Portfoliotheorie

Mathias Lechner

19. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

Grundlegende Annahmen

Grundlegende Annahmen

- Erwartungswerte und Kovarianzen sind gegeben
- Es können Stückzahlen $x \in \mathbb{R}$ gekauft werden
- Die Investoren entscheiden nur anhand von Risiko und Rendite
- Investoren scheuen das Risiko, entscheiden also rational
- Kosten werden nicht beachtet

Risiko und Rendite

Risiko und Rendite

- Wert des künftigen Preises eines Vermögenswerts wobei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist

$$S(1) : \Omega \to [0, \infty)$$
$$S(1, \omega_i) : \Omega \to [0, \infty) \qquad \text{falls } \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$$

- Rendite K eines Investments S

$$K = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}$$
$$\mu := \mathbb{E}(K) = \frac{\mathbb{E}(S(1)) - S(0)}{S(0)} \dots \text{erwartete Rendite}$$
$$\sigma^2 := Var(K) = Var\left(\frac{S(1) - S(0)}{S(0)}\right) = \frac{Var(S(1))}{S(0)^2} \dots \text{Risiko}^2$$
$$\rho_{ij} := Cor(K_i, K_j) = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

- Vermögenswert S_1 dominiert S_2, wenn

$$\mu_1 \geq \mu_2 \quad und \quad \sigma_1 \leq \sigma_2$$

Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Ein Beispiel: Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $S_1(0) = 200$, $S_2(0) = 300$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}$. Weiters seien die Zukunftswerte S_1 und S_2 bekannt:

$$\begin{aligned} S_1(1,\omega_1) &= 260 & \qquad S_2(1,\omega_1) &= 270 \\ S_1(1,\omega_2) &= 180 & \qquad S_2(1,\omega_2) &= 360 \end{aligned}$$

$$V := S_1 + S_2$$

Wir betrachten nun die erwarteten Renditen und Standardabweichungen.

$$\mu_1 := \frac{\frac{1}{2}(260 + 180) - 200}{200} = \frac{220 - 200}{200} = 10\%$$

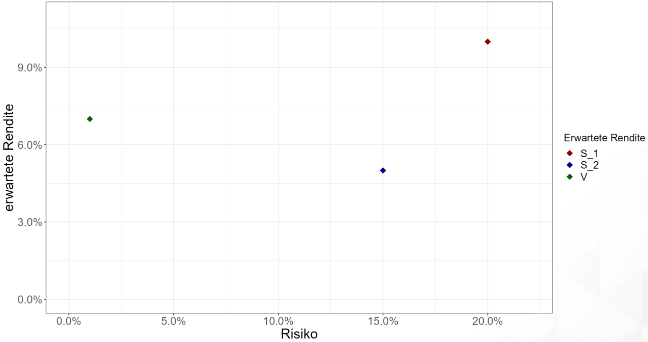
$$\sigma_1 := \sqrt{\frac{\frac{1}{2}((260 - 220)^2 + (180 - 220)^2)}{200^2}} = 20\%$$

Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Wir bekommen somit:

$$\mu_1 = 10\% \qquad \mu_2 = 5\% \qquad \mu_V = 7\%$$
$$\sigma_1 = 20\% \qquad \sigma_2 = 15\% \qquad \sigma_V = 1\%$$

Wir sehen also, dass durch Diversifizierung das Risiko drastisch verringert werden kann, während die erwartete Rendite relativ hoch bleibt.



Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Satz

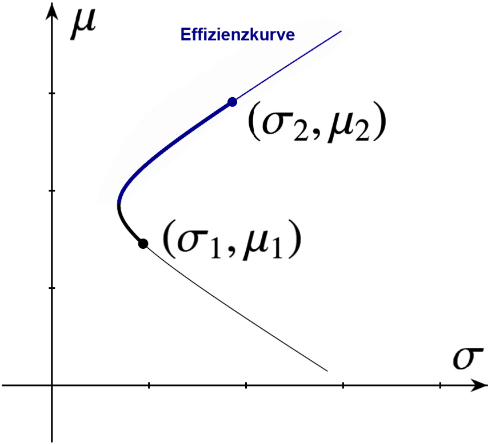
Erwartungswert und Varianz des Portfolios sind folgendermaßen gegeben:

$$\mu_w = \mathbb{E}(K_w) = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$$
$$\sigma_w^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12}$$

Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Satz

Wenn $\mu_1 \neq \mu_2$ *und* $\rho_{12} \in (-1, 1)$, *so befinden sich alle Paare* (σ, μ) *auf einer Hyperbel.*

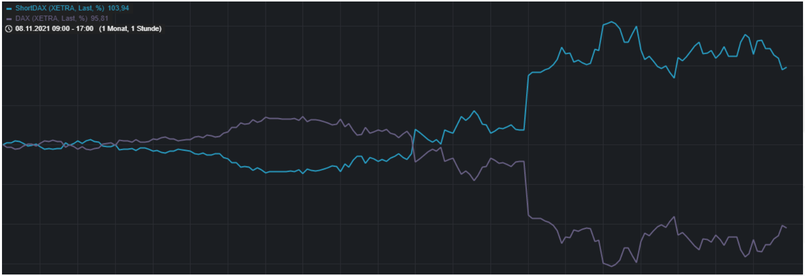


Lemma

Falls $\rho_{12} \in \{-1, 1\}$ *und* $\sigma_1 \neq \sigma_2$*, so können wir das Risiko* σ_w *auf 0 minimieren.*

Da $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$, gilt im Fall $\rho_{12} = -1$, dass $w, (1 - w) \in [0, 1]$, womit wir das Risiko ohne Leerverkäufe minimieren können.

Portfolios mit zwei Vermögenswerten



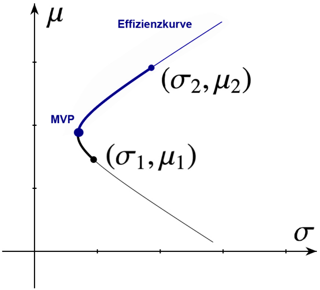
Quelle: www.Guidants.com

Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Satz

Falls Leerverkäufe erlaubt sind, also $w \in \mathbb{R}$ und entweder $\rho_{12} \neq 1$ oder $\sigma_1 \neq \sigma_2$, dann hat das Portfolio mit der minimalen Varianz (MVP) die Gewichtung $w_{min} = (w_1, w_2)$ wobei:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}, \qquad w_2 = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$$



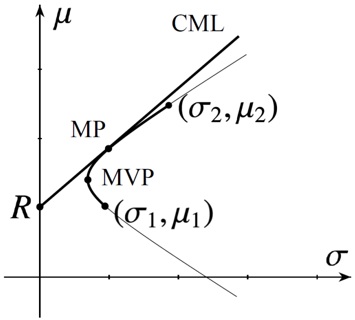
Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Aber was, wenn keine Leerverkäufe erlaubt sind? Wieder möchten wir σ_w^2 minimieren. Wir können analog zu vorherigem Satz vorgehen und $w_{min} = (w, 1 - w)$ bestimmen, wobei wir natürlich bei $w_1 < 0$ oder $w_2 < 0$ aufpassen müssen:

$$w = \begin{cases} 0 & \text{,falls } w_1 < 0 \\ w_1 & \text{,falls } w_1 \in [0, 1] \\ 1 & \text{,sonst} \end{cases}$$

Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Wir betrachten nun den Fall, dass neben den erwarteten Renditen noch zusätzlich eine risikofreie fixe Rendite R existiert.Wir suchen nun jene Gewichtung, sodass wir das effizienteste Portfolio, also jenes welches unabhängig von der Risiko-Rendite-Präferenz eines Anlegers bevorzugt werden sollte.



