



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

S E M I N A R A R B E I T

# Balancing the Payment System

ausgeführt am

Institut für  
Finanz- und Versicherungsmathematik  
TU Wien

unter der Anleitung von

**Stefan Gerhold**

durch

**Maximilian Wassertheurer**

Matrikelnummer: 11918489

Studienkennzahl: UE 033 205

**Wien, Februar 2022**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Überblick</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Notationen und Definitionen</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Abwicklung aller Verpflichtungen in einem Netzwerk</b>	<b>6</b>
4.1	Eine Verpflichtungskette . . . . .	8
4.2	Ein Verpflichtungskreislauf . . . . .	9
4.3	Kleines obligatives Netzwerk mit einer Kette und einem Kreislauf . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Generelle Formulierung</b>	<b>12</b>
5.1	Ein Kreislauf ist ein ausgeglichenes Subzahlungssystem . . . . .	12
5.2	Finden der Maximal-Gewicht Menge von Kreisläufen . . . . .	13
5.3	Das Minimale-Kosten Flow Problem (MCF) . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Verwendung von ausgeglichenen Subzahlungssystemen am Handelskreditmarkt</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Mehrfache Cashflow Quellen</b>	<b>17</b>
<b>8</b>	<b>Optimierung der Verwendung der erreichbaren Liquidität</b>	<b>19</b>

# 1 Überblick

Im Rahmen dieser Seminararbeit wird das Thema *Ausgeglichene Zahlungssysteme* betrachtet. Ein Zahlungssystem sollte ausgeglichen sein, um die Liquidität der Mitglieder zu sichern. Es wird definiert, wann ein Zahlungssystem ausgeglichen ist und verschiedene Situationen beschrieben, wo das nicht der Fall ist. Dazu werden jeweils Beispiele und Ansätze für mögliche Lösungen gebracht.

Zuerst werden die Bedingungen, die nötig sind, um ein ausgeglichenes Zahlungssystem zu erhalten, genannt und drei Situationen die einen Ausgleich verhindern definiert. Dann werden Definitionen eingeführt, um Zahlungsströme im System mathematisch beschreiben zu können. Mithilfe dieser Definitionen kann man nun genau definieren, wann ein Zahlungssystem ausgeglichen ist.

Es wird gezeigt, wie ein unausgeglichenes System mithilfe einer Finanzierungsquelle, ausgeglichen werden kann. Dazu werden jeweils Beispiele mit einer Kette und einem Kreislauf aus Zahlungsverpflichtungen zwischen Firmen gegeben. Mithilfe von mathematischen Definitionen und Normen können wir dann überprüfen ob das Zahlungssystem ausgeglichen ist, oder ob noch zusätzlicher Cashflow benötigt wird. Dabei zeigen wir, dass ein Kreislauf ein ausgeglichenes Subsystem ist.

Kreisläufe von Zahlungsverpflichtungen werden dann als Subsysteme innerhalb eines Zahlungssystems betrachtet. Nun wird mit dem Konzept *Gewicht* gearbeitet, und wir versuchen eine Maximal-Gewicht Menge von Kreisläufen im System zu finden. Diese Kreisläufe können wir dann aus dem Zahlungssystem ausgliedern, ohne die Erfordernis nach Liquidität zu erhöhen.

Dazu muss ein Minimierungsproblem gelöst werden: das *Minimale-Kosten Flow Problem* (MCF). Dann wird unser Modell erweitert, und wir betrachten als Beispiele den Handelskreditmarkt und ein Zahlungssystem mit mehrfachen Cashflow-Quellen. Im letzten Abschnitt wird beschrieben, wie die Verwendung der erreichbaren Liquidität mittels der vorherigen Erkenntnisse erreicht werden kann.

Die Arbeit orientiert sich an der Publikation *Balancing the Payment System* von Tomaz Fleischmann und Paolo Dini[1]. Dieses Werk dient als Quelle für die gesamte Arbeit als auch für die Abbildungen.

## 2 Einführung

Zahlungssysteme bestehen aus zwei Teilen, einem obligativem Netzwerk und einer Liquiditätsreserve. Ein Zahlungssystem heißt ausgeglichen, wenn alle Verpflichtungen gleichzeitig erledigt werden können. Das ist möglich, wenn der Gesamtmittelzufluss den Gesamtmittelausfluss, in jedem Teil des Systems, ausgleicht. Aus praktischen Gründen, ist man an einem ausgeglichenen Zahlungssystem interessiert. Um ein ausgeglichenes Zahlungssystem jederzeit zur Verfügung zu haben, ist eine zentralisierte Wissensbasis über alle bestehenden Zahlungsverpflichtungen zwischen den Mitgliedern des obligativen Netzwerks nötig. Durch diese zentralisierte Wissensbasis, wird es für die Mitglieder des Zahlungssystems möglich, den Betrag der gegenseitigen Verschuldung, der aus dem obligativem Netzwerk genommen werden kann, zu maximieren. Vorteile eines ausgeglichenen Systems sind Liquiditätssicherung sowie ein geringeres systemisches Risiko für die Mitglieder. Ein obligatives Netzwerk kann man als Menge fälliger Zahlungen betrachten, welche ein dichtes, stark verbundenes Netzwerk formen. *Stark verbunden* heißt in diesem Zusammenhang, dass ein Pfad von Zahlungen oder Rechnungen existiert, welche in jede Richtung jedes Paar von Firmen verbindet. Ein nicht stark verbundenes System, kann man normalerweise in einige stark verbundene Teile oder *Cluster* unterteilen. Alle Firmen, die in einem stark verbundenen Netzwerk sind, sind Teil eines Kreislaufs. Abhängig von der Verteilung der Liquidität über die Mitglieder des Zahlungssystems, gibt es aber Situationen, in denen Zahlungen von den Mitgliedern nicht mehr individuell erledigt werden können. Für verschiedene Liquiditätsverteilungen gibt es nach Leinonen[2] folgende Definitionen:

**-Circular** - eine Situation, in der individuelle Zahlungen nur spezifisch geordnet durchgeführt werden können. Diese Situation ist lösbar durch Umordnen der Zahlungskette.

**-Gridlock** - eine Situation, in der einige Zahlungen nicht individuell abgewickelt werden können, aber gleichzeitig abgewickelt werden können. Diese Situation ist lösbar mit multilateralen Gegenposten.

**-Deadlock** - eine Situation, in der individuelle Zahlungen nur durch Erhöhung von Liquidität von mindestens einem Systemmitglied abgewickelt werden können.

*Liquidity-Saving Mechanisms* (LSMs) sind Methoden, um Lösungen für diese Situationen zu finden. LSMs verkürzen die Warteschlange und reduzieren die Abhängigkeit von erhöhter Liquidität. LSMs werden im Interbank Zahlungssystem weitgestreut genutzt, aber ihre Vorteile in der Liquiditätssicherung erreichen nicht alle. Vor allem kleinere Unternehmen mit begrenztem Zugang zu Liquidität benutzen verschiedene Alternativen um ihre Verpflichtungen abzuwickeln, z. B. den Handelskreditmarkt oder Komplementärwährungen. Dadurch kommt es zu Verflechtungen zwischen den verschiedenen Systemen und Liquiditätsprobleme können auf ein anderes System übergehen. Durch die Verwendung von LSMs in einem System, sinkt auch das Risiko in anderen Systemen.

