

Diplomarbeit

Summe von Schäden mit heavy tailed Verteilungen unter Berücksichtigung von Abhängigkeitsstrukturen

ausgeführt am

Institut für Wirtschaftsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Privatdoz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Lukas Breiteneder

Veitsgraben 349

3970 Weitra

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Privatdoz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold für die ausgezeichnete Betreuung meiner Diplomarbeit.

Außerdem möchte ich mich bei meiner Familie und meiner Freundin Petra bedanken, deren motivierende Worte stets hilfreich waren.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinen Studienkollegen Lilli, Clemens, Harald und Thomas, mit denen ich neben der tollen Zusammenarbeit während des Studiums auch viele lustige Stunden erlebt habe.

DANKE!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Subexponentiell verteilte Zufallsgrößen im Cramer Lundberg Modell	5
2.1	Einleitung	5
2.2	Großschäden	5
2.3	Verteilungen mit Enden von regulärer Variation	6
2.4	Subexponentielle Verteilungen	11
2.5	Ruintheorie im Cramer-Lundberg Modell	15
2.6	Ruintheorie für subexponentielle Verteilungen	18
3	Copulas und weitere Abhängigkeitskonzepte	22
3.1	Einleitung	22
3.2	Definition und wichtige Eigenschaften von Copulas	23
3.3	Elliptische Copulas	31
3.4	Archimedische Copulas	33
3.5	Vor- und Nachteile von Abhängigkeitsmaßen	36
3.5.1	Linearer Korrelationskoeffizient nach Pearson	36
3.5.2	Rangkorrelationskoeffizienten	42
3.5.3	Tailabhängigkeitskoeffizient	45

4 Tail-Asymptotik der Summe abhängiger heavy tailed verteilter Zufallsvariablen	49
4.1 Einleitung	49
4.2 Rückführung auf den unabhängigen Fall	50
4.2.1 Bivariater Fall	50
4.2.2 Multivariater Fall	63
4.3 Abhängigkeit modelliert durch archimedische Copulas	69
4.4 Erzeugung abhängiger Pseudozufallszahlen	82

Kapitel 1

Einleitung

Die Summe von Schäden mit heavy tailed Verteilungen spielt eine wichtige Rolle für Versicherungsanwendungen. Besonders von Bedeutung ist hierbei die Betrachtung der Wahrscheinlichkeit, dass diese Schadenssumme eine hohe Grenze überschreitet. In der Literatur finden sich zahlreiche Ausführungen bezüglich dieser Thematik. In vielen dieser Literaturquellen wird dabei die Unabhängigkeit zwischen den einzelnen Risiken vorausgesetzt. Allerdings stellt sich diese Voraussetzung in vielen Fällen der praktischen Anwendung als unrealistisch dar, weshalb sich aktuelle Forschungsvorhaben mit der Voraussetzung der Abhängigkeit, vor allem modelliert durch Copulas, befassen. Zu den Hauptresultaten dieser gegenwärtigen Arbeiten lassen sich wenig bis keine numerische Beispiele finden. Ziel dieser Diplomarbeit ist es, Grundlagen aufzuarbeiten, einige dieser Forschungsansätze theoretisch zu analysieren und wichtige Ergebnisse dieser Inhalte um numerische Beispiele zu ergänzen.

Zum Einstieg wird in Kapitel 2 das Konzept der heavy tailed Verteilungen vorgestellt. Ein besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf der Betrachtung der subexponentiellen Verteilungen, die eine wichtige Subklasse der heavy tailed Verteilungen darstellen. Die große Bedeutung dieser Subklasse beruht auf der Tatsache, dass für n unabhängige, identisch subexponentiell verteilte Risiken, der Tail der Verteilungsfunktion des Maximums den Tail der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens asymptotisch bestimmt. Diese Tatsache ist eine der intuitiven Vorstellungen von Großschäden, in dem Sinn, dass die Verteilung eines extremen Schadens die Verteilung der Summe bestimmt. Darüber hinaus werden in diesem Kapitel wichtige Eigenschaften von heavy tailed Verteilungen unter der Voraussetzung von Unabhängigkeit zwischen den Risiken präsentiert.

Aufbauend auf diesen theoretischen Inhalten wird am Ende dieses Kapitels der Einfluss von subexponentiellen Verteilungen auf das so genannte Cramer-Lundberg Modell, welches ein Basis-Versicherungsmodell darstellt, untersucht. Hierzu werden in Kapitel 2.5 zuerst einige Grundlagen dieses Modells vorgestellt um anschließend in Kapitel 2.6 die Auswirkungen der Voraussetzung von subexponentiell verteilten Risiken auf Ruinwahr-

scheinlichkeit und den Gesamtschaden zu beleuchten. Dies kann als eine Anwendung für die Summe unabhängiger heavy tailed verteilter Risiken angesehen werden.

Wie bereits zu Beginn der Einleitung erwähnt, spielt die Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Risiken eine bedeutende Rolle. Eine ausführliche Darstellung dieser Thematik findet sich in Kapitel 3. Das Hauptaugenmerk liegt dabei, wie auch in aktuellen, thematisch relevanten Forschungsberichten zu finden, auf dem Konzept der Copulas. Die grundsätzliche Idee hinter dem Copulakzept besteht darin, multivariate Verteilungsfunktionen in zwei Teile aufzuspalten. Dabei beschreibt eine Komponente die Abhängigkeitsstruktur (Copula), die andere hingegen das Randverhalten der Einzelrisiken. Wichtige Eigenschaften von Copulas und zwei bedeutende Copulaklassen, die elliptische und archimedische, werden im Zuge des dritten Kapitels vorgestellt.

Neben dem Copulakzept lassen sich Abhängigkeiten auch auf andere Weise mittels Abhängigkeitsmaßen betrachten. Hierzu werden in Kapitel 3.5.1 die Theorie der linearen Korrelation und in 3.5.2 Vertreter der Rangkorrelationskoeffizienten beschrieben. Den Abschluss des dritten Kapitels bildet die Illustration des Tailabhängigkeitskoeffizienten, der ein Maß für die Abhängigkeit in den Verteilungsenden einer bivariaten Verteilung darstellt (asymptotische Abhängigkeit).

Auf diesen Grundlagen aufbauend findet sich in Kapitel 4 die Betrachtung des asymptotischen Tailverhaltens der Summe abhängiger heavy tailed verteilter Risiken wieder, wobei die Abhängigkeit durch Copulas modelliert wird. Hierzu wird anfangs des Kapitels (siehe Kapitel 4.2) untersucht, welche Bedingungen an das Abhängigkeits- und das Randverhalten gestellt werden müssen, sodass das asymptotische Verhalten gleich wie im unabhängigen Fall ist. Hierbei wird zuerst der bivariate und anschließend der multivariate Fall anhand aktueller Forschungsarbeiten analysiert. Im bivariaten Fall wird für ein zentrales Ergebnis ein numerisches Beispiel angeführt. Bei dieser Untersuchung spielt die asymptotische Unabhängigkeit, deren Konzept wie bereits genannt in Kapitel 3 Erwähnung findet, eine wichtige Rolle. Im Gegensatz dazu wird in Kapitel 4.3 der asymptotisch abhängige Fall für archimedische Copulas mit Hilfe eines zusätzlichen Papers untersucht. Auch hier wird für das zentrale Resultat dieses Forschungspapers eine numerische Anschauung anhand eines Beispiels geliefert.

Den Abschluss bildet eine Einführung in die Erzeugung abhängiger Pseudozufallszahlen in Kapitel 4.4. Diese bildet die Grundlage für die Schaffung der numerischen Beispiele des vierten Kapitels.

Kapitel 2

Subexponentiell verteilte Zufallsgrößen im Cramer Lundberg Modell

2.1 Einleitung

Das nachstehende Kapitel basiert auf dem ersten Kapitel des Buches „Modelling Extremal Events for Insurance and Finance“ von Embrechts et al. [8] und dem fünften Kapitel des Skriptes „Sachversicherungsmathematik“ von Grandits und Zwirchmayr [15]. Zu Beginn des Kapitels werden einige Grundlagen über Großschäden mit heavy tailed Verteilungen hergeleitet um anschließend auf die Auswirkungen dieser Modelle auf das Cramer-Lundberg Modell näher einzugehen.

2.2 Großschäden

Treten Schäden X extremer Höhe, so genannte Großschäden, mit einer nicht zu vernachlässigenden Wahrscheinlichkeit auf, so konvergiert die Tailwahrscheinlichkeit

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$$

nicht “zu schnell“ gegen 0 (siehe Riedle [21], Seite 29).

Die Definitionen für Großschäden sind in der Literatur nicht einheitlich. Folgende Definition lässt sich in Grandits und Zwirchmayr [15], Seite 96 finden:

KAPITEL 2. SUBEXPONENTIELL VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN IM CRAMER LUNDBERG MODELL

Definition 2.1. *Unter einem Großschaden X versteht man einen Schadenfall mit einer Verteilung, die kein exponentielles Moment besitzt, was soviel bedeutet wie*

$$\mathbb{E}[e^{\epsilon X}] = \infty \quad \forall \epsilon > 0$$

Bemerkung: Die Verteilung eines Großschadens wird heavy tailed Verteilung genannt. Außerdem wird die Klasse aller heavy tailed Verteilungen mit \mathcal{K} bezeichnet.

Da die Definition für Großschäden sehr allgemein ist, konzentriert man sich auf eine Subklasse der heavy tailed Verteilungen, die so genannten subexponentiellen Verteilungen. Zuerst wird aber der Begriff reguläre Variation eingeführt.

2.3 Verteilungen mit Enden von regulärer Variation

Folgende Definition der regulären Variation lässt sich in Embrechts et al. [8], Seite 564f finden.

Definition 2.2. *Reguläre Variation nach Karamata*

a) *Eine positive Lebesgue-messbare Funktion L auf $(0, \infty)$ heißt von langsamer Variation (Schreibweise $L(x) \in \mathcal{L}$) falls gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \quad \forall t > 0$$

b) *Eine positive Lebesgue-messbare Funktion h auf $(0, \infty)$ heißt von regulärer Variation in ∞ mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$ (Schreibweise $h(x) \in \mathcal{R}_\alpha$) falls gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha \quad \forall t > 0$$

Bemerkung:

KAPITEL 2. SUBEXPONENTIELL VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN IM CRAMER LUNDBERG MODELL

a) Für Funktionen von langsamer Variation schreibt man auch $L(x) \in \mathcal{R}_0$. Laut Definition 2.2 gilt hierbei, dass aus $h \in \mathcal{R}_\alpha$ folgt, dass $L(x) := h(x)x^{-\alpha} \in \mathcal{R}_0$ gilt. Da für regulär variierende Funktionen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha \quad \forall t > 0$ gilt, folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)t^{-\alpha}x^{-\alpha}}{h(x)x^{-\alpha}} = t^{-\alpha} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1.$$

Somit lässt sich auch erkennen, dass man eine regulär variierende Funktion mit Index α durch $L(x)x^\alpha$ darstellen kann.

b) Bei den Definitionen a) und b) wird jeweils reguläre Variation in ∞ beschrieben. Ähnlich kann man reguläre Variation von h bei einem $a > 0$ durch reguläre Variation im Unendlichen der Funktion $h_a(x) = h(a - x^{-1})$ definieren.

c) Heuristisch: Regulär variierende Funktionen sind Funktionen die sich asymptotisch in etwa wie Potenzfunktionen verhalten.

d) Die Klasse aller regulär variierenden Funktionen wird mit \mathcal{R} bezeichnet.

Beispiele für langsam variierende und regulär variierende Funktionen mit Index α :

- $h(x) = \ln(\ln(x))$

Beweis:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(tx))}{\ln(\ln(x))} \stackrel{1^{\text{Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(tx)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1\right)} = 1$$

- $h(x) = e^{(\ln(x))^{\frac{1}{2}}}$

Beweis:

Für langsame Variation gilt es $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(tx))^{\frac{1}{2}} - (\ln(x))^{\frac{1}{2}} = 0$ zu zeigen ($e^0 = 1$). Gehen wir von der linken Seite aus, so erhält man durch einfache Logarithmus Regeln:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{\ln(t)}{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{(\ln(x))^{-\frac{1}{2}}} \stackrel{1^{\text{Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln(t)}{\ln(x)}\right)^{-\frac{1}{2}} \ln(t)(\ln(x))^{-\frac{1}{2}} = 0$$

- $h(x) = x^\alpha$

Beweis:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t^\alpha x^\alpha}{x^\alpha} = t^\alpha$$

- $h(x) = x^\alpha \ln(1+x)$

Beweis:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(tx)^\alpha \ln(1+tx)}{x^\alpha \ln(1+x)} \stackrel{1^{\text{Hospital}}}{=} t^\alpha \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{t}{1+tx}}{\frac{1}{1+x}} = t^\alpha \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\frac{t}{x} + t)}{x(\frac{1}{x} + t)} = t^\alpha$$

Weiters von Interesse sind Verteilungen mit Enden von regulärer Variation.

Definition 2.3. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F . Gilt für den Tail

$$\bar{F}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha} \quad \text{mit } L(x) \in \mathcal{L} \text{ und } \alpha > 0,$$

so ist \bar{F} laut Definition 2.2 regulär variierend in ∞ mit Index $-\alpha$ und man nennt F eine Verteilung mit einem Ende von regulärer Variation mit Index α .

Bemerkung: Der in Definition 2.3 auftretende Index α beschreibt, wie schnell sich der Tail der Verteilung gegen 0 bewegt. Er gibt damit auch an wie wahrscheinlich es ist, dass extreme Schäden auftreten. Dabei gilt: Je kleiner der Index α ist, umso höher ist die Wahrscheinlichkeit eines extremalen Ereignisses. Je größer der Index umso geringer ist diese Wahrscheinlichkeit.

Beispiele für Verteilungen mit Enden von regulärer Variation:

- Pareto-Verteilung: $\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa+x}\right)^\alpha$ für $\kappa, \alpha > 0$
Beweis:
 $\bar{F}(x) = \frac{\kappa^\alpha (\frac{\kappa}{x} + 1)^{-\alpha}}{x^\alpha}$. Da $\kappa^\alpha (\frac{\kappa}{x} + 1)^{-\alpha}$ eine langsam variierende Funktion ist, ist der Tail der Pareto-Verteilung regulär variierend mit Index $-\alpha$.
- Burr-Verteilung: $\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa+x^\tau}\right)^\alpha$ für $\kappa, \tau, \alpha > 0$
Beweis: siehe Pareto-Verteilung
- Loggamma-Verteilung: Sei U Gammaverteilt, dann ist e^U Loggammaverteilt
($f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \ln(x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$)
Beweis: Ist eine Folge des Satzes von Karamata (siehe Embrechts et al. [8], Seite 567). Dieser besagt, dass das Integral einer regulär variierenden Funktion wiederum von regulärer Variation ist.

Im Folgenden kommt es zur Betrachtung unterschiedlicher Eigenschaften der Funktionen von langsamer und regulärer Variation. Der Beweis zu nachstehendem Satz lässt sich in Bingham et al. [5], Seite 13 finden.

Satz 2.1. (ohne Beweis): **Darstellungssatz**

L ist von langsamer Variation, falls es sich folgendermaßen darstellen lässt:

$$L(x) = c(x) \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt\right) \quad x \geq x_0, x_0 \geq 0, \quad (2.1)$$

wobei $c(x)$ positiv ist und $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0 > 0$, sowie $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$ gilt.

KAPITEL 2. SUBEXPONENTIELL VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN IM CRAMER
LUNDBERG MODELL

Der nächste Satz zeigt, dass Funktionen von langsamer Variation, im Vergleich zu positiven Potenzen x^δ , $\delta > 0$, „klein“ sind.

Satz 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(x)}{x^\delta} = 0 \quad \forall L \in \mathcal{L}, \forall \delta > 0$

Beweis: Anwendung des Logarithmus auf beiden Seiten liefert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln L(x) - \delta \ln x = -\infty$$

Durch Einsetzen der Darstellung für L aus (2.1) gilt:

$$\begin{aligned} \ln L(x) - \delta \ln x &= \ln c(x) + \int_{x_0}^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt - \delta \ln x = \ln c(x) + \int_{x_0}^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\delta}{t} dt = \\ &= \ln c(x) + \int_{x_0}^1 \frac{\epsilon(t)}{t} dt + \int_1^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\delta}{t} dt \end{aligned}$$

Wählt man ein N so, dass $|\epsilon(t)| \leq \frac{\delta}{2}$, $\forall t \geq N$, so folgt:

$$\begin{aligned} \ln c(x) + \int_{x_0}^1 \frac{\epsilon(t)}{t} dt + \int_1^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\delta}{t} dt &\leq \\ &\leq \ln c(x) + \int_{x_0}^1 \frac{\epsilon(t)}{t} dt + \int_1^N \frac{\epsilon(t)}{t} dt - \int_1^N \frac{\delta}{t} dt - \int_N^x \frac{\delta}{2t} dt \end{aligned}$$

Die ersten vier Terme sind beschränkt und der letzte strebt für $x \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$. □

Eine wichtige Eigenschaft der Verteilungen mit Enden von regulärer Variation ist das asymptotische Verhalten (für $x \rightarrow \infty$) der Summe von n unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit ebensolchen Verteilungen. Hierzu betrachten wir folgenden Satz.

Satz 2.3. *Seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit der jeweiligen Verteilungsfunktion F_1 und F_2 . Gilt nun $\overline{F}_1(x) = \frac{L_1(x)}{x^\alpha}$, $\overline{F}_2(x) = \frac{L_2(x)}{x^\alpha}$ mit $\alpha > 0$ und $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ wobei L_1 und L_2 nicht notwendigerweise gleich sein müssen. Daraus folgt:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x) + \mathbb{P}(X_2 > x)} = 1$$

KAPITEL 2. SUBEXPONENTIELL VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN IM CRAMER
LUNDBERG MODELL

Beweis: Sei $G(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x)$. Da $\{X_1 + X_2 > x\} \supset \{X_1 > x \cup X_2 > x\}$, folgt $\overline{G}(x) \geq \overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x) - \overline{F}_1(x)\overline{F}_2(x) = (\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x))(1 - o(1))$, wobei $o(1)$ eine Funktion bezeichnet die für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Dies impliziert:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \geq 1 \quad (2.2)$$

Sei nun $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Dann folgt $\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1-\delta)x\} \cup \{X_2 > (1-\delta)x\} \cup \{X_1 > \delta x, X_2 > \delta x\}$

Daraus folgt: $\overline{G}(x) \leq (\overline{F}_1(x(1-\delta)) + \overline{F}_2(x(1-\delta)))(1 + o(1))$

$$\Rightarrow \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x(1-\delta)) + \overline{F}_2(x(1-\delta))} \leq 1$$

Da \overline{F}_1 und $\overline{F}_2 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ folgt $\overline{F}_{1,2}(x(1-\delta)) \sim (1-\delta)^{-\alpha} \overline{F}_{1,2}(x)$ (Notation: $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$), und damit erhält man

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \leq (1-\delta)^{-\alpha} \quad (2.3)$$

Aus (2.2) und (2.3) erhält man:

$$1 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \leq (1-\delta)^{-\alpha}$$

Für $\delta \rightarrow 0$ erhält man: $1 \leq \liminf \leq \limsup \leq 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} = 1$$

□

Mit Hilfe dieses Satzes und Induktion kann man auf folgenden Satz schließen:

Satz 2.4. *Seien X_1, \dots, X_n iid mit Verteilungsfunktion F und gilt, dass $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$. So folgt:*

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x) \sim n\overline{F}(x) \quad (2.4)$$

Bemerkung: Seien jetzt im Folgenden X_1, \dots, X_n iid mit Verteilungsfunktion F und sei $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Dann gilt $\forall n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n > x) &= 1 - \mathbb{P}(M_n \leq x) = \overline{F}^n(x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)^n = \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x)^2 + \mathbb{P}(X \leq x)^2 - \dots - \mathbb{P}(X \leq x)^n = \\ &(1 - \mathbb{P}(X \leq x))(1 + \mathbb{P}(X \leq x) + \dots + \mathbb{P}(X \leq x)^{n-1}) = \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(M_n > x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) = n \quad \text{und damit:} \quad \mathbb{P}(M_n > x) \sim n\overline{F}(x)$$

Aus dieser Bemerkung und aus Satz 2.4 folgt nun:

Falls X_1, \dots, X_n iid mit Verteilungsfunktion F , $\overline{F}(x) \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ und sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, so folgt:

$$\mathbb{P}(S_n > x) \sim \mathbb{P}(M_n > x) \tag{2.5}$$

In Worten bedeutet diese Aussage, dass unter Voraussetzung der regulären Variation der Tail der Verteilungsfunktion des Maximums den Tail der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens asymptotisch bestimmt. Diese Tatsache ist eine der intuitiven Vorstellungen von Großschäden, in dem Sinn, dass die Verteilung eines extremen Schadens die Verteilung der Summe bestimmt.

Die Klasse aller regulär variierender Funktionen wird im Folgenden durch die Klasse der subexponentiellen Verteilungsfunktionen erweitert. Dabei wird auf Ergebnis (2.5) besonders Rücksicht genommen.

2.4 Subexponentielle Verteilungen

Die in weiterer Folge angeführte Definition der subexponentiellen Verteilungen lässt sich in Embrechts et al. [8], Seite 39 finden.

Definition 2.4. Eine Verteilungsfunktion F mit Träger $(0, \infty)$ heißt subexponentiell, falls $\forall n \geq 2$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n \quad (2.6)$$

Bemerkung:

- a) Die Klasse aller subexponentiellen Verteilungen wird mit \mathcal{S} bezeichnet.
- b) Die Notation F^{n*} stellt die n -fache Faltung von F mit sich selbst dar. Dabei gilt: $F^{n*}(x) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq x)$, wobei die X_i unabhängig identisch verteilt mit Verteilungsfunktion F sind.
- c) Da wir wissen, dass $\mathbb{P}(M_n > x) \sim n\overline{F}(x)$ gilt, kann man die Definition der subexponentiellen Verteilungsfunktionen auch mit Aussage (2.5) äquivalent ersetzen. Daraus ist ersichtlich, dass $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ gilt.
- d) Falls eine Verteilung Gleichung (2.6) für $n = 2$ erfüllt, so gilt die Gleichung $\forall n \geq 2$. Ein Beweis lässt sich in Embrechts et al. [8], Seite 40f finden.

Beispiele für subexponentielle Verteilungen:

- Verteilungen mit Enden von regulärer Variation ($\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$)
Beweis:
Siehe Punkt c) aus obiger Bemerkung.
- Weibull-Verteilung mit Tail $\overline{F}(x) = \exp(-\alpha x^\beta)$ und Parameter $\beta < 1$.
Beweis:
Siehe Hipp [16], Seite 54.
- Lognormalverteilung mit Tail $\overline{F}(x) = 1 - \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$.
Beweis:
Siehe Hipp [16], Seite 54.

