Spekulationsblasen in Modellen in diskreter Zeit

Seminararbeit

von

Johanna Suppan
Matrikelnummer: 11810359

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

Wintersemester 2021/22

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

In dieser Seminararbeit wird, basierend auf dem Paper "Bubbles in discrete time models" von Martin Herdegen und Dörte Kreher, eine mathematische Definition für den makroökonomischen Begriff der Spekulationsblase festgehalten und auf ihre Eigenschaften und Anwendungen, insbesondere im Markovmodell, untersucht.

Während zu Spekulationsblasen in Modellen in stetiger Zeit bereits eine umfangreiche Theorie existiert, haben es sich die Autor*innen des oben genannten Papers zur Aufgabe gemacht, den Begriff der Spekulationsblase auch für Modelle in diskreter Zeit zu erschließen. Die gesuchte Definition soll zwei Kriterien erfüllen:

1. Einerseits soll sie mit der Definition der Spekulationsblase in Modellen in stetiger Zeit konsistent sein. Auf diesen Punkt wird im Rahmen dieser Seminararbeit nicht weiter eingegangen.

2. Andererseits soll sie nicht gleichmäßig integrierbare Martingale in zwei Gruppen aufteilen: Solche die Spekulationsblasen sind, und solche die es nicht sind. Insbesondere sollen die diskreten Standardmodelle mit i.i.d.-Returns, wie z.B. das Cox-Ross-Rubinstein Binomial-Modell, nicht in die Gruppe der Spekulationsblasen fallen.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt in sechs Kapitel.

Das Kapitel 2 beschäftigt sich mit Definitionen und Sätzen, die für das Verständnis der anschließenden Kapitel erforderlich sind. Die meisten der angegebenen Begriffe sollten aus den Vorlesungen der erste fünf Semester des Finanz- und Versicherungsmathematik Bachelorstudiums bekannt sein, jedoch nicht alle.

Das Kapitel 3 soll die in dieser Seminararbeit festgehaltene Definition der Spekulationsblase motivieren.

Das Kapitel 4 bildet das Kernstück dieser Seminararbeit. Es wird der Begriff der Spekulationsblase definiert, näher untersucht und mit einigen Beispielen untermalt. Zudem wird auf eine spezielle Teilmenge der betrachteten Prozesse, die Produktmartingale, eingegangen. Insbesondere wird in diesem Kapitel der zweite Punkt der obigen Liste von Bedingungen an die Definition der Spekulationsblase bearbeitet.

Das Kapitel 5 befasst sich mit positiven Markov-Martingalen sowie den zugehörigen Markovkernen und definiert zwei Funktionen, die Funktion der Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung und die relative Markterholungsfunktion. Diese Funktionen werden zur Charakterisierung jener spekulativen Bewertungsmaße, unter denen Markov-Martingale die Definition von Spekulationsblasen erfüllen, genutzt.

Das Kapitel 6 ist das letzte Kapitel dieser Seminararbeit und führt im Kontext der Markov-Martingale der Begriff der Default-Funktion ein.

Die Kapitel 4 bis 6 dieser Seminararbeit stützen sich ausschließlich auf die in Kapitel 2 erläuterten Begriffe und Sätze sowie auf das Paper "Bubbles in discrete time models" von Martin Herdegen und Dörte Kreher. Auf weiteres Zitieren wird in diesen Kapiteln zum Zweck der besseren Lesbarkeit verzichtet.

2 Vorwissen

Definition 2.1 (Bedingter Erwartungswert)**.** $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{A}$ eine Untersigmaalgebra von $\mathcal{S}$ und $X \in \mathcal{L}_1(\mathbb{P})$. Wir nennen Z die bedingte Erwartung von X unter $\mathcal{A}$, wenn Z $\mathcal{A}$-messbar ist und für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Z].$$

Wir schreiben $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$.

Der bedingte Erwartungswert ist linear, additiv und monoton, und es gilt die sogenannte Turmeigenschaft: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Untersigmaalgebren von $\mathcal{S}$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, dann gilt

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]|\mathcal{A}].$$

(Grill, Karl. 2022: 112)

Definition 2.2 (Filtration)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{S})$ eine Messraum. Eine Filtration $\mathbb{F}$ ist eine nichtfallende Folge $(\mathcal{F}_n)$ von Untersigmaalgebren von $\mathcal{S}$. Eine Folge von Zufallsvariablen (X_n) heißt adaptiert (an die Filtration $\mathbb{F}$), wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ X_n $\mathcal{F}_n$-messbar ist.

Die Filtration $\mathbb{F}$ mit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$ heißt die natürliche Filtration der Folge (X_n). (Grill, Karl. 2022: 162)

Definition 2.3 (Martingal)**.** Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ eine Filtration. Eine Folge von Zufallsvariablen (X_n) heißt ($\mathbb{F}$-)Martingal, wenn

(a) sie adaptiert an die Filtration $\mathbb{F}$ ist,
(b) X_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ integrierbar ist, und
(c) für $m \leq n$ gilt

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m.$$

(Grill, Karl. 2022: 162)

Bemerkung 2.4. Man bezeichnet Punkt (c) auch als die Martingaleigenschaft. Eine äquivalente Bedingung lautet: für $n \geq 1$ gilt

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}.$$

Definition 2.5 (Stoppzeit)**.** Ist $\mathbb{F}$ eine Filtration auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$, so nennt man eine Funktion $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ eine Stoppzeit, wenn $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \geq 0$. Die Stoppzeit heißt endlich, wenn $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$. (Kusolitsch, Norbert. 2014: 278)

Definition 2.6 (Gestoppter Prozess)**.** Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess und τ eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$, so bezeichnet man $X^\tau = (X_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $X_{\tau\wedge n}(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)\mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}}(\omega) + X_n(\omega)\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}(\omega)$ als gestoppten Prozess.