Die erwartete Rendite ist gegeben durch: $\mu = R + \frac{\mu_m - R}{\sigma_m}\sigma$

Satz

Die Gewichtung des Marktportfolio ist gegeben durch $m = (w, 1 - w)$ *mit:*

$$w = \frac{\sigma_2^2(\mu_1 - R) - \sigma_{12}(\mu_2 - R)}{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - R(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_{12}(\mu_1 + \mu_2 - 2R)}$$

$$(1 - w) = \frac{\sigma_1^2(\mu_2 - R) - \sigma_{12}(\mu_1 - R)}{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - R(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_{12}(\mu_1 + \mu_2 - 2R)}$$

Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Ein Beispiel:
Wir betrachten zwei Aktien und einen risikofreien Zins mit folgenden Parametern:

$$\mu_1 = 10\% \qquad \mu_2 = 20\% \qquad \rho_{12} = -0.5$$
$$\sigma_1 = 10\% \qquad \sigma_2 = 30\% \qquad R = 5\%$$

Wir stellen uns nun die Frage, wie wir ein Kapital in diese Vermögenswerte investieren sollen, falls wir das MVP oder das MP haben möchten.

Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Wir möchten zuerst die Gewichtung des Portfolios mit dem geringsten Risiko bestimmen, wir wissen schon, dass diese folgendermaßen gegeben ist $w = (w_1, w_2)$ wobei:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} = 0.8077, \quad w_2 = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} = 0.1923$$

damit bekommen wir

$$\mu_w = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 = 11.92\%$$
$$\sigma_w = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12}} = 7.21\%$$

Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Falls wir nun das effizienteste Portfolio haben möchten so wissen wir nach obigem Satz, dass das Marktportfolio folgende Gewichtung hat $m = (w_1, w_2)$ wobei:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2(\mu_1 - R) - \sigma_{12}(\mu_2 - R)}{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - R(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_{12}(\mu_1 + \mu_2 - 2R)} = \frac{3}{4}$$

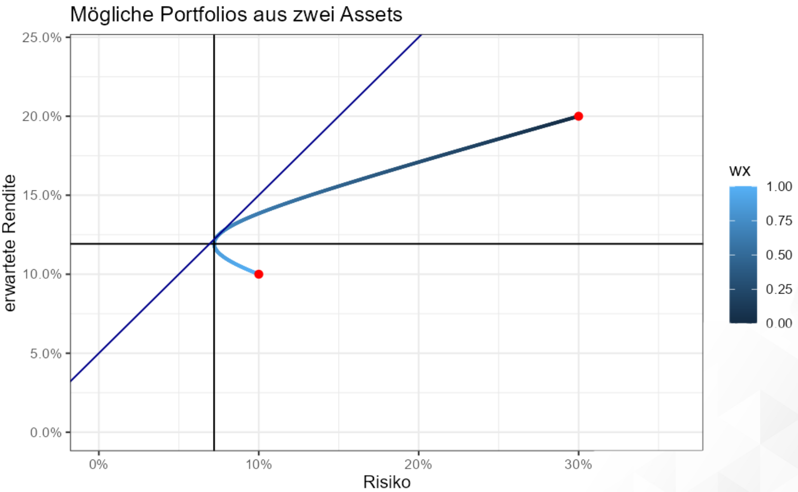
$$w_2 = \frac{\sigma_1^2(\mu_2 - R) - \sigma_{12}(\mu_1 - R)}{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - R(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_{12}(\mu_1 + \mu_2 - 2R)} = \frac{1}{4}$$

damit bekommen wir

$$\mu_m = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 = 12.5\%$$

$$\sigma_m = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12}} = 7.5\%$$

Portfolios mit zwei Vermögenswerten



Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Die Gewichtung eines Portfolios mit n verschiedenen Vermögenswerten sei gegeben durch

$$w = (w_1, \dots, w_n)^T \quad \text{sodass} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

damit bekommen wir die Zusammenhänge

- $w_i = \dfrac{x_i S_i(0)}{V(0)}, \qquad i = 1, \dots, n$
- $K_w = \sum_{i=1}^{n} w_i K_i$

weiters verwenden wir die Notation

$$\mathbf{1} := (1, 1, ..., 1)^T$$

Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Erwartete Rendite und die Kovarianzmatrix sind gegeben durch

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \qquad C := \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

wobei $\sigma_{ij} = Cov(K_i, K_j)$

Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Satz

Die erwartete Rendite $\mu_w = \mathbb{E}(K_w)$ und die Varianz $\sigma_w^2 = Var(K_w)$ eines Portfolios mit Gewichtung w sind gegeben durch:

$$\mu_w = w^T \mu$$
$$\sigma_w^2 = w^T C w$$

Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Wir möchten nun die Gewichtung der Vermögenswerte unseres Portfolios finden, welche die Varianz minimiert.