Ein ausgeglichenes obligatives Netzwerk ist ein Netzwerk, in dem alle Zahlungsverpflichtungen gleichzeitig erledigt werden können. Ein ausgeglichenes Netzwerk sollte in so viele Systeme wie möglich integriert werden, um in immer komplexeren Zahlungssystemen das Risiko eingrenzen zu können. Dazu sollen LSMs beitragen.

## 3 Notationen und Definitionen

Die Notationen basieren auf dem Werk von Eisenberg und Noe[3]. Für Vektoren wird Fettschrift und für Matrizen Großbuchstaben verwendet. Graphen werden mit  $\mathcal{G}$  bezeichnet und  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ . Für Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  werden folgende Operationen definiert:

$$\mathbf{x}^+ := (\max[x_1, 0], \max[x_2, 0], \dots, \max[x_n, 0]) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}^- := (-x)^+ = (\max[-x_1, 0], \max[-x_2, 0], \dots, \max[-x_n, 0]) \quad (2)$$

$\mathbf{1}$  bzw.  $\mathbf{0}$  repräsentieren einen  $n$ -dimensionalen Vektor dessen Einträge alle 1 bzw. 0 sind.  $\|\cdot\|$  ist die  $\ell^1$  Norm, definiert durch:

$$\|\mathbf{x}\| := \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (3)$$

Folgende Definitionen werden benutzt:

**-Obligatives Netzwerk** - ein gerichteter Graph, dessen Knotenpunkte Firmen und Verbindungslinien Verpflichtungen darstellen. Parallele Verbindungslinien stellen mehrfache Verpflichtungen zwischen zwei Firmen dar.

**-Nominalverbindlichkeitsmatrix** - eine Matrix, die Verpflichtungen oder Verbindlichkeiten zwischen Firmen darstellt.

**-Zahlungssystem** - wird durch das hinzufügen von Knotenpunkten zu einem obligativem Netzwerk konstruiert. Diese Knotenpunkte stellen Finanzierungsquellen und Wertanlagen dar und können Verbindungen zu allen Knotenpunkten im obligativem Netzwerk haben.

Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph, der ein obligatives Netzwerk mit  $n$  Knotenpunkten, welche Firmen darstellen und  $m$  Verbindungslinien, welche die Verpflichtungen zwischen den Firmen darstellen. Die Funktion  $o(e)$  stellt den Wert einer einzelnen Verpflichtung  $e \in E$  zwischen Firmen  $v_i$  und  $v_j$  dar. Es kann mehrere Verbindungslinien zwischen  $v_i$  und  $v_j$  geben.  $(v_i, v_j) \subset E$  ist die Teilmenge von  $\mathcal{E}$ , die alle Verbindungslinien zwischen  $v_i$  und  $v_j$  enthält. Formell:

$\mathcal{G} = (V, E, s, t, o)$	gerichteter Graph von Verpflichtungen zwischen Firmen
$V = (v_1, \dots, v_n)$	Menge von $n$ Knotenpunkten, die Firmen darstellen
$E = (e_1, \dots, e_m)$	Menge von $m$ Verbindungslinien, welche einzelne Verpflichtungen darstellen
$e \in E$	einzelne Verbindungslinie aus der Menge $E$
$s: E \rightarrow V$	weist den Quellknoten (source node) jeder Verbindungslinie zu
$t: E \rightarrow V$	weist den Zielknoten (target node) jeder Verbindungslinie zu
$o: E \rightarrow \mathbb{R}$	weist den Wert der Verpflichtung (obligation) jeder Verbindungslinie zu

Die Nominalverbindlichkeitsmatrix  $L$  ist eine  $(n \times n)$ -Matrix, deren Einträge die Verpflichtungen zwischen zwei Firmen sind. Die Diagonaleinträge sind alle Null, da Firmen keine Verbindlichkeiten gegenüber sich selbst haben. Jeder Eintrag ist gegeben durch:

$$L_{ij} = \sum_{e \in (v_i, v_j)} o(e) \quad (4)$$

Die gesamten Schulden von Firma  $i$  werden durch die Summe der Zeile  $i$  von  $L$  dargestellt:

$$d_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} \quad (5)$$

Die gesamten Kredite von Firma  $j$  werden durch die Summe der Spalte  $j$  von  $L$  dargestellt:

$$c_j = \sum_{i=1}^n L_{ij} \quad (6)$$

Wir nennen  $\mathbf{d}$  den *Schuldenvektor* und  $\mathbf{c}$  den *Kreditvektor*. Der *Nettopositionsvektor*  $\mathbf{b}$  entsteht aus der Differenz von Krediten und Schulden für alle Firmen aus dem obligativem Netzwerk:

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{d} \quad (7)$$

$$b_i = c_i - d_i, \quad d_i, c_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathcal{N} \quad (8)$$

**Definition 1.** Ein Vektor  $\mathbf{b}$  heißt *ausgeglichen*, wenn die Summe seiner Komponenten gleich 0 ist:

$$\sum_{i=1}^n b_i = 0 \quad (9)$$

**Theorem 2** Vektor  $\mathbf{b}$ , der die Nettopositionen aller Firmen darstellt, ist ausgeglichen.

*Beweis:* Jede Verpflichtung in  $L$  ist in der Nettoposition einmal eine Schuld und einmal ein Kredit. Die Summe aller Kredite ist gleich der Summe aller Schulden.

$$\sum_{j=1}^n c_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n L_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} = \sum_{i=1}^n d_i \quad (10)$$

Daraus folgt, dass die Summe aller Nettopositionen Null ist:

$$\sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (c_i - d_i) = \sum_{i=1}^n c_i - \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{j=1}^n c_j - \sum_{i=1}^n d_i = 0 \quad (11)$$

**Korrolar 3.** Da Vektor  $\mathbf{b}$  ausgeglichen ist, sind sie Summen der Absolutbeträge der positiven und negativen Vektorkomponenten gleich:

$$\|\mathbf{b}^+\| = \|\mathbf{b}^-\| \quad (12)$$

$\mathbf{b}^+$  und  $\mathbf{b}^-$  sind berechnet wie in (1) und (2) definiert.

**Beispiel:** In diesem Beispiel haben wir ein kleines obligatives Netzwerk, welches in Abb. 1 visualisiert wird. Die Knoten  $v_1, \dots, v_4$  stellen Firmen dar und die Pfeile Verpflichtungen zwischen diesen Firmen. Die Pfeilbeschriftung ist die Höhe der Verpflichtung.