Der gestoppte Prozess X^τ ist nicht mit dem "gesampelten" Prozess $X_\tau := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} X_n\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}$ zu verwechseln. (Kusolitsch, Norbert. 2014: 278)

Definition 2.7 (Gleichmäßig intergrierbar)**.** Die Folge (f_n) heißt gleichmäßig integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine integrierbare Funktion $g_\epsilon \geq 0$ existiert, sodass für alle n gilt

$$\int_{\{|f_n|>g_\epsilon\}} |f_n| \leq \epsilon.$$

(Grill, Karl. 2022: 78)

Satz 2.8 (Optional Stopping Theorem)**.** *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $\mathbb{F}$-Martingal und τ eine Stoppzeit. Es sei $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ und X^τ gleichmäßig intergrierbar. Dann ist $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.* (Kusolitsch, Norbert. 2014: 281)

Definition 2.9 (Produktmartingal)**.** Ein Produktmartingal bezeichnet einen Prozess $X_n = \prod_{i=1}^n Y_i$, wobei Y_i unabhängige, nichtnegative Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y_i] = 1$ für alle $i = 1, ..., n$. Ein Produktmartingal ist bezüglich der natürlichen Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal, da

$$\mathbb{E}[X_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i] = 1$$

und

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}X_n|\mathcal{F}_n] = X_n\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n\mathbb{E}[Y_{n+1}] = X_n.$$

(Miermont, Grégory. 2006: 24)

Bemerkung 2.10. Für ein Produktmartingal (X_n) gilt $X_n \to X_\infty \geq 0$ f.s. für $n \to \infty$, da $X_n \geq 0$ für alle n.

Satz 2.11. *(Satz von Kakutani) Sei (X_n) ein Produktmartingal wie in Definition 2.9 definiert. Sei $a_n = \mathbb{E}[\sqrt{Y_n}]$. Dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*
(a) (X_n) ist ein gleichmäßig integrierbares Martingal.
(b) $\mathbb{E}[X_\infty] = 1$.
(c) $\mathbb{P}[X_\infty > 0] > 0$.

(d) $\prod_{n=1}^{\infty} a_n > 0$.
(Miermont, Grégory. 2006: 24)

Satz 2.12 (Doobscher Martingalkonvergenzsatz). *Es sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein Submartingal zur natürlichen Filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und es existiere eine Konstant* $M > 0$ *sodass* $\mathbb{E}[X_n^+] \leq M$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *wobei* $X_n^+ = \max(X_n, 0)$. *Dann existiert eine* $\mathcal{F}_\infty$*-messbare, integrierbare Zufallsvariable* X_∞ *mit* $X_n \to X_\infty$ *für* $n \to \infty$. (Miermont, Grégory. 2006: 28)

Definition 2.13 (Markovkette). Sei P eine $k \times k$-Matrix mit den Einträgen $(P_{ij})_{i,j=1,..,k}$. Ein Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit endlichem Zustandsraum $\{s_0, ..., s_k\}$ heißt Markovkette mit Übergangsmatrix P, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, ..., k\}$ und $i_0, ..., i_{n-1} \in \{1, ..., k\}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_{n+1} = s_j | X_n = s_i, X_{n-1} =& s_{i_{n-1}}, ..., X_0 = s_{i_0}] \\ &= \mathbb{P}[X_{n+1} = s_j | X_n = s_i] = P_{ij}.\end{aligned}$$

(Schomaker, Jens: 2)

Bemerkung 2.14. Die Eigenschaft von Markovketten, nur von der unmittelbaren Vergangenheit abhängig zu sein, bezeichnet man auch als Markov-Eigenschaft.

Definition 2.15 (Markovkern). $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$ seien zwei Messräume. Eine Funktion $p : \Omega_1 \times \mathcal{S}_2 \to [0, \infty)$ heißt Markovkern, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. Für jedes $\omega \in \Omega_1$ ist $p(\omega, .) : \mathcal{S}_2 \to [0, \infty)$ ein Maß.
2. Für jedes $A \in \mathcal{S}_2$ ist $p(., A) : \Omega_1 \to [0, \infty)$ eine $\mathcal{S}_1$-messbare Funktion.

(Grill, Karl. 2022: 113)

Bemerkung 2.16. Über Markovkerne lassen sich Markovprozesse mit unendlichem Zustandsraum definieren. In Kapitel 5 sehen wir beispielsweise, dass der Markovkern die Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung des betrachteten Prozessen festlegt, was wir mit der Funktion a notieren.

3 Motivation

Um die hier gelieferte Definition einer Spekulationsblase zu motivieren, stellen wir uns einen Investor vor, der für ein Investment in ein Asset mit (diskontiertem) Preisprozess $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine simple "buy-and-hold"-Strategie verfolgt. Der Investor kauft das Asset zum Zeitpunkt $k = 0$ und hofft auf einen immer weiter steigenden Preisprozess.