Satz 2.5. (Einige Eigenschaften von subexponentiellen Verteilungen)

a) Falls $F \in \mathcal{S}$ dann gilt gleichmäßig in y auf jeder kompakten Menge in $(0, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1 \quad (2.7)$$

b) Falls (2.7) gilt, dann folgt $\forall \epsilon > 0$:

$$e^{\epsilon x} \overline{F}(x) \rightarrow \infty, \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

KAPITEL 2. SUBEXPONENTIELL VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN IM CRAMER
LUNDBERG MODELL

c) Falls $F \in \mathcal{S}$ und sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann existiert eine endliche Konstante K sodass $\forall n \geq 2$ gilt:

$$\frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1 + \epsilon)^n, \quad x \geq 0 \quad (2.9)$$

Beweis:

a) Sei $x \geq y > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} &= \frac{1 - \int_0^x F(x-t)dF(t)}{\overline{F}(x)} = \frac{1 - \int_0^x (1 - \overline{F}(x-t))dF(t)}{\overline{F}(x)} = \frac{1 - F(x) + \int_0^x \overline{F}(x-t)dF(t)}{\overline{F}(x)} = \\ &= 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t) \geq 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}dF(t) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}dF(t) = \\ &= 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y)) \end{aligned}$$

Jetzt folgt für x groß genug, sodass $F(x) - F(y) \neq 0$:

$$1 \leq \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \left(\frac{\overline{F}^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y) \right) (F(x) - F(y))^{-1}$$

Da $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$ ($F \in \mathcal{S}$) strebt der erste Faktor auf der rechten Seite für $x \rightarrow \infty$ gegen $1 - F(y)$. Der zweite Faktor strebt gegen $(1 - F(y))^{-1}$. Die gleichmäßige Konvergenz folgt, da $\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}$ monoton in y ist.

b) Zuerst wird gezeigt, dass $\overline{F}(\ln y) \in \mathcal{L}$. Dazu betrachte:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(\ln ty)}{\overline{F}(\ln y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(\ln t + \ln y)}{\overline{F}(\ln y)} \stackrel{a)}{=} 1 \quad \forall t > 0$$

Aus Satz 2.2 folgt:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^\epsilon \overline{F}(\ln y) = \infty. \quad \forall \epsilon > 0$$

Setzt man nun $y = e^x$ dann folgt das gewünschte Ergebnis.

c) Für den Beweis siehe Embrechts et al. [8], Seite 42. □

Bemerkung:

a) In Satz 2.5 b) wird der Name subexponentielle Verteilung gerechtfertigt. \overline{F} geht langsamer gegen 0 als jede exponentielle Funktion $e^{-\epsilon x}$ für $\epsilon > 0$.

b) Betrachte $\mathbb{E}[e^{\epsilon X}]$ und Satz 2.5 b) dann gilt:

$$\mathbb{E}[e^{\epsilon X}] \geq \mathbb{E}[e^{\epsilon X} \mathbf{1}_{X > y}] \geq e^{\epsilon y} \mathbb{P}(X > y) \rightarrow \infty \quad \text{für } y \rightarrow \infty$$

Daraus folgt:

$$\mathbb{E}[e^{\epsilon X}] = \infty \quad \forall \epsilon > 0$$

Durch diese Gleichung lässt sich erkennen, dass die Klasse der subexponentiellen Verteilungen eine Subklasse der heavy tailed Verteilungen (siehe Definition 2.1) darstellt.

c) Ein weiterer Vergleich zwischen subexponentiellen und exponentiellen Verteilungen liefert folgende Überlegung:

Falls $F \in \mathcal{S}$, dann gilt:

$$\mathbb{P}(X > x + y \mid X > x) = \frac{\mathbb{P}(X > x + y)}{\mathbb{P}(X > x)} \rightarrow 1 \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

Damit erkennt man, dass für eine Zufallsvariable X mit subexponentieller Verteilung die Wahrscheinlichkeit dass $X > x + y$ für ein festes y , wobei $X > x$ (für ein großes x) gegeben ist, hoch ist.

Betrachtet man hingegen eine exponentiell verteilte Zufallsvariable ($\bar{F}(x) = e^{-x}$), so lässt sich erkennen, dass der oben stehende Grenzwert kleiner als 1 ist:

$$\mathbb{P}(X > x + y \mid X > x) = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}} = e^{-y}$$

Eine weitere interessante Thematik ist, wie eine asymptotische Aussage für die Summe nicht identisch verteilter unabhängiger subexponentieller Risiken X_1 und X_2 mit Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 auszusehen hat. Hierbei gilt unter der Voraussetzung, dass die Faltung von F_1 und F_2 aus \mathcal{S} ist (siehe Asmussen [3], Seite 256):

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \sim \mathbb{P}(X_1 > x) + \mathbb{P}(X_2 > x). \quad (2.10)$$

Folgender Satz behandelt den multivariaten Fall für reellwertige Zufallsvariablen (Beweis siehe Geluk und Tang [14], Seite 874). Dabei heißt eine Verteilung F auf $(-\infty, \infty)$ subexponentiell, falls $F^+(x) = F(x) \mathbf{1}_{x \geq 0}$ subexponentiell ist. Man kann zeigen, dass die Beziehung (2.6) auch für reellwertige Zufallsvariablen gültig bleibt.

Satz 2.6. (ohne Beweis)

Seien X_1, \dots, X_n n unabhängige Zufallsvariablen mit den jeweiligen Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n . Falls $F_k \in \mathcal{S} \forall 1 \leq k \leq n$ und $F_i * F_j \in \mathcal{S} \forall 1 \leq i \neq j \leq n$, dann gilt, dass $F_1 * \dots * F_n \in \mathcal{S}$ und

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x) \sim \sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x) \quad (2.11)$$

2.5 Ruintheorie im Cramer-Lundberg Modell

In den vorangegangenen Abschnitten wurden heavy tailed Verteilungen definiert und einige Eigenschaften und Vertreter vorgestellt. Im Folgenden wird ein klassisches Versicherungs-Risikomodell von Cramer und Lundberg betrachtet. Besonders von Interesse ist hierbei der Einfluss von heavy tailed Verteilungen auf die Ruinwahrscheinlichkeit und den Gesamtschaden.

Die folgende Definition ist aus Embrechts et al. [8], Seite 22 entnommen und bildet die Grundlage nachstehender Überlegungen.

Definition 2.5. (*Cramer-Lundberg Modell*)

a) *Der Schadenhöhenprozess:*

Die Schadenhöhen $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind positive iid Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F (keine Gitterverteilung), endlichem Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, und Varianz $\sigma^2 = \text{var}(X_1) \leq \infty$

b) *Die Schadenankunftszeiten:*

Die Schäden treten zu zufälligen Zeitpunkten

$$0 < T_1 < T_2 < \dots \quad f.s$$

auf.

c) *Der Schadenzahlprozess:*

Die Anzahl der Schäden im Intervall $[0, t]$ ist gegeben mit:

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0$$

Per Konvention gilt, $\sup \emptyset = 0$.

d) *Die Zwischenankunftszeiten:*

$$Y_1 = T_1, \quad Y_k = T_k - T_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

sind iid exponentialverteilt mit endlichem Erwartungswert $\mathbb{E}[Y_1] = \frac{1}{\lambda}$.

e) *Die Folgen (X_k) und (Y_k) sind unabhängig voneinander.*

Bemerkung: Eine Konsequenz obiger Definition ist, dass $(N(t))$ ein homogener Poisson-

KAPITEL 2. SUBEXPONENTIELL VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN IM CRAMER
LUNDBERG MODELL

prozess mit Intensität $\lambda > 0$ ist. Daraus folgt:

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ein wichtiger Punkt für die weitere Untersuchung ist der Gesamtschadenprozess ($S(t)$) des zugrunde liegenden Portfolios. Er ist definiert durch

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

Die Gesamtschadenverteilung ist dann gegeben als:

$$G_t(x) = \mathbb{P}(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) F^{n*}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x), \quad x \geq 0, t \geq 0 \quad (2.12)$$

wobei $p_t(n) = \mathbb{P}(N(t) = n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Aus vorangegangenen Überlegungen kann man nun den resultierenden Risikoprozess $(U(t))_{t \geq 0}$ definieren. Dieser kennzeichnet sich durch die Zusammensetzung aus dem Gesamtschadenprozess ($S(t)$) und den Prämien mit konstanter Intensität $c > 0$. Hinzu kommt hierbei noch ein Anfangskapital $u \geq 0$. Man erhält:

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0 \quad (2.13)$$

Definition 2.6. (*Ruin*)

Es sei $(U(t))_{t \geq 0}$ wie in (2.13) definiert. Dann kann man definieren:

a) Die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit:

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(U(t) < 0 \text{ für ein } t \leq T), \quad 0 < T < \infty, u \geq 0$$

b) Die Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit:

$$\psi(u) = \psi(u, \infty), \quad u \geq 0$$

KAPITEL 2. SUBEXPONENTIELL VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN IM CRAMER
LUNDBERG MODELL

c) Die Ruinzeit:

$$\tau(T) = \inf\{t : 0 \leq t \leq T, U(t) < 0\}, \quad 0 < T \leq \infty$$

Eine fundamentale Erkenntnis für die Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit, bzw. für die Asymptotik der Ruinwahrscheinlichkeit im Cramer-Lundberg Modell liefert folgender Satz. Ein Beweis zu Punkt b) lässt sich in Embrechts et al. [8], Seite 29ff finden.

Satz 2.7. (ohne Beweis) **Cramer-Lundberg Theorem**

Im Cramer-Lundberg Modell sei die Nettoprofitbedingung $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ erfüllt. Existiert nun ein $\nu > 0$, sodass gilt:

$$\int_0^\infty e^{\nu x} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho \quad (2.14)$$

so folgt:

a) $\forall u \geq 0$,

$$\psi(u) \leq e^{-\nu u} \quad (2.15)$$

b) Falls zusätzlich gilt:

$$\int_0^\infty x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx < \infty,$$

dann folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{\nu u} \psi(u) = C < \infty, \quad \text{mit } C = \left[\frac{\nu}{\rho\mu} \int_0^\infty x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx \right]^{-1} \quad (2.16)$$

Bemerkung:

a) ρ wird auch Sicherheitszuschlag genannt. Man kann zeigen, dass Ruin \mathbb{P} - f.s eintritt falls der Sicherheitszuschlag ≤ 0 ist.

b) $F_I(x)$ bezeichnet die integrierte Tail Verteilung mit

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy, \quad x \geq 0.$$

c) Die Bedingung (2.14) wird Cramer-Lundberg Bedingung genannt. Man kann sie auch schreiben als:

$$\int_0^{\infty} e^{\nu x} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda} \quad (2.17)$$

2.6 Ruintheorie für subexponentielle Verteilungen

In diesem Kapitel gehen wir wieder vom Cramer-Lundberg Modell (siehe Definition 2.5) aus. Für das Cramer-Lundberg Theorem, und damit für die Abschätzung bzw. für das asymptotische Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit ist die Cramer-Lundberg Bedingung eine notwendige Voraussetzung. Im Folgenden lässt sich aber zeigen, dass durch diese Bedingung Schäden mit heavy tailed Verteilungen (siehe Definition 2.1) ausgeschlossen werden.

Nach Satz 2.7 und (2.17) muss ein $\nu > 0$ existieren mit

$$\int_0^{\infty} e^{\nu x} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda} < \infty \quad (2.18)$$

Mit Hilfe von Feller [12], Seite 150 Lemma 1 lässt sich zeigen, dass $\mathbb{E}[e^{\nu X_1}]$ dargestellt werden kann mit:

$$\mathbb{E}[e^{\nu X_1}] = \nu \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu x} \bar{F}_1(x) dx = 1 + \nu \int_0^{\infty} e^{\nu x} \bar{F}_1(x) dx$$

Daher ist Bedingung (2.18) äquivalent mit $\mathbb{E}[e^{\nu X_1}] < \infty$. Somit sind aber Risiken mit heavy tailed Verteilungen (vergleiche Definition 2.1) für Satz 2.7 ausgeschlossen.

Mit Hilfe der Markovschen Ungleichung erhält man:

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X_1 > x) = \mathbb{P}(e^{\nu X_1} > e^{\nu x}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\nu X_1}]}{e^{\nu x}}$$

Diese Ungleichung zeigt, dass extrem hohe Schäden sehr unwahrscheinlich auftreten (exponentiell kleine Wahrscheinlichkeiten). Aus diesem Grund wird die Cramer-Lundberg Bedingung auch als Kleinschadenbedingung bezeichnet.

Nach diesen Erkenntnissen wird in den nächsten beiden Abschnitten nach Alternativen zu Satz 2.7 für heavy tailed Verteilungen gesucht. Besonders wird hierbei auf den subexponentiellen Fall eingegangen.

2.6.1 Asymptotik der Ruinwahrscheinlichkeit für den subexponentiellen Fall

Im Laufe dieses Abschnittes wird sich herausstellen, dass folgender Satz (für einen Beweis siehe Embrechts et al. [8], Seite 29ff) die Grundlage für die Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit unter heavy tailed Verteilungen bildet.

Satz 2.8. (ohne Beweis)

Unter der Voraussetzung der Nettoprofitbedingung $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ gilt im Cramer-Lundberg Modell für die Ruinwahrscheinlichkeit ψ :

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} \overline{F_I^{n*}}(u), \quad u \geq 0. \quad (2.19)$$

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich nun eine asymptotische Aussage für die Ruinwahrscheinlichkeit im subexponentiellen Fall herleiten.

Satz 2.9. Betrachtet man das Cramer-Lundberg Modell mit der Nettoprofitbedingung $\rho > 0$ und gilt, dass $F_I \in \mathcal{S}$, dann folgt:

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho} \overline{F_I}(u), \quad u \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Beweis: Da $(1+\rho)^{-1} < 1$, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $(1+\rho)^{-1}(1+\epsilon) < 1$. Aus (2.9) folgt nun, dass ein endliches K existiert mit:

$$(1+\rho)^{-n} \frac{\overline{F_I^{n*}}(u)}{\overline{F_I}(u)} \leq (1+\rho)^{-n} K(1+\epsilon)^n, \quad u \geq 0. \quad (2.21)$$

Betrachtet man nun (2.19) und dividiert durch $\overline{F_I}(u)$, so folgt:

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} \frac{\overline{F_I^{n*}}(u)}{\overline{F_I}(u)}, \quad u \geq 0$$

Mit Hilfe von (2.21) ist nun aufgrund der majorisierten Konvergenz die Vertauschung von limes und Summe erlaubt.

Da $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_I^{n*}}(u)}{\overline{F_I}(u)} = n$ ($F_I \in \mathcal{S}$) und $\sum_{n=0}^{\infty} n(1+\rho)^{-n} = \frac{1+\rho}{\rho^2}$ erhält man: $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{1}{\rho}$ \square

Bemerkung: Vergleicht man nun das Ergebnis (2.16) unter Voraussetzung der Cramer-Lundberg Bedingung und Ergebnis (2.20). Ergebnis (2.20) zeigt, dass sich die Ruinwahrscheinlichkeit asymptotisch in etwa wie die integrierte Tailverteilung verhält. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber selbst für großes u nicht vernachlässigbar. So folgt zum Beispiel für die Pareto-Verteilung mit $\alpha > 1$ als Schadenverteilung, dass $\overline{F_I}$ von regulärer Variation mit Index $\alpha - 1$ ist. Dies bedeutet aber, dass die Ruinwahrscheinlichkeit wie eine Potenzfunktion und nicht wie eine Exponentialfunktion (vergleiche 2.16) abklingt und daher ein Portfolio von Schäden mit heavy tailed Verteilungen sehr gefährlich sein kann. (siehe Mikosch [19], Seite 175f)

In Satz 2.9 wird vorausgesetzt, dass die integrierte Tailverteilung F_I subexponentiell ist. Eine Frage die sich hier natürlich stellt ist, ob aus $F \in \mathcal{S}$, $F_I \in \mathcal{S}$ folgt. Im Allgemeinen gilt diese Behauptung allerdings nicht. Für $F \in \mathcal{R}$ lässt sich mit dem Satz von Karamata (siehe Embrechts et al. [8], Seite 567) nachweisen, dass die integrierte Tailverteilung subexponentiell ist. Folgender Satz, der sich in Embrechts et al. [8], Seite 55 finden lässt, beschreibt Konditionen an F sodass $F_I \in \mathcal{S}$ gilt.

Satz 2.10. (ohne Beweis)

Sei $q(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ (hazard rate) und $Q = -\ln \overline{F}$ (hazard function). Es gilt $F_I \in \mathcal{S}$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- a) $\limsup_{x \rightarrow \infty} xq(x) < \infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} xq(x) = \infty$, und eine der folgenden Bedingungen gilt:
- $\limsup_{x \rightarrow \infty} x \frac{q(x)}{Q(x)} < 1$
 - $q \in \mathcal{R}_\delta$, $-1 \leq \delta < 0$
 - $Q \in \mathcal{R}_\delta$, $0 < \delta < 1$, und q ist für hinreichend großes Argument fallend
 - q ist für hinreichend großes Argument fallend gegen 0, $q \in \mathcal{R}_0$ und $Q(x) - xq(x) \in \mathcal{R}_1$

2.6.2 Gesamtschaden für den subexponentiellen Fall

Betrachtet man die Gesamtschadenverteilung (siehe (2.12)), so gilt:

$$G_t(x) = \mathbb{P}(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) F^{n*}(x), \quad x \geq 0$$

KAPITEL 2. SUBEXPONENTIELL VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN IM CRAMER
LUNDBERG MODELL

Mit ähnlichen Überlegungen wie in Satz 2.9 bekommt man für den Fall $F \in \mathcal{S}$ eine asymptotische Aussage für die Gesamtschadenverteilung.

Satz 2.11. *Sei $F \in \mathcal{S}$, $t > 0$ fix, und setze voraus, dass ein ϵ existiert sodass $(p_t(n))$ folgendes erfüllt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \epsilon)^n p_t(n) < \infty \quad (2.22)$$

Dann gilt:

$$\overline{G}_t(x) \sim \mathbb{E}[N(t)] \overline{F}(x), \quad x \rightarrow \infty \quad (2.23)$$

Beweis: Betrachte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}_t(x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} \quad (2.24)$$

Aus (2.9) folgt, dass für ein $\epsilon > 0$ ein endliches K existiert mit:

$$p_t(n) \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} \leq p_t(n) K (1 + \epsilon)^n$$

Da die Majorante laut Voraussetzung summierbar ist, kann man bei Gleichung (2.24) limes und Summe vertauschen und man erhält:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) n = \mathbb{E}[N(t)]$$

□

Bemerkung: Für das Cramer-Lundberg Modell gilt $p_t(n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ und somit ist (2.22) erfüllt. Für $F \in \mathcal{S}$ und Satz 2.11 folgt:

$$\overline{G}_t(x) \sim \lambda t \overline{F}(x), \quad x \rightarrow \infty$$

Kapitel 3

Copulas und weitere Abhängigkeitskonzepte

3.1 Einleitung

Als Grundlage der nachstehenden Inhalte dient das fünfte Kapitel des Buches „Quantitative Risk Management“ von Embrechts et al. [7]. Die Betrachtung von Abhängigkeiten zwischen Risiken spielt eine wichtige Rolle im Finanz- und Versicherungsbereich. Hierzu werden verschiedene Konzepte vorgestellt und Vor- und Nachteile herausgefiltert. Am Anfang dieses Kapitels wird das Konzept der Copula dargestellt. Hierbei gilt, dass jede multivariate Verteilungsfunktion eines Zufallsvektors von Risikofaktoren sowohl Informationen über das Randverhalten der einzelnen Risikofaktoren, als auch Informationen über die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Faktoren enthält. Die Grundidee im Umgang mit Copulas ist es nun die Informationen über die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Risiken abzugrenzen (siehe Satz 3.3, „Skars Theorem“). Es werden einige grundlegende Eigenschaften der Copulas vorgestellt. In den Kapiteln 3.3 und 3.4 werden mit Hilfe von Embrechts et al. [9] zwei wichtige Copulaklassen, die elliptischen und die archimedischen gemeinsam mit einigen Vertretern angeführt.

Nach der Einführung in das Copulakonzept sollen verschiedene Abhängigkeitsmaße betrachtet werden. Im Unterschied zu den Copulas fassen Abhängigkeitsmaße die gesamte Abhängigkeitsstruktur zweier Risiken in einer einzelnen Zahl zusammen. Das bekannteste Abhängigkeitsmaß ist der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson, welcher in Kapitel 3.5.1 näher untersucht wird. Dieses Kapitel baut auf Embrechts et al. [10] auf. Wie sich herausstellt, ist das Konzept der Korrelation nur im Kontext mit elliptischen Verteilungen ein natürliches. Mithilfe der Copulatheorie sollen einige Schwächen herausgearbeitet werden. Nebenbei werden aber auch einige Vorteile präsentiert.

Am Ende dieses Kapitels werden die Rangkorrelationskoeffizienten Spearmans ρ und Kendalls τ und der Tailabhängigkeitskoeffizient dargestellt. Es wird gezeigt, dass die Rangkorrelationskoeffizienten eine mögliche Alternative zur linearen Korrelation darstellen. Der Tailabhängigkeitskoeffizient wird für einige bekannte Copulatypen berechnet.

3.2 Definition und wichtige Eigenschaften von Copulas

Die anschließende Definition einer Copula ist in Embrechts et al. [7], Seite 185 angeführt.

Definition 3.1. (*Copula*)

Eine d -dimensionale Copula ist eine Verteilungsfunktion auf $[0, 1]^d$, wobei die jeweiligen Randverteilungen auf $[0, 1]$ gleichverteilt sind.

Bezeichne mit $C(u) = C(u_1, \dots, u_d)$ eine Copula, so ist C eine Abbildung der Form $C : [0, 1]^d \mapsto [0, 1]$ und folgende Eigenschaften müssen gelten:

- a) $C(u_1, \dots, u_d)$ ist in jeder Komponente u_i wachsend.
- b) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}, u_i \in [0, 1]$.
- c) Für alle $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ mit $a_i \leq b_i$ gilt:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0,$$

wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}$.

Die erste Eigenschaft ist von jeder multivariaten Verteilungsfunktion gefordert und die zweite Eigenschaft entspricht der Forderung, dass die Randverteilungen auf $[0, 1]$ gleichverteilt sein sollen. Die dritte Eigenschaft ist nicht so offensichtlich. Sie versichert, dass $\mathbb{P}(a_1 \leq U_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq U_d \leq b_d)$ nichtnegativ für einen Zufallsvektor $(U_1, \dots, U_d)'$ mit Verteilungsfunktion C ist.

Es lässt sich zeigen, dass diese drei Eigenschaften eine Copula charakterisieren. Erfüllt also eine Funktion die obigen 3 Eigenschaften, so ist sie eine Copula.

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

Für die weiteren Untersuchungen spielt die verallgemeinerte Inverse eine wichtige Rolle. Die verallgemeinerte Inverse einer monoton wachsenden Funktion T ist definiert mit

$$T^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : T(x) \geq y\},$$

wobei die Konvention $\inf \emptyset = \infty$ gilt. Für eine Verteilungsfunktion F ist F^{\leftarrow} auch als Quantilfunktion von F bekannt. Folgende Eigenschaften lassen sich in Embrechts et al. [7], Seite 494f finden.

Satz 3.1. (ohne Beweis): **Eigenschaften der verallgemeinerten Inversen**

Sei T eine monoton wachsende Funktion. Für Eigenschaften d)-f) setze zusätzlich voraus, dass $T^{\leftarrow}(y) < \infty$. Dann gilt:

- a) T^{\leftarrow} ist monoton wachsend und linksseitig stetig.
- b) T ist stetig $\Leftrightarrow T^{\leftarrow}$ ist strikt monoton wachsend.
- c) T ist strikt monoton wachsend $\Leftrightarrow T^{\leftarrow}$ ist stetig.
- d) T ist rechtsseitig stetig und $T(x) \geq y \Leftrightarrow T^{\leftarrow}(y) \leq x$.
- e) T ist stetig $\Rightarrow T(T^{\leftarrow}(y)) = y$.
- f) T ist strikt monoton wachsend $\Rightarrow T^{\leftarrow}(T(x)) = x$.

Bevor wir auf einen der grundlegenden Sätze über Copulas eingehen, betrachten wir einen interessanten Zusammenhang zwischen einer Zufallsvariable und ihrer Verteilung. Den Beweis zu nachstehendem Satz findet man in Embrechts et al. [7], Seite 186.

Satz 3.2. (ohne Beweis)

Sei G eine Verteilungsfunktion und sei G^{\leftarrow} die verallgemeinerte Inverse. Dann gilt:

- a) Quantiltransformation: Sei U eine auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable, dann gilt:

$$\mathbb{P}(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$$

- b) Wahrscheinlichkeitstransformation: Besitzt Y eine Verteilungsfunktion G , wobei G eine stetige univariate Verteilungsfunktion ist, so folgt:

$$G(Y) \sim U(0, 1) \tag{3.1}$$

Bemerkung:

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

- a) Die Aussage in Satz 3.2 a) ist äußerst nützlich für die stochastische Simulation von Zufallszahlen. Um eine Zufallszahl mit einer Verteilung F zu generieren genügt es, eine auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallszahl zu erzeugen und anschließend die Quantilfunktion von F darauf anzuwenden.
- b) Die Wahrscheinlichkeitstransformation spielt für den stetigen Fall eine wichtige Rolle in der Theorie der Copulas, wie sich im folgenden Satz zeigen wird.