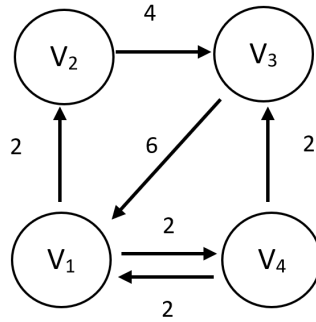


Abb. 1: kleines obligatives Netzwerk

Die Verbindlichkeitsmatrix  $L$  sieht nun folgend aus:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Die Einträge der Vektoren  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{d}$  sind die Summen über Spalten bzw Zeilen:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Vektor  $\mathbf{b}$  ergibt ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{c} - \mathbf{d} = (6, 2, 6, 6) - (8, 4, 6, 2) = (-2, -2, 0, 2) \\ \mathbf{b}^+ &= (0, 0, 0, 4) \Rightarrow \|\mathbf{b}^+\| = 4 \\ \mathbf{b}^- &= (2, 2, 0, 0) \Rightarrow \|\mathbf{b}^-\| = 4 \\ \sum_{i=1}^n b_i &= \|\mathbf{b}^+\| - \|\mathbf{b}^-\| = 0 \end{aligned}$$

## 4 Abwicklung aller Verpflichtungen in einem Netzwerk

Um unser Ziel, die Abwicklung aller Verpflichtungen, zu erreichen, wird ein spezieller Knotenpunkt  $v_0$ , wie in Abb. 2, hinzugefügt. Dieser Knotenpunkt kann sowohl als Liquiditätsquelle als auch Liquiditätssenke für den Cashflow zum bzw. aus dem obligativen Netzwerk dienen.  $v_0$  kann beispielsweise ein Bankensystem sein, bei dem jede Firma aus dem Netzwerk ein Konto hat, oder ein Komplementärwährungssystem. Der Cashflow wird durch den *externen Cashflow Vektor*  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  dargestellt. Vektoreinträge  $f_i$  erfüllen  $f_i > 0$ , wenn der Cashflow von Firma  $i$  in das obligative Netzwerk geht, und  $f_i < 0$ , wenn der Cashflow vom Netzwerk zurück zu Firma  $i$  geht. Der Cashflowvektor zusammen mit der Verbindlichkeitsmatrix ergibt das Zahlungssystem  $(L, \mathbf{f})$ .

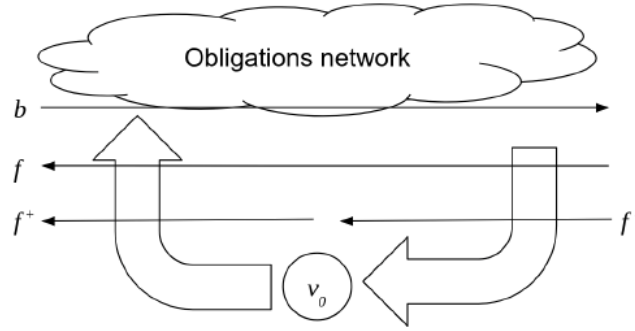


Abb. 2: Zahlungssystem: obligatives Netzwerk, Finanzierungsquelle, -senke  $v_0$ , Cashflow wird durch Vektoren dargestellt

Der Cashflow, der für Firmen von  $v_0$  erreichbar ist, verändert deren Nettopositionen. Wenn Vektor  $\mathbf{b}$  die Nettopositionen der Firmen im obligativen Netzwerk darstellt, ist  $\mathbf{b}^*$  der Vektor der Nettopositionen im Zahlungssystem:

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b} + \mathbf{f} \quad (15)$$

Daraus folgt, dass die Nettoposition einer Firma steigt, wenn Cashflow in das obligative Netzwerk kommt, bzw. sinkt, wenn Cashflow aus dem obligativem Netzwerk fließt. Unser Ziel, alle Verpflichtungen im obligativem Netzwerk abzuwickeln, ist erreicht, wenn die Nettopositionen aller Firmen im Zahlungssystem Null sind. Dafür muss genügend Liquidität für eine Intervention vorhanden sein. Das heißt, mit dem zufließendem Cashflow werden die Schulden aller Firmen mit negativen Nettopositionen beglichen und der ausfließende Cashflow wird von den Konten der Firmen mit positiver Nettoposition getragen. Daraus folgt:

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f} = -\mathbf{b} \quad (16)$$

**Definition 4.** Die *Net Internal Debt NID* (interne Nettoverschuldung) eines obligativen Netzwerkes ist der Geldbetrag, den Firmen benötigen, um alle Verpflichtungen um Netzwerk zu begleichen:

$$NID = \|\mathbf{b}^-\| \quad (17)$$

Eine reale Situation wäre, wenn  $v_0$  in Abb. 2 eine Bank ist und eine kontenthaltende Funktion hat, die als Liquiditätsquelle dient. Dann sind die positiven Werte des Cashflow Vektors  $\mathbf{f}^+ = (-\mathbf{b})^+$ , der Zahlungen von individuellen Firmenkonten an die Bank darstellt. Der Vektor  $\mathbf{f}^-$  stellt Zahlungen von der Bank (aus dem Netzwerk) an individuelle Firmenkonten dar. Der Nettopositionsvektor  $\mathbf{b}$  der Firmen ist ausgeglichen, wenn der Cashflow Vektor  $\mathbf{f}$  ebenfalls ausgeglichen ist. Das heißt, dass der Cashflow, der aus dem Netzwerk abfließt, gleich dem Cashflow, der dem Netzwerk zufließt, ist.

$$\|\mathbf{f}^+\| = \|\mathbf{f}^-\| \quad (18)$$



**Definition 5.** Ein Zahlungssystem, das alle Verpflichtungen in einem obligativem Netzwerk begleichen kann, ist ausgeglichen.

**Theorem 6.** Ein Zahlungssystem  $(L, \mathbf{f})$  mit  $\mathbf{f} = -\mathbf{b}$  ist ausgeglichen.

*Beweis.* In einem ausgeglichenen Zahlungssystem müssen alle Verpflichtungen in einem obligativem Netzwerk ausgeglichen sein.

$\Rightarrow$  Für jede Firma oder Knotenpunkt im obligativem Netzwerk muss die Summe aus abfließendem und zufließendem Cashflow 0 sein

$\Rightarrow$  Die gesamten Kredite Minus die gesamten Schulden einer Firma Plus die externe Finanzierung muss 0 sein:

$$c_i - d_i + f_i = b_i + f_i = b_i - b_i = 0 \quad (19)$$

**Korollar 7.** Jedes ausgeglichene Zahlungssystem erfüllt die Fluss erhaltende Bedingung.

*Beweis.* Die Fluss erhaltende Bedingung erfordert, dass alle Flüsse in einen Knotenpunkt gleich der Flüsse aus einem Knotenpunkt sind. Das ist für ein ausgeglichenes Zahlungssystem nach Theorem 6 für alle Knotenpunkte im obligativen Netzwerk erfüllt. Nach Gleichung (18) ist dies auch für den zusätzlichen Knotenpunkt  $v_0$  erfüllt, da die Summe des ausfließenden Cashflows  $\|\mathbf{f}^+\|$  gleich der Summe des einfließenden Cashflows  $\|\mathbf{f}^-\|$  ist.

#### 4.1 Eine Verpflichtungskette

Wir untersuchen ein kleines Netzwerk aus 4 Firmen, die einer Kette angehören. Ziel ist es, die Idee zu einem ausgeglichenen Cashflowvektor, der alle Verpflichtungen in einem obligativem Netzwerk begleicht, zu verstehen.