Als der Preisprozess zum ersten Mal fällt, fürchtet der Investor, Geld zu verlieren, und verkauft das Asset.[1] Der fundamentale Wert von S zum Zeitpunkt

[1] An dieser Stelle ist zu bemerken, dass das betrachtete Szenario zwar zu Anschauungszwecken vereinfacht wurde, einige Kleininvestor*innen in der Dotcom-Blase jedoch tatsächlich einer ähnlichen Strategie zu folgen schienen.

0, ausgewertet in Bezug auf die erste Abwärtsbewegung von S, ist $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_{\tau_1}]$, wobei $\tau_1 := \inf\{j > 0 : S_j < S_{j-1}\}$ den Zeitpunkt der ersten Abwärtsbewegung notiert und $\mathbb{P}$ ein äquivalentes Martingalmaß bezeichnet. Da S ein nichtnegatives Supermartingal ist, gilt immer $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_{\tau_1}] \leq S_0$. Ist $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_{\tau_1}] < S_0$, dann ist der fundamentale Wert von S, ausgewertet im Bezug auf die erste Abwärtsbewegung, niedriger als der ursprüngliche Preis von S, und S kann somit als Spekulationsblase betrachtet werden.

Die Voraussetzung, dass S schon mit der ersten Abwärtsbewegung unter den ursprünglichen Preis fällt, ist im Allgemeinen nicht gegeben, weshalb in der folgenden Definition anstatt eines Verlust bei der ersten Abwärtsbewegung ein Verlust bei der k-ten Abwärtsbewegung ausreichend für die Existenz einer Spekulationsblase ist.

4 Begriff der Spekulationsblase

4.1 Definition

Definition 4.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein nichtnegatives $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-Martingal $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ wird Spekulationsblase genannt, wenn

$$\mathbb{E}[S_{\tau_k}] < S_0$$

für ein $k \in \mathbb{N}$, wobei $\tau_0 := 0$ und $\tau_k := \inf\{j > \tau_{k-1} : S_j < S_{j-1}\}$, $k \in \mathbb{N}$, die k-te Abwärtsbewegung von S bezeichnet. $\mathbb{P}$ bezeichnet man auch als spekulatives Bewertungsmaß (*speculative pricing measure*) für S.

Bemerkung 4.2. Unsere Definition lässt die Möglichkeit zu, dass $\mathbb{P}[\tau_k = \infty] > 0$. Nach dem Doobschen Martingalkonvergenzsatz konvergiert das nach unserer Definition nichtnegative Martingal S $\mathbb{P}$-f.s. gegen eine intergrierbare Zufallsvariable S_∞. Damit ist S_{τ_k} jedenfalls wohldefiniert.

Bemerkung 4.3. Mit dem Optional Stopping Theorem können wir folgern, dass S nur eine Spekulationsblase sein kann, wenn es nicht gleichmäßig intgrierbar ist.

Im Folgenden wird ein erstes Beispiel für eine Spekulationsblase in einem vollständigen Marktmodell gegeben.

Beispiel 4.4. Der Prozess $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $S_0 = s_0 > \frac{1}{2}$ und

$$\mathbb{P}\Big[S_k = 2S_{k-1} - \frac{1}{2}\Big|S_{k-1} > \frac{1}{2}\Big] = \mathbb{P}\Big[S_k = \frac{1}{2}\Big|S_{k-1} > \frac{1}{2}\Big] = \frac{1}{2}$$

und

$$\mathbb{P}\Big[S_k = \frac{1}{2}\Big|S_{k-1} = \frac{1}{2}\Big] = 1$$

für $k \in \mathbb{N}$ definiert. S ist ein $\mathbb{P}$-Martingal bezüglich der natürlichen Filtration, da

$$\mathbb{E}[S_k|\mathcal{F}_{k-1}] = \begin{cases} (2 \cdot S_{k-1} - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, & S_{k-1} > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot 1, & S_{k-1} = \frac{1}{2} \end{cases} = S_{k-1}.$$

$\tau_1 < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s., da

$$\mathbb{P}[\tau_1 = \infty] = \mathbb{P}[S_k \geq S_{k-1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}] = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0,$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{\tau_1}] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_1=k\}} S_k\Big] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau_1=k\}} S_k] = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}[\tau_1 = k] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} < s_0 = \mathbb{E}[S_0]. \end{aligned}$$

Also ist S eine Spekulationsblase.

4.2 Charakterisierung

Nun folgt ein Resultat, das zwei äquivalente Charakterisierungen von Spekulationsblasen liefert. Die erste Charakterisierung zeigt, dass ein nichtnegatives Martingal S genau dann eine Spekulationsblase ist, wenn es einen deterministischen Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass S mit der ersten Abwärtsbewegung nach k an Masse verliert. Die zweite liefert eine Charakterisierung über den Grenzwert.

Satz 4.5. *Sei $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ein nichtnegatives Martingal. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei die Stoppzeit τ_1^k definiert durch*

$$\tau_1^k := \inf\{j > k : S_j < S_{j-1}\}.$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) S ist eine Spekulationsblase.