Der nun folgende Satz, der die grundlegende Idee der Copulas beinhaltet, stammt von Abe Sklar. Ein vollständiger Beweis lässt sich in Nelsen [20], Seite 18ff finden.

Satz 3.3. Sklars Theorem

Sei F eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_d . Dann existiert eine Copula $C : [0, 1]^d \mapsto [0, 1]$, sodass für alle $x_1, \dots, x_d \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ gilt:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (3.2)$$

Falls die Randverteilungen stetig sind, so ist C eindeutig. Ansonsten ist C auf $\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2 \times \dots \times \text{Ran } F_d$ eindeutig bestimmt, wobei $\text{Ran } F_i = F_i(\bar{\mathbb{R}})$ ist.

Sei andererseits C eine Copula und seien F_1, \dots, F_d univariate Verteilungsfunktionen. Dann ist die Funktion F aus (3.1) eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_d .

Beweis: Es wird im Folgenden die Existenz und die Eindeutigkeit einer Copula für stetige Randverteilungen und im Anschluss die Umkehraussage aus obigem Satz bewiesen.

Für einen Zufallsvektor \mathbb{X} mit Verteilungsfunktion F gilt für alle $(x_1, \dots, x_d) \in \bar{\mathbb{R}}$:

$$F(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) = \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_d(X_d) \leq F_d(x_d))$$

Da die Randverteilungen stetig sind, folgt aus (3.1) und Definition 3.1, dass die Verteilungsfunktion von $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$ eine Copula darstellt. Bezeichnen wir diese Copula mit C , so folgt Gleichung (3.2) und somit folgt auch die Existenz.

Falls man Gleichung (3.2) für die Argumente $x_i = F_i^{\leftarrow}(u_i)$ mit $0 \leq u_i \leq 1$, $i = 1, \dots, d$ auswertet, so erhält man mit Satz 3.1 e):

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)) \quad (3.3)$$

Durch (3.3) wird C eindeutig durch F und F_1, \dots, F_d bestimmt.

Für die Umkehraussage wird vorausgesetzt, dass C eine Copula und F_1, \dots, F_d univariate Verteilungsfunktionen sind. Sei \mathbb{U} ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion C und setze $\mathbb{X} := (F_1^{\leftarrow}(U_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(U_d))$, so gilt mit Satz 3.1 d):

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) = \mathbb{P}(F_1^{\leftarrow}(U_1) \leq x_1, \dots, F_d^{\leftarrow}(U_d) \leq x_d) =$$

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

$$= \mathbb{P}(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_d \leq F_d(x_d)) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

□

Bemerkung: Die Gleichungen (3.2) und (3.3) spielen eine entscheidende Rolle im Umgang mit Copulas. Gleichung (3.2) zeigt, wie gemeinsame Verteilungen F durch Kopplung von Randverteilungen und Copulas geformt werden. Durch die Umkehraussage des obigen Satzes entsteht dadurch die Möglichkeit beliebige multivariate Verteilungen, falls die Randverteilungen und die Copula bekannt sind, zu formen. Aus (3.3) sieht man, wie man aus multivariaten Verteilungsfunktionen mit stetigen Randverteilungen die Abhängigkeitsinformationen in Form einer Copula extrahieren kann. Außerdem liegt es durch obigen Satz unter der Voraussetzung von stetigen Randverteilungen nahe, die Copula einer Verteilung zu definieren.

Definition 3.2. Sei \mathbb{X} ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F und stetigen Randverteilungen F_1, \dots, F_d . Dann ist die Copula von F die Verteilungsfunktion C von $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$.

Im Anschluss werden zwei wichtige Eigenschaften von Copulas betrachtet. Zuerst wird gezeigt, dass die Copula einer Verteilung invariant unter streng monoton wachsenden Transformationen der Ränder ist. Gemeinsam mit Satz 3.3 und der Invarianzeigenschaft liegt es nahe, unter der Voraussetzung von stetigen Randverteilungen die Copula einer Verteilung als eine natürliche Art, die repräsentativ für die Abhängigkeitsstruktur dieser Verteilung ist, anzusehen. Anschließend werden die so genannten Frechet-Grenzen für eine Copula eingeführt.

Satz 3.4. Sei (X_1, \dots, X_d) ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und Copula C und seien T_1, \dots, T_d strikt monoton wachsende Funktionen. Dann besitzt $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$ auch die Copula C .

Beweis: Zu Beginn wollen wir zeigen, dass $\tilde{F}_i(y) := F_i(T_i^{\leftarrow}(y))$ die stetige Verteilungsfunktion von $T_i(X_i)$ ist. Die Stetigkeit folgt, da die F_i stetig sind und aus Satz 3.1 c). Durch Satz 3.1 f) folgt:

$$\tilde{F}_i(y) = \mathbb{P}(X_i \leq T_i^{\leftarrow}(y)) = \mathbb{P}(T_i^{\leftarrow}(T_i(X_i)) \leq T_i^{\leftarrow}(y)).$$

Da T_i^{\leftarrow} wachsend ist folgt aus Embrechts et al. [7], Lemma A.2., Seite 494:

$$\tilde{F}_i(y) = \mathbb{P}(T_i(X_i) \leq y) + \mathbb{P}(X_i = T_i^{\leftarrow}(y), T_i(X_i) > y).$$

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

Der zweite Summand ist aber 0 da die F_i stetig sind.

Durch Satz 3.1 f) folgt $\tilde{F}_i(T_i(x)) = F_i(T_i^{\leftarrow}(T_i(x))) = F_i(x)$ und somit:

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d) &= \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq u_1, \dots, F_d(X_d) \leq u_d) = \\ &= \mathbb{P}(\tilde{F}_1(T_1(X_1)) \leq u_1, \dots, \tilde{F}_d(T_d(X_d)) \leq u_d). \end{aligned}$$

Laut Definition 3.2 ist C aber nun die Copula von $((T_1(X_1), \dots, T_d(X_d)))$. □

Bemerkung: Als Beispiel zur Verdeutlichung der Relevanz dieser Eigenschaft, betrachte ein Wahrscheinlichkeitsmodell (multivariate Verteilung) für abhängige Versicherungsverluste verschiedenster Art. Falls man nun an der Modellierung der Logarithmen dieser Verluste interessiert ist, so lässt sich sagen, dass es zu einer Änderung der Randverteilungen kommt, wohingegen die Copula gleich bleibt. (siehe Embrechts et al. [10], Seite 6)

Satz 3.5. (Frechet-Grenzen)

Für jede Copula $C(u_1, \dots, u_d)$ gelten folgende Grenzen:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right\} \leq C(u) \leq \min\{u_1, \dots, u_d\}$$

Beweis: Für die obere Schranke betrachte:

$$C(u) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{1 \leq j \leq d} \{U_j \leq u_j\} \right) \leq \mathbb{P}(U_i \leq u_i) = u_i \quad \forall i$$

Für die untere Schranke betrachte:

$$\begin{aligned} C(u) &= \mathbb{P} \left(\bigcap_{1 \leq i \leq d} \{U_i \leq u_i\} \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq i \leq d} \{U_i > u_i\} \right) \geq 1 - \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(U_i > u_i) = \\ &= 1 - d + \sum_{i=1}^d u_i \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Die Frechet Grenzen aus Satz 3.5 lassen sich allgemein für beliebige multivariate Verteilungsfunktionen angeben. Für eine multivariate Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_d gilt:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^d F_i(x_i) + 1 - d, 0 \right\} \leq F(x) \leq \min \{F(x_1), \dots, F(x_d)\} \quad (3.4)$$

Im Anschluss werden einige so genannten fundamentale Copulas vorgestellt. Dazu gehören zum Beispiel die Komonotonie- und die Kontramonotonie-Copula, die im nächsten Abschnitt für die Beschreibung perfekter Abhängigkeit von zentraler Bedeutung sind.

Ein weiterer Vertreter ist die **Unabhängigkeits-Copula** definiert mit:

$$\Pi(u_1, \dots, u_d) := \prod_{i=1}^d u_i$$

Satz 3.6. *Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungen sind genau dann unabhängig, wenn ihre Abhängigkeitsstruktur durch die Unabhängigkeits-Copula gegeben ist.*

Beweis: Seien Zufallsvariablen X_1, \dots, X_d mit stetigen Verteilungen F_1, \dots, F_d unabhängig, so folgt, dass $F(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d F_i(x_i)$. Laut Satz 3.3 folgt nun die eindeutige Existenz einer Copula C mit $C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = \prod_{i=1}^d F_i(x_i)$. Diese Copula entspricht aber der Unabhängigkeits-Copula.

Sei umgekehrt die Abhängigkeitsstruktur gegeben durch eine Unabhängigkeits-Copula, so gilt, dass $F(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d F_i(x_i)$. Daraus folgt aber die Unabhängigkeit. \square

3.2.1 Perfekte Abhängigkeit

Dieser Abschnitt beruht auf Embrechts et al. [10]. Für jede Copula gelten die Frechet Grenzen aus Satz 3.5 mit:

$$C_l(x_1, \dots, x_d) := \max \left\{ \sum_{i=1}^d x_i + 1 - d, 0 \right\} \leq C(x) \leq \min\{x_1, \dots, x_d\} =: C_u(x_1, \dots, x_d)$$

Für den Fall $d = 2$ sind die Grenzen für sich selbst Copulas. Sei hierfür $U \sim U(0, 1)$, so gilt:

$$C_l(x_1, x_2) = \mathbb{P}(U \leq x_1, 1 - U \leq x_2), \quad C_u(x_1, x_2) = \mathbb{P}(U \leq x_1, U \leq x_2).$$

C_l und C_u sind also die bivariaten Verteilungsfunktionen der Vektoren $(U, 1 - U)'$ und $(U, U)'$. Die Verteilung von $(U, 1 - U)'$ besitzt die ganze Masse auf der Diagonalen zwischen $(0, 1)$ und $(1, 0)$, wohingegen die Verteilung von $(U, U)'$ die ganze Masse auf der Diagonalen zwischen $(0, 0)$ und $(1, 1)$ besitzt. C_l beschreibt perfekte negative und C_u perfekte positive Abhängigkeit, was in folgendem Satz formalisiert wird. (für einen Beweis siehe Embrechts et al. [10], Seite 14)

Satz 3.7. (ohne Beweis)

Besitzt der Zufallsvektor $(X, Y)'$ entweder die Copula C_l oder die Copula C_u , das heißt $F(x_1, x_2) = \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\}$ oder $F(x_1, x_2) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$. Dann existieren zwei monotone Funktionen u, v und eine Zufallsvariable Z sodass

$$(X, Y)' \stackrel{d}{=} (u(Z), v(Z))'$$

gilt, mit u und v steigend für die Copula C_u und u steigend und v fallend für die Copula C_l . Die Umkehrung dieser Aussage ist auch richtig.

Dieser Satz motiviert folgende Definition:

Definition 3.3. Falls der Zufallsvektor $(X, Y)'$ die Copula C_u besitzt dann werden X und Y komonoton genannt. Falls er die Copula C_l besitzt, werden sie kontramonoton genannt.

Bemerkung:

a) C_u und C_l werden für $d = 2$ auch als **Komonotonie-** und **Kontramonotonie-Copula** bezeichnet. Während die untere Frechetgrenze für $d > 2$ keine Copula darstellt, ist die obere Grenze immer eine Copula. (siehe Embrechts et al. [7], Seite 190 und Seite 200)

b) Seien die Verteilungsfunktionen von X und Y mit F_1 und F_2 gegeben. Ist nun eine der Verteilungen nicht stetig, sodass die Copula nicht eindeutig ist, dann sieht man C_l und C_u aus obiger Definition und dem vorab angeführten Satz als mögliche Copulas an. Für den Fall von stetigen Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 erhält man ein stärkeres Resultat mit:

$$C = C_l \Leftrightarrow Y = T(X) \text{ f.s., } T = F_2^{-1}((1 - F_1)) \text{ monoton fallend,}$$

$$C = C_u \Leftrightarrow Y = T(X) \text{ f.s., } T = F_2^{-1}(F_1) \text{ monoton wachsend.}$$

3.2.2 Überlebenscopula

Der Satz von Sklar (Satz 3.3) lässt sich auch auf multivariate Tailfunktionen anwenden. Sei hierzu \mathbb{X} ein Zufallsvektor mit multivariater Tailfunktion \bar{F} und Randverteilungen $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_d$, so gilt:

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_d) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_d(x_d)) \quad (3.5)$$

\hat{C} wird hierbei als Überlebenscopula bezeichnet. Falls die Randverteilungen stetig sind lässt sich diese Gleichung leicht nachvollziehen mit:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x_1, \dots, x_d) &= \mathbb{P}(X_1 > x_1, \dots, X_d > x_d) = \\ &= \mathbb{P}(1 - F_1(X_1) \leq \bar{F}_1(x_1), \dots, 1 - F_d(X_d) \leq \bar{F}_d(x_d))\end{aligned}$$

Also folgt (3.5) durch \hat{C} als Verteilungsfunktion von $1 - \mathbb{U}$ mit $\mathbb{U} := (F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$. Im Allgemeinen wird der Begriff Überlebenscopula einer Copula C durch die Verteilungsfunktion von $1 - \mathbb{U}$ beschrieben, falls \mathbb{U} die Verteilungsfunktion C besitzt. Im bivariaten Fall gilt folgender Zusammenhang:

$$\hat{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \quad (3.6)$$

Im Nachstehenden wird der Begriff radiale Symmetrie eingeführt, den man durch Copulas und Überlebenscopulas beschreiben kann.

Definition 3.4. Ein Zufallsvektor \mathbb{X} ist radial symmetrisch um a falls $\mathbb{X} - a \stackrel{d}{=} a - \mathbb{X}$.

Falls \mathbb{U} die Verteilungsfunktion C besitzt, so ist die einzig mögliche Mitte der Symmetrie mit $(0.5, \dots, 0.5)$ gegeben. Also ist C radial symmetrisch falls gilt:

$$(U_1 - 0.5, \dots, U_d - 0.5) \stackrel{d}{=} (0.5 - U_1, \dots, 0.5 - U_d) \Leftrightarrow \mathbb{U} \stackrel{d}{=} 1 - \mathbb{U}.$$

Damit folgt für eine radial symmetrische Copula C , dass $C = \hat{C}$ gilt.

3.2.3 Dichte einer Copula

Copulas besitzen nicht immer eine Dichte. Die Komonotonie- und die Kontramonotonie-Copula sind zwei Beispiele für Copulas die nicht absolut stetig sind. Die Copulas die im Laufe dieses Kapitels noch vorgestellt werden besitzen hingegen eine Dichte gegeben mit:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \cdots \partial u_d}.$$

Für die Copula einer absolut stetigen gemeinsamen Verteilungsfunktion F mit strikt monoton wachsenden stetigen Randverteilungen F_1, \dots, F_d kann man $C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$ differenzieren und erhält:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \cdots f_d(F_d^{-1}(u_d))}$$

wobei f die gemeinsame Dichte von F ist und f_1, \dots, f_d die Randdichten beschreiben.

3.3 Elliptische Copulas

Die Klasse der elliptischen Copulas bietet eine Vielzahl von multivariaten Verteilungen. Zwei wichtige Vertreter dieser Klasse sollen in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Elliptische Copulas sind einfach die Copulas von elliptischen Verteilungsfunktionen. Solche Copulas, die mit Hilfe von Sklars Theorem (Satz 3.3) aus multivariaten Verteilungsfunktionen herausgezogen werden, nennt man implizite Copulas.

Im Anschluss erfolgt eine Definition von elliptischen Verteilungen, die als eine Verallgemeinerung der multivariaten Normalverteilung angesehen werden können. Für einen n -dimensionalen Zufallsvektor \mathbb{X} ist die charakteristische Funktion gegeben mit:

$$\varphi_{\mathbb{X}}(t) = \mathbb{E}[e^{it'\mathbb{X}}], \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Definition 3.5. Sei \mathbb{X} ein n -dimensionaler Zufallsvektor. Für $\mu \in \mathbb{R}^n$ und eine $n \times n$ nichtnegativ definite symmetrische Matrix Σ sei die charakteristische Funktion $\varphi_{\mathbb{X}-\mu}(t)$ von $\mathbb{X} - \mu$ von der Form

$$\varphi_{\mathbb{X}-\mu}(t) = \phi(t'\Sigma t)$$

Dann besitzt \mathbb{X} eine elliptische Verteilung mit Parametern μ, Σ und ϕ . ϕ wird in diesem Zusammenhang als charakteristischer Generator bezeichnet und man schreibt $\mathbb{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$.

Der folgende Satz beschreibt eine äquivalente Definition von elliptischen Verteilungen. Ein Beweis lässt sich in Fang et al. [11] finden.

Satz 3.8. (ohne Beweis)

$X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ mit $\text{Ran } \Sigma = k$ genau dann wenn \mathbb{U}, R und A existieren mit:

$$\mathbb{X} \stackrel{d}{=} \mu + RA\mathbb{U}$$

wobei gilt:

a) \mathbb{U} ist ein k -dimensionaler Zufallsvektor, welcher auf der Hypersphäre $\{z \in \mathbb{R}^k | z'z = 1\}$ gleichverteilt ist.

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

- b) $R \geq 0$ ist eine Zufallsvariable unabhängig von \mathbb{U} .
 c) A ist eine $n \times k$ Matrix, wobei $AA' = \Sigma$ gilt.

Beispiel: Für den Zufallvektor \mathbb{X} gilt $\mathbb{X} \sim N_n(0, I_n)$ (multivariat normalverteilt mit Nullvektor als Erwartungswertvektor und der n -dimensionalen Einheitsmatrix als Kovarianzmatrix) genau dann wenn die einzelnen Komponenten X_1, \dots, X_n unabhängig identisch standardnormalverteilt sind (siehe Embrechts et al. [7], Seite 66). Die charakteristische Funktion einer univariaten Standardnormalverteilung ist gegeben mit $\exp(-\frac{t^2}{2})$. Damit erhält man für die charakteristische Funktion von \mathbb{X} :

$$\varphi_{\mathbb{X}}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}(t_1^2 + \dots + t_n^2)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}t't\right)$$

Daraus folgt: $X \sim E_n(0, I_n, \phi)$ mit dem charakteristischen Generator $\phi(u) = \exp(-\frac{u}{2})$.

Bemerkung: Für eine gegebene Verteilung von \mathbb{X} ist die Repräsentation durch $E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ nicht eindeutig. Es wird zwar μ eindeutig bestimmt, Σ und ϕ sind hingegen nicht eindeutig bestimmt. Für $\mathbb{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ und $\mathbb{X} \sim E_n(\mu^*, \Sigma^*, \phi^*)$ gilt für eine Konstante $c > 0$:

$$\mu^* = \mu, \quad \Sigma^* = c\Sigma, \quad \phi^*(\cdot) = \phi\left(\frac{\cdot}{c}\right).$$

Vorausgesetzt, dass die Varianzen endlich sind, lässt sich eine elliptische Verteilung vollständig durch ihren Mittelwertvektor, Kovarianzmatrix und charakteristischen Generator beschreiben und es ist möglich eine Repräsentation $E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ zu finden, sodass Σ die Kovarianzmatrix von \mathbb{X} darstellt (siehe Embrechts et al. [7], Seite 93).

Zwei wichtige Vertreter von elliptischen Copulas, die beide aus bekannten elliptischen Verteilungen entstammen, werden im Folgenden präsentiert.

Beispiele:

- a) **Gauß-Copula:** Die Copula der d -variaten Normalverteilung mit linearer Korrelationsmatrix R ist gegeben mit:

$$C_R^{Ga}(u) = \Phi_R^d(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)),$$

wobei Φ_R^d die gemeinsame Verteilungsfunktion einer d -variaten Standardnormalverteilung mit linearer Korrelationsmatrix R beschreibt und Φ^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung beschreibt. Für den bivariaten Fall ergibt sich:

$$C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{\frac{-(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} ds_1 ds_2$$

Für $R = I_d$ erhält man die Unabhängigkeits-Copula (Seite 28), wohingegen man für eine Matrix R mit lauter Einsen die Komonotonie-Copula (Seite 29) erhält. Im bivariaten Fall erhält man für $\rho = -1$ die Kontramonotonie-Copula (Seite 29). Daher kann die Gauß-Copula im bivariaten Fall als eine Abhängigkeitsstruktur angesehen werden, die zwischen perfekter positiver und negativer Abhängigkeit schwankt, wobei der Korrelationskoeffizient ρ die Stärke der Abhängigkeit beschreibt. (siehe Embrechts et al. [7], Seite 191)

b) **t-Copula:** Analog dazu, wie sich die Gauß-Copula aus der multivariaten Normalverteilung gewinnen lässt, erhält man die t-Copula aus der multivariaten t-Verteilung.

3.4 Archimedische Copulas

Elliptische Copulas entstammen aus bekannten multivariaten Verteilungen und besitzen nicht notwendigerweise eine einfache geschlossene Form. Im Gegensatz dazu leiten sich archimedische Copulas nicht von multivariaten Verteilungen ab und besitzen eine geschlossene Form. Man spricht in diesem Fall auch von expliziten Copulas. Ein weiterer Nachteil der elliptischen Copulas entsteht aufgrund der Eigenschaft der radialen Symmetrie. In vielen Finanz- und Versicherungsanwendungen scheint es sinnvoll, stärkere Abhängigkeiten zwischen großen Verlusten als zwischen großen Gewinnen zu simulieren (z.B. Börsencrash). (siehe Embrechts et al. [9], Seite 30)

Eine mögliche Abhilfe schaffen archimedische Copulas, die im Weiteren präsentiert werden. Um sie einzuführen wird der Begriff der Pseudo-Inversen benötigt.

Definition 3.6. Sei $\phi : [0, 1] \mapsto [0, \infty]$ eine stetige, strikt monoton fallende Funktion mit $\phi(1) = 0$. Die Pseudo-Inverse von ϕ ist die Funktion $\phi^{[-1]}(t) : [0, \infty] \mapsto [0, 1]$ mit:

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0), \\ 0, & \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Es gilt, dass $\phi^{[-1]}$ stetig und monoton fallend auf $[0, \infty]$ und strikt monoton fallend auf $[0, \phi(0)]$ ist.

Der Beweis zu folgendem Satz lässt sich in Nelsen [20], Seite 111f finden.

Satz 3.9. (ohne Beweis)

Sei $\phi : [0, 1] \mapsto [0, \infty]$ eine stetige, strikt monoton fallende Funktion mit $\phi(1) = 0$ und sei

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

$\phi^{[-1]}$ die Pseudo-Inverse von ϕ . Sei C nun eine Funktion von $[0, 1]^2 \mapsto [0, 1]$ mit:

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2)). \quad (3.7)$$

Dann ist C eine Copula genau dann wenn ϕ konvex ist.

Man nennt Copulas von der Form (3.7) archimedische Copulas und die Funktion ϕ aus obiger Definition wird Generator der Copula genannt. Für $\phi(0) = \infty$ wird dieser Generator als strikt bezeichnet. In diesem Fall gilt $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ und man nennt $C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$ strikte archimedische Copula.

Bemerkung: Eine Erweiterung auf den multivariaten Fall ist nur unter der Voraussetzung einer zusätzlichen Bedingung an den Generator möglich. (siehe Kapitel 4.3)

Beispiele:

a) **Gumbel-Copula:** Sei $\phi(t) = (-\ln(t))^\theta$ mit $\theta \geq 1$. Dann ist ϕ stetig und es gilt $\phi(1) = 0$. Außerdem gilt für die erste Ableitung $\phi'(t) = -\frac{\theta}{t}(-\ln(t))^{\theta-1}$ und daher ist $\phi: [0, 1] \mapsto [0, \infty]$ strikt monoton fallend. Da $\phi''(t) \geq 0$ in $[0, 1]$ gilt, folgt dass ϕ konvex ist. Durch $\phi(0) = \infty$ ist ϕ ein strikter Generator und man erhält durch (3.7) die bivariate Gumbel Copula mit:

$$C_\theta^{Gu}(u_1, u_2) = \exp(-((-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta)^{\frac{1}{\theta}})$$

Falls $\theta = 1$ gilt, so erhält man die Unabhängigkeits-Copula (Seite 28). Für $\theta \rightarrow \infty$ erhält man hingegen die Komonotonie-Copula (Seite 29). Demnach schwankt die Gumbel-Copula zwischen Unabhängigkeit und perfekter Abhängigkeit und der Parameter θ gibt die Stärke der Abhängigkeit an.

b) **Clayton-Copula:** Sei $\phi(t) = t^{-\theta} - 1$ mit $\theta > 0$. Durch ähnliche Überlegungen wie bei der Gumbelcopula, erhält man die bivariate Clayton Copula mit:

$$C_\theta^{Cl}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

Für den Grenzübergang $\theta \rightarrow 0$ erhält man die Unabhängigkeitscopula, wohingegen man für $\theta \rightarrow \infty$ die Komonotonie-Copula erhält.