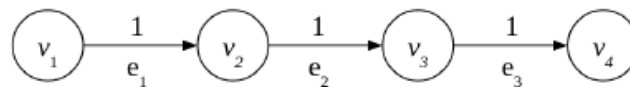


Abb. 3: Kette von Verpflichtungen

In Abb. 3 bilden die Knotenpunkte die Firmen  $v_1, \dots, v_4$  und die Pfeile  $e_1, \dots, e_3$  die Verpflichtungen zwischen den Firmen. Das heißt,  $v_1$  muss  $v_2$  eine Verpflichtung der Höhe 1 bezahlen und so weiter. Wenn  $v_1$  über genügend Liquidität verfügt und seine Verpflichtung begleichen kann, ist sofort ersichtlich, dass in weiterer Folge auch die anderen Firmen ihre Verpflichtung begleichen können. Der Nettopositionsvektor  $\mathbf{b}$  sieht für dieses Netzwerk folgend aus:

$$\mathbf{b} = (-1, 0, 0, 1) \quad (20)$$

$$\mathbf{b}^- = (1, 0, 0, 0) \quad (21)$$

$$NID = \|\mathbf{b}^-\| = 1 \quad (22)$$

Das bedeutet, dass der NID oder Betrag der externen Liquidität, der benötigt wird, um alle Verpflichtungen im Netzwerk zu begleichen, bei 1 liegt.

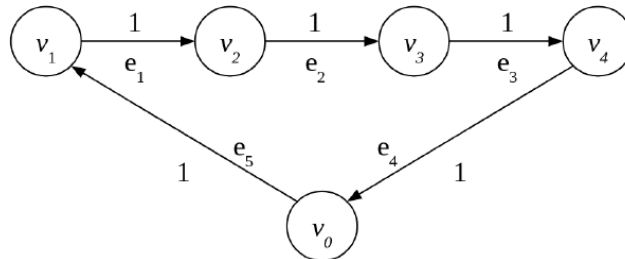


Abb. 4: Zahlungssystem mit einer Kette von Verpflichtungen

Um ein Zahlungssystem zu konstruieren, wird wie in Abb. 4 ein neuer Knotenpunkt  $v_0$  hinzugefügt. Dieser Knotenpunkt dient als Liquiditätsquelle mit 2 Verbindungslinien  $e_5 = (v_0, v_1)$  mit Wert  $o(v_0, v_1) = 1$  und  $e_4 = (v_4, v_0)$  mit Wert  $o(v_4, v_0) = 1$ . In unserem Falls steht  $e_5$  für den Zufluss von Cashflow ins Netzwerk und  $e_4$  für den Abfluss von Cashflow aus dem Netzwerk. Insgesamt bedeutet das, dass nach dem Ausgleich aller Verpflichtungen in diesem Netzwerk Firma  $v_4$  eine Einheit mehr und Firma  $v_1$  eine Einheit weniger am Konto hat.

Die Bereitstellung von Liquidität ist nicht nur ein Problem betreffend  $NID$  oder dem Betrag erreichbarer liquider Werte, sondern auch deren Verteilungen. Die Verteilung liquider Assets die nötig ist, um alle Verpflichtungen zu begleichen, zeigt Vektor  $\mathbf{b}^-$  in Gleichung (21). Wenn jede Firma Ihre Verpflichtungen individuell begleicht, wären in unserem Beispiel drei Schritte nötig. Um alle Verpflichtungen gleichzeitig begleichen zu können, kann man eine zentralisierte Reihenfolge mit LSM nutzen und somit Zeit sparen.

## 4.2 Ein Verpflichtungskreislauf

Unser nächstes Beispiel ist ein Verpflichtungskreislauf bestehend aus drei Firmen wie in Abb. 5.

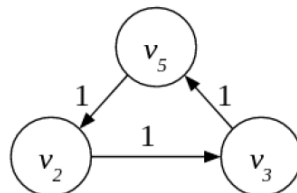


Abb. 5: ein Kreislauf

Alle Verpflichtungen in diesem Netzwerk können ohne Liquiditätszufuhr von außen beglichen werden und der  $NID$  ist 0. In diesem Spezialfall mit Vektor  $\mathbf{b} = 0$ , ist das Netzwerk ausgeglichen. Das heißt alle Knoten des Kreislaufes erfüllen die Fluss erhaltende Bedingung, was formell für jede Firma  $i$  heißt:

$$\sum_{j=1}^n L_{ji} - \sum_{j=1}^n L_{ij} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (23)$$

Diese Fluss erhaltende Bedingung ist ein Spezialfall der Nettopositionsrechnung in Gleichung (7) und (8). Also ist die Fluss erhaltende Bedingung erfüllt, wenn alle Kredite alle Schulden für jede Firma im Kreislauf ausgleichen.

Doch auch in Kreisläufen kann es Bedarf nach Liquiditätszufuhr von außen geben, obwohl diese eigentlich gar nicht nötig ist. Wenn die Firmen unabhängig agieren ohne vom Kreislauf zu wissen, muss zumindest eine Firma Liquidität von Außen aufnehmen, um die erste Zahlung zu tätigen. Dieses Problem kann wieder mithilfe einer zentralisierten Reihe und LSMs gelöst werden und somit kann Liquidität gespart werden.

In obligativen Netzwerken werden Kreisläufe gebildet um Liquidität zu sparen und können wie in Abb. 5 aussehen, oder es wird zusätzlich ein spezieller Knoten  $v_0$  hinzugefügt wie in Abb. 4.

### 4.3 Kleines obligatives Netzwerk mit einer Kette und einem Kreislauf

Um näher an reale Situationen zu kommen haben wir nun ein obligatives Netzwerk mit Kreislauf und Kette wie in Abb. 6.

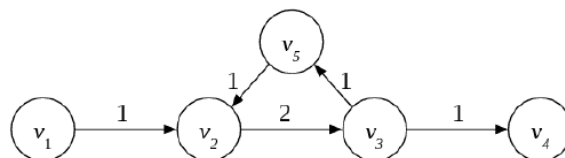


Abb. 6: Ein obligatives Netzwerk mit Kette und Kreislauf

Das obligative Netzwerk in Abb. 6 ist offenbar nicht ausgeglichen. Das heißt wir benötigen Liquiditätszufuhr von außen um alle Verpflichtungen ausgleichen zu können. Ähnlich wie bei der Verpflichtungskette betrachten wir nun Vektor  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = (-1, 0, 0, 1, 0) \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^n b_i = 0 \Rightarrow \mathbf{b} \text{ ist ausgeglichen} \quad (25)$$

$$\|\mathbf{b}\| = 2 \Rightarrow \text{Das obligative Netzwerk ist nicht ausgeglichen} \quad (26)$$

$$\|\mathbf{b}^-\| = 1 \Rightarrow NID = 1 \quad (27)$$

Vektor  $\mathbf{b}$  ist per Definition immer ausgeglichen, aber das obligative Netzwerk muss nicht immer ausgeglichen sein. Die  $NID$  ist in unserem Beispiel gleich 1. Das heißt, wir benötigen eine Einheit

Liquiditätszufuhr von einer externen Quelle um alle Verpflichtungen ausgleichen zu können. In Abb. 7 ist ein Zahlungssystem mit Kette und Kreislauf dargestellt. In diesem System gibt es zwar genügend Liquidität um alle Verpflichtungen auszugleichen, dies ist jedoch nicht möglich, wenn alle Mitglieder des Zahlungssystems unabhängig agieren. Durch den Kreislauf im System wird ein glatter Fluss des Geldes verhindert. Es entsteht eine Gridlock-Situation, da Firma 2 ihre Verpflichtungen nicht ausgleichen kann, auch wenn Sie Zahlungen von Firma 1 erhält. Firma 2 kann ihre Verpflichtungen nur ausgleichen, wenn Firma 1 und Firma 5 zugleich bezahlen. Es gibt verschiedene Methoden um diese Situation zu lösen.