(b) Es existiert ein $k \geq 0$ sodass

$$\mathbb{E}[S_{\tau_1^k}] < \mathbb{E}[S_k].$$

(c) Es existiert ein $k \geq 0$ sodass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}] > 0.$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Kontraposition: Sei (b) nicht wahr, d.h. $\mathbb{E}[S_{\tau_1^k}] = \mathbb{E}[S_k]$ für alle $k \geq 0$. Dann ist der gestoppte Prozess $S^{\tau_1^k}$ gleichmäßig integrierbar. Wir zeigen nun per Induktion, dass $\mathbb{E}[S_{\tau_l}] = \mathbb{E}[S_0]$ für alle $l \geq 0$ folgt, also (a) nicht wahr ist. Der Induktionsanfang $l = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt nehmen wir für ein beliebiges $l \geq 0$ an, dass $\mathbb{E}[S_{\tau_{l-1}}] = \mathbb{E}[S_0]$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{\tau_l}] &= \sum_{k=l-1}^{\infty} \mathbb{E}[S_{\tau_l} \mathbb{1}_{\{\tau_{l-1}=k\}}] + \mathbb{E}[S_\infty \mathbb{1}_{\{\tau_{l-1}=\infty\}}] \\
&= \sum_{k=l-1}^{\infty} \mathbb{E}[S_{\tau_1^k} \mathbb{1}_{\{\tau_{l-1}=k\}}] + \mathbb{E}[S_{\tau_{l-1}} \mathbb{1}_{\{\tau_{l-1}=\infty\}}] \\
&= \sum_{k=l-1}^{\infty} \mathbb{E}[S_{\tau_{l-1}} \mathbb{1}_{\{\tau_{l-1}=k\}}] + \mathbb{E}[S_{\tau_{l-1}} \mathbb{1}_{\{\tau_{l-1}=\infty\}}] \\
&= \mathbb{E}[S_{\tau_{l-1}}] \overset{\text{ind.}}{=} \mathbb{E}[S_0],
\end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichheit das Optional Stopping Theorem benutzt.

(b) $\Rightarrow$ (a). Aus der Martingaleigenschaft von S folgt $\mathbb{E}[S_k] = \mathbb{E}[S_0]$. Zusammen mit der Eigenschaft $\tau_1^k \leq \tau_{k+1}$ folgt daraus die Behauptung.

(b) $\iff$ (c). Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{\tau_1^k}] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{l=k+1}^{n} \mathbb{E}[S_l \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_{l-1} > S_l\}}] + \mathbb{E}[S_\infty \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots\}}] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{l=k+1}^{n} (\mathbb{E}[S_l \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_{l-1}\}}] - \mathbb{E}[S_l \mathbb{1}_{\{S_k \leq \ldots \leq S_l\}}) \\
&\quad + \mathbb{E}[S_\infty \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots\}}] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{l=k+1}^{n} (\mathbb{E}[S_{l-1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_{l-1}\}}] - \mathbb{E}[S_l \mathbb{1}_{\{S_k \leq \ldots \leq S_l\}}) \\
&\quad + \mathbb{E}[S_\infty \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots\}}] \\
&= \mathbb{E}[S_k] + \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(S_\infty - S_n) \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}], \qquad (1)
\end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichheit die Martingaleigenschaft von S benutzt, und die vierte Gleichheit mit einer Teleskopsumme folgt.

□

Korollar 4.6. *Sei $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein nichtnegatives Martingal. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) S ist eine Spekulationsblase.

(b) Es existieren $x \geq 0$ und $k \geq 0$ sodass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(S_n - S_\infty) \mathbb{1}_{\{x \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}] > 0.$$

(c) Für alle $x \geq 0$ existiert ein $k \geq 0$ sodass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(S_n - S_\infty) \mathbb{1}_{\{x \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}] > 0.$$

Beweis. Offensichtlich gilt $(c) \Rightarrow (b)$. (b) impliziert Aussage (c) aus Satz 3.1, welche (a) impliziert. Zu zeigen bleibt also nur noch $(a) \Rightarrow (c)$. Sei $x \geq 0$ fest. Sei also S eine Spekulationsblase. Mit Aussage (b) aus Satz 3.1 und der Martingaleigenschaft von S existiert ein $l \geq 0$ sodass $\mathbb{E}[S_{\tau_1^l}] < \mathbb{E}[S_l] = \mathbb{E}[S_0]$.

Wir definieren die Stoppzeiten $\sigma_{l,x}$ und $\tau_1^{\sigma_{l,x}}$ durch

$$\sigma_{l,x} := \inf\{k \geq l : S_k \geq x\} \text{ und } \tau_1^{\sigma_{l,x}} := \inf\{j > \sigma_{l,x} : S_j < S_{j-1}\}.$$

$\sigma_{l,x}$ ist also die erste Trefferzeit von $[x, \infty)$ nach l, und $\tau_1^{\sigma_{l,x}}$ ist die erste Abwärtsbewegung von S nach $\sigma_{l,x}$. Da $\sigma_{l,x} \geq l$, folgt $\tau_1^{\sigma_{l,x}} \geq \tau_1^l$. Nach Konstruktion von $\sigma_{l,x}$ gilt

$$S_t^{\sigma_{l,x}} \leq \max\{S_0, ..., S_l, S_{\sigma_{l,x}}, x\} \in L^1 \text{ für alle } t \in \mathbb{N}_0,$$

folglich ist der gestoppte Prozess $S^{\sigma_{l,x}}$ gleichmäßig intergrierbar. Mit dem Optional Stopping Theorem folgt $\mathbb{E}[S_{\sigma_{l,x}}] = \mathbb{E}[S_0]$. Da $\tau_1^{\sigma_{l,x}} \geq \tau_1^l$, folgt

$$\mathbb{E}[S_{\tau_1^{\sigma_{l,x}}}] \leq \mathbb{E}[S_{\tau_1^l}] < \mathbb{E}[S_0] = \mathbb{E}[S_{\sigma_{l,x}}].$$