Im Folgenden kommt es zu einem Vergleich verschiedener Copuladichten im bivariaten Fall. Dabei lässt sich die Asymmetrie für die beiden Vertreter der archimedischen Copulas im Gegensatz zur Gauß-Copula erkennen und man erhält daher die Möglichkeit asymmetrische Abhängigkeiten zu modellieren. Wie sich in den beiden Funktionen der archimedischen Copulas erkennen lässt, weisen diese jeweils starke Abhängigkeit an einem Ende der bivariaten Verteilung auf (siehe Abb. 3.1, Abb. 3.2). Diese Eigenschaft wird in Abschnitt 3.5.3 („Tailabhängigkeit“) näher erläutert. Es wird sich zeigen, dass die Gauß-Copula solch eine Eigenschaft nicht aufweist.

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

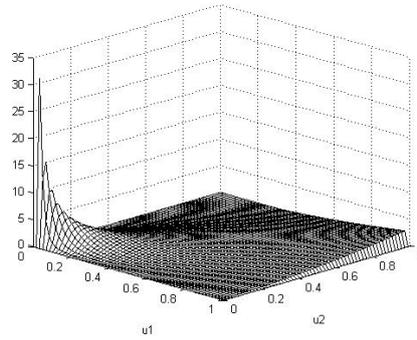


Abbildung 3.1: Dichte der Clayton Copula für $\theta = 2$

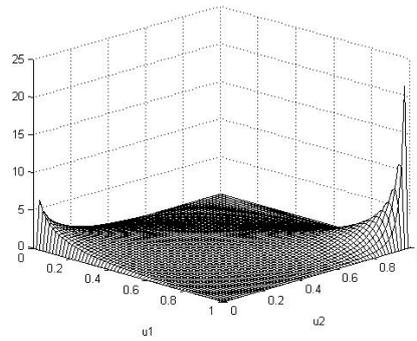


Abbildung 3.2: Dichte der Gumbel Copula für $\theta = 2$

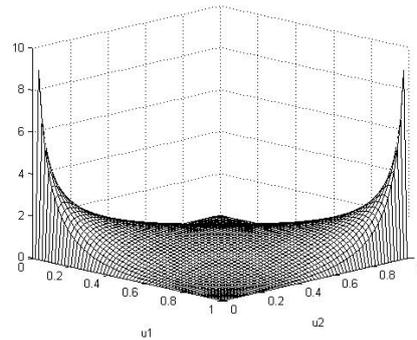


Abbildung 3.3: Dichte der Gauß-Copula für $\rho = 0,7$

3.5 Vor- und Nachteile von Abhängigkeitsmaßen

3.5.1 Linearer Korrelationskoeffizient nach Pearson

Definition 3.7. Seien X, Y reellwertige stochastische Größen mit endlichen Varianzen. Dann ist der lineare Korrelationskoeffizient zwischen X und Y gegeben durch:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

wobei $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ die Kovarianz zwischen X und Y beschreibt.

Der lineare Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die lineare Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen. Es gilt: $|\rho(X, Y)| = 1$ genau dann wenn X und Y perfekt linear abhängig sind, was soviel bedeutet wie $Y = aX + b$ f.s. für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$.

Aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung mit $|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}$ folgt $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$ und somit $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Im Falle unabhängiger Zufallsvariablen X und Y folgt aus $\text{Cov}(X, Y) = 0$, dass $\rho(X, Y) = 0$. In diesem Fall spricht man von unkorrelierten Zufallsvariablen.

Der nächste Satz zeigt, dass die Korrelation invariant unter streng monoton wachsenden linearen Transformationen ist.

Satz 3.10. Für $\alpha, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\beta, \delta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\rho(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \text{sgn}(\alpha\gamma)\rho(X, Y)$$

mit

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}\rho(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) &= \frac{\text{Cov}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta)}{\sqrt{\text{Var}(\alpha X + \beta)\text{Var}(\gamma Y + \delta)}} = \frac{\alpha\gamma\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\alpha^2\gamma^2}\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \\ &= \text{sgn}(\alpha\gamma)\rho(X, Y)\end{aligned}$$

□

Die Verallgemeinerung der Korrelation auf mehr als zwei Zufallsvariablen ist weiters nicht schwierig. Seien $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ und $\mathbb{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$ zwei Zufallsvektoren, so lassen sich alle paarweisen Kovarianzen und Korrelationen in $n \times n$ Matrizen $\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ und $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ zusammenfassen. Falls die zugehörigen Varianzen endlich sind, lässt sich folgendes definieren:

$$\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})_{ij} := \text{Cov}(X_i, Y_j),$$

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})_{ij} := \rho(X_i, Y_j) \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Diese Matrizen sind symmetrisch und positiv semidefinit. Oft ist es auch interessant, die paarweisen Korrelationen der Komponenten eines einzelnen Zufallsvektors zu betrachten. In diesem Fall setzt man $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ und erhält $\text{Cov}(\mathbb{X}) := \text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ und $\rho(\mathbb{X}) := \rho(\mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Im Folgenden werden einige Vor- und Nachteile der linearen Korrelation aufgelistet. Zu Beginn wird auf die Stärken eingegangen.

a) Die Korrelation lässt sich in vielen Fällen leicht berechnen. Für eine große Zahl von bivariaten Verteilungen ist es leicht zweite Momente wie Varianz und Kovarianz zu berechnen und somit den Korrelationskoeffizient zu erhalten. Rangkorrelationskoeffizienten wie Spearmans ρ oder Kendalls τ sind oft schwieriger zu berechnen.

b) Korrelation und Kovarianz sind unter linearen Operationen leicht zu manipulieren. Unter affin-linearen Transformationen $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ mit $x \mapsto Ax + a$ und $B : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ mit $x \mapsto Bx + b$ für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $a, b \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\text{Cov}(A\mathbb{X} + a, B\mathbb{Y} + b) = A\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})B'.$$

Speziell gilt für jede Linearkombination $\alpha'\mathbb{X}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{Var}(\alpha'\mathbb{X}) = \alpha'\text{Cov}(\mathbb{X})\alpha.$$

Daraus folgt aber, dass die Varianz einer Linearkombination durch die paarweisen Kovarianzen zur Gänze bestimmt ist. Diese Tatsache wird in der Portfoliotheorie gerne benutzt.

c) Korrelation ist ein natürliches Abhängigkeitsmaß für multivariate Normalverteilungen und allgemeiner für elliptische Verteilungen. Wie wir bereits gesehen haben sind elliptische Verteilungen durch Erwartungswertvektor, Kovarianzmatrix und einer charakteristischen Funktion eindeutig bestimmt (siehe Bemerkung auf Seite 32). Da Erwartungswerte und Varianzen Eigenschaften der Randverteilungen sind, ist die Copula einer elliptischen Verteilung nur von der Korrelationsmatrix und charakteristischem Generator abhängig. Daraus folgt, dass die Korrelationsmatrix eine natürliche parametrische Rolle in diesem Fall einnimmt. (siehe Embrechts et al. [7], Seite 201)

Die Korrelation besitzt neben diesen vorteilhaften Eigenschaften auch nachstehende Defizite. Diese werden zuerst in Form einer Liste aufgeführt und anschließend anhand zweier Trugschlüsse veranschaulicht.

- a) Die Varianzen der Verteilungen von X und Y müssen endlich sein, da ansonsten der lineare Korrelationskoeffizient nicht definiert ist. Dies führt im Speziellen dann zu Problemen, falls man mit Risiken mit heavy tailed Verteilungen (siehe Definition 2.1) arbeitet.
- b) Ein weiterer Nachteil der Korrelation ist es, dass die Unabhängigkeit zweier stochastischer Größen die Unkorreliertheit impliziert, die Umkehrung dieses Sachverhalts jedoch im Allgemeinen nicht gilt. Folgendes Beispiel soll diese Tatsache verdeutlichen.

Beispiel: Seien $X \sim N(0, 1)$ und $Y = X^2$ zwei stochastische Größen die offensichtlich nicht unabhängig sind. Betrachtet man die Kovarianz, so erhält man $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2]$. Da das erste und dritte Moment einer Standardnormalverteilung Null sind folgt die Unkorreliertheit.

Nur im Fall von multivariaten Normalverteilungen impliziert die Unkorreliertheit die Unabhängigkeit der einzelnen Komponenten. Sind hingegen die Ränder normalverteilt aber die gemeinsame Verteilungsfunktion nicht normal, so ist diese Implikation nicht mehr richtig.

- c) Die lineare Korrelation ist nicht invariant unter nichtlinearen strikt monoton wachsenden Transformationen $T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Für zwei reellwertige Zufallsvariablen gilt im Allgemeinen:

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y)$$

Betrachtet man die bivariate Standardnormalverteilung mit Korrelation ρ und nimmt als Transformation T die Standardnormalverteilungsfunktion, so erhält man:

$$\rho(T(X), T(Y)) = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho(X, Y)}{2}\right).$$

Trugschluss 1. Die Randverteilungen und die paarweisen Korrelationen eines Zufallsvektors bestimmen die gemeinsame Verteilung.

Diese Aussage ist richtig, falls man sein Augenmerk auf elliptische Verteilungen richtet. Im Allgemeinen gilt sie aber nicht, wie folgendes Beispiel verdeutlichen soll.

Beispiel: Seien X_1, X_2 Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 und gemeinsamer Verteilungsfunktion $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$ für eine Copula C und setze voraus, dass für den Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1, X_2) = \rho$ gilt. Dann ist es aber im Allgemeinen möglich eine alternative Copula $C_2 \neq C$ zu finden und einen Vektor (Y_1, Y_2) mit Verteilungsfunktion $C_2(F_1(x_1), F_2(x_2))$ und $\rho(Y_1, Y_2) = \rho$ zu bilden (siehe Embrechts et al. [7], Seite 202). In Abbildung 3.4 sieht man 1000 Zufallszahlen von zwei unterschiedlichen bivariaten Verteilungen. In beiden Fällen haben wir Gamma(3,1) verteilte Ränder und eine Korrelation von 0,7. Die Abhängigkeitsstruktur ist jedoch im ersten Bild durch die Gauß-Copula und im zweiten Bild durch die Gumbel-Copula gegeben. Es ist eindeutig ersichtlich, dass die Abhängigkeit der Zufallsvariablen in den beiden Modellen unterschiedlich ist. Falls wir die Zufallsvariablen als Versicherungsschäden interpretieren, ist das zweite Modell gefährlicher als das erste, da extreme Schäden die Tendenz aufweisen gemeinsam aufzutreten. Diese Eigenschaft der Gumbel-Copula, die man auch in Abb. 3.2 erkennen kann, wird auch als obere Tailabhängigkeit bezeichnet. Die Gauß-Copula besitzt hingegen keine Tailabhängigkeit. Kapitel 3.5.3 gibt hierzu nähere Aufschlüsse.

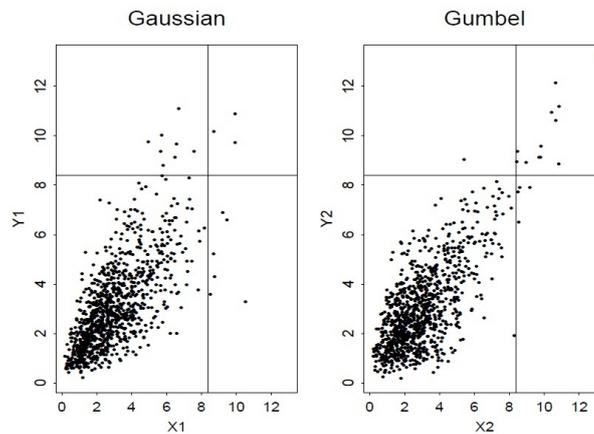


Abbildung 3.4: Identische Randverteilungen mit $\rho = 0.7$, jedoch unterschiedliche Copulaplastypen. (siehe Embrechts et al. [10], Seite 2)

Trugschluss 2. Für gegebene Randverteilungen F_1 und F_2 von X und Y kann jeder

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

beliebiger Korrelationswert zwischen -1 und 1 durch geeignete Wahl der gemeinsamen Verteilung erreicht werden.

Wiederum ist diese Aussage richtig, falls F_1 und F_2 die Ränder einer elliptischen Verteilung sind (siehe Embrechts et al. [7], Seite 203). Im Allgemeinen ist sie aber falsch, was sich im folgenden Beispiel zeigen lässt.

Beispiel: Seien X und Y Zufallsvariablen mit Träger $[0, \infty)$, sodass $F_1(x) = F_2(y) = 0$ für alle $x, y < 0$. Seien die rechten Endpunkte der beiden Verteilungsfunktionen unendlich, was soviel bedeutet wie $\sup_x \{x | F_1(x) < 1\} = \sup_y \{y | F_2(y) < 1\} = \infty$. Zusätzlich sei $\rho(X, Y) = -1$. Dies impliziert $Y = aX + b$ f.s. mit $a < 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt aber für alle $y < 0$:

$$\begin{aligned} F_2(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) \geq \mathbb{P}\left(X > \frac{y-b}{a}\right) = \\ &= 1 - F_1\left(\frac{y-b}{a}\right) > 0 \end{aligned}$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung $F_2(y) = 0$ für alle $y < 0$.

Der folgende Satz beinhaltet die so genannte Höfding'sche Formel. Diese Formel wird für den Satz 3.12 benötigt um die Grenzen für den linearen Korrelationskoeffizienten herzuleiten. Ein Beweis lässt sich in Embrechts et al. [7], Seite 204 finden.

Satz 3.11. (ohne Beweis)

Sei $(X_1, X_2)'$ ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Verteilung F und Randverteilungen F_1 und F_2 . Dann ist die Kovarianz von X_1 und X_2 , falls sie endlich ist, gegeben mit:

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)) dx_1 dx_2 \quad (3.8)$$

Satz 3.12. Sei $(X_1, X_2)'$ ein Zufallsvektor mit Randverteilungen F_1 und F_2 mit endlichen Varianzen größer Null und einer nicht spezifizierten Abhängigkeitsstruktur. Dann gilt:

a) Die Menge aller möglichen Korrelationen ist ein geschlossenes Intervall $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ mit $\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$.

b) Die minimale Korrelation $\rho = \rho_{\min}$ wird genau dann erreicht, falls X und Y kontramonoton sind. Hingegen wird die maximale Korrelation $\rho = \rho_{\max}$ genau dann erreicht, falls X und Y komonoton sind.

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

Beweis: Für b) betrachte die Frechet Grenzen einer Verteilungsfunktion aus (3.4) mit:

$$\max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\} \leq F(x_1, x_2) \leq \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$$

Richtet man sein Augenmerk auf (3.8), so ist der Integrand für fixierte Randverteilungsfunktionen punktweise maximal, falls X_1 und X_2 als Copula die obere Frechet Grenze besitzen, beziehungsweise komonoton sind. Hingegen ist der Integrand minimal, falls X_1 und X_2 kontramonoton sind.

Für den Beweis von a) gilt klarerweise $\rho_{max} \geq 0$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\rho_{max} = 0$ ausgeschlossen werden kann. Falls $\rho_{max} = 0$ gilt würde dies $\min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\} = F_1(x_1)F_2(x_2)$ für alle x_1, x_2 implizieren. Dies ist aber nur möglich, falls eine der beiden Verteilungsfunktionen degeneriert, das heißt von der Form $F(x) = \mathbf{1}_{\{x \geq x_0\}}$ ist. Dies ist aber durch die Voraussetzung dass die Varianzen größer Null sein müssen ausgeschlossen. Durch analoge Vorgehensweise folgt $\rho_{min} < 0$. \square

Beispiel: Sei $X \sim LN(0, 1)$ (LN entspricht der Lognormalverteilung) und $Y \sim LN(0, \sigma^2)$ mit $\sigma > 0$. Dann lassen sich ρ_{min} und ρ_{max} für diese Randverteilungen bestimmen und man erhält:

$$\rho_{min} = \frac{e^{-\sigma} - 1}{\sqrt{(e - 1)(e^{\sigma^2} - 1)}}, \quad \rho_{max} = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sqrt{(e - 1)(e^{\sigma^2} - 1)}}$$

In Abbildung 3.5 sieht man die maximale und minimale Korrelation in Abhängigkeit von σ . Dabei lässt sich erkennen, dass diese Grenzen der Korrelation gegen 0 gehen. Dies bedeutet aber, dass die Korrelation eines Zufallsvektors $(X, Y)'$ sehr nahe bei Null sein kann, obwohl die beiden Zufallsvariablen ko- oder kontramonoton sind. Daher kann man aufgrund von kleinen Korrelationen nicht auf schwache Abhängigkeit schließen. Dies ist natürlich ein erheblicher Nachteil für ein Abhängigkeitsmaß.

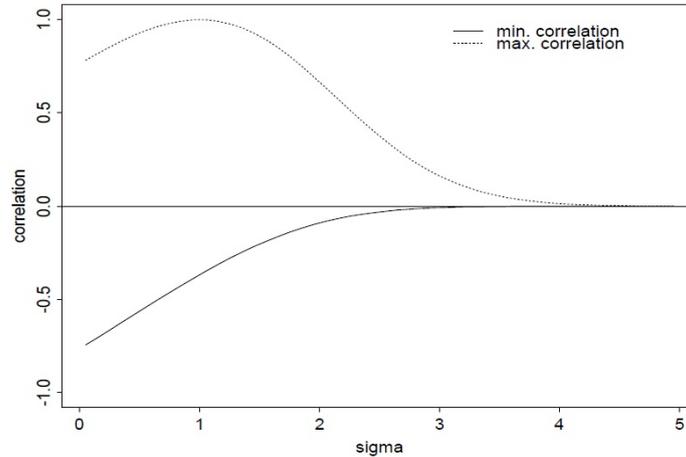


Abbildung 3.5: ρ_{min} und ρ_{max} in Abhängigkeit von σ (siehe Embrechts et al. [10], Seite 25).

3.5.2 Rangkorrelationskoeffizienten

Im vorangegangenen Abschnitt wurden einige Nachteile der linearen Korrelation in der nicht elliptischen Welt dargelegt. Als mögliche Alternative bieten sich die Rangkorrelationskoeffizienten an, die wie der lineare Korrelationskoeffizient skalare Abhängigkeitsmaße darstellen. Wie sich herausstellen wird sind die Rangkorrelationskoeffizienten nur von der Copula einer bivariaten Verteilung abhängig und nicht wie der lineare Korrelationskoeffizient von Copula und Randverteilungen. Eine wichtige Eigenschaft, die sich daraus ergibt ist die Invarianz unter strikt monoton wachsenden Transformationen. Die beiden wichtigsten Vertreter der Rangkorrelation sind Kendalls τ und Spearmans ρ . Im Anschluss werden die Begriffe der Konkordanz und Diskordanz eingeführt, auf welchen die beiden Rangkorrelationskoeffizienten aufgebaut sind.

Definition 3.8. Seien (x_1, x_2) und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zwei Punkte aus \mathbb{R}^2 . Dann nennt man diese

- a) konkordant, falls $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) > 0$, oder
- b) diskordant, falls $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) < 0$ gilt.

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

Sei nun ein Zufallsvektor $(X_1, X_2)'$ und eine unabhängige Kopie $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)'$ (ein zweiter Vektor mit gleicher Verteilung aber unabhängig vom ersten Vektor) gegeben. Falls X_2 die Tendenz aufweist mit X_1 zu steigen, dann erwartet man eine hohe Wahrscheinlichkeit der Konkordanz im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit der Diskordanz. Falls hingegen X_2 dazu tendiert mit steigendem X_1 zu fallen, so erwartet man das Gegenteil.

Kendalls τ ist nun einfach gegeben durch die Wahrscheinlichkeit der Konkordanz minus der Wahrscheinlichkeit der Diskordanz mit:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \mathbb{P}((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0). \quad (3.9)$$

Es ist leicht erkennbar, dass sich Kendalls τ auch als Erwartungswert schreiben lässt.

Definition 3.9. (Kendalls τ)

Sei $(X_1, X_2)'$ ein Zufallsvektor und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)'$ eine unabhängige Kopie, so ist Kendalls τ definiert durch:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \mathbb{E}[\text{sgn}((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2))]$$

Auch Spearman's ρ lässt in Bezug auf Konkordanz und Diskordanz beschreiben. Seien hierzu $(X_1, X_2)'$, $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)'$ und $(X_1^*, X_2^*)'$ drei unabhängige Kopien, dann lässt sich Spearman's ρ schreiben als:

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3(\mathbb{P}((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - X_2^*) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - X_2^*) < 0))$$

Spearman's ρ ist also gegeben durch die Wahrscheinlichkeit der Konkordanz minus der Wahrscheinlichkeit der Diskordanz der Zufallsvektoren (X_1, X_2) und (\tilde{X}_1, X_2^*) multipliziert mit dem Faktor 3 (siehe Embrechts et al. [9], Seite 13).

Neben dieser Darstellung lässt sich Spearman's ρ über den linearen Korrelationskoeffizienten definieren.

Definition 3.10. (Spearman's ρ)

Für zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit Randverteilungen F_1 und F_2 ist Spearman's ρ gegeben mit:

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)) \quad (3.10)$$

Bemerkung: Für stetige Randverteilungen F_1 und F_2 entspricht Spearman's ρ der linearen Korrelation der eindeutigen Copula.

Folgender Satz zeigt, dass für stetige Randverteilungen sowohl Kendalls τ , als auch Spearman's ρ nur von der eindeutigen Copula abhängen.

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

Satz 3.13. *Seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen mit stetigen Randverteilungen und eindeutiger Copula C . Dann sind die Rangkorrelationskoeffizienten gegeben mit:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \quad \text{und} \quad (3.11)$$

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2. \quad (3.12)$$

Beweis: Betrachtet man (3.9), so gilt:

$$\begin{aligned} \rho_\tau(X_1, X_2) &= \mathbb{P}((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) - (1 - \mathbb{P}((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0)) = \\ &= 2\mathbb{P}((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) - 1 \end{aligned}$$

Aufgrund der Austauschbarkeit der Paare (X_1, X_2) und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ erhält man:

$$\begin{aligned} \rho_\tau(X_1, X_2) &= 4\mathbb{P}(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2) - 1 = \\ &= 4\mathbb{E}[\mathbb{P}(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2 | \tilde{X}_1, \tilde{X}_2)] - 1 = \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2) dF(x_1, x_2) - 1 \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) dC(F_1(x_1), F_2(x_2)) - 1 \end{aligned}$$

Durch die Substitutionen $u_1 = F_1(x_1)$ und $u_2 = F_2(x_2)$ erhält man somit das gewünschte Resultat (3.11).

Für Spearmans ρ gilt laut (3.10):

$$\rho_S(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(F_1(X_1), F_2(X_2))}{\sqrt{\text{Var}(F_1(X_1))\text{Var}(F_2(X_2))}}$$

Da aber $F_i(X_i)$ ($i=1,2$) laut (3.1) gleichverteilt auf $(0,1)$ ist, ist die Varianz von $F_i(X_i)$ gleich $\frac{1}{12}$ und man erhält:

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12\text{Cov}(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$

Das Ergebnis folgt durch die Formel für die Kovarianz aus (3.8). □

Seien im Folgenden stetige Randverteilungen vorausgesetzt. Aufgrund dieses Satzes folgt, dass die Rangkorrelationskoeffizienten die Eigenschaft der Invarianz unter streng monoton wachsenden Transformationen der Copulas erben (siehe Satz 3.4). Dies ist einer der

großen Vorteile der Rangkorrelationskoeffizienten im Vergleich zur linearen Korrelation. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die Rangkorrelationskoeffizienten den Wert 1 genau dann annehmen, falls die beiden Zufallsvariablen komonoton sind, bzw. den Wert -1 genau dann annehmen, falls die Zufallsvariablen kontramonoton sind (Beweis siehe Embrechts et al. [10], Seite 16).