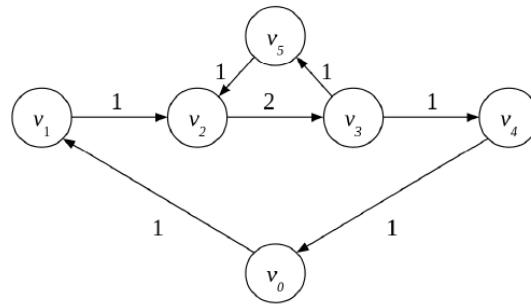


Abb. 7: Ein Zahlungssystem mit Kette und Kreislauf

Ein Weg ist, dass Firma 2 Geld von einer externen Quelle leiht. Dann würden wir für unser Beispiel noch eine Verbindungslinie von Knoten  $v_0$  zu Firma 2 mit Wert 1 benötigen. Firma 2 könnte dann das Geld zurückzahlen, sobald sie die Zahlung von Firma 5 erhalten hat. Dieses Szenario wird in Abb. 8 dargestellt.

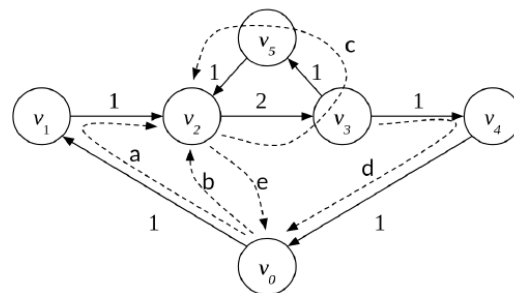


Abb. 8: Beispiel eines Gridlock Lösung Szenarios. Folge von Schritten dargestellt durch strichlierte Linien, die markiert sind mit Buchstaben a bis e

Ein weiterer Weg um den Gridlock aufzulösen wäre, wenn eine andere Firma im Kreislauf Geld von einer externen Quelle leiht, was zu neuen Verbindungslinien zu  $v_0$  führen würde.

Unter der Annahme, dass Firma 3 schon eine Einheit an Firma 2 bezahlt hat, gibt es noch eine weitere Möglichkeit den Gridlock durch spezielle Abkommen zwischen den Firmen zu lösen. Firma 2 könnte dann mit Firma 3 vereinbaren, dass es zwei Teilzahlungen zu je einer Einheit gibt. Wenn Firma 3 dann ihre Verpflichtung bei Firma 5 ausgleicht würde das den Gridlock auflösen. Zahlt Firma 3 jedoch zuerst ihre Verpflichtung bei Firma 4, sind wir wieder zurück in

der Gridlock Situation.

Die einzige Möglichkeit den Gridlock ohne externe Liquiditätszufuhr oder spezielle Abkommen zwischen den Firmen zu lösen, ist eine Reihe mit einem LSM. Für die Auflösung des Gridlocks müssen zuerst die Kreisläufe erkannt werden, welche die Verpflichtungen gleichzeitig ausgleichen können. Der erste Kreislauf in unserem System (2,3,5,2) besteht aus Firmen und liegt im obligativem Netzwerk. In diesem Kreislauf können alle Verpflichtungen mit Wert 1 ausgeglichen werden und der Kreislauf kann aus dem obligativem Netzwerk ausgegliedert werden ohne den Wert von Vektor  $\mathbf{b}$  zu beeinflussen. Die NID oder minimale Anforderung für Liquiditätszufuhr von Außen, um alle Verpflichtungen im obligativem Netzwerk auszugleichen bleibt dabei unverändert. Nach der Ausgliederung des Kreislaufs haben wir eine Kette und die gleiche Situation wie in Abb. 4. Diese Kette formt dann mit einer Liquiditätsquelle  $v_0$  erneut einen zweiten Kreislauf, in dem alle Verpflichtungen mithilfe der Liquiditätszufuhr von  $v_0$  ausgeglichen werden können.

## 5 Generelle Formulierung

In diesem Abschnitt werden grundlegende Definitionen und Beispiele gegeben, die tiefer in die Materie gehen und Ergebnisse mit wichtigen Anwendungen für größere Zahlungssysteme bringen.

### 5.1 Ein Kreislauf ist ein ausgeglichenes Subzahlungssystem

Ein Kreislauf  $E_c = \{e_{c1}, e_{c2}, \dots, e_{ck}\}$  in  $\mathcal{G}$  ist eine geschlossene Folge aus  $k$  Verbindungslinien, die Knotenpunkte  $V_c = \{v_{c1}, v_{c2}, \dots, v_{ck}, v_{c1}\}$  verbinden, wobei  $v_{c1}, \dots, v_{ck}$  verschieden.

**Theorem 8.** Ein Kreislauf  $(V_c, E_c, p)$ , in dem alle Gewichte der Verbindungslinien auf die minimale Verpflichtung im Kreislauf  $p = \min(o(e)|e \in E_c)$  gesetzt werden, ist ein ausgeglichenes Subzahlungssystem.

*Beweis.* In so einem Kreislauf hat jeder Knoten genau eine einkommende und eine ausgehende Verbindungslinie mit Wert  $p$ . Das heißt, für die Nettopositionen  $b_i$  der Firmen gilt:

$$b_i = p - p, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

Folglich erfüllt so ein Subzahlungssystem die Fluss erhaltende Bedingung aus Gleichung (23) und benötigt keine externen Liquiditätsquellen um alle Verpflichtungen zu begleichen.  $\square$

**Theorem 9.** Das Ausgliedern eines Kreislaufs aus einem obligativem Netzwerk verändert den Nettopositionsvektor  $\mathbf{b}$  nicht.

*Beweis.* Alle Verbindungslinien im Kreislauf sind gewichtet mit Wert  $p$ . Wenn wir jetzt den Kreislauf aus einem obligativem Netzwerk ausgliedern, verringern sich Schulden und Kredite jeder Firma im Kreislauf um den Wert  $p$ . Das heißt der Nettopositionsvektor  $\mathbf{b}$  bleibt unverändert:

$$b_i = c_i - p - (d_i - p) = c_i - d_i = b_i \quad \forall v_i \in V_c \quad (28)$$

□

Die Ausgliederung eines ausgeglichenes Subzahlungssystems kann aus 2 Perspektiven betrachtet werden:

- Aus Sicht des Zahlungssystems ändert sich nichts an der Erfordernis nach externer Liquidität.
- Aus Sicht der Firmen ist die entsprechende Gridlock-Situation gelöst und keine Finanzierung durch Externe für die Auflösung dieser Situation notwendig.

Diese Reduktion der Liquiditätszufuhr von Außen kann als Reduktion der Verpflichtungen im Zahlungssystem vermerkt werden.

## 5.2 Finden der Maximal-Gewicht Menge von Kreisläufen

In der Graphentheorie ist das Entfernen eines Kreislafs aus einem gerichteten Graph, um einen azyklischen Graphen zu bekommen, ein gut erforschtes Gebiet. Wir arbeiten nun mit der Methode "Gewicht".

