei den Männern im Vergleich zu den Vorhersagen der AVÖ 1996R deutlich steigt, ist die Zunahme bei den Frauen deutlich kleiner. Dies ist erneut eine Konsequenz der großen Diskrepanz in den Trends und den Basistafeln für Männern, zwischen der alten und der neuen Tafel.



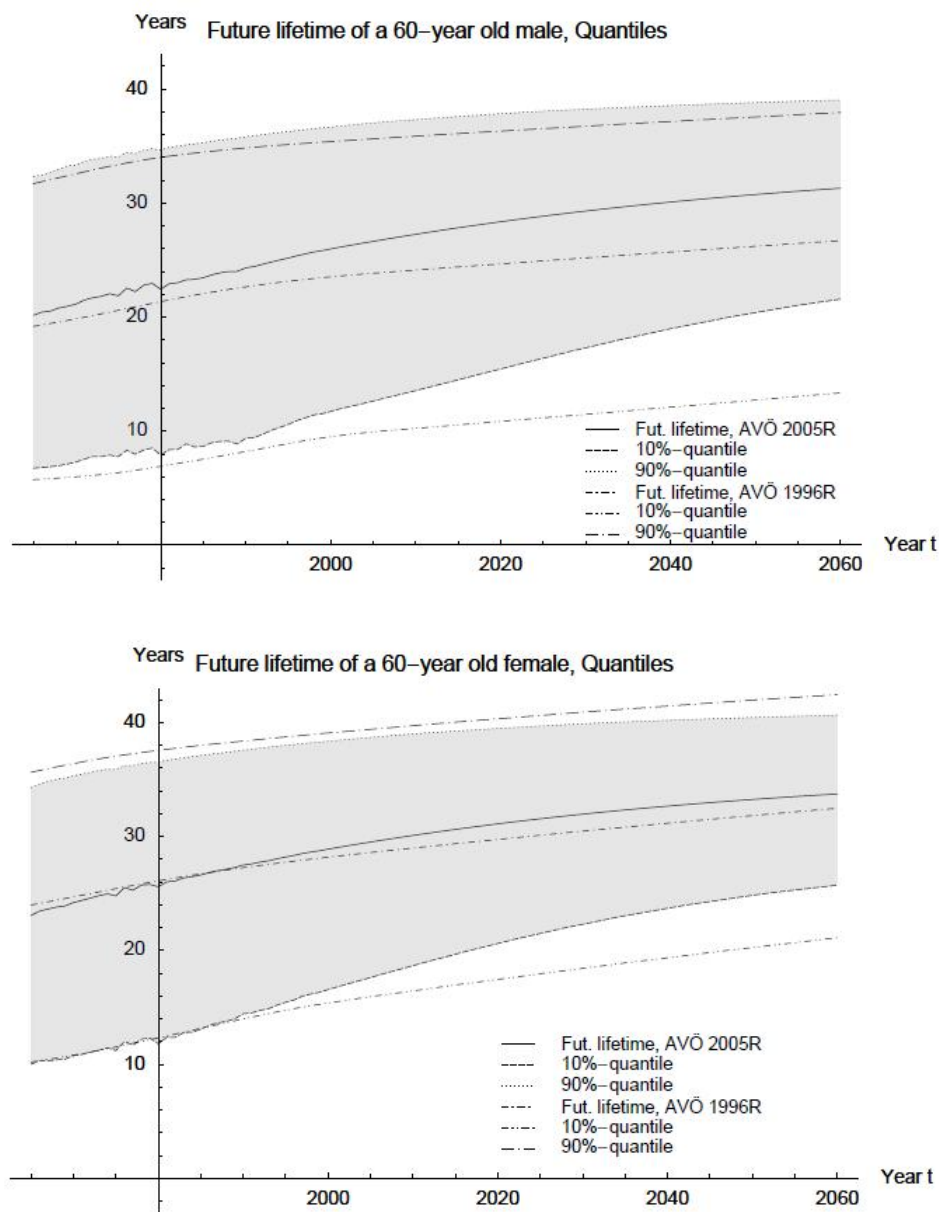


Abbildung 27: Der Erwartungswert der zukünftigen Lebensdauer und seine 10%- und 90%-Quantile, berechnet nach der AVÖ 2005R und der AVÖ 1996R 2. Ordnung. Der graue Bereich stellt das zentrale 80% Konfidenzintervall der zukünftigen Lebensdauer entsprechend der AVÖ2005R dar. (Quelle: [13]).