Analog zur Berechnung von (1) zeigt man

$$\mathbb{E}[S_{\tau_1^{\sigma_{l,x}}}] = \mathbb{E}[S_{\sigma_{l,x}}] + \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(S_\infty - S_{\sigma_{l,x}+n})\mathbb{1}_{\{S_{\sigma_{l,x}} \leq S_{\sigma_{l,x}+1} \leq \dots \leq S_{\sigma_{l,x}+n}\}}\mathbb{1}_{\{\sigma_{l,x}<\infty\}}]$$

Daraus kann man zusammen mit der Turmeigenschaft und dem Satz von der dominierten Konvergenz zeigen, dass

$$\mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(S_{\sigma_{l,x}+n} - S_\infty)\mathbb{1}_{\{S_{\sigma_{l,x}} \leq S_{\sigma_{l,x}+1} \leq \dots \leq S_{\sigma_{l,x}+n}\}}|\mathcal{F}_{\sigma_{l,x}}]\mathbb{1}_{\{\sigma_{l,x}<\infty\}}] > 0.$$

Daraus folgt, dass es ein $k \geq l$ gibt, sodass

$$\mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(S_{k+n} - S_\infty)\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \dots \leq S_{k+n}\}}\mathbb{1}_{\{\sigma_{l,x}=k\}}|\mathcal{F}_k]] > 0.$$

Da $S_k \geq x$ in $\{\sigma_{l,x} = k\}$, folgt

$$\mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(S_{k+n} - S_\infty)\mathbb{1}_{\{x \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \dots \leq S_{k+n}\}}|\mathcal{F}_k]] > 0.$$

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz und der Turmeigenschaft folgt die Behauptung. □

Satz 4.5 und Korollar 4.6 benutzen S_∞, über welches man im Allgemeinen wenig Information besitzt. Das folgende Korollar stellt eine Bedingung an S, die die Charakterisierung einer Spekulationsblase ohne S_∞ ermöglicht.

Korollar 4.7. *Sei $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein nichtnegatives Martingal und $x > 0$. Es gelte*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_k < x \textit{ oder } S_k > S_{k+1}|\mathcal{F}_k] = \infty \ \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_\infty \mathbb{1}_{\{x \leq S_k \leq \S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}] = 0.$$

Insbesondere ist S genau dann eine Spekulationsblase, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n \mathbb{1}_{\{x \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}] > 0.$$

Beweis. Mit dem Lemma von Borel-Cantelli gilt, dass

$$\mathbb{P}\big[\liminf_{k\to\infty}\{x \leq S_k \leq S_{k+1}\}\big] = 1 - \mathbb{P}\big[\limsup_{k\to\infty}(\{S_k < x\} \cup \{S_k > S_{k+1}\})\big] = 0.$$

Daraus folgt, dass $\{x \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots\}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine $\mathbb{P}$-Nullmenge ist, womit die erste Behauptung folgt. Die zweite Behauptung folgt mit Korollar 4.6. $\square$

4.3 Produktmartigale

Nun schränken wir die Menge der betrachteten Martingale auf durch das Produkt unabhängiger Zufallsvariablen erzeugte Prozesse ein, die wir auch als Produktmartingale bezeichnen. In die Menge dieser Prozesse fällt offensichtlich auch das Cox-Ross-Rubinstein Marktmodell, das bereits im Vorwort erwähnt wurde und keine Spekulationsblase darstellen soll. Man siehe dazu Beispiel 4.10.

Satz 4.8. *Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_k] = 1$ für $k \in \mathbb{N}$. Sei der Prozess $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch $S_k = \prod_{l=1}^k X_l$ und die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch $\mathcal{F}_k := \sigma(S_0, ..., S_k)$ definiert. Sei außerdem für $k \in \mathbb{N}$*

$$a_k := \mathbb{P}[X_k < 1] \in [0, 1), \quad b_k := \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{\{X_k<1\}}] \in [0, a_k).$$

Dann ist S ein positives $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-Martingal. S ist eine Spekulationsblase genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^\infty a_k = \infty \text{ und } \sum_{k=1}^\infty b_k < \infty.$$

Beweis. Nach Konstruktion ist offensichtlich, dass S ein nichtnegatives $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-Martingal ist.

Zunächst argumentieren wir mit dem Satz von Kakutani für Produktmartingale, dass S gleichmäßig integrierbar ist, falls $\sum_{k=1}^\infty a_k < \infty$. Dabei gilt

$$\infty > \sum_{k=1}^\infty = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[X_k < 1] \geq \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[(1 - \sqrt{X_k})\mathbb{1}_{\{X_k<1\}}] \geq \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[(1 - \sqrt{X_k}].$$

Ist S gleichmäßig integrierbar, so ist S keine Spekulationsblase.

Weiters gilt, falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_k < 1 \text{ oder } S_k > S_{k+1} | \mathcal{F}_k] \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X_{k+1} < 1 | \mathcal{F}_k] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty,$$

wobei die erste Gleichheit die Unabhängigkeit der X_k verwendet.