Aufgrund dieser Eigenschaft ist Trugschluss 2 aus vorigem Kapitel für stetige Randverteilungen nicht mehr relevant. Durch eine Kombination der Form:

$$F(x_1, x_2) = \lambda C_l(F_1(x_1), F_2(x_2)) + (1 - \lambda) C_u(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

folgt $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = (1 - 2\lambda)$ und somit lässt sich durch geeignete Wahl von λ aus $[0, 1]$ jeder beliebige Wert in $[-1, 1]$ erreichen (siehe Embrechts et al. [7], Seite 208). Trugschluss 1 bleibt hingegen auch für die beiden Rangkorrelationskoeffizienten erhalten. Ein Defizit der Rangkorrelationskoeffizienten besteht darin, dass man zwar für unabhängige Zufallsvariablen den Wert 0 erhält, die Umkehrung aber nicht gilt.

3.5.3 Tailabhängigkeitskoeffizient

Der Tailabhängigkeitskoeffizient misst, wie auch der Name schon vermuten lässt, die Abhängigkeit in den Verteilungsenden (Tails) einer bivariaten Verteilung und kann daher nicht mit den anderen Abhängigkeitsmaßen verglichen werden da er eben nur einen bestimmten Aspekt der Abhängigkeit misst. Es wird hierbei zwischen oberem und unterem Tailabhängigkeitskoeffizienten unterschieden. Der obere Tailabhängigkeitskoeffizient gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Zufallsvariable einen hohen Wert annimmt, bedingt dadurch, dass die zweite Zufallsvariable auch einen hohen Wert annimmt. Analog lässt sich der untere Tailabhängigkeitskoeffizient definieren.

Definition 3.11. *Seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen mit den jeweiligen Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 . Der Koeffizient der oberen Tailabhängigkeit wird beschrieben durch:*

$$\lambda_u := \lambda_u(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(X_2 > F_2^{q^-}(q) | X_1 > F_1^{q^-}(q)), \quad (3.13)$$

vorausgesetzt, dass die Grenze $\lambda_u \in [0, 1]$ existiert. Für $\lambda_u = 0$ werden X_1 und X_2 asymptotisch unabhängig, bzw. für $\lambda_u \in (0, 1]$ asymptotisch abhängig im oberen Verteilungsende genannt. Analog lässt sich der Koeffizient der unteren Tailabhängigkeit definieren mit:

$$\lambda_l := \lambda_l(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X_2 \leq F_2^{q^-}(q) | X_1 \leq F_1^{q^-}(q)), \quad (3.14)$$

vorausgesetzt, dass die Grenze $\lambda_l \in [0, 1]$ existiert.

Für stetige Zufallsvariablen lassen sich die Tailabhängigkeitskoeffizienten als Funktion der eindeutigen Copula C darstellen. Damit folgt wie auch schon bei den Rangkorrelationskoeffizienten die Invarianz unter streng monoton wachsenden Funktionen. Betrachtet man hierzu die bedingte Wahrscheinlichkeit aus (3.13), so erhält man durch einfache Umformungen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 > F_2^{\leftarrow}(q) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(q)) &= \frac{\mathbb{P}(X_2 > F_2^{\leftarrow}(q), X_1 > F_1^{\leftarrow}(q))}{\mathbb{P}(X_1 > F_1^{\leftarrow}(q))} = \\ &= \frac{1 - \mathbb{P}(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(q)) - \mathbb{P}(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q)) + \mathbb{P}(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(q), X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q))}{1 - \mathbb{P}(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q))} = \end{aligned}$$

Aus diesen Umformungen lässt sich erkennen, dass sich der obere Tailabhängigkeitskoeffizient in Abhängigkeit der eindeutigen Copula mit:

$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q} \quad (3.15)$$

schreiben lässt. Für den unteren Tailabhängigkeitskoeffizient gilt offensichtlich:

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}. \quad (3.16)$$

Bemerkung: Der obere Tailabhängigkeitskoeffizient lässt sich auch mit Hilfe der Überlebenscopula durch $\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\hat{C}(q, q)}{q}$ darstellen.

Beispiel: Für Copulas, die eine einfache geschlossene Form besitzen, wie im Fall der archimedischen Copula, ist die Berechnung der Tailabhängigkeitskoeffizienten weiters nicht schwierig.

Betrachten wir zuerst den oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten für die bivariate Gumbel-Copula mit $C_\theta(u_1, u_2) = \exp(-((-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta)^{\frac{1}{\theta}})$. Somit gilt $C_\theta(q, q) = q^{2\frac{1}{\theta}}$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C_\theta(q, q)}{1 - q} = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{2 - 2q + q^{2\frac{1}{\theta}} - 1}{1 - q} = 2 - \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{q^{2\frac{1}{\theta}} - 1}{q - 1} \stackrel{\text{Hospital}}{=} \\ &= 2 - \lim_{q \rightarrow 1^-} 2^{\frac{1}{\theta}} q^{2\frac{1}{\theta} - 1} = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Für den unteren Tailabhängigkeitskoeffizient gilt:

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C_\theta(q, q)}{q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{q^{2\frac{1}{\theta}}}{q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} q^{2\frac{1}{\theta} - 1} = 0$$

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

Die Gumbel-Copula hat also vorausgesetzt, dass $\theta > 1$ gilt eine obere Tailabhängigkeit, wobei die Stärke der Abhängigkeit für $\theta \rightarrow \infty$ gegen 1 geht. Die obere Tailabhängigkeit lässt sich in den Abbildungen 3.2 und 3.4 gut erkennen. Hingegen besitzt die Gumbel-Copula keine untere Tailabhängigkeit.

Die Clayton Copula mit $C_\theta(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$ besitzt keine obere, dafür eine untere Tailabhängigkeit (siehe Abb. 3.1), deren Stärke für $\theta \rightarrow \infty$ gegen 1 geht wie man im Folgenden sehen kann.

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C_\theta(q, q)}{1 - q} = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + (2q^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}}{1 - q} = \\ &= 2 - \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{(2q^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} - 1}{q - 1} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} 2 - \lim_{q \rightarrow 1^-} 2q^{-\theta-1} (2q^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} = 0\end{aligned}$$

Für die untere Tailabhängigkeit gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C_\theta(q, q)}{q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{(2q^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}}{q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{(q^{-\theta}(2 - q^\theta))^{-\frac{1}{\theta}}}{q} = \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} (2 - q^\theta)^{-\frac{1}{\theta}} = 2^{-\frac{1}{\theta}}\end{aligned}$$

Für den Fall von Gauß oder t-Copulas, wird ein etwas modifizierter Tailabhängigkeitskoeffizient betrachtet. Sei hierzu ein Paar von gleichverteilten Zufallsvariablen (U_1, U_2) mit Verteilung $C(u_1, u_2)$ gegeben. Aufgrund der radialen Symmetrie dieser Copulas folgt mit $C = \hat{C}$, dass oberer und unterer Tailabhängigkeitskoeffizient übereinstimmen und es ist daher ausreichend den unteren Koeffizienten zu betrachten. Dieser wird im Folgenden mit λ bezeichnet. Mithilfe der Austauschbarkeit ($C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$) dieser Copulas folgt (Herleitung siehe Embrechts et al. [7], Seite 210f):

$$\lambda = 2 \lim_{q \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(U_2 \leq q | U_1 = q)$$

Um den Tailabhängigkeitskoeffizienten der Gaußschen Copula C_ρ zu berechnen sei $(X_1, X_2)' := (\Phi^{-1}(U_1), \Phi^{-1}(U_2))'$, sodass der Vektor $(X_1, X_2)'$ eine bivariate Normalverteilung mit standardnormalverteilten Rändern mit Korrelationskoeffizienten ρ besitzt. Aus obiger Formel folgt:

$$\begin{aligned}\lambda &= 2 \lim_{q \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(\Phi^{-1}(U_2) \leq \Phi^{-1}(q) | \Phi^{-1}(U_1) = \Phi^{-1}(q)) = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(X_2 \leq x | X_1 = x)\end{aligned}$$

KAPITEL 3. COPULAS UND WEITERE ABHÄNGIGKEITSKONZEPTE

Da $X_2|X_1 = x \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)$ folgt:

$$\lambda = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi \left(\frac{x\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) = 0$$

Hieraus wird ersichtlich, dass die Gaußsche Copula, vorausgesetzt dass $\rho < 1$ gilt, weder eine obere noch eine untere Tailabhängigkeit besitzt und somit extreme Ereignisse unabhängig voneinander aufzutreten scheinen, falls man weit genug in den Tails geht. Dabei ist es egal wie groß der Korrelationskoeffizient ist.

Durch ähnliche Vorgehensweise lässt sich für die t-Copula zeigen, dass der Tailabhängigkeitskoeffizienten folgende Gestalt annimmt (siehe Embrechts et al. [7], Seite 211):

$$\lambda = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$$

Vorausgesetzt dass $\rho > -1$ gilt, besitzt die t-Copula sowohl untere als auch obere Tailabhängigkeit.

Kapitel 4

Tail-Asymptotik der Summe abhängiger heavy tailed verteilter Zufallsvariablen

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird das asymptotische Verhalten von

$$\mathbb{P}(S_n > x) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)$$

für großes x untersucht, wobei X_1, \dots, X_n Risiken mit heavy tailed Verteilungsfunktionen (siehe Definition 2.1) darstellen.

In der Literatur ist der Fall von unabhängigen Risiken bereits gut untersucht. Foss und Korshunov [13] zeigten für zwei unabhängige Risiken X_1, X_2 mit den jeweiligen Verteilungsfunktionen F_1, F_2 auf $[0, \infty)$, wobei eine der beiden Verteilungsfunktionen heavy tailed ist, dass folgendes gilt:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(x)}{\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)} = 1. \quad (4.1)$$

Für unabhängige, subexponentiell verteilte Risiken, die nicht notwendigerweise identisch verteilt sein müssen, gilt unter bestimmten Voraussetzungen (siehe Satz 2.6):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\sum_{k=1}^n \overline{F_k}(x)} = 1. \quad (4.2)$$

Die Voraussetzung der Unabhängigkeit ist aber für Anwendungen in der Praxis oft zu unrealistisch. In diesem Kapitel wird deshalb versucht, diese Voraussetzung aufzulockern. Seien hierzu X_1, \dots, X_n n abhängige Zufallsvariablen mit den jeweiligen heavy tailed Verteilungen F_1, \dots, F_n (siehe Definition 2.1), wobei die Abhängigkeit durch Copulas (siehe Definition 3.1) modelliert wird. Die Idee folgender Untersuchungen findet sich bei Kortschak [18], Seite 10ff wieder.

Im Unterkapitel 4.2 dieses Abschnitts wird untersucht, welche Bedingungen an die Abhängigkeitsstruktur und an die Randverteilungen der X_k gestellt werden müssen, so dass das asymptotische Verhalten des Tails von S_n gleich wie im unabhängigen Fall ist (siehe (4.1), (4.2)). Hierzu werden aktuelle Arbeiten herausgegriffen und wichtige Ergebnisse präsentiert. Zuerst wird auf den bivariaten Fall anhand der Arbeit von Albrecher et al. [1] eingegangen. Insbesondere ist bei diesen Untersuchungen der asymptotisch unabhängige Fall (vergleiche Definition 3.11) von Interesse. Ein zentrales Ergebnis wird hierbei anhand eines Beispiels numerisch untersucht. Anschließend werden einige Resultate des multivariaten Falls aus der Arbeit von Yuen und Yin [23] herausgegriffen und mit anderen aktuellen Arbeiten verglichen.

Weiters von Interesse ist der asymptotisch abhängige Fall (vergleiche Definition 3.11). Hierzu betrachten wir in Kapitel 4.3 den Fall von archimedischen Copulas (siehe Kapitel 3.4) aus der Arbeit von Alink et al. [2]. Hierbei lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen zeigen: Für n identisch verteilte abhängige Risiken X_1, \dots, X_n verhält sich die Wahrscheinlichkeit eines großen Gesamtschadens wie die Wahrscheinlichkeit eines großen Einzelschadens gemeinsam mit einem Proportionalitätsfaktor q . Zur Veranschaulichung wird ein numerisches Beispiel präsentiert. Es wird gezeigt, dass der Proportionalitätsfaktor nur von der Abhängigkeitsstärke und vom Tailverhalten der Einzelrisiken abhängt. Für $n = 2$ werden explizite Formeln für q angeführt.

4.2 Rückführung auf den unabhängigen Fall

4.2.1 Bivariater Fall

Die Grundlage dieses Abschnitts liefert das Paper „Tail Asymptotics for the sum of two heavy tailed dependent risks“ von Albrecher et al. [1].

Seien nun im Folgenden X_1, X_2 zwei positive heavy tailed Zufallsvariablen (siehe Definition 2.1) mit jeweils stetigen Randverteilungen F_1 und F_2 (im austauschbaren Fall wird die Verteilung mit F bezeichnet). Untersucht wird in diesem Abschnitt das asymptotische

Verhalten von

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \tag{4.3}$$

für x gegen Unendlich und für eine gegebene Abhängigkeitsstruktur zwischen X_1 und X_2 . Besonders von Interesse ist es, wenn das asymptotische Verhalten von (4.3) von derselben Größenordnung wie im unabhängigen Fall ist (siehe (2.10)).

Voraussetzung: $c = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_2}(x)}{\overline{F_1}(x)} \leq 1$ existiert.

Dies bedeutet, dass im Fall nicht identisch verteilter Risiken o.B.d.A X_1 den schwereren Tail hat als X_2 .

Die Idee der nun folgenden Untersuchungen ist jene: Intuitiv gibt es eine Wechselwirkung zwischen der Abhängigkeit in den Tails und der Schwere des Tails von F_1 . Dabei gilt: Umso schwerer der Tail von F_1 ist, desto stärker muss die Abhängigkeit in den Tails sein um das asymptotische Tailverhalten der Summe zu beeinflussen. Diese Idee soll nun im Folgenden untersucht werden.

Um die Tailabhängigkeit zu modellieren betrachten wir den oberen Tailabhängigkeitskoeffizient, der hier definiert ist mit (siehe auch (3.13)):

$$\lambda := \lim_{u \rightarrow 1} \mathbb{P}(F(X_2) > u | F(X_1) > u)$$

Für den Fall von nicht identischen Verteilungen F_1, F_2 empfiehlt es sich folgende Größe zu betrachten (siehe Albrecher et al. [1], Seite 109):

$$\hat{\lambda} := \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_2 > x | X_1 > x)$$

Im Gegensatz zu λ ist $\hat{\lambda}$ nicht nur eine Funktion der Copula sondern auch der Randverteilungen F_1, F_2 . Für den Fall von identischen Randverteilungen F_1 und F_2 stimmen die Koeffizienten jedoch überein.

Im Anschluss werden einfache Grenzen hergeleitet, die im Laufe dieses Abschnitts noch von Bedeutung sein werden.

Satz 4.1. a) $\mathbb{P}(\max(X_1, X_2) > x) \sim (1 + c - \hat{\lambda})\overline{F_1}(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_1 > x | \max(X_1, X_2) > x) = \frac{1}{1+c-\hat{\lambda}}$

Beweis:

a) Durch Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max(X_1, X_2) > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x) + \mathbb{P}(X_2 > x) - \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x) = \\ &= \overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x) - \overline{F}_1(x)\mathbb{P}(X_2 > x|X_1 > x)\end{aligned}$$

Division durch $\overline{F}_1(x)$ liefert:

$$\frac{\mathbb{P}(\max(X_1, X_2) > x)}{\overline{F}_1(x)} = 1 + \frac{\overline{F}_2(x)}{\overline{F}_1(x)} - \mathbb{P}(X_2 > x|X_1 > x)$$

Für x gegen Unendlich erhält man das gewünschte Resultat

b) ist eine direkte Konsequenz von a) □

Bemerkung: Da $\mathbb{P}(\max(X_1, X_2) > x) \leq \mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \leq \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) > \frac{x}{2})$ kann man aufgrund von Satz 4.1 (a) folgende Grenzen aufstellen:

$$1 + c - \hat{\lambda} \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\overline{F}_1(x)} \quad (4.4)$$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\overline{F}_1(\frac{x}{2})} \leq 1 + c - \hat{\lambda}$$

□

Um den Einfluss der Abhängigkeit zu betrachten und zu modellieren, wird eine Copula-Darstellung von (4.3) benützt. Sie ist der Ausgangspunkt für die nachfolgenden Untersuchungen.

Satz 4.2. (*Copula-Darstellung*)

Seien Zufallsvariablen X_1, X_2 abhängig bezüglich einer beliebigen absolut stetigen Copula Funktion $C(a, b)$ mit partieller Ableitung $c_a(a, b) := \frac{\partial C(a, b)}{\partial a}$. Dann gilt:

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\overline{F}_1(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1 - c_a(F_1(z), F_2(x - z))}{\overline{F}_1(x)} F_1(dz)$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\overline{F}_1(x)} &= \frac{1 - \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x)}{\overline{F}_1(x)} = \frac{\overline{F}_1(x) + F_1(x) - \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x)}{\overline{F}_1(x)} = \\ &= 1 + \int_0^x \frac{1 - \mathbb{P}(X_2 \leq x - z|X_1 = z)}{\overline{F}_1(x)} F_1(dz)\end{aligned}$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Für die bedingte Verteilung gilt nun: Seien auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen U, V abhängig bezüglich einer Copula C , so folgt (siehe Nelsen [20], Seite 41):

$$\mathbb{P}(V \leq v | U = u) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$$

Daher gilt:

$$\mathbb{P}(X_2 \leq x - z | X_1 = z) = \mathbb{P}(F_2(X_2) \leq F_2(x - z) | F_1(X_1) = F_1(z)) = c_a(F_1(z), F_2(x - z))$$

□

Gemeinsam mit dieser Copula-Darstellung lässt sich folgende Grenze herleiten (für einen Beweis siehe Albrecher et al. [1], Seite 114).

Satz 4.3. (ohne Beweis)

Seien $F_1 \in \mathcal{S}$ und F_2 absolut stetig und X_1 und X_2 abhängig bezüglich einer absolut stetigen Copulafunktion $C(a, b)$ mit $c_{ab}(a, b) < M$ für alle $(a, b) \in [0, 1] \times [b_0, 1]$, $b_0 < 1$. So gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = 1 + c \int_0^\infty c_{ab}(F_1(z), 1) F_2(dz).$$

Satz 4.4. Seien X_1 und X_2 abhängige Zufallsvariablen bezüglich einer absolut stetigen Copula $C(a, b)$ mit absolut stetigen Randverteilungen F_1 und F_2 . Existieren nun Konstanten $x_0 < 1$ und $M < \infty$ mit $c_{ab}(a, b) < M \forall (a, b) \in [x_0, 1]^2$, dann ist $\hat{\lambda} = 0$

Beweis: Seien X_1^* und X_2^* unabhängige Zufallsvariablen mit denselben Randverteilungen wie X_1 und X_2 . Aufgrund der Existenz der Copuladichte gilt laut Definition für $\hat{\lambda}$ folgendes:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_2 > x | X_1 > x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_2 > x, X_1 > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 > x)} \int_x^\infty \int_x^\infty c_{ab}(F_1(u_1), F_2(u_2)) F_1(du_1) F_2(du_2) \end{aligned}$$

Sei nun $\min(F_1(x), F_2(x)) > x_0$. Dann folgt laut Voraussetzung:

$$\hat{\lambda} \leq M \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 > x)} \int_x^\infty \int_x^\infty 1 F_1(du_1) F_2(du_2) =$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

$$= M \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_2^* > x, X_1^* > x)}{\mathbb{P}(X_1^* > x)} = M \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_2^* > x) = 0$$

□

Der nachstehende Satz lässt sich in Albrecher et al. [1], Seite 115 finden und ist ein zentrales Ergebnis und eine Verstärkung von Satz 4.3. In diesem geht man von zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 mit absolut stetigen Randverteilungen und einer absolut stetigen Copula als Abhängigkeitsstruktur aus. Ist die Dichtefunktion der Copula beschränkt in $[x_0, 1]^2$ für ein $x_0 < 1$ und gilt, dass X_1 subexponentiell verteilt ist (siehe Definition 2.4), so verhält sich (4.3) asymptotisch wie im unabhängigen Fall.

Satz 4.5. *Seien X_1 und X_2 abhängige Zufallsvariablen mit absolut stetigen Randverteilungen $F_1 \in \mathcal{S}$ und F_2 sodass c existiert und für die absolut stetige Copula $C(a, b)$ gilt, dass Konstanten $x_0 < 1$ und $M < \infty$ existieren sodass $c_{ab}(a, b) < M \forall (a, b) \in [x_0, 1]^2$, dann gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = 1 + c \quad (4.5)$$

Beweisidee: Da $\hat{\lambda} = 0$ (Satz 4.4) wissen wir aus (4.4), dass

$$1 + c \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)}$$

Es bleibt also zu zeigen dass der Limes Superior des oben stehenden Ausdrucks kleiner gleich $1+c$ ist. Sei hierfür $a(x)$ eine Funktion mit $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = \infty$ und mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 > x - a(x))}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = 1 \quad (4.6)$$

Betrachte nun:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) &\leq \mathbb{P}(X_1 > x - a(x) \cup X_2 > x - a(x)) + \\ &+ \mathbb{P}(X_1 + X_2 > x, \max(X_1, X_2) \leq x - a(x)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Mithilfe der Voraussetzungen $F_1 \in \mathcal{S}$ und dass die Copula Dichte für bestimmte Werte beschränkt ist erhält man:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x, \max(X_1, X_2) \leq x - a(x))}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = 0 \quad (4.8)$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Für den ersten Summand in der Ungleichung (4.7) erhalten wir mithilfe des Inklusions-Exklusionsprinzips:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 > x - a(x) \cup X_2 > x - a(x))}{\mathbb{P}(X_1 > x)} &\leq \\ &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 > x - a(x)) + \mathbb{P}(X_2 > x - a(x))}{\mathbb{P}(X_1 > x - a(x))} \frac{\mathbb{P}(X_1 > x - a(x))}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = \\ &\stackrel{((4.6), \text{Def. von } c)}{=} 1 + c \end{aligned} \tag{4.9}$$

Mithilfe von (4.8) und (4.9) erhält man nun die gewünschte obere Abschätzung □

Bemerkung: Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 > x) + \mathbb{P}(X_2 > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\mathbb{P}(X_2 > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = 1 + c$$

Da nun laut (4.5) $\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \sim (1 + c)\mathbb{P}(X_1 > x)$ und durch obige Bemerkung $\mathbb{P}(X_1 > x) + \mathbb{P}(X_2 > x) \sim (1 + c)\mathbb{P}(X_1 > x)$ gilt, erhält man

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \sim \mathbb{P}(X_1 > x) + \mathbb{P}(X_2 > x)$$

Dieses Ergebnis entspricht aber unserer Zielsetzung für subexponentielle Verteilungen in (4.2) (vergleiche (2.10)).

Sind X_1 und X_2 identisch verteilt, so erhält man ein $c = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} = 1$ und somit wie im unabhängig identischen Fall $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = 2$. (vergleiche (2.6))

Da aus den Forderungen aus Satz 4.5 $\hat{\lambda} = 0$ folgt, kann man die Frage stellen, ob für subexponentielle Verteilungen (siehe Definition 2.4) die asymptotische Unabhängigkeit eine hinreichende Bedingung für die Unempfindlichkeit der Tailasymptotik der Summe hinsichtlich der Abhängigkeit ist. Im Allgemeinen gilt dieser Tatbestand aber nicht. Dazu betrachten wir identisch verteilte X_1 und X_2 mit Randverteilungsfunktion $F \in \mathcal{S} \cap MDA(\Lambda)$ ¹ (hier enthalten sind unter anderem moderate heavy tailed Verteilungen wie Lognormalverteilung, Weibullverteilung (siehe Embrechts et al. [8], Seite 150)). Hingegen kann man für $F_1 \in \mathcal{R}$ (siehe Definition 2.3) zeigen, dass $\hat{\lambda} = 0$ eine hinreichende Bedingung ist. (betrachte Idee auf Seite 51)

Fallbeispiel: $F \in \mathcal{S} \cap MDA(\Lambda)$:

¹Maximaler Anziehungsbereich der Gumbelverteilung (siehe Embrechts et al. [8], Seite 138ff)

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Ein wichtiges Werkzeug für die anschließende Untersuchung ist die mittlere Überschussfunktion. Folgende Definition lässt sich in Embrechts et al. [8], Seite 294 finden.