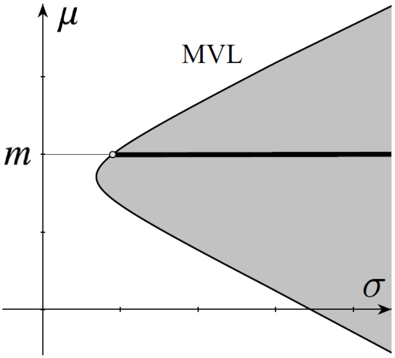
Satz

Unter der Voraussetzung, das die Kovarianzmatrix C invertierbar ist, hat das Portfolio mit der kleinsten Varianz (MVP) die Gewichtung

$$w_{min} = \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}}$$

Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Wir können auch eine erwartete Rendite $\mu_w = m$ festhalten. Es gibt nun verschiedene Gewichtungen w um ebendiese erwarte Rendite zu bekommen. Es ist klar, dass wir nun jene Gewichtung möchten, welche das niedrigste Risiko aufweist. Portfolios mit solch einer Gewichtung liegen auf der sogenannten minimum variance line (MVL).



Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Problemstellung: Gesucht ist das Minimum von $w^T C w$ unter den Nebenbedingung $w^T \mu = m$ und $w^T \mathbf{1} = 1$.

Satz

Seien M und die Kovarianzmatrix C invertierbar, M, M_1, M_2 seien gegeben durch

$$M := \begin{pmatrix} \mu^T C^{-1} \mu & \mu^T C^{-1} \mathbf{1} \\ \mu^T C^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$M_1 := \begin{pmatrix} m & \mu^T C^{-1} \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad M_2 := \begin{pmatrix} \mu^T C^{-1} \mu & m \\ \mu^T C^{-1} \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}$$

so ist

$$w = \frac{C^{-1}}{det(M)} (det(M_1) \mu + det(M_2) \mathbf{1})$$

eine Lösung des vorangegangenen Problems

Korrolar

Es gibt $a, b \in \mathbb{R}^n$*, welche nur von der Kovarianzmatrix* C *und* μ *abhängen, sodass*

$$\forall m \in \mathbb{R} : w = ma + b \text{ ist eine Lösung des vorangegangenen Problems}$$

Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Wir kommen nun zu einem äußerst wichtigen Satz der Portfoliotheorie. Dieser besagt, dass falls zwei effiziente Portfolios bekannt sind, so bekommt man durch diese die Gewichte aller anderen auf der Effizienzkurve liegenden Anlagekombinationen.

Satz (Two-Fund-Theorem)

Angenommen w_1 und w_2 sind zwei Portfolios, welche auf der MVL liegen, deren erwartete Rendite nicht gleich ist daher $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$, dann gibt es für alle Portfolios auf der MVL mit Gewichtung w ein $\alpha \in \mathbb{R} : w = \alpha w_1 + (1 - \alpha) w_2$

Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Satz

Angenommen es existieren zwei Portfolios w_1, w_2 auf der MVL mit verschiedenen Erwartungswerten $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$, dann ist die MVL eine Hyperbel

Satz

Falls die erwartete Rendite R eines risikofreien Vermögenswertes kleiner als jender des MVP ist, dann exestiert das Marktportfolio (MP) und ist gegeben durch

$$m = \frac{C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})}$$

Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Ein Beispiel: Wir betrachten folgende 3 Aktien und den risikofreien Vermögenswert R:

	Aktie i	erwartete Rendite μ_i	Standardabweichung σ_i
(A)	Microsoft	0.0427	0.1000
(B)	Nordstrom	0.0150	0.1044
(C)	Starbucks	0.0285	0.1411
	R	0.0050	0