Damit und mit $x = 1$ sind die Voraussetzungen für Korollar 4.7 erfüllt und es gilt, dass S genau dann eine Spekulationsblase ist, wenn ein $k \geq 0$ existiert, sodass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n \mathbb{1}_{\{1 \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}] &= \mathbb{P}[S_k \geq 1] \prod_{l=k+1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{\{X_k \geq 1\}}] \\ &= \mathbb{P}[S_k \geq 1] \prod_{l=k+1}^{\infty} (1 - b_l) > 0,\end{aligned}$$

wobei $\mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{\{X_k \geq 1\}}] = \mathbb{E}[X_k(1 - \mathbb{1}_{\{X_k < 1\}})] = (1 - b_l)$.

Da $\mathbb{P}[S_k \geq 1] > 0$ und $(1 - b_l) > 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$, ist die obige Ungleichung äquivalent zu $\prod_{l=1}^{\infty}(1 - b_l) > 0$, was wiederum äquivalent zu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ ist. □

Das folgende Beispiel zeigt eine Spekulationsblase $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, in welcher die Abwärtsbewegungen mit wachsendem k immer drastischer werden.

Beispiel 4.9. Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}\big[X_k = \frac{1}{k}\big] = \frac{1}{k} \text{ und } \mathbb{P}\big[X_k = 1 + \frac{1}{k}\big] = 1 - \frac{1}{k}.$$

Sei der Prozess $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch $S_0 = s_0 = 1$ und $S_k = \prod_{l=1}^{k} X_l$, und die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch $\mathcal{F}_k := \sigma(S_0, ..., S_k)$.

Dann ist $a_k = \mathbb{P}[X_k < 1] = \frac{1}{k}$ und $b_k = \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{\{X_k < 1\}}] = \frac{1}{k^2}$. Folglich gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

also ist S eine Spekulationsblase.

Beispiel 4.10. Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_k] = 1$ und $\mathbb{P}[X_k \neq 1] > 0$. Der Prozess $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $S_0 = s_0 = 1$ und $S_k = \prod_{l=1}^{k} X_l$, und die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch $\mathcal{F}_k := \sigma(S_0, ..., S_k)$.

Dann ist S ein Martingal, da für $k \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}[S_{k+1}|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[X_{k+1}]\ \mathbb{E}[S_k|\mathcal{F}_k] = 1 \cdot S_k = S_k.$$

Jedoch erhalten wir mit $b_k = \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{\{X_k < 1\}}] = b > 0$, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Damit ist S keine Spekulationsblase.

Bemerkung 4.11. Mit Beispiel 4.10 haben wir also gezeigt, dass die diskreten Standardmodelle mit i.i.d.-Returns nicht in unsere Definition der Spekulationsblase fallen.

5 Charakterisierung von spekulativen Bewertungsmaßen für Markov Martingale

In diesem Kapitel bezeichnen wir mit $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein positives Markov-Martingal mit Markovkern $K : (0,\infty) \times \mathcal{B}_{(0,\infty)} \to [0,\infty)$, wobei $S_0 = x > 0$. Ziel des Kapitels ist es, Bedingungen an der Markovkern $K(x, \mathrm{d}y)$ zu finden, sodass $\mathbb{P}_x$ ein spekulatives Bewertungsmaß ist. Dazu definieren wir zunächst die Funktionen $a, b : (0,\infty) \to [0,1)$ durch

$$\begin{aligned}
a(x) &:= \mathbb{P}_x[S_1 < x] = \int_{[0,x)} K(x, \mathrm{d}y), \\
b(x) &:= \mathbb{E}_x\left[\frac{S_1}{x}\mathbb{1}_{\{S_1<x\}}\right] = \int_{[0,1)} \frac{y}{x} K(x, \mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

Die Funktion $a(x)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung, die Funktion $b(x)$ die relative Markterholung im Fall einer Abwärtsbewegung.

Im folgenden Korollar werden wir zunächst zeigen, dass S nur dann eine Spekulationsblase sein kann, wenn die relative Markterholungsfunktion $b(x)$ in der Unendlichkeit gegen Null konvergiert.

Korollar 5.1. *Es sei* $\liminf_{x\to\infty} b(x) > 0$. *Dann ist S keine Spekulationsblase unter $\mathbb{P}_x$ für alle $x \in (0,\infty)$.*

Beweis. Nach Annahme existieren $x_0 > 0$ und $\epsilon \in (0,1)$, sodass $b(x) \geq \epsilon$ für alle $x \geq x_0$. Wähle $x \in (0,\infty)$. Mithilfe von Korollar 4.6 und da $S_\infty \geq 0$ ist es ausreichend zu zeigen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{x_0\leq S_k\leq S_{k+1}\leq\ldots\leq S_n\}}] \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[S_n\mathbb{1}_{\{x_0\leq S_k\leq S_{k+1}\leq\ldots\leq S_n\}}] = 0.$$

Sei also $k < n$. Mit der Markoveigenschaft und der Definition der relativen Markterholungsfunktion $b(x)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x[S_n\mathbb{1}_{\{x_0\leq S_k\leq S_{k+1}\leq\ldots\leq S_n\}}] \\
&\quad = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[\frac{S_n}{S_{n-1}}\mathbb{1}_{\{S_n\geq S_{n-1}\}}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right]S_{n-1}\mathbb{1}_{\{x_0\leq S_k\leq S_{k+1}\leq\ldots\leq S_{n-1}\}}\right] \\
&\quad = \mathbb{E}_x[(1-b(S_{n-1}))S_{n-1}\mathbb{1}_{\{x_0\leq S_k\leq S_{k+1}\leq\ldots\leq S_{n-1}\}}] \\
&\quad \leq (1-\epsilon)\mathbb{E}_x[S_{n-1}\mathbb{1}_{\{x_0\leq S_k\leq S_{k+1}\leq\ldots\leq S_{n-1}\}}] \\
&\quad \leq \ldots \leq (1-\epsilon)^{n-k}\mathbb{E}_x[S_k\mathbb{1}_{\{x_0\leq S_k\}}] \\
&\quad \leq (1-\epsilon)^{n-k}x.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung benutzt

$$\mathbb{E}_x[S_k \mathbb{1}_{\{x_0 \leq S_k\}}] = \mathbb{E}_x[S_k] - \mathbb{E}_x[S_k \mathbb{1}_{\{x_0 > S_k\}}] = x - b(x_0) \leq x.$$