Definition 4.1. (*mittlere Überschussfunktion*)

Sei X eine Zufallsvariable mit rechtem Endpunkt x_F , dann nennt man

$$e(x) = \mathbb{E}[X - x | X > x], \quad 0 \leq x < x_F$$

mittlere Überschussfunktion von F .

Einen Beweis zu nachstehendem Satz findet man in Albrecher et al. [1], Seite 116f.

Satz 4.6. (ohne Beweis)

Falls die mittlere Überschussfunktion „self-neglecting“ ist, das heißt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e(x + ae(x))}{e(x)} = 1 \quad \forall a \geq 0, \quad (4.10)$$

und falls:

$$\inf_{a > 0} \liminf_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_2 > ae(x) | X_1 > x) > 0, \quad (4.11)$$

dann gilt:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\bar{F}(x)} = \infty$$

Bemerkung: Die Gleichung (4.10) ist für alle subexponentiellen Verteilungen die im maximalen Anziehungsbereich der Gumbelverteilung liegen erfüllt. Es reicht also eine Copula zu finden, sodass Ungleichung (4.11) erfüllt ist. Sei hierfür $\delta(x) = C(x, x)$ der Diagonaleil einer Copula. Dann lässt sich zeigen, dass $C_\delta(a, b) = \min(a, b, \frac{1}{2}(\delta(a) + \delta(b)))$ auch eine Copula definiert mit Diagonaleil $\delta(x)$. Diese Copula wird auch Diagonal-Copula genannt. Folgender Satz gibt Aufschlüsse unter welchen Bedingungen (4.11) erfüllt ist.

Satz 4.7. Seien X_1, X_2 Zufallsvariablen mit einer Diagonalcopula $C_\delta(a, b)$ und Randverteilung $F \in \mathcal{S} \cap MDA(\Lambda)$. Falls $\forall a > 0$ ein $x_0 > 0$ existiert, sodass $\forall x > x_0$ gilt:

$$\min(F(x), F(ae(x)), \frac{1}{2}(\delta(F(x)) + \delta(F(ae(x)))))) = F(ae(x)) \quad (4.12)$$

so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_2 > ae(x) | X_1 > x) = 1, \quad \forall a > 0$$

und somit ist auch (4.11) erfüllt.

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Beweis: Aus der Darstellung der bedingten Verteilung mit

$$\mathbb{P}(X_2 > ae(x)|X_1 > x) = \frac{1 - F(x) - F(ae(x)) + C_\delta(F(x), F(ae(x)))}{1 - F(x)}$$

und der Tatsache, dass für $x > x_0$ laut Voraussetzung $C_\delta(F(x), F(ae(x))) = F(ae(x))$ folgt, schließt den Beweis. \square

In Albrecher et al. [1], Seite 117ff wird gezeigt, dass es einen Diagonalteil einer Copula gibt, der die Bedingungen aus Satz 4.7 erfüllt. Für diese Abhängigkeitsstruktur ist der obere Tailabhängigkeitskoeffizient gleich Null. Also lässt sich schließen (siehe Albrecher et al. [1], Seite 119):

Satz 4.8. *Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen mit Randverteilungsfunktion $F \in \mathcal{S} \cap MDA(\Lambda)$. Dann gibt es eine Copula für X_1 und X_2 mit $\lambda = 0$, sodass:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = \infty$$

Fallbeispiel: regulär variierende Randverteilungen

Satz 4.9. *Sei $\overline{F}_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ mit $\alpha > 0$, dann gilt:*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\overline{F}_1(x)} \leq \begin{cases} (\hat{\lambda}^{\frac{1}{\alpha+1}} + (1+c-2\hat{\lambda})^{\frac{1}{\alpha+1}})^{\alpha+1}, & 0 \leq \hat{\lambda} \leq \frac{1+c}{3} \\ 2^\alpha(1+c-\hat{\lambda}), & \frac{1+c}{3} < \hat{\lambda} \leq 1. \end{cases}$$

Beweis: Ähnlich wie im Beweis zu Satz 2.3 und mit dem Inklusions-Exklusionsprinzip kommt man für $0 < \delta < \frac{1}{2}$ auf folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) &\leq \overline{F}_1((1-\delta)x) + \overline{F}_2((1-\delta)x) + \mathbb{P}(X_1 > \delta x, X_2 > \delta x) - \\ &\quad - 2\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x, X_2 > (1-\delta)x) \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\overline{F}_1(x)} &\leq \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left((1-2\hat{\lambda}) \frac{\overline{F}_1((1-\delta)x)}{\overline{F}_1(x)} + \frac{\overline{F}_2((1-\delta)x)}{\overline{F}_1(x)} + \frac{\overline{F}_1(\delta x)}{\overline{F}_1(x)} \mathbb{P}(X_2 > \delta x | X_1 > \delta x) \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1 + c - 2\hat{\lambda}}{(1 - \delta)^\alpha} + \frac{\hat{\lambda}}{\delta^\alpha}$$

Für den definierten Bereich für δ wird diese obere Schranke minimiert für:

$$\delta^* = \begin{cases} \frac{1}{1 + (\frac{1+c}{\hat{\lambda}} - 2)^{\frac{1}{\alpha+1}}}, & 0 \leq \hat{\lambda} \leq \frac{1+c}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1+c}{3} < \hat{\lambda} \leq 1. \end{cases}$$

□

Für $\hat{\lambda} = 0$ erhält man $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\overline{F}_1(x)} \leq 1 + c$ und gemeinsam mit (4.4) erhält man folgendes Resultat, welches sich in Albrecher et al. [1], Seite 120 finden lässt.

Satz 4.10. Falls $\overline{F}_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ und $\hat{\lambda} = 0$, dann gilt:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \sim (1 + c)\overline{F}_1(x)$$

Beispiel: Betrachte nun im folgenden Satz 4.10 für identisch verteilte Risiken X_1 und X_2 . Als Verteilungsfunktion F wird die Pareto-Verteilung mit

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + x} \right)^\alpha, \quad \text{für } \kappa, \alpha > 0$$

gewählt. Laut Kapitel 2.3 gilt, dass $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ gilt. Als Abhängigkeitsstruktur wird die bivariate Gauß-Copula mit Parameter ρ gewählt, die laut Kapitel 3.5.3 keine Tailabhängigkeit besitzt. Damit sind die Voraussetzungen für Satz 4.10 erfüllt und man erhält (vergleiche mit Satz 2.4):

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \sim 2 \left(\frac{\kappa}{\kappa + x} \right)^\alpha \tag{4.13}$$

Dieses Ergebnis soll nun im Folgenden numerisch untersucht werden. Zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen einer bivariaten Verteilung mit Gauß-Copula und Pareto-Verteilung als Randverteilung werden die theoretischen Grundlagen aus Kapitel 4.4 genutzt (siehe Algorithmus 1 in Kapitel 4.4.1).

In den Abbildungen 4.1 bis 4.8 wird das Resultat (4.13) für verschiedene Parameterwerte α , κ und ρ betrachtet. Zusätzlich wird auch die Anzahl n der erzeugten Pseudozufallszahlen variiert. Die Abbildungen 4.3 und 4.4 stellen 2 Ausschnitte für ein und dasselbe Experiment dar. Alle anderen Abbildungen entsprechen jeweils Ausschnitten aus verschiedenen Experimenten.

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

In den folgenden Abbildungen sind jeweils 2 Kurven zu finden. Dabei entspricht die grüne Kurve der linken Seite und die blaue Kurve der rechten Seite von (4.13). Weist n einen kleinen Wert auf (siehe besonders Abbildungen 4.7 und 4.8), so sind mehr Sprünge der grünen Kurve zu erkennen. Begründet werden kann dies eben durch die geringe Zahl an Pseudozufallszahlen. Durch die Wahl von α und κ lässt sich die Gefährlichkeit der Randverteilungen steuern (siehe auch Bemerkung auf Seite 8). Mit Gefährlichkeit ist hier die größere Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines Extremereignisses gemeint.

Laut (4.13) wird für große Werte für x eine Annäherung der beiden Kurven erwartet. Eine Tendenz in diese Richtung lässt sich in den Abbildungen auch durchaus erkennen. Auffällig hierbei ist jedoch, dass die beiden Kurven schon für kleine Werte für x einander sehr nahe kommen (siehe z.B. Abbildungen 4.1, 4.3, 4.7, 4.8), was aus Ergebnis (4.13) nicht direkt hervorgeht.

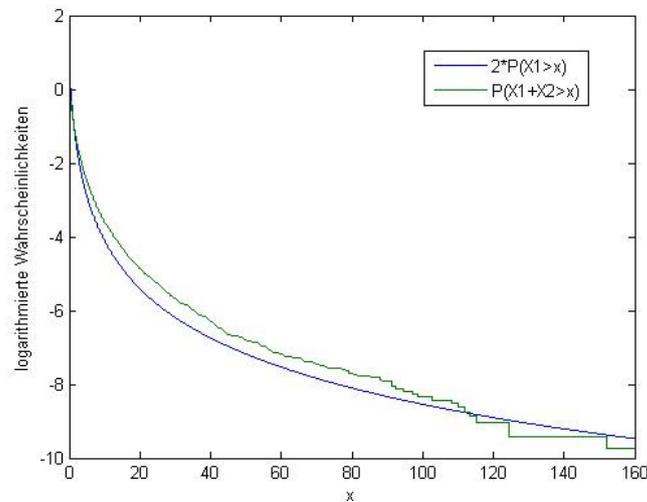


Abbildung 4.1: $n = 50000$, $\alpha = 2$, $\rho = 0.8$, $\kappa = 1$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED VERTEILTEN ZUFALLSVARIABLEN

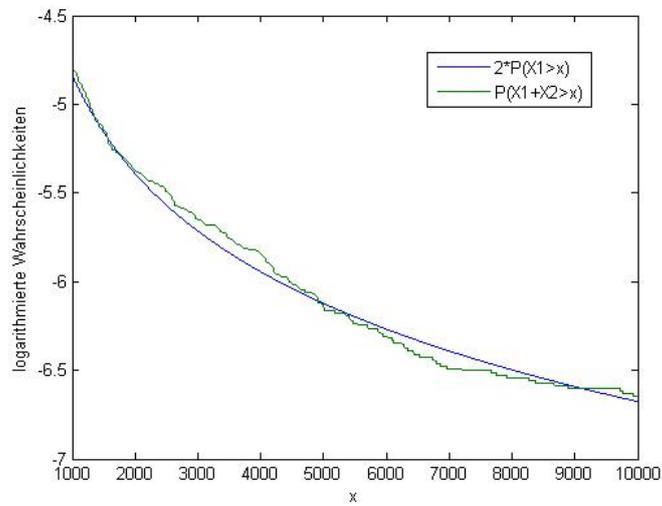


Abbildung 4.2: $n = 50000$, $\alpha = 0.8$, $\rho = 0.4$, $\kappa = 1$

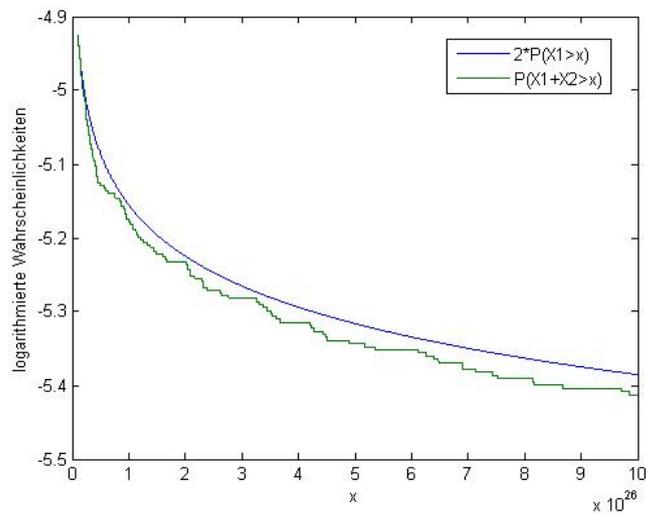


Abbildung 4.3: $n = 50000$, $\alpha = 0.1$, $\rho = -0.6$, $\kappa = 4$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

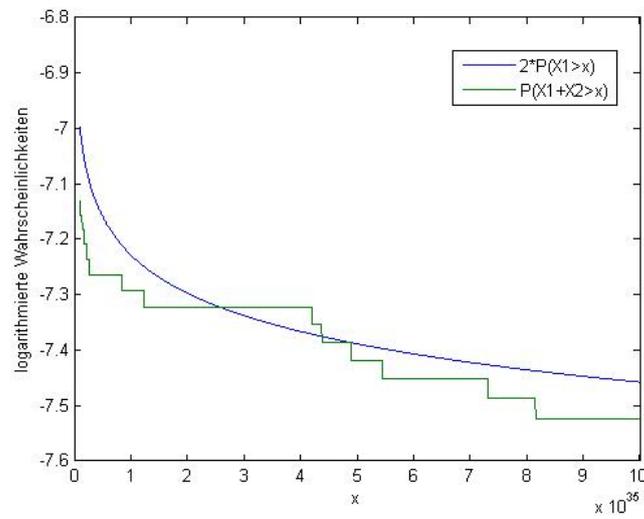


Abbildung 4.4: $n = 50000$, $\alpha = 0.1$, $\rho = -0.6$, $\kappa = 4$

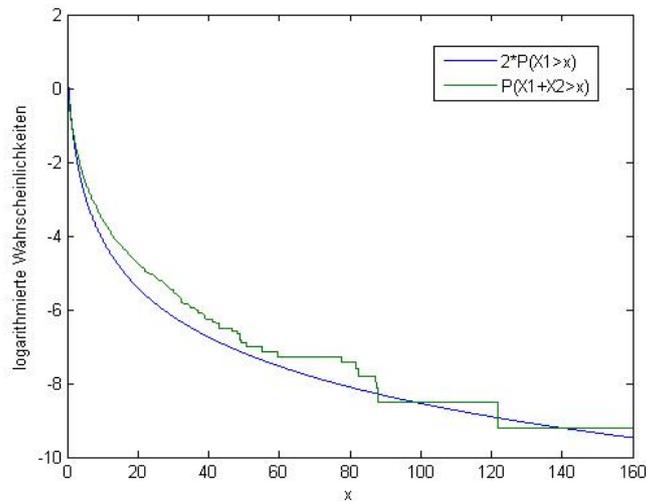


Abbildung 4.5: $n = 10000$, $\alpha = 2$, $\rho = 0.8$, $\kappa = 1$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

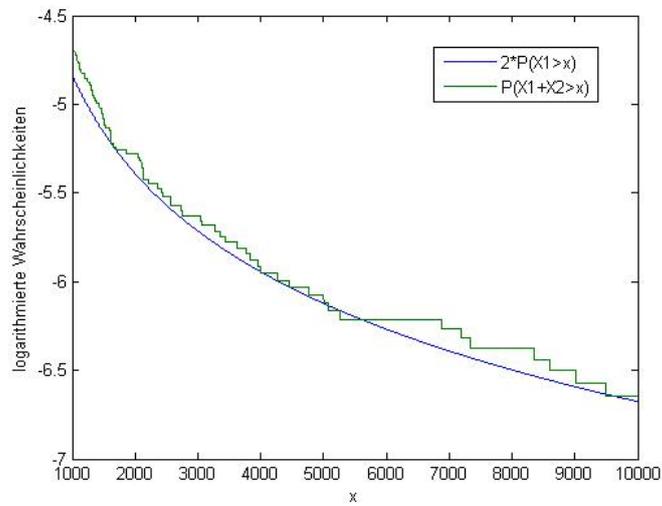


Abbildung 4.6: $n = 10000$, $\alpha = 0.8$, $\rho = 0.4$, $\kappa = 1$

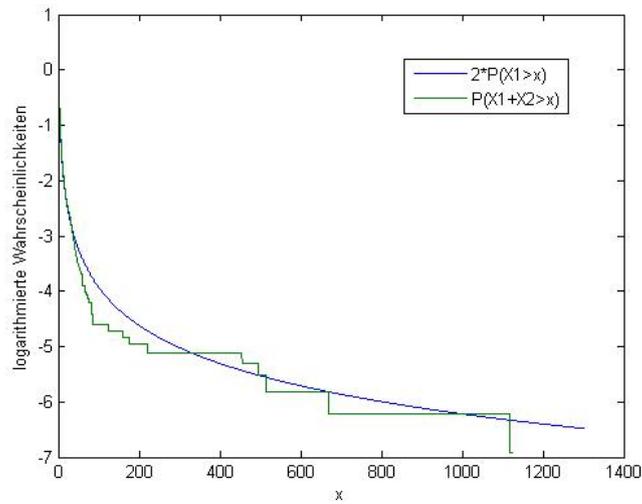


Abbildung 4.7: $n = 1000$, $\alpha = 1$, $\rho = -0.3$, $\kappa = 1$

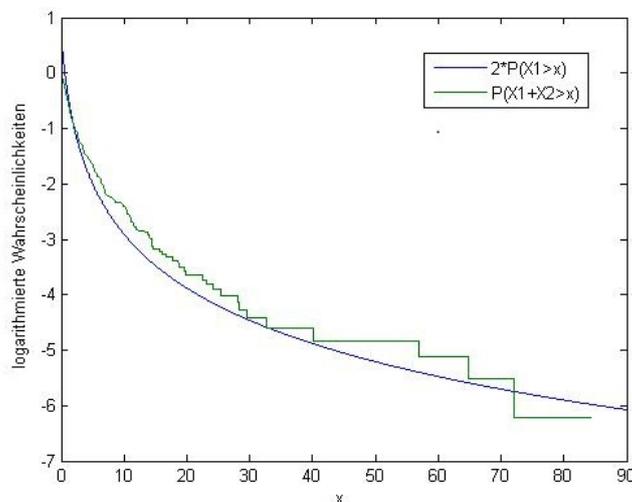


Abbildung 4.8: $n = 500$, $\alpha = 1.5$, $\rho = 0.5$, $\kappa = 1$

4.2.2 Multivariater Fall

Die Basis dieses Abschnitts liefert das Paper „Asymptotic results for tail probabilities of sums of dependent heavy tailed random variables“ von Yuen und Yin [23]. In diesem Abschnitt seien X_1, \dots, X_n abhängige heavy tailed Zufallsvariablen mit der jeweiligen Verteilungsfunktion F_1, \dots, F_n auf $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Es wird das asymptotische Verhalten der Tailwahrscheinlichkeit von

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{und} \quad S_{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} S_k$$

untersucht.

Um zu einigen Resultaten zu gelangen ist es nötig, sich auf wichtige Subklassen der heavy tailed Verteilungen zu beschränken. Die wichtigste Subklasse ist die Klasse der subexponentiellen Verteilungen (siehe Definition 2.4). Hierbei gilt, dass eine Verteilungsfunktion auf $(-\infty, \infty)$ zu \mathcal{S} gehört, falls $F^+(x) = F(x)\mathbf{1}_{x \geq 0}$ aus \mathcal{S} ist.

Weiters von Interesse ist die Klasse \mathcal{D} der Verteilungen mit dominatedly varying Tails und die Klasse \mathcal{L} der Verteilungen mit long Tails. Dabei gilt:

Eine Verteilungsfunktion F auf $(-\infty, \infty)$ gehört zu \mathcal{D} falls

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

für ein (oder äquivalent für alle) $0 < y < 1$ erfüllt ist.
Eine Verteilungsfunktion F gehört zu \mathcal{L} falls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$$

für ein (oder äquivalent für alle) y erfüllt ist.
Es lässt sich zeigen, dass $\mathcal{R} \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ gilt. (siehe Embrechts et al. [8], Seite 49ff)

Im Folgenden wird versucht Voraussetzungen in Bezug auf die Abhängigkeit der Zufallsvariablen zu setzen, um später mit diesen zu einigen Erkenntnissen zu gelangen. Dabei wird vor allem auf die asymptotische Abhängigkeit eingegangen.

V1. Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n erfüllen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_i > x, X_j > x)}{\overline{F}_i(x) + \overline{F}_j(x)} = 0$$

$\forall 1 \leq i \neq j \leq n$.

V2. Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n erfüllen:

$$\hat{\lambda}_{ij} = \lim_{x_i \wedge x_j \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_i| > x_i | X_j > x_j) = 0$$

$\forall 1 \leq i \neq j \leq n$, wobei $x_i \wedge x_j = \min(x_i, x_j)$.

V3. Es gibt positive Konstanten x_0 und c_0 sodass die Ungleichung

$$\mathbb{P}(X_i > x_i | X_j = x_j, j \in J) \leq c_0 \overline{F}_i(x_i)$$

$\forall 1 \leq i \leq n, \emptyset \neq J \subset \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}, x_i > x_0$ und $x_j > x_0$ mit $j \in J$ erfüllt ist.

Beispiel: Mithilfe einer bestimmten Copula, der so genannten Farlie Gumbel Morgenstern Copula (FGM) ist es möglich eine n-dimensionale Verteilungsfunktion zu konstruieren, sodass Voraussetzungen **V1-V3** erfüllt sind. Dabei nennt man eine n-dimensionale Verteilung FGM falls:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F(x_1), \dots, F(x_n)), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

wobei F_1, \dots, F_n die eindimensionalen Randverteilungen sind, und für die Copula gilt:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \prod_{k=1}^n u_k \left(1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (1 - u_i)(1 - u_j) \right), \quad (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n,$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

wobei a_{ij} reelle Zahlen sind die gewisse Voraussetzungen erfüllen, sodass $F(x_1, \dots, x_n)$ eine korrekte n-dimensionale Verteilung ist.

Besitzen nun X_1, \dots, X_n eine n-dimensionale FGM Verteilung, wobei die Randverteilungen $F_k (1 \leq k \leq n)$ absolut stetig sind und $F_k(-x) = o(\overline{F_k}(x))$ erfüllt ist, so kann man zeigen, dass die drei Voraussetzungen erfüllt sind (siehe Yuen und Yin [23], Seite 7).

Bemerkung:

a) Es gilt: **V3** \Rightarrow **V2** \Rightarrow **V1** (siehe Yuen und Yin [23], Seite 6f). Die Stärke der Voraussetzungen nimmt also mit steigender Nummer zu.

b) Die Abhängigkeitsvoraussetzung in **V1** wird auch paarweise quasi-asymptotische Unabhängigkeit genannt. Diese Voraussetzung wurde von Chen und Yuen [6] eingeführt. Eine der Hauptresultate dieses Papers bezieht sich auf eine Subklasse von \mathcal{S} , nämlich die Klasse \mathcal{C} von Verteilungen mit konsistent variierenden Tails, charakterisiert durch:

$$\lim_{y \searrow 1} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1, \text{ oder äquivalent, } \lim_{y \nearrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Hauptresultat: Seien X_1, \dots, X_n n paarweise quasi-asymptotisch unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit jeweiliger Verteilungsfunktion $F_1 \in \mathcal{C}, \dots, F_n \in \mathcal{C}$, so ist (4.2) erfüllt.

c) Die Voraussetzungen **V2** und **V3** finden sich in Geluk und Tang [14] wieder. Die zwei Hauptresultate dieses Papers sind folgende:

1. Seien X_1, \dots, X_n n reellwertige Zufallsvariablen mit jeweiliger Verteilungsfunktion F_1, \dots, F_n . Gilt nun $F_k \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ für alle $1 \leq k \leq n$ und **V2** ist erfüllt, so gilt (4.2).

2. Seien X_1, \dots, X_n n reellwertige Zufallsvariablen mit jeweiliger Verteilungsfunktion F_1, \dots, F_n . Gilt $F_k \in \mathcal{S}$ für alle $1 \leq k \leq n$, $F_i * F_j \in \mathcal{S}$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ und **V3** ist erfüllt, so gilt (4.2)

Für die folgende Betrachtung sei (X_1^*, \dots, X_n^*) eine unabhängige Kopie von (X_1, \dots, X_n) , in dem Sinn, dass (X_1^*, \dots, X_n^*) und (X_1, \dots, X_n) zwei unabhängige Zufallsvektoren mit denselben Randverteilungen sind und die Komponenten von (X_1^*, \dots, X_n^*) unabhängig sind.