**Definition 10.** Wir definieren das *Gewicht* eines obligativen Netzwerks mit der Menge der Verbindungslinien  $E$  als eine Funktion  $\omega : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  deren Wert die Summe aller Verpflichtungen um obligativen Netzwerk ist:

$$\omega(\mathcal{G}) = \sum_{e \in E} o(e) \quad (29)$$

Ein Kreislauf  $\mathcal{G}_c$  mit Länge  $k$ , dessen Verpflichtungen alle Wert  $p$  haben, hat Gewicht:

$$\omega(\mathcal{G}_c) = pk \quad (30)$$

Die Ausgliederung eines Kreislafs  $\mathcal{G}_c$  aus einem obligativem Netzwerk reduziert das Gewicht des verbleibenden Netzwerkes  $\mathcal{G}_r$  auf:

$$\omega(\mathcal{G}_r) = \omega(\mathcal{G}) - \omega(\mathcal{G}_c) \quad (31)$$

Folglich kann man die Erfordernis nach externer Liquidität durch die Firmen verringern, wenn alle Kreisläufe aus einem obligativem Netzwerk ausgegliedert werden. Dadurch werden auch alle Gridlock-Situationen aufgelöst. Wir lösen dafür zuerst das folgende Problem:

**Problem 11.** Finde eine Folge von Kreisläufen  $\mathcal{G}_{c_i}$  und verbleibende Netzwerke  $\mathcal{G}_{r_i}$ , so dass

$$\sum_{i=1}^q \omega(\mathcal{G}_{ci}) \text{ ein Maximum ist} \quad (32)$$

und

$$\mathcal{G}_{c1}, \mathcal{G}_{r1} \subset \mathcal{G} \quad (33)$$

$$\mathcal{G}_{c2}, \mathcal{G}_{r2} \subset \mathcal{G}_{r1} \quad (34)$$

$$\vdots \quad (35)$$

$$\mathcal{G}_{cq}, \mathcal{G}_{rq} \subset \mathcal{G}_{r(q-1)} \quad (36)$$

$$(37)$$

Jede Ausgliederung eines Kreislaufs aus einem obligativem Netzwerk führt zu einem verbleibenden azyklischen Netzwerk  $\mathcal{G}_{r_q}$ . Im Vorhinein ist die Zahl der auszugliedernden Kreisläufe nicht bekannt und hängt davon ab, welche Methoden benutzt werden um Kreisläufe im Netzwerk zu finden. Beispielsweise hat jeder gerichtete azyklische Graph eine Topologische Sortierung. Das heißt, es gibt eine Reihenfolge von Knoten, so dass der startende Endpunkt jeder Verbindungslinie in der Reihenfolge vor dem endenden Endpunkt dieser Verbindungslinie kommt. Also z. B. Firma A hat Verpflichtungen gegenüber Firma B und Firma C, begleicht aber zuerst die Verpflichtungen gegenüber Firma C und erst danach gegenüber Firma B. Man kann mithilfe von Algorithmen, z.B. dem Kahn-Algorithmus, diese Sortierung erkennen.

**Definition 12.** Sei  $\mathcal{G}$  ein obligatives Netzwerk. Eine *Maximal-Gewicht Menge* von Kreisläufen  $\mathcal{G}_{c1}, \dots, \mathcal{G}_{cq}$  ist eine Lösung von Problem 11.

Es gibt immer einen Weg um alle Kreisläufe auszugliedern. Die Lösungswege dazu können unterschiedlich sein. Ein Problem könnte sein, dass durch die Ausgliederung eines Kreislaufs, andere zusammenhängende Kreisläufe unterbrochen werden. Davon hängt die Lösung von der Reihenfolge, in der die Kreisläufe gefunden werden, ab. Dadurch wird die Suche nach der Maximal-Gewichts Menge schwerer. Als Lösung wird nicht nach Kreisläufen gesucht, sondern das Konzept von ausgeglichenen Zahlungssystemen und Minimalen-Kosten Flow genutzt.

### 5.3 Das Minimale-Kosten Flow Problem (MCF)

Als Startpunkt für diese Methode haben wir ein ausgeglichenes Zahlungssystem  $(L, \mathbf{f})$  mit einem obligativen Netzwerk  $\mathcal{G}$ .  $L$  ist die Nominalverbindlichkeitsmatrix von  $\mathcal{G}$  und  $\mathbf{f} = -\mathbf{b}$  ist der externe Cashflow Vektor, wobei  $\mathbf{b}$  der Nettopositionsvektor ist. Wir wissen, dass der Cashflow in diesem System gleich der *NID* ist. Ziel ist es ein ausgeglichenes Zahlungssystem  $(M, \mathbf{f})$  zu finden, wobei  $M$  die Nominalverbindlichkeits-*Minimale-Kosten Maximaler-Flow Matrix* ist und das Minimal-Gewicht Subnetzwerk  $\mathcal{G}_m$  des obligativen Netzwerks  $\mathcal{G}$  darstellt.

Um so eine Matrix  $M$  zu finden gehen wir folgend vor:

- Wir definieren eine Funktion  $\mu : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die Summe aller Elemente einer gegebenen  $n \times n$  Matrix ist. Das Minimum der Funktion  $\mu(M)$  zu suchen, ist äquivalent dazu, das Minimal-Gewicht Subnetzwerk  $\mathcal{G}_m$  zu suchen.

-Wir stellen sicher, dass das Zahlungssystem  $(M, \mathbf{f})$  ausgeglichen ist. Das heißt, die Spaltensumme (Kreditvektor) minus die Zeilensumme (Schuldenvektor) der Matrix  $M$  sind gleich dem Nettopositionsvektor  $\mathbf{f}$  von Matrix  $L$ .

-Wir gehen sicher, dass keine neuen Verbindungslinien zwischen Knoten im Subnetzwerk  $\mathcal{G}_m$  entstehen, die es im obligativen Netzwerk  $\mathcal{G}$  nicht gibt. Dazu überprüfen wir, ob alle Matrix Elemente  $M_{ij}$  einen Wert zwischen 0 und  $L_{ij}$  haben.

Wir definieren diese Punkte als folgendes Optimierungsproblem:

**Problem 13.** Finde die Verbindlichkeitsmatrix  $M$  eines obligativen Netzwerks  $\mathcal{G}_m$ , so dass die Summenfunktion  $\mu$  von  $M$  minimal ist:

$$\min(\mu(M)) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \quad (38)$$

Dabei gelten folgende Bedingungen:

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} - \sum_{j=1}^n M_{ji} = b_i, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (39)$$

$$0 \leq M_{ij} \leq L_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathcal{N} \quad (40)$$

Wir möchten  $M$  finden, da es die Lösung des MCF ist. Die Lösung des MCF Problems gleicht allen Flows von der Liquiditätsquelle  $v_0$  in einen Kreislauf, dargestellt durch Vektor  $\mathbf{b}^-$ , und alles Flows des obligativen Netzwerks zurück zur Liquiditätsquelle, dargestellt durch den Vektor  $\mathbf{b}^+$ . Wir suchen den kürzesten Weg, der die  $NID$  durch das obligative Netzwerk führt.

Wir definieren einen neuen Knoten  $s$ , der als Quelle dient, und verbinden ihn mit allen Knoten, die Firmen mit negativen Nettopositionen  $\mathbf{b}^-$  darstellen. Zusätzlich definieren wir einen Knoten  $t$ , der mit Knoten mit positiver Nettoposition  $\mathbf{b}^+$  verbunden wird. Dann wird der Flow auf den Wert gesetzt, der alle Verpflichtungen ausgleichen kann, d. h.  $NID$  oder  $\|\mathbf{b}^-\|$ . In der Standard MCF Lösung können die Kosten der Flows durch verschiedene Verbindungslinien variieren. Bei uns sind die Kosten des Flows in allen Verbindungslinien gleich, da kein spezifischer Flow oder eine Firma bevorzugt wird. Also werden alle Kosten eines Flows durch eine Verbindungslinie auf 1 gesetzt.