Betrachtet man nun $n \to \infty$, so folgt die Behauptung. $\square$

Nun stellen wir eine milde Bedingung an die Funktion $a(x)$, die uns eine Charakterisierung des Verhaltens einer Spekulationsblase S ohne die Verwendung von S_∞ ermöglicht.

Annahme 5.2. *Es existiert ein $x_a > 0$, sodass $\inf_{x \in [x_a, y]} a(x) > 0$ für alle $y > x_a$.*

Bemerkung 5.3. Annahme 5.2 werden wir im Folgenden mehrmals als gegeben voraussetzen. Sie ist insbesondere erfüllt, wenn $a(x)$ positiv und linksstetig ist.

Korollar 5.4. *Sei Annahme 5.2 für ein $x_a > 0$ erfüllt. Sei $x' \geq x_a$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_x[S_\infty \mathbb{1}_{\{x' \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}] = 0.$$

Weiters ist S eine Spekulationsblase unter $\mathbb{P}_x$ genau dann, wenn ein $k \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_x[S_n \mathbb{1}_{\{x' \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}] > 0.$$

Beweis. Unter Verwendung von Korollar 4.7 ist es ausreichend zu überprüfen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_k < x' \text{ oder } S_k > S_{k+1} | \mathcal{F}_k] = \infty,$$

was äquivalent zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{1}_{\{S_k < x'\}} + a(S_k) \mathbb{1}_{\{S_k \geq x'\}}) = \infty \quad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle: Wenn $\omega \in \limsup_{k \to \infty} \{S_k < x'\}$, dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_k < x'\}}(\omega) = \infty,$$

und wenn $\omega \in \liminf_{k \to \infty} \{S_k \geq x'\} \cap \{\sup_{k \geq 0} S_k < \infty\}$, dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a(S_k(\omega)) \mathbb{1}_{\{S_k \geq x'\}}(\omega) = \infty$$

wegen der Annahme über $a(x)$. Da wegen dem Doobschen Martingalkonvergenzsatz $\sup_{\{k \geq 0\}} S_k < \infty$ $\mathbb{P}_x$-f.s. gilt, folgt die Behauptung. $\square$

Nun wollen wir eine hinreichende Bedingung angeben, damit S eine Spekulationsblase ist. Zu diesem Zweck müssen wir die Definition der relativen Markterholungsfunktion $b(x)$ leicht abschwächen: Für $\epsilon > 0$ sei die Funktion $b_\epsilon : (0,\infty) \to (0,1]$ gegeben durch

$$b_\epsilon(x) := \mathbb{E}_x\left[\frac{S_1}{x}\mathbb{1}_{\{S_1 < x(1+\epsilon)\}}\right] = \int_{[0,x(1+\epsilon))} \frac{y}{x} K(x, \mathrm{d}y).$$

Satz 5.5. *Sei Annahme 5.2 erfüllt und es existiere $\epsilon > 0$ und $x_b > 0$ sodass die Funktion b_ϵ nichtwachsend für alle $x \geq x_b$ ist und*

$$\int_{\log(x_b)}^{\infty} b_\epsilon(\exp(x))dx < \infty$$

erfüllt. Dann ist S unter jedem $\mathbb{P}_x$ eine Spekulationsblase, für welches S nicht $\mathbb{P}_x$-f.s. beschränkt ist.

Beweis. Sei S nicht $\mathbb{P}_x$-f.s. beschränkt. Sei x_a die Konstante aus Annahme 5.2. Wir dürfen oBdA annehmen, dass $x_b \geq x_a$. Nach Korollar 5.4 ist es ausreichend zu zeigen, dass ein $k \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[S_n \mathbb{1}_{\{x_b \leq S_k \leq \ldots \leq S_{k+n}\}}] \\ &\qquad \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\left[S_k \mathbb{1}_{\{S_k \geq x_b\}} \prod_{j=1}^{n} \frac{S_{k+j}}{S_{k+j-1}} \mathbb{1}_{\{S_{k+j} \geq S_{k+j-1}(1+\epsilon)\}}\right] > 0.\end{aligned}$$

Da S nicht $\mathbb{P}_x$-f.s. beschränkt ist, existiert eine $k \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\mathbb{E}_x[S_k \mathbb{1}_{\{S_k \geq x_b\}}] > 0.$$

Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition von b_ϵ erhalten wir für $j \in \{1, ..., n\}$

$$\mathbb{E}_x\left[\frac{S_{k+j}}{S_{k+j-1}} \mathbb{1}_{\{S_{j+k-1}(1+\epsilon) \leq S_{j+k}\}} \middle| \mathcal{F}_{k+j-1}\right] = (1 - b_\epsilon(S_{k+j-1})) \ \ \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