Noch interessanter sind die  $\alpha$ -Quantile  $u_\alpha(t, x)$  der erwarteten zukünftigen Lebensdauer (Abbildung 27), definiert für  $\alpha \in (0, 1)$  durch

$$u_\alpha(t, x) = \min \left\{ s \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(T_x(t) \leq s) = 1 - {}_s p_x^{(2)}(t) \geq \alpha \right\},$$

einer lebenden  $x$ -jährigen Person im Jahr  $t$ .

Wir konzentrieren uns auf  $\alpha = 10\%$  und  $\alpha = 90\%$ :

Das 90%-Quantil der zukünftigen Lebensdauer steigt deutlich weniger als die erwartete zukünftige Lebensdauer und das 10%-Quantil steigt wesentlich mehr. Daher zeigt das Todesalter eine geringere Varianz an und das Konfidenzintervall wird für die restliche Lebensdauer kleiner. Interessanterweise ist das 90%-Quantil für 60-jährige Frauen im Vergleich zur AVÖ 1996R sogar zurückgegangen. Dies ist wiederum eine Folge der hohen Sterbewahrscheinlichkeiten für das hohe Alter in den neuen österreichischen Bevölkerungstafeln, verglichen mit jenen Tafeln, die für die AVÖ 1996R verwendet wurden.

Einen internationalen Vergleich zeigt Abbildung 28. Während sich die zukünftige Lebensdauer fast identisch mit der DAV 2004R entwickelt (obwohl sich die Tafeln aus unterschiedlichen Daten mit leicht unterschiedlichen Annahmen ableiten), steigt das 90%-Quantil der DAV 2004R schneller als das entsprechende Quantil der AVÖ 2005R. Auch dies ist wiederum eine Konsequenz der in der deutschen Tafel verwendeten unteren Schranke von 1%. Die schweizer Werte erhöhen sich in allen Aspekten schneller.