Jeder MDF Algorithmus findet eine Menge von Ketten, die die Maximal-Flow  $NID$  zu minimalen Kosten durch das Netzwerk leiten kann. Es gibt verschiedene Algorithmen um ein MCF Problem zu lösen. Diese Lösungen sind nicht einheitlich, aber die Kosten des Flows durch die Verbindungslinien der Menge des MCF sind immer gleich.

**Theorem 14.** Eine Subtraktion der *Minimale-Kosten Maximaler-Flow Matrix*  $M$  von der Nominalverbindlichkeitsmatrix  $L$  bringt ein ausgeglichenes Zahlungssystem  $(T, \mathbf{0})$ , das keine externe Liquidität benötigt um alle Verpflichtungen auszugleichen:



$$T = L - M \quad (41)$$

$$(42)$$

*Beweis.* Das bedeutet, dass alle Verbindungslinien der verbleibenden Nominalverbindlichkeitsmatrix  $T$  Teil eines Kreislaufs sind. Vektor  $\mathbf{b}$  für die Matrix  $T$  muss  $\mathbf{0}$  sein, da  $T$  ausgeglichen ist:

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} - \sum_{j=1}^n T_{ji} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (43)$$

Wir zeigen, dass diese Aussage immer wahr ist, da  $L$  und  $M$  den gleichen Vektor  $\mathbf{b}$  haben:

$$T_{ij} = L_{ij} - M_{ij} \quad (44)$$

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} - \sum_{j=1}^n T_{ji} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (45)$$

$$\sum_{j=1}^n (L_{ij} - M_{ij}) - \sum_{j=1}^n (L_{ji} - M_{ji}) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (46)$$

$$\sum_{j=1}^n (L_{ij} - L_{ji}) - \sum_{j=1}^n (M_{ij} - M_{ji}) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (47)$$

$$b_i - b_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (48)$$

Damit ist bewiesen, dass  $T$  nur aus Kreisläufen besteht. □

**Korrolar 15.**  $T$  ist ein *Maximal-Gewichtiges* ausgeglichenes Subzahlungssystem.

*Beweis.* Da wir die minimalen Werte der Ketten  $M$  von  $L$  subtrahierten, besteht das verbleibende obligative Netzwerk  $T$  aus den Maximalen Werten der Kreisläufe. Also haben wir ein Maximal-Gewichtiges Subzahlungssystem  $T$ . □

## 6 Verwendung von ausgeglichenen Subzahlungssystemen am Handelskreditmarkt

In den meisten Geschäftssituationen ist nicht genügend Liquidität vorhanden, um alle Verpflichtungen zu begleichen. Daher erweitern wir nun unser Modell.

Das Interessante am Beispiel Handelskreditmarkt ist, dass es dort keine Liquiditätsquellen gibt. In unserem Modell bedeutet das, dass der externe Cashflow Vektor  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  ist. Wir betrachten den Handelskreditmarkt als ein Zahlungssystem  $(L, \mathbf{0})$ . Durch die Anwendung von ausgeglichenen Subzahlungssystemen, ist es nun möglich alle Verpflichtungen auszugleichen.

**Theorem 16.** Die Ausgliederung eines ausgeglichenen Subzahlungssystems aus einem Zahlungssystem verändert den Nettopositionsvektor  $\mathbf{b}$  nicht.

*Beweis.* Wir werden ähnlich vorgehen, wie beim Beweis von Theorem 9. Wir haben eine Nominalverpflichtungsmatrix  $L$  mit Nettopositionsvektor  $\mathbf{b}$ , Kreditvektor  $\mathbf{b}$  und Schuldenvektor  $\mathbf{d}$ . Dann haben wir ein ausgeglichenes Subzahlungssystem  $(T, \mathbf{0})$ . Dieses Zahlungssystem erfüllt die Fluss erhaltende Bedingung. Das bedeutet, dass die Summe des ausfließenden Cashflows  $\|\mathbf{f}^+\|$  gleich der Summe des einfließenden Cashflows  $\|\mathbf{f}^-\|$  ist.

Wir definieren nun wieder einen Ausgleichsvektor  $\mathbf{b}$ , mit  $\mathbf{b}_i$  als Fluss in oder aus einem Knoten  $i$ . Dann ziehen wir das ausgeglichene Subsystem von  $L$  ab:

$$L - T = M \tag{49}$$

$M$  ist nun die Nominalverpflichtungsmatrix des verbleibenden Systems. Wir zeigen nun, dass der Nettopositionsvektor von  $M$  ist gleich dem Nettopositionsvektor von  $L$  ist:

$$b_i = (c_i - p_i) - (d_i - p_i) = c_i - d_i = b_i, \quad \forall i \in \mathcal{N} \tag{50}$$

□

Wir fassen die Methode, um einen maximalen Betrag von Verpflichtungen ohne externe Liquidität auszugleichen, in folgenden Schritten zusammen:

- Verpflichtungen sammeln, um ein obligatives Netzwerk  $\mathcal{G}$  zu formen
- Bilden einer Nominalverpflichtungsmatrix  $L$  und eines Zahlungssystems  $(L, \mathbf{0})$  ohne externe Finanzierung
- Finden eines Maximal-Gewichtigen ausgeglichenen Subzahlungssystems  $T$
- Ausgleich aller Verpflichtungen im Subsystem  $(T, \mathbf{0})$
- Ausgliederung des ausgeglichenen Subsystems:  $L - T = M$
- Die verbleibenden Verpflichtungen bleiben in der Nominalverpflichtungsmatrix  $M$ . Zum Ausgleich dieser Verpflichtungen werden gewöhnliche Bankzahlungssysteme genutzt.

## 7 Mehrfache Cashflow Quellen

In Abb. 9 sehen wir ein Zahlungssystem mit strukturierten Cashflow-Quellen. Der Cashflow Vektor  $\mathbf{f}$  ist in diesem Fall die Summe verschiedener Vektoren.

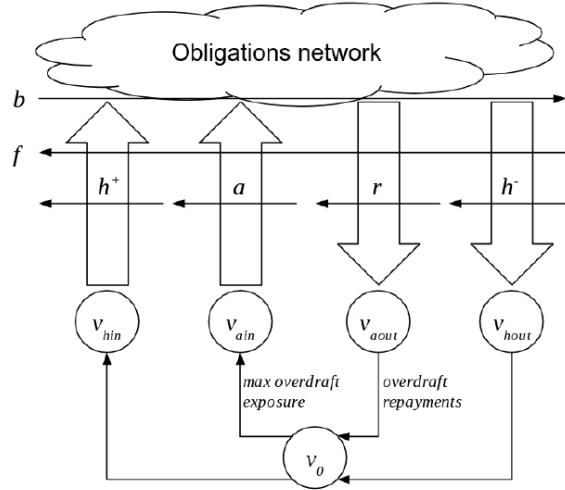


Abb. 9: Ein Zahlungssystem mit Firmenkonten und Kontokorrentkredit

Die Bankkonten sind die erste Liquiditätsquelle aller Firmen im obligativen Netzwerk. Die Konten werden durch den *Vektor der Kontenstände*  $\mathbf{h}^+$  dargestellt, der den erreichbaren Cashflow von Knoten  $v_{hin}$  beschreibt. Die Firmen können von der Bank einen Kontokorrentkredit in Anspruch nehmen. Dabei gibt es für die Firmen einen Maximalbetrag, um den Sie ihr Konto überziehen dürfen. Dieser Maximalbetrag wird durch den *available credit line vector*  $\mathbf{a}$  dargestellt. Der Knoten  $v_{ain}$  ist die Cashflowquelle für Kontokorrentkredite. Die Kapazität Verbindungslinie von  $v_0$  zu  $v_{ain}$  setzt den Maximalbetrag für Kontokorrentkredite  $a^{max} \in \mathbb{R}$ .