Satz 4.11. *Seien X_1, \dots, X_n heavy tailed Zufallsvariablen mit den jeweiligen Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n . Unter **V3** gilt nun:*

a) falls $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{L}$, dann folgt:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\sum_{k=1}^n \overline{F_k}(x)} = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_{(n)} > x)}{\sum_{k=1}^n \overline{F_k}(x)} = 1; \tag{4.14}$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

b) falls zusätzlich $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k^{*+} > x\right) \sim \sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x)$ gilt, so folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_{(n)} > x)}{\sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x)} = 1 \quad (4.15)$$

Beweis: Anfangs gilt es für $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{L}$ und V2 (Erinnerung: V3 impliziert V2) Folgendes zu zeigen:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x)} \geq 1 \quad (4.16)$$

Aus der Definition der Klasse \mathcal{L} folgt die Existenz einer Folge $(a(x))$ mit $a(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$, $2a(x) \leq x$ und $\bar{F}_k(x + a(x)) \sim \bar{F}_k(x)$ für $k = 1, \dots, n$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n > x) &\geq \mathbb{P}(S_n > x, X_{(n)} > x + a(x)) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_n > x, X_k > x + a(x)) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(X_i > x + a(x), X_j > x + a(x)) \equiv I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

Mithilfe von Voraussetzung V2 erhält man $I_2(x) = o(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x))$.

Mit der Schreibweise $S_{n,k} = S_n - X_k$ für $1 \leq k \leq n$ folgt:

$$\begin{aligned} I_1(x) &\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_{n,k} > -a(x), X_k > x + a(x)) = \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > x + a(x)) - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_{n,k} \leq -a(x), X_k > x + a(x)). \end{aligned}$$

Aus V2 folgt:

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_{n,k} \leq -a(x), X_k > x + a(x)) = o\left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x + a(x))\right)$$

und damit:

$$I_1(x) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > x + a(x)) - o\left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x + a(x))\right) \sim \sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x).$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Somit ist (4.16) bewiesen. Es bleibt also für a) aus obigem Satz Folgendes zu zeigen

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x)} \leq 1 \quad (4.17)$$

Für Punkt b) bleibt unter der Zusatzvoraussetzung noch der Nachweis von

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x)} \leq 1 \quad (4.18)$$

Ein ausführlicher Beweis dieser zwei Punkte lässt sich in Yuen und Yin [23], Seite 9f finden. Die Ergebnisse (4.14) und (4.15) folgen nun durch (4.16),(4.17) und (4.18) und:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k^+ > x\right) \geq \mathbb{P}(S_{(n)} > x) \geq \mathbb{P}(S_n > x).$$

□

Bemerkung:

a) Vergleicht man Gleichung (4.14) mit (4.1) für $n=2$, so sieht man, dass unter den Voraussetzungen des oben stehenden Satzes das asymptotische Tailverhalten der Summe dem unabhängigen Verhalten entspricht.

b) Betrachtet man Satz 4.11 mit identisch verteilten X_1, \dots, X_n mit Verteilungsfunktion F . Falls $F \in \mathcal{S}$, so ist auch $F^+ \in \mathcal{S}$. Damit gilt aber, dass $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k^{*+} > x\right) \sim n\bar{F}(x)$ und somit folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\bar{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_{(n)} > x)}{\bar{F}(x)} = n$$

c) Da laut Geluk und Tang [14], Lemma 2.1 aus $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{S}$ und $F_i * F_j \in \mathcal{S}$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ folgt, dass $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k^{*+} > x\right) \sim \sum_{k=1}^n \bar{F}_k(x)$, sieht man, dass Satz 4.11 etwas allgemeiner ist als das Hauptresultat in Geluk und Tang [14] (siehe Theorem 3.2).

Konzentriert man sich auf die Klasse $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ anstatt auf die Klasse \mathcal{S} , so wird nur **V2** benötigt, eine schwächere Voraussetzung als **V3**. Der Beweis zu nachstehendem Satz lässt sich in Yuen und Yin [23], Seite 11f finden.

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Satz 4.12. (ohne Beweis)

Seien X_1, \dots, X_n n nichtnegative heavy tailed Zufallsvariablen mit der jeweiligen Verteilungsfunktion F_1, \dots, F_n . Gilt unter **V2** $F_k \in \mathcal{D}$ für $k = 1, \dots, n$, so folgt:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\sum_{k=1}^n \overline{F}_k(x)} = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_{(n)} > x)}{\sum_{k=1}^n \overline{F}_k(x)} = 1$$

Darüberhinaus gilt falls $F_k \in \mathcal{L}$ für $k = 1, \dots, n$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\sum_{k=1}^n \overline{F}_k(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_{(n)} > x)}{\sum_{k=1}^n \overline{F}_k(x)} = 1$$

Beispiel: Summe von abhängigen lognormal verteilten Zufallsvariablen mit Gaußscher Copula (siehe Asmussen und Rojas-Nandayapa [4]):

Sei $X_k = e^{Y_k}$, wobei der Zufallsvektor (Y_1, \dots, Y_n) eine multivariate Normalverteilung besitzt mit $\mathbb{E}[Y_k] = \mu_k$, $\text{Var}(Y_k) = \sigma_k^2$, $\text{Cov}(Y_k, Y_l) = \sigma_{kl}$ ($\sigma_{kk} = \sigma_k^2$) und $\text{Corr}(Y_k, Y_l) = \rho_{kl}$. Für $\rho_{kl} < 1$ ist der obere Tailabhängigkeitskoeffizient gleich 0 (siehe Kapitel 3.5.3).

Um das asymptotische Tailverhalten der Summe zu untersuchen definiert man folgende Größen:

$$\sigma^2 = \max_{k=1, \dots, n} \sigma_k^2, \quad \mu = \max_{k: \sigma_k^2 = \sigma^2} \mu_k, \quad m_n = \#\{k : \sigma_k^2 = \sigma^2, \mu_k = \mu\}$$

Das Hauptresultat ist nun folgendes (siehe Asmussen und Rojas-Nandayapa [4], Seite 2710):

Satz 4.13. Seien X_k , σ^2 , μ und m_n wie oben definiert und gilt, dass $\rho_{kl} < 1$ falls $\sigma_k^2 = \sigma_l^2$ ($k \neq l$), so folgt:

$$\mathbb{P}(S_n > x) \sim m_n \overline{F}_{\mu\sigma^2}(x) \tag{4.19}$$

Bemerkung:

a) Für zwei Verteilungsfunktionen F_k, F_l spricht man davon, dass F_k einen leichteren Tail hat als F_l , falls $\frac{\overline{F}_k(x)}{\overline{F}_l(x)} \rightarrow 0$, für $x \rightarrow \infty$.

In diesem Beispiel gilt für den Tail der X_k :

$$\overline{F}_{\mu_k, \sigma_k}(x) \sim \frac{\sigma_k}{\sqrt{2\pi} \log(x - \mu_k)} \exp \left\{ -\frac{(\log(x) - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2} \right\}$$

Mithilfe dieser Darstellung kann man zeigen, dass F_{μ_k, σ_k^2} einen leichteren Tail hat als F_{μ_l, σ_l^2} , falls entweder $\sigma_k^2 < \sigma_l^2$ oder $\sigma_k^2 = \sigma_l^2, \mu_k < \mu_l$ (siehe Asmussen und Rojas-Nandayapa [4], Seite 2710, Remark 2.).

Daher folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > x)}{\overline{F}_{\mu, \sigma}(x)} = m_n$$

Daraus lässt sich erkennen, dass (4.19) der Zielsetzung in (4.2) entspricht.

b) Dieses Beispiel ist eine direkte Konsequenz aus Satz 4.11. **V3** ist erfüllt, da für jedes $1 \leq i \leq n$ und für jedes $\emptyset \neq J \subset \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$ die bedingte Varianz von Y_i gegeben $Y_j = y_j$ für $j \in J$ kleiner ist als die dazugehörige unbedingte Varianz (siehe Geluk und Tang [14], Seite 876).

c) Im Beweis zu Satz 4.13 wird die Tailunabhängigkeit der Gaußschen Copula benutzt. Die Frage ist, ob der Satz für eine beliebige Copula mit Tailunabhängigkeit gültig bleibt. Da die Lognormalverteilung eine subexponentielle Verteilung aus dem maximalen Anziehungsbereich der Gumbelverteilung ist gilt laut Satz 4.8, dass es eine Copula mit $\lambda = 0$ gibt, sodass sich das asymptotische Tailverhalten der Summe nicht wie im unabhängigen Fall darstellen lässt. Ein Beispiel im bivariaten Fall hierfür lässt sich in Albrecher et al. [1] finden.

4.3 Abhängigkeit modelliert durch archimedische Copulas

Grundstein der nächsten Überlegungen stellt das Paper „Diversification of aggregate dependent risks“ von Alink et al. [2] dar. Dabei wird eine spezielle Art von Copulas betrachtet, die so genannten archimedischen Copulas, die bereits in Kapitel 3.4 für den bivariaten Fall Erwähnung fanden. Im Unterschied zum bivariaten Fall wird für den multivariaten Fall noch eine zusätzliche Bedingung an den Generator gestellt.

Definition 4.2. Sei $n \geq 2$ und $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine strikt fallende, konvexe Funktion mit $\phi(0) = \infty$ und $\phi(1) = 0$. Definiere für $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$:

$$C^\phi(x_1, \dots, x_n) := \phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i) \right)$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Die Funktion ϕ nennt man hierbei Generator von C^ϕ .

Für den Fall $n = 2$ ist C^ϕ mit dieser Definition automatisch eine Copula. Für den Fall $n \geq 3$ braucht man noch eine zusätzliche Voraussetzung. Falls für alle k und $x > 0$ die k -te Ableitung der Inversen von ϕ existiert und

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \phi^{-1}(x) \geq 0$$

gilt, so folgt, dass C^ϕ eine Verteilungsfunktion und somit eine Copula ist.

Eine der best studiertesten archimedischen Copulas ist die Clayton-Copula mit Parameter $\alpha > 0$. Sie wird generiert von $\phi(t) = t^{-\alpha} - 1$ und hat hier im multivariaten Fall die Form:

$$C^{Cl,\alpha}(x_1, \dots, x_n) := (x_1^{-\alpha} + \dots + x_n^{-\alpha} - n + 1)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Das Hauptresultat bezieht sich jetzt sowohl auf die Abhängigkeitsstruktur, als auch auf das Verhalten der Randverteilungen, je nachdem ob sie im maximalen Anziehungsbereich der Frechet-, der Gumbel- oder der Weibullverteilung liegen. Eine gute Einführung in die Extremwerttheorie lässt sich in Kapitel 3 von Embrechts et al. [8] finden. Der maximale Anziehungsbereich der Weibullverteilung besteht aus Verteilungen mit endlichem rechten Endpunkt. Daher sind diese Verteilungen für die Modellierung von extremen Ereignissen in Versicherungsanwendungen nicht besonders geeignet (siehe Embrechts et al. [8], Seite 136) und werden daher im Gegensatz zu Alink et al. [2] hier nicht betrachtet.

Bevor nun das Hauptresultat präsentiert wird, erfolgt eine etwas modifizierte Definition von Funktionen von regulärer Variation (siehe Alink et al. [2], Seite 80).

Definition 4.3. Man nennt eine Funktion f regulär variierend bei einem Punkt x^- (oder x^+) mit Index $\alpha \in \mathcal{R}$ falls für alle $t > 0$ folgendes gilt:

$$\lim_{s \nearrow x} \frac{f(st)}{f(s)} = t^\alpha \quad (\text{oder} \quad \lim_{s \searrow x} \frac{f(st)}{f(s)} = t^\alpha) \quad (4.20)$$

Folgender Satz lässt sich in Alink et al. [2], Seite 80 finden, und bildet das Hauptresultat dieses Papers. Es wird ein Beweis für den Frechet Fall angeführt. Der gesamte Beweis, einschließlich des Gumbel Falls lässt sich in Alink et al. [2], Seite 86ff finden. Sei c im Anschluss der linke Endpunkt der Verteilungsfunktion F .

Satz 4.14. Sei $n \geq 2$, $\alpha, \beta > 0$. Dann existieren Konstanten $q_n^F(\alpha, \beta)$ und $q_n^G(\alpha)$, sodass folgendes gilt:

Sei $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ein stochastischer Vektor mit reellwertigen identisch verteilten Komponenten mit stetiger Randverteilung $F(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x)$. Besitzt X eine archimedische Copula C^ϕ , wobei ϕ von regulärer Variation bei 0^+ mit Index $-\alpha$ ist, so folgt:

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

a) (Frechet Fall) Falls F von regulärer Variation bei $-\infty$ mit Index $-\beta$ ist, so gilt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u \right) = q_n^F(\alpha, \beta) \quad (4.21)$$

mit

$$q_n^F(\alpha, \beta) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\sum_i \frac{1}{x_i} \geq 1, x_1 \leq \frac{1}{\epsilon}} \frac{d^n}{dx_1 \dots dx_n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha\beta} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} dx_1 \dots dx_n. \quad (4.22)$$

b) (Gumbel Fall) Gilt für $t \in \mathbb{R}$ $\lim_{u \searrow c} \frac{F(u+ta(u))}{F(u)} = e^t$ für ein $c \geq -\infty$ und für eine positive Funktion $s \mapsto a(s)$, so folgt

$$\lim_{u \searrow c} \frac{1}{F(u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq nu \right) = q_n^G(\alpha) e^{-\frac{1}{n}} \quad (4.23)$$

mit

$$q_n^G(\alpha) = \int_{\sum_i x_i \leq 1} \frac{d^n}{dx_1 \dots dx_n} \left(\sum_{i=1}^n e^{-x_i\alpha} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} dx_1 \dots dx_n. \quad (4.24)$$

Um Satz 4.14 für den Frechet Fall zu beweisen wird zuerst ein Hilfssatz betrachtet.

Satz 4.15. Sei $n \geq 2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ein stochastischer Vektor mit archimedischer Copula C^ϕ , wobei ϕ von regulärer Variation bei 0^+ mit Index $-\alpha$ ist. Setze darüber voraus, dass die X_i dieselbe stetige Randverteilung $F(x)$ besitzen, die von regulärer Variation bei $-\infty$ mit Index $-\beta$ ist. Zusätzlich seien $\epsilon \in (0, 1)$, $x_1 \in (0, \frac{1}{\epsilon})$ und $x_2, \dots, x_n > 0$. Dann folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(X_i \leq -\frac{u}{x_i}, i = 1, \dots, n \mid X_1 \leq -\epsilon u \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha\beta} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \epsilon^\beta.$$

Beweis: Da F von regulärer Variation bei $-\infty$ ist gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{F(-\frac{1}{x_i}u)}{F(-u)} = \left(\frac{1}{x_i} \right)^{-\beta} = x_i^\beta$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Dann gibt es aber für alle $\delta > 0$ ein u_0 , sodass für alle i und $u > u_0$ gilt:

$$F\left(-\frac{u}{x_i}\right) \leq (x_i + \delta)^\beta F(-u) \quad (4.25)$$

Durch ähnliche Überlegung und der Tatsache, dass ϕ auch von regulärer Variation und $F(-u)$ so nahe bei 0 ist, kommt man auf folgende Abschätzungen:

$$(\epsilon + \delta)^{-\beta} F(-u) \leq F(-\epsilon u) \quad (4.26)$$

$$\phi((x_i + \delta)^\beta F(-u)) \geq ((x_i + \delta)^\beta + \delta)^{-\alpha} \phi(F(-u)) \quad (4.27)$$

$$\sum_{i=1}^n ((x_i + \delta)^\beta + \delta)^{-\alpha} \phi(F(-u)) \geq \phi\left(\left(\sum_{i=1}^n ((x_i + \delta)^\beta + \delta)^{-\alpha} - \delta\right)^{-\frac{1}{\alpha}} F(-u)\right) \quad (4.28)$$

Mithilfe dieser Abschätzungen und der Bedingung, dass ϕ und ϕ^{-1} strikt fallend sind, erhält man:

$$\begin{aligned} \limsup_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(X_i \leq -\frac{u}{x_i}, i = 1, \dots, n \mid X_1 \leq -\epsilon u\right) &= \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \phi(F(-\frac{u}{x_i}))\right)}{F(-\epsilon u)} \leq \\ &\stackrel{(4.25), (4.26)}{\leq} \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \phi((x_i + \delta)^\beta F(-u))\right)}{(\epsilon + \delta)^{-\beta} F(-u)} \\ &\stackrel{(4.27)}{\leq} \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n ((x_i + \delta)^\beta + \delta)^{-\alpha} \phi(F(-u))\right)}{(\epsilon + \delta)^{-\beta} F(-u)} \\ &\stackrel{(4.28)}{\leq} \frac{\left(\sum_{i=1}^n ((x_i + \delta)^\beta + \delta)^{-\alpha} - \delta\right)^{-\frac{1}{\alpha}}}{(\epsilon + \delta)^{-\beta}} \end{aligned}$$

Da diese Abschätzungen für alle $\delta > 0$ gelten bekommt man die obere Schranke. Die untere Schranke für den Limes Inferior kann man analog beweisen. \square

Beweis von Satz 4.14 (Frechet Fall): Für den Beweis wurde zusätzlich das Paper von Wüthrich [22] herangezogen, welches die Grundlage für Alink et al. [2] bildet.

Definiere

$$G_\epsilon^{\alpha, \beta}(x_1, \dots, x_n) := \left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha\beta}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \epsilon^\beta$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

$G_\epsilon^{\alpha,\beta}$ ist eine Verteilungsfunktion auf $(0, \frac{1}{\epsilon}) \times (0, \infty)^{n-1}$. Sei $g_\epsilon^{\alpha,\beta}$ die Dichtefunktion und definiere damit:

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &:= \epsilon^{-\beta} \int_{\sum_i \frac{1}{x_i} \geq 1, x_1 \leq \frac{1}{\epsilon}} g_\epsilon^{\alpha,\beta}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{\sum_i \frac{1}{x_i} \geq 1, x_1 \leq \frac{1}{\epsilon}} \frac{d^n}{dx_1 \dots dx_n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha\beta} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

Da $G(\epsilon)$ für $\epsilon \searrow 0$ wachsend ist, kann man $G(0) = \lim_{\epsilon \searrow 0} G(\epsilon) \leq \infty$ definieren.

Die grundlegende Idee ist es nun folgende Ausdrücke zu verbinden.

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u \mid X_1 \leq -\epsilon u \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_i \leq -\frac{u}{x_i}, i = 1, \dots, n \mid X_1 \leq -\epsilon u)$$

Um dies zu bewerkstelligen betrachtet man einen stochastischen Vektor $\mathbb{Y}^{(u)} = (Y_1^{(u)}, \dots, Y_n^{(u)})$ mit Verteilungsfunktion:

$$H(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}(X_i \leq -\frac{u}{x_i}, i = 1, \dots, n \mid X_1 \leq -\epsilon u)$$

Zusätzlich betrachtet man einen stochastischen Vektor $\mathbb{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ mit Verteilungsfunktion $G_\epsilon^{\alpha,\beta}(x_1, \dots, x_n)$. Aus Satz 4.15 folgt nun, dass $\mathbb{Y}^{(u)}$ in der Verteilung für $u \rightarrow \infty$ gegen \mathbb{Y} konvergiert. Mithilfe des continuous mapping Theorem (siehe Embrechts et al. [8], Seite 561) folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u \mid X_1 \leq -\epsilon u \right) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i^{(u)}} \geq 1 \right) = \\ &= \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i} \geq 1 \right) = \int_{\sum_i \frac{1}{x_i} \geq 1, x_1 \leq \frac{1}{\epsilon}} g_\epsilon^{\alpha,\beta}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \epsilon^\beta G(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Betrachten wir anfangs die untere Grenze für (4.21), so gilt mithilfe der regulären Variation von F :

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u \right) \geq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{F(-\epsilon u)}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u \mid X_1 \leq -\epsilon u \right) =$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

$$\stackrel{(4.29)}{=} \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{F(-\epsilon u)}{F(-u)} \epsilon^\beta G(\epsilon) = G(\epsilon)$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt wurde gilt:

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u \right) \geq G(0) \quad (4.30)$$

Für die obere Grenze sei $\epsilon < \frac{1}{n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u \right) = \\ & = \limsup_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u, X_1 \leq -\epsilon u \right) + \frac{1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u, X_1 > -\epsilon u \right) \right) \end{aligned}$$

Für den ersten Teil erhält man:

$$\begin{aligned} & \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u, X_1 \leq -\epsilon u \right) = \\ & = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{F(-\epsilon u)}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u \mid X_1 \leq -\epsilon u \right) = \epsilon^{-\beta} \epsilon^\beta G(\epsilon) = G(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Für den zweiten Teil betrachte:

$$\begin{aligned} & \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u, X_1 > -\epsilon u \right) \leq \\ & \leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{F(-u)} \sum_{i=2}^n \mathbb{P} \left(X_i \leq -\frac{u}{n}, X_1 > -\epsilon u \right) = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{n-1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(X_2 \leq -\frac{u}{n}, X_1 > -\epsilon u \right) \\ & = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{n-1}{F(-u)} \left(\mathbb{P} \left(X_2 \leq -\frac{u}{n} \right) - \mathbb{P} \left(X_2 \leq -\frac{u}{n}, X_1 \leq -\epsilon u \right) \right) = \\ & \stackrel{(\text{Satz 4.15})}{=} (n-1) \left(n^\beta - (n^{-\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta})^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Da $\epsilon \in (0, \frac{1}{n})$ lässt man $\epsilon \searrow 0$ gehen und erhält aus (4.31) und (4.32):

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u \right) \leq G(0). \quad (4.33)$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Aus (4.30) und (4.33) folgt nun:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{F(-u)} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -u \right) = G(0) = \lim_{\epsilon \searrow 0} G(\epsilon).$$

□

Bemerkung: Für $n = 2$ lässt sich zeigen, dass unter den Voraussetzungen von Satz 4.14 an den Generator der untere Tailabhängigkeitskoeffizient (siehe Definition 3.11) gleich $2^{-\frac{1}{\alpha}}$ und somit für $\alpha > 0$ strikt positiv ist. Da laut Bingham et al. [5] aus den Voraussetzungen folgt, dass ϕ^{-1} regulär variierend in ∞ mit Index $-\frac{1}{\alpha}$ ist gilt (siehe Juri und Wüthrich [17], Seite 416):

$$\lambda_l = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\phi^{-1}(2\phi(u))}{u} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}(2s)}{\phi^{-1}(s)} = 2^{-\frac{1}{\alpha}}$$

.)Proportionalitätsfaktor für n=2

Die Darstellungen des Proportionalitätsfaktors in (4.22) bzw. in (4.24) wirken sehr komplex. Für $n = 2$ lassen sich explizite Berechnungen angeben.

Für $\alpha \neq 0$ und $y \geq 0$ sei $f_\alpha(y) := (1 + y^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}-1}$. Für $\alpha > 0$ lässt sich zeigen, dass $f_\alpha(y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $[0, \infty)$ ist (für einen Beweis siehe Alink et al. [2], Seite 91f). Folgender Satz lässt sich in Alink et al. [2], Seite 81 finden.