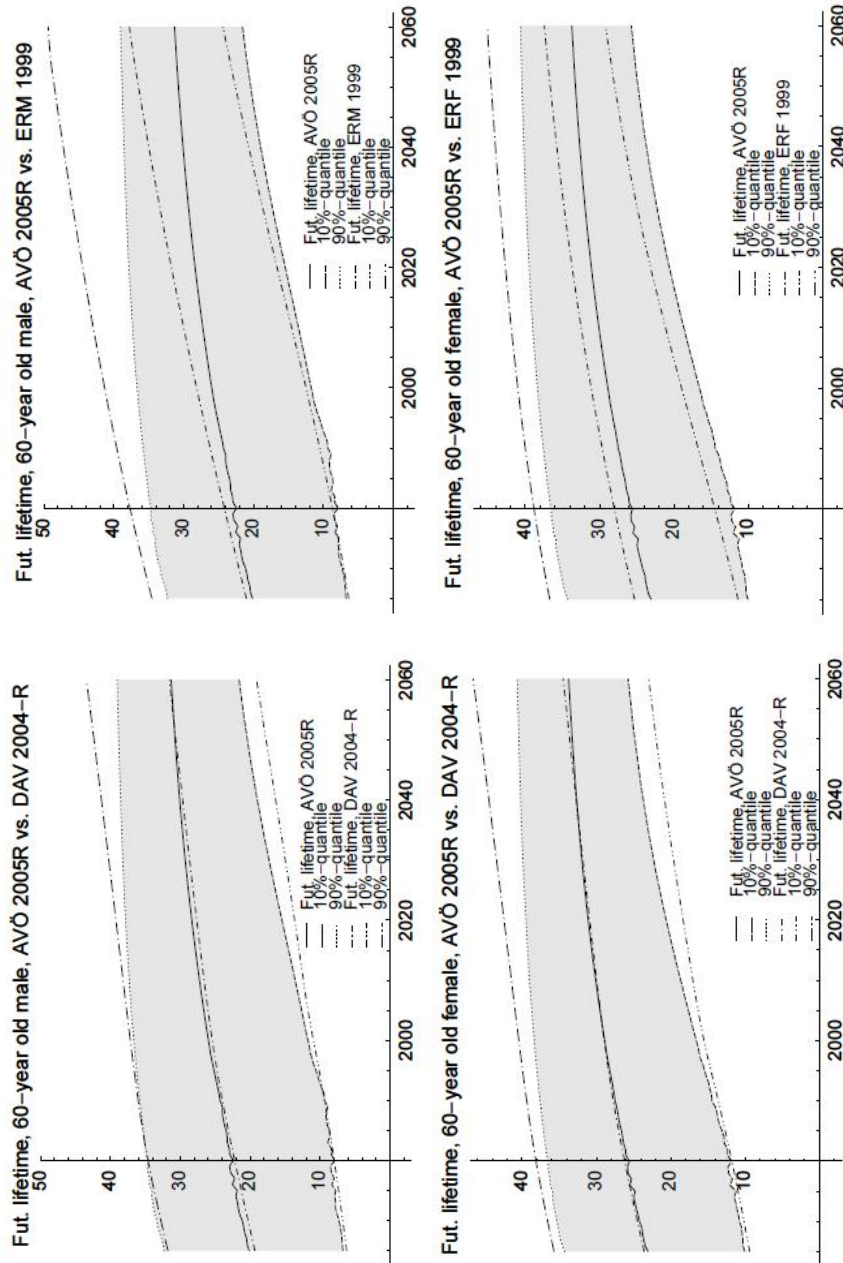


Abbildung 28: Der Erwartungswert der zukünftigen Lebensdauer und seine 10%- und 90%-Quantile: Vergleich der AVÖ 2005R 2. Ordnung mit den Rententafeln 2. Ordnung aus Deutschland und der Schweiz. (Quelle: [13]).

## Literatur

- [1] M. Koller, 2000. Lebensversicherungsmathematik, Springer.
- [2] K. Wolfsdorf, 1997. Versicherungsmathematik, Teil 1 Personenversicherung, Teubner Studienbücher Stuttgart.
- [3] Methodik von Sterblichkeitsuntersuchungen, 1985. Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 15, Versicherungswirtschaft.
- [4] Dr. Matthias Brake, 2006. Lebensversicherungsmathematik Vorlesung am Institut für Mathematische Stochastik der Universität Hannover.
- [5] W. Saxer, 1958. Versicherungsmathematik II, Springer Heidelberg.
- [6] T. N. E. Greville, 1981. Moving-Weighted-Average Smoothing Extended to the Extremities of the Data, I: Theory, Scand. Actuarial Journal.
- [7] T. N. E. Greville, 1981. Moving-Weighted-Average Smoothing Extended to the Extremities of the Data, II: Methods, Scand. Actuarial Journal.
- [8] H. Ammeter, 1952. Wahrscheinlichkeitstheoretische Kriterien für die Beurteilung der Güte der Ausgleichung einer Sterbetafel, Mitteilung der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker.
- [9] Claude Chuard, 2008. Zur Geschichte der Sterbetafeln, GV Kammer der PK Experten.
- [10] Hendrik Hanson, 2010. Qualitätsvergleiche von Prognosemodellen für die Sterblichkeit mit Schwerpunkt auf dem deutschen Spezialfall „Wiedervereinigung“, Books on Demand GmbH, Norderstedt.
- [11] Karl Michael Ortman, 2009. Praktische Lebensversicherungsmathematik, Vieweg+Teubner.
- [12] John Graunt, 1676. Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality, London.
- [13] Reinhold Kainhofer, Martin Predota, Uwe Schmock, 2006. The New Austrian Annuity Valuation Table AVÖ 2005R, Heft 13, Seiten 55 - 135.
- [14] Reinhold Kainhofer, Martin Predota, Uwe Schmock, 2006. Die neue österreichische Rententafel AVÖ 2005R.
- [15] Michel Denuit, 2003. Longevity Problems And Mortality Tables, Dimitsana Summer School, Greece.

- [16] DAV-Unterarbeitsgruppe Rentnersterblichkeit, 2005. Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004R für Rentenversicherungen, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik, XXVII(2): 199-313.
- [17] A.E. Renshaw and S. Haberman, 2003. On the forecasting of mortality reduction factors, Insurance Math. Econom., 32(3): 380-401.
- [18] Alena Mysicková, 2007. Stochastische Bevölkerungsvorausberechnung für Deutschland und ihre Bedeutung für ein zukünftiges Rentenmodell, Humboldt-Universität zu Berlin.
- [19] R.D. Lee und L.R. Carter, 1992. Modeling and forecasting U.S. mortality, Journal of the American Statistical Association, 87 (419): 659-675.
- [20] H.R. Schwarz, 1997. Numerische Mathematik, B.G. Teubner, Stuttgart.