Weiters sei die Kovarianzmatrix folgendermaßen gegeben

$$C := \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{AC} & \sigma_{BC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0.1)^2 & 0.0018 & 0.0011 \\ 0.0018 & (0.1044)^2 & 0.0026 \\ 0.0011 & 0.0026 & (0.1411)^2 \end{pmatrix}$$

$$\mu := \begin{pmatrix} 0.0427 \\ 0.0150 \\ 0.0285 \end{pmatrix}$$

Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Wir wollen nun das MVP sowie das MP berechnen:

$$w_{min} = \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} = (83.5153, 69.2319, 36.573)^T \frac{1}{189.3197}$$
$$= (0.4411, 0.3657, 0.1932)$$

mit dieser Gewichtung bekommen wir folgende erwartete Rendite und Standardabweichung für das MVP:

$$(\mu_{min}, \sigma_{min}) = (2.98\%, 7.27\%)$$

Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Kommen wir nun zum MP:

$$m = \frac{C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})} = (3.6484, 0.0841, 0.9678)^T \frac{1}{4.7}$$
$$= (0.7762, 0.0179, 0.2059)$$

mit dieser Gewichtung bekommen wir folgende erwartete Rendite und Standardabweichung für das MP:

$$(\mu_{MP}, \sigma_{MP}) = (3.93\%, 8.54\%)$$

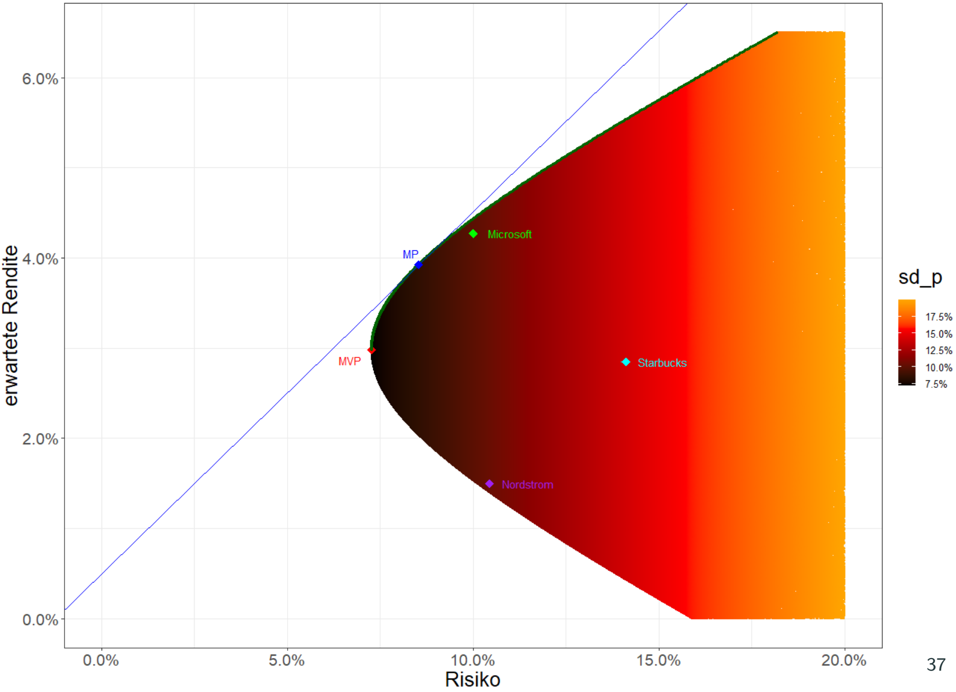
Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Da sowohl MVP und MP auf der Effizienzkurve liegen, können wir nun alle Werte auf dieser mit dem Two-Fund-Theorem berechen, die verschiedenen Gewichte ergeben sich durch:

$$w = \alpha w_{min} + (1 - \alpha) w_{MP}$$

Wir betrachten die Effizienzkurve zwischen dem MVP und dem MP:

mögliche Portfolios



Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Wir betrachten nun noch ein abschließendes Beispiel in R

Quellen

Maciej J. Capiński, Ekkehard Kopp: *Portfolio Theory and Risk Management*, Cambridge University Press, Cambridge 2014.

Tilo Arens, Rolf Busam, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Hellmuth Stachel: *Grundwissen Mathematikstudium - Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*, Springer-Verlag, Berlin 2013.

Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden 2004.

Enzo Mondello: *Portfoliomanagement - Theorie und Anwendungsbeispiele*, Springer Verlag, Wiesbaden 2015.