Dieses Ergebnis liefert und zusammen mit der Turmeigenschaft der bedingten Erwartung und der Annahme, dass b_ϵ nichtwachsend für $x \geq x_b$ ist, dass

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\left[S_k \mathbb{1}_{\{S_k \geq x_b\}} \prod_{j=1}^{n} \frac{S_{k+j}}{S_{k+j-1}} \mathbb{1}_{\{S_{k+j} \geq S_{k+j-1}(1+\epsilon)\}}\right] \\ &\quad = \mathbb{E}_x\left[S_k \mathbb{1}_{\{S_k \geq x_b\}} \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{S_{k+j}}{S_{k+j-1}} \mathbb{1}_{\{S_{k+j} \geq S_{k+j-1}(1+\epsilon)\}}\right)(1 - b_\epsilon(S_{k+n-1}))\right] \\ &\quad \geq \mathbb{E}_x\left[S_k \mathbb{1}_{\{S_k \geq x_b\}} \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{S_{k+j}}{S_{k+j-1}} \mathbb{1}_{\{S_{k+j} \geq S_{k+j-1}(1+\epsilon)\}}\right)(1 - b_\epsilon(x_b(1+\epsilon)^{n-1})\right] \\ &\quad \geq \mathbb{E}_x\left[S_k \mathbb{1}_{\{S_k \geq x_b\}} \prod_{j=0}^{n-1}(1 - b\epsilon(x_b(1+\epsilon)^j))\right] \\ &\quad = \mathbb{E}_x[S_k \mathbb{1}_{\{S_k \geq x_b\}}] \prod_{j=0}^{n-1}(1 - b_\epsilon(x_b(1+\epsilon)^j)).\end{aligned}$$

Somit ist nun noch zu zeigen, dass $\prod_{j=0}^{n-1}(1 - b_\epsilon(x_b(1+\epsilon)^j)) > 0$. Dies lässt sich zu $\sum_{j=0}^{\infty} b_\epsilon(\exp(\log(x_b) + j\log(1+\epsilon))) < \infty$ umformulieren, was mit dem Integralkriterium für unendliche Reihen und der Substitution

$$\begin{aligned} y &= \log(x_b) + x\log(1+\epsilon) \\ dx &= dy/\log(1+\epsilon) \end{aligned}$$

äquivalent zu $\int_{\log(x_b)}^{\infty} b_\epsilon(\exp(x))dx < \infty$ ist. Dies ist nach Annahme erfüllt, damit folgt die Behauptung. □

Dieses Resultat wollen wir nun im Rahmen des folgenden Beispiels anwenden.

Beispiel 5.6. Sei ein Markovkern durch

$$K(x, \mathrm{d}y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(0,1)}(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(2x-1,2x)}(y)\mathrm{d}y & \text{falls } x > 1, \\ \frac{1}{2x}\mathbb{1}_{(0,2x)}(y)\mathrm{d}y & \text{falls } x \le 1. \end{cases}$$

gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} a(x) &= \int_{[0,x)} K(x, \mathrm{d}y) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{[0,x)} \mathbb{1}_{(0,1)}(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{[0,x)} \mathbb{1}_{(2x-1,2x)}(y)\mathrm{d}y & \text{falls } x > 1, \\ \frac{1}{2}\int_{[0,x)} \frac{1}{x}\mathbb{1}_{(0,2x)}(y)\mathrm{d}y & \text{falls } x \le 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}y\Big|_0^1 & \text{falls } x > 1, \\ \frac{1}{2}\frac{y}{x}\Big|_0^x & \text{falls } x \le 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Der Term $\int_{[0,x)} \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(2x-1,2x)}(y)\mathrm{d}y$ im Fall $x \ge 1$ fällt weg, da wegen $x \ge 1$ $\frac{1}{2}y\mathbb{1}_{(2x-1,2x)}(y)\Big|_0^x = 0$. Da $a(x) = \frac{1}{2}$ konstant größer Null ist, ist Annahme 5.2 trivialerweise erfüllt.

Weiters ist für $\epsilon \in (0,1)$

$$
\begin{aligned}
b_\epsilon(x) &= \int_{[0,x(1+\epsilon))} \frac{y}{x} K(x,\mathrm{d}y) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{[0,x(1+\epsilon))} \frac{y}{x}\mathbb{1}_{(0,1)}(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{[0,x(1+\epsilon))} \frac{y}{x}\mathbb{1}_{(2x-1,2x)}(y)\mathrm{d}y & \text{falls } x > 1, \\ \frac{1}{2}\int_{[0,x(1+\epsilon))} \frac{y}{x^2}\mathbb{1}_{(0,2x)}(y)\mathrm{d}y & \text{falls } x \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{y^2}{2x}\mathbb{1}_{(0,1)}(y)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{2x}\mathbb{1}_{(2x-1,2x)}(y)\Big|_{2x-1}^{x(1+\epsilon)} & \text{falls } x > 1, \\ \frac{1}{2}\frac{y^2}{2x^2}\Big|_0^{x(1+\epsilon)} & \text{falls } x \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4x} + \left(x\frac{(1+\epsilon)^2}{4} - \frac{1}{4}\frac{(2x-1)^2}{2x}\right)\mathbb{1}_{\{x<\frac{1}{1-\epsilon}\}}(x) & \text{falls } x > 1, \\ \frac{(1+\epsilon)^2}{4} & \text{falls } x \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis lässt sich zu

$$b_\epsilon(x) = \frac{(1+\epsilon)^2