Der *Rückzahlungsvektor*  $\mathbf{r}$  stellt die aktuellen Überziehungen der Firma dar. Um die Bankkonten der Firmen auszugleichen, müssen die Firmen  $i$  den Betrag  $r_i$  an die Bank zurückzahlen. Der Knoten  $v_{aout}$  steht dabei für den Cashflow der Rückzahlungen.

Der Knoten  $v_{hout}$  ist definiert, um den verbleibenden Cashflow  $\mathbf{h}^-$  aus dem obligativem Netzwerk, zurück zum kontenhaltenden Knoten  $v_0$  zu bringen. Wir definieren  $\mathbf{a}^A$  als das *genehmigte Überziehungslimit* der Firmen. Also gilt:  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^A - \mathbf{r}$ .

Wenn die negativen Werte des Nettopositionsvektors,  $\mathbf{b}^-$ , in allen Punkten von externen Liquiditätsquellen überschritten werden, kann ein ausgeglichenes Zahlungssystem gebildet werden. Wenn diese Bedingungen zutreffen, können wir formell schreiben:

$$\mathbf{b}^- \leq \mathbf{h}^+ + \mathbf{a}$$

$$\|\mathbf{a}\| \leq a^{max}$$

In diesem Fall gibt es genügend externe Finanzierungsquellen und Überziehungsmöglichkeiten in Firmenkonten um einen externen Finanzierungsvektor  $\mathbf{f}$  zu konstruieren, der die Bedingungen für ein ausgeglichenes Zahlungssystem  $(L, \mathbf{f})$  erfüllt:

$$\mathbf{f} = -\mathbf{b}$$

Falls es nicht möglich ist, die Bedingungen für ein ausgeglichenes Zahlungssystem zu erfüllen, ist es sinnvoll ein ausgeglichenes Subsystem zu finden, dass es ermöglicht, so viele Verpflichtungen wie möglich auszugleichen.

## 8 Optimierung der Verwendung der erreichbaren Liquidität

Wenn man ein Zahlungssystem, wie in Abschnitt 7 beschrieben, optimieren will, sollte man die Idee von Theorem 14 zur Gänze im System anwenden. Dadurch wäre gewährleistet, dass mit den verfügbaren Liquiditätsquellen, der maximale Betrag der Verpflichtungen ausgeglichen werden kann.

Wir möchten die Maximal-Gewichtigen Kreisläufe aus dem Zahlungssystem entfernen. Dazu wird das Zahlungssystem in eine erweiterte Nominalverbindlichkeitsmatrix umgewandelt. Dabei werden die Liquiditätsquellen zu neuen Knoten und die gewünschten Cashflows werden zu neuen Verbindlichkeiten. Also fügen wir die Knoten  $v_0, v_{hin}, v_{hout}, v_{ain}$  und  $v_{aout}$  hinzu.

Der Knoten  $v_0$  ist dann Kreditnehmer gegenüber den Knoten  $v_{hin}$  und  $v_{ain}$ , welche den Cashflow ins obligative Netzwerk darstellen. Die Verbindungslinie  $(v_0, v_{ain})$  ist mit dem Betrag des maximalen Überziehungslimits  $a_{max}$  gewichtet. Die Verbindungslinie  $(v_0, v_{hin})$  ist wird mit dem Betrag des maximalen Cashflows in das obligative Netzwerk  $\|\mathbf{b}^-\|$  gewichtet.

Umgekehrt ist  $v_0$  Kreditgeber für die Knoten  $v_{hout}$  und  $v_{aout}$ , welche den Cashflow aus dem obligativen Netzwerk darstellen. Dabei wird die Verbindungslinie  $(v_{hout}, v_0)$  mit dem maximalen Cashflow aus dem Netzwerk  $\|\mathbf{b}^+\|$  bzw.  $(v_{aout}, v_0)$  mit den aktuellen Überziehungen  $\|\mathbf{r}\|$  gewichtet.

Die erreichbaren Mittel in den individuellen Firmenkonten werden durch den Knoten  $v_{hin}$  dargestellt. Das heißt, für alle Firmen  $i$  mit einem positiven Guthaben, gibt es eine Verbindung zwischen den Knoten  $v_i$  und  $v_{hin}$ , in der Höhe des erreichbaren Guthabens. Dadurch wird sichergestellt, dass der Cashflow von den Firmenkonten niemals das erreichbare Guthaben überschreitet. Wenn eine Firma  $i$  eine genehmigte Kontoüberziehung hat, gibt es eine Verbindung zwischen  $v_i$  und  $v_{ain}$ , in der Höhe der genehmigten Überziehung  $\mathbf{a}^A$  minus der schon getätigten Überziehungen  $\mathbf{r}$ . Der Knoten  $v_{aout}$  stellt die Rückzahlungen von Überziehungen durch Firmen dar.

Sei  $L^*$  diese erweiterte Nominalverbindlichkeitsmatrix. Dann wenden wir einen MCF Algorithmus an, um eine erweiterte Minimale-Kosten Flow Matrix  $M^*$  finden. Mit diesen Resultaten können wir durch folgende Gleichung eine Maximal-Gewicht Menge von Kreisläufen  $T^*$  finden:

$$L^* - M^* = T^*$$

**Theorem 17.** Die erweiterte Maximal-Gewicht Menge von Kreisläufen  $T^*$  gleicht einen maximalen Betrag von Verpflichtungen im obligativen Netzwerk mit der erreichbaren Liquidität aus.

*Beweis.* Die erweiterte Nominalverbindlichkeitsmatrix hat keine externen Liquiditätsquellen. Das bedeutet, um alle Verpflichtungen in  $M^*$  zu begleichen, werden neue Liquiditätsquellen benötigt. Daher nützen die Kreisläufe in  $T^*$  die gesamte in  $L^*$  erreichbare Liquidität, um einen maximalen Betrag von Verpflichtungen im obligativen Netzwerk auszugleichen.

## Literatur

- [1] TOMAZ FLEISCHMANN UND PAOLO DINI: *Balancing the Payment System* arXiv e-prints, November 2020, Bibcode: 2020arXiv20113517F
- [2] H LEINONEN: *Liquidity, risks and speed in payment and settlement systems: A simulation approach*. Bank of Finland, Helsinki, 2005, ISBN 952-462-195-9
- [3] LARRY EISENBERG AND THOMAS H. NOE.: *Systemic risk in financial systems* *Management Science*, 47(2):236-249, 2001 ISSN 00251909, 15265501