Satz 4.16. (Frechet Fall) *Für $\alpha > 0$ und $Y_\alpha \sim f_\alpha$ gilt:*

$$q_2^F(\alpha, \beta) = 1 + \mathbb{E}[f_{-\frac{1}{\beta}}(Y_\alpha)] = 1 + \mathbb{E}[(1 + Y_\alpha^{-\frac{1}{\beta}})^{\beta-1}]. \quad (4.34)$$

Beweis: Sei (Z_1, Z_2) mit $G_\epsilon^{\alpha, \beta}$ verteilt (siehe Beweis zu Satz 4.14) und wähle $\epsilon < 1$, so gilt:

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \epsilon^{-\beta} \mathbb{P} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \geq 1 \right) = \epsilon^{-\beta} \left(\mathbb{P}(Z_1 \leq 1) + \mathbb{P} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \geq 1, 1 < Z_1 \leq \frac{1}{\epsilon} \right) \right) = \\ &= 1 + \epsilon^{-\beta} \mathbb{P} \left(Z_2 \leq \frac{Z_1}{Z_1 - 1}, 1 < Z_1 \leq \frac{1}{\epsilon} \right) \end{aligned}$$

Einsetzen der Dichten liefert:

$$G(\epsilon) = 1 + \beta \int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \left(x_1^{-\alpha\beta} + \left(\frac{x_1}{x_1 - 1} \right)^{-\alpha\beta} \right)^{-\frac{1}{\alpha}-1} x_1^{-\alpha\beta-1} dx_1 =$$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

$$= 1 + \beta \int_1^{1+\frac{1}{\epsilon}} x_1^{\beta-1} (1 + (x_1 - 1)^{\alpha\beta})^{-\frac{1}{\alpha}-1} dx_1$$

Da der Integrand von der Ordnung $x_1^{-(1+\alpha\beta)}$ für x_1 gegen unendlich ist, und dieser in \mathcal{L}^1 liegt, kann man ϵ gegen 0 gehen lassen und erhält somit:

$$q_2^F(\alpha, \beta) = G(0) = 1 + \beta \int_1^{\infty} x_1^{\beta-1} (1 + (x_1 - 1)^{\alpha\beta})^{-\frac{1}{\alpha}-1} dx_1$$

Durch zweimaliges Substituieren mit $x_1 - 1 \mapsto z$ und $z^\beta \mapsto y$ erhält man:

$$q_2^F(\alpha, \beta) = 1 + \int_0^{\infty} (1 + y^{-\frac{1}{\beta}})^{\beta-1} (1 + y^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}-1} dy.$$

Gemeinsam mit der Definition von $f_\alpha(y)$ erhält man nun das gewünschte Resultat:

$$q_2^F(\alpha, \beta) = 1 + \int_0^{\infty} f_{-\frac{1}{\beta}}(y) f_\alpha(y) dy = 1 + \mathbb{E}[f_{-\frac{1}{\beta}}(Y_\alpha)]$$

□

Bemerkung:

a) Für $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ lässt sich folgendes zeigen:

Mithilfe der binomischen Formel, der Darstellung der Betafunktion mit

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} t^{x-1} (1+t)^{-(x+y)} dt$$

und dem Zusammenhang $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ mit der Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ folgt:

$$q_2^F(\alpha, \beta) = 1 + \int_0^{\infty} (1 + y^{-\frac{1}{\beta}})^{\beta-1} (1 + y^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}-1} dy =$$

$$= 1 + \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{k} y^{-\frac{k}{\beta}} (1 + y^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}-1} dy$$

Substitution durch $y^\alpha \mapsto t$ liefert:

$$q_2^F(\alpha, \beta) = 1 + \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{k} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} t^{-\frac{k}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha}-1} (1+t)^{-\frac{1}{\alpha}-1} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{k} \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta-k}{\alpha\beta}\right) \Gamma\left(\frac{k}{\alpha\beta} + 1\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} = \\
 &= 1 + \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\beta}{k} \frac{\beta-k}{\alpha\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta-k}{\alpha\beta}\right) \Gamma\left(\frac{k}{\alpha\beta} + 1\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta-k}{\alpha\beta} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k}{\alpha\beta} + 1\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

Damit ist die Herleitung der Formel (2.9) aus Alink et al. [2], Seite 81 gezeigt. □

Der nächste Satz liefert die Formel für den Proportionalitätsfaktor im Gumbel Fall. Für einen Beweis siehe Alink et al. [2], Seite 93.

Satz 4.17. (ohne Beweis): (Gumbel Fall)

Für $\alpha > 0$ gilt:

$$q_2^G(\alpha) = e^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} = e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q_2^F(\alpha, \beta)}{2} - 1 \right). \tag{4.36}$$

Außerdem ist $q_2^G(\alpha)$ strikt steigend in α und es gilt:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} q_2^G(\alpha) = 0 \text{ und } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} q_2^G(\alpha) = e^{\frac{1}{2}}$$

Beispiel: Im Folgenden wird Satz 4.14 (Frechet Fall) für den bivariaten Fall betrachtet. Sei hierzu die Randverteilung durch eine modifizierte Pareto-Verteilung gegeben mit $F(x) = \left(\frac{\theta}{-x}\right)^\beta$ für $\theta, \beta > 0$ und $x \leq -\theta$ (siehe Wüthrich [22], Seite 83). Damit gilt offensichtlich, dass $F(x)$ regulär variierend bei $-\infty$ mit Index $-\beta$ ist. Als Abhängigkeitsstruktur wird die Clayton-Copula (siehe Kapitel 3.4) mit Generator $\phi(t) = t^{-\alpha} - 1$ gewählt. Es ist leicht ersichtlich, dass ϕ regulär variierend bei 0^+ mit Index $-\alpha$ ist. Damit sind aber die Voraussetzungen für Satz 4.14 erfüllt. Daraus folgt nun:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq -u) \sim q_2^F(\alpha, \beta) \left(\frac{\theta}{u}\right)^\beta \tag{4.37}$$

Dieses Ergebnis wird nun mithilfe von Kapitel 4.4 numerisch untersucht (siehe Algorithmus 2 in Kapitel 4.4.2).

In den Abbildungen 4.9 bis 4.16 wird das Resultat (4.37) für verschiedene Parameterwerte α , β und θ betrachtet. Zusätzlich wird auch die Anzahl n der erzeugten Pseudozufallszahlen variiert. Die Abbildungen 4.11 und 4.12 stellen 2 Ausschnitte für ein und dasselbe

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Experiment dar. Alle anderen Abbildungen entsprechen jeweils Ausschnitten aus verschiedenen Experimenten.

Wie auch schon in dem numerischen Beispiel des Kapitels 4.2.1 finden sich in den Abbildungen jeweils zwei Kurven, welche die linke und rechte Seite des Resultats (4.37) beschreiben. Die Anzahl der Sprünge der grünen Kurve nimmt für eine kleinere Anzahl von Pseudozufallszahlen zu (siehe Abbildungen 4.15, 4.16). Mit der Wahl des Parameters α lässt sich die Stärke der Abhängigkeit variieren (siehe Kapitel 3.4). Die Parameter θ und β bestimmen die Gefährlichkeit der Randverteilung.

Gemeinsam mit (4.37) erwartet man eine Annäherung der beiden Kurven für große Werte für u (und damit kleine Werte für $-u$). Vergleichsweise ähnlich zu den Abbildungen 4.1 bis 4.8 lässt sich erneut eine Tendenz in diese Richtung feststellen. Auch hier lässt sich erkennen, dass bereits für kleine Werte von u (und damit große Werte für $-u$) die beiden Kurven sehr nah beisammen liegen (siehe z.B. Abbildungen 4.9, 4.10, 4.14). Dies geht aber aus Ergebnis (4.37) nicht direkt hervor.

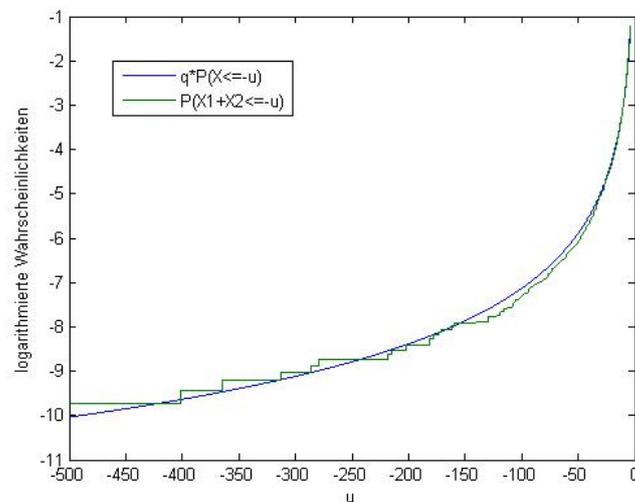


Abbildung 4.9: $n = 50000$, $\alpha = 1$, $\beta = 1.8$, $\theta = 1$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

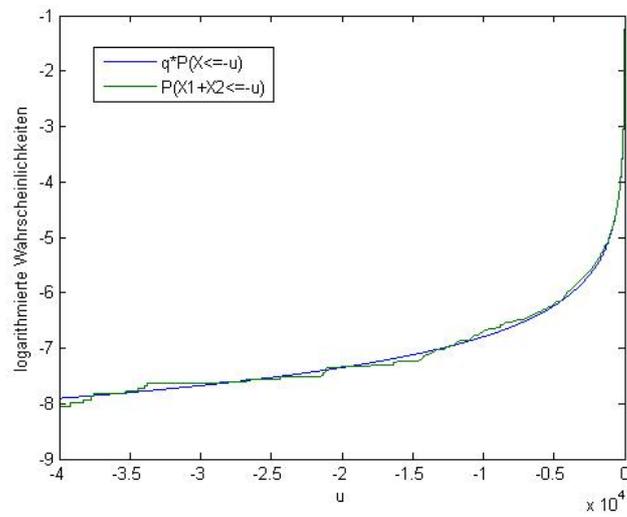


Abbildung 4.10: $n = 50000$, $\alpha = 2$, $\beta = 0.8$, $\theta = 1$

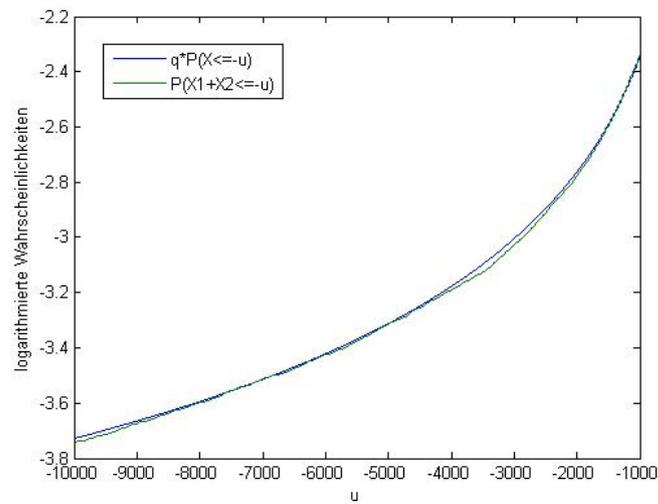


Abbildung 4.11: $n = 50000$, $\alpha = 100$, $\beta = 0.6$, $\theta = 10$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

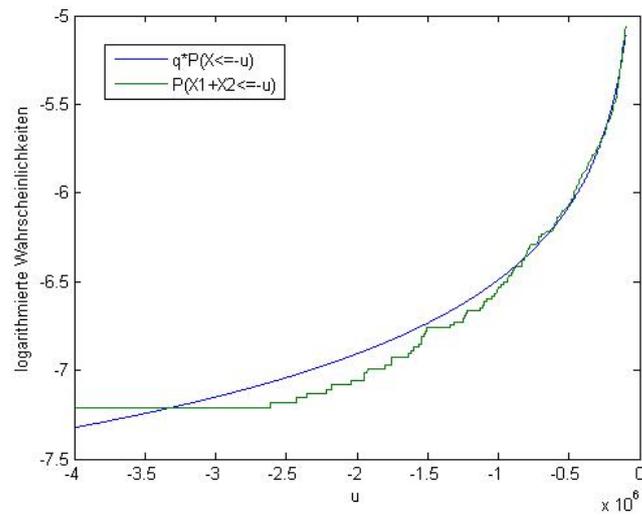


Abbildung 4.12: $n = 50000$, $\alpha = 100$, $\beta = 0.6$, $\theta = 10$

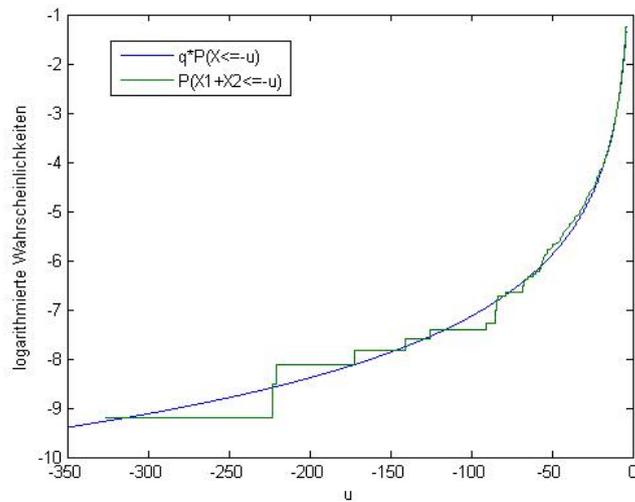


Abbildung 4.13: $n = 10000$, $\alpha = 1$, $\beta = 1.8$, $\theta = 1$

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

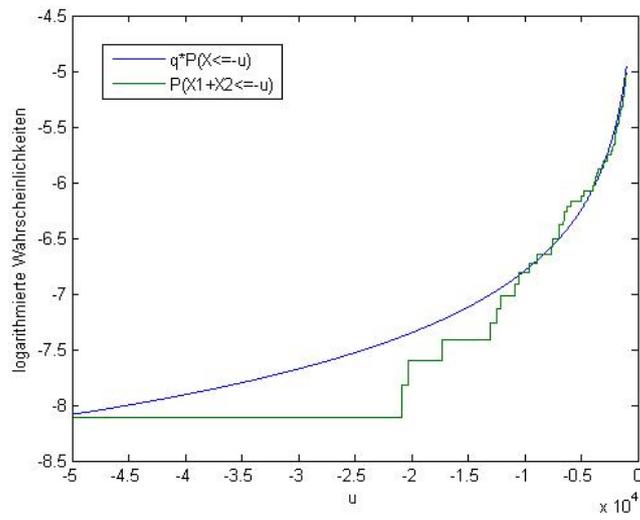


Abbildung 4.14: $n = 10000$, $\alpha = 2$, $\beta = 0.8$, $\theta = 1$

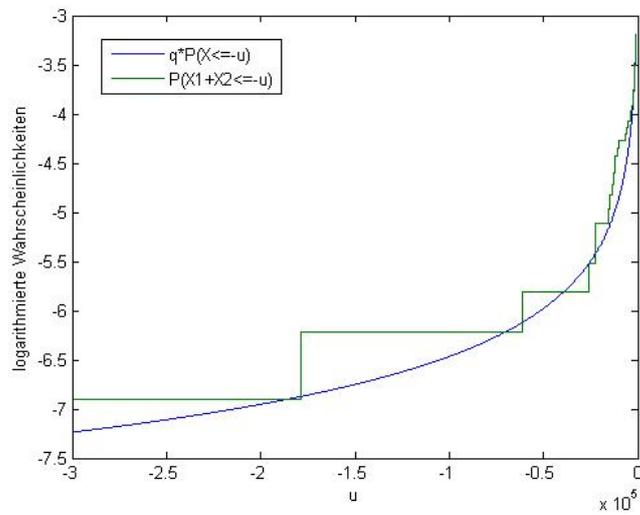


Abbildung 4.15: $n = 1000$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.7$, $\theta = 4$

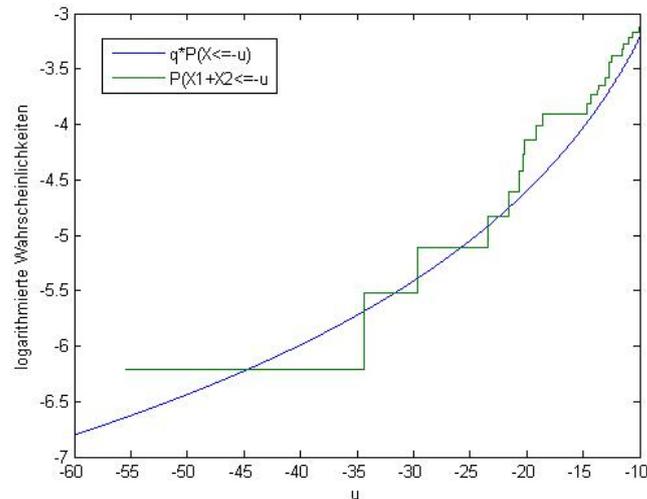


Abbildung 4.16: $n = 500$, $\alpha = 30$, $\beta = 2$, $\theta = 1$

4.4 Erzeugung abhängiger Pseudozufallszahlen

Im Anschluss werden zwei Algorithmen für die Erzeugung von abhängigen Pseudozufallszahlen angegeben. Grundlage hierbei ist Embrechts et al [7].

Die Umkehraussage aus Sklars Theorem enthält eine sehr starke Technik zur Erzeugung von multivariaten Verteilungen mit beliebigen Randverteilungen und Copulas. Falls man von einer Copula C und Randverteilungen F_1, \dots, F_d ausgeht, so ist

$$F(x) := C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

eine multivariate Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_d . Solche Arten von multivariaten Verteilungsfunktionen werden auch Meta-Copula Verteilungen genannt. Die Realisation von Beobachtungen solch einer Verteilung ist weiters nicht schwierig, falls Realisationen \mathbb{U} der zugehörigen Copula zur Verfügung stehen. Falls \mathbb{U} die Verteilungsfunktion C besitzt, so folgt, dass der Vektor $X := (F_1^{\leftarrow}(U_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(U_d))$ die multivariate Verteilung $C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ und Randverteilungen F_1, \dots, F_d hat.

Daher gilt es im Folgenden Algorithmen für die Erzeugung von Beobachtungen von bestimmten Copulatyphen anzugeben.

4.4.1 Simulation von Gauß-Copula

Folgender Algorithmus beschreibt die Erzeugung von Pseudozufallszahlen einer Gauß-Copula C_R^{Ga} (vergleiche Kapitel 3.3) und lässt sich in Embrechts et al. [7], Seite 193 finden.

Algorithmus 1.

- a) Führe die Cholesky-Zerlegung K der Korrelationsmatrix R durch.
- b) Erzeuge einen Vektor $Z = (Z_1, \dots, Z_n)'$ von unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen.
- c) Setze $X = KZ$.
- d) Gebe $U = (\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_n))'$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung beschreibt, zurück. U besitzt Verteilungsfunktion C_R^{Ga} .

4.4.2 Simulation von archimedischen Copulas

Nachstehende Überlegungen sind aus Embrechts et al. [9] für bivariate archimedische Copulas (siehe Kapitel 3.4) entnommen.

Satz 4.18. (ohne Beweis)

Falls $(U, V)'$ die Verteilungsfunktion C besitzt, wobei C die archimedische Copula generiert von ϕ darstellt, so ist die Funktion $K_C(t) = t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t^+)}$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $C(U, V)$. Hierbei bezeichnet $\phi'(t^+)$ die rechtsseitige Ableitung von ϕ an t .

Folgender Satz liefert die Grundlage für den Algorithmus im bivariaten Fall. Für einen Beweis siehe Embrechts et al. [9], Seite 33.

Satz 4.19. (ohne Beweis)

Unter den Hypothesen von Satz 4.18 gilt, dass die gemeinsame Verteilungsfunktion $H(s, t)$ der Zufallsvariablen $S = \phi(U)/(\phi(U) + \phi(V))$ und $T = C(U, V)$ gegeben ist mit:

$$H(s, t) = sK_C(t), \quad \forall (s, t) \in [0, 1]^2$$

Daraus folgt, dass S und T unabhängig sind und S auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist.

KAPITEL 4. TAIL-ASYMPTOTIK DER SUMME ABHÄNGIGER HEAVY TAILED
VERTEILTER ZUFALLSVARIABLEN

Algorithmus 2.

- a) Simuliere zwei unabhängige $U(0, 1)$ verteilte Zufallszahlen s und q
- b) Setze $t = K_C^{-1}(q)$, wobei K_C die Verteilungsfunktion von $C(U, V)$ darstellt.
- c) Gebe $u = \phi^{[-1]}(s\phi(t))$ und $v = \phi^{[-1]}((1 - s)\phi(t))$ zurück.

Beispiel: Betrachte die bivariate Clayton Copula mit Generator $\phi(t) = t^{-\alpha} - 1$ mit $\alpha > 0$. Um nun Pseudozufallszahlen einer solchen Copula zu erzeugen, gilt es Algorithmus 2. mit folgenden Funktionen anzuwenden:

$$\phi(t) = t^{-\alpha} - 1, \quad \phi'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1}, \quad K_C(t) = t - \frac{t^{\alpha+1} - t}{\alpha}$$

Literaturverzeichnis

- [1] Albrecher, H., Asmussen, S. and Kortschak, D. (2006): Tail asymptotics for the sum of two heavy tailed dependent risks, *Extremes*, Vol. 9, pp. 107-130
- [2] Alink, S., Löwe, M. and Wüthrich, M. (2004): Diversification of aggregate dependent risks, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 35, pp. 77-95
- [3] Asmussen, S. (2000): *Ruin Probabilities - Advanced series on statistical science and applied probability vol. 2.*, World Scientific Publishing, Singapore
- [4] Asmussen, S. and Rojas-Nandayapa, L. (2008): Asymptotics of sums of lognormal random variables with Gaussian Copula, *Stat. Probab. Lett.*, Vol. 78, pp. 2709-2714
- [5] Bingham, N.H., Goldie, C.M. and Teugels, J.L. (1987): *Regular Variation*, Cambridge University Press, Cambridge
- [6] Chen, Y. and Yuen, K.C. (2009): Sums of pairwise quasi-asymptotically independent random variables with consistent variation, *Stochastic Models*, Vol. 25, pp. 76-89
- [7] Embrechts, P., Frey, R. and McNeil, Alexander J. (2005): *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, New Jersey
- [8] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch T. (1997): *Modelling extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin
- [9] Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, Alexander J. (2001): *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, Department of Mathematics ETHZ, Zürich. Verfügbar in:
http://www.ma.hw.ac.uk/~mcneil/pub_list.html [abgerufen am 11.10.2011]
- [10] Embrechts, P., McNeil, Alexander J. and Straumann, D. (1998): *Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls*. Verfügbar in:
http://www.ma.hw.ac.uk/~mcneil/pub_list.html [abgerufen am 11.10.2011]

- [11] Fang, K.-T., Kotz, S. and Ng, K.-W. (1990): Symmetric Multivariate and Related Distributions, Chapman and Hall, London
- [12] Feller, W. (1970): An Introduction to Probability Theory and Its Applications Volume 2, John Wiley & Sons, New York
- [13] Foss, S. and Korshunov, D. (2007): Lower limits and equivalences for convolution tails, The Annals of Probability, Vol. 35, No. 1, pp. 366-383
- [14] Geluk, J. and Tang, Q. (2009): Asymptotic tail probabilities of Sums of Dependent Subexponential Random Variables, J. Theoret. Probab., Vol. 22, pp. 871-882
- [15] Grandits, P. und Zwirchmayr, A. (2008): Sachversicherungsmathematik, Technische Universität Wien
- [16] Hipp, C. (1999): Risikotheorie 1, Lehrstuhl für Versicherungswissenschaft an der TH Karlsruhe. Verfügbar in:
<http://www.higherintellect.info/texts/math/Risk%20Theory%20I%20%28German%29.pdf> [abgerufen am 01.09.2011]
- [17] Juri, A. and Wüthrich, M. (2002): Copula convergence theorems for tail events, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 30, pp 405-420
- [18] Kortschak, D. (2008): Asymptotic properties of compound distribution tails and dependence, Dissertation, Technische Universität Graz
- [19] Mikosch, T. (2009): Non-Life Insurance Mathematics, Springer, Berlin
- [20] Nelsen, R. (2006): An Introduction to Copulas (second edition), Springer, New York
- [21] Riedle, M. (2005): Script zu Risikotheorie, Humboldt-Universität zu Berlin. Verfügbar in:
<http://www.mathematik.hu-berlin.de/~riedle/research/scriptrisiko.pdf> [abgerufen am 06.09.2011]
- [22] Wüthrich, M. (2003): Asymptotic Value-at-Risk Estimates for sums of dependent random variables, Astin Bulletin, Vol. 33, No. 1, pp. 75-92
- [23] Yuen, K.C. and Yin, C. (2011): Asymptotic results for tail probabilities of sums of dependent heavy tailed random variables. Verfügbar in:
http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1101/1101.4056v1.pdf [abgerufen am 10.10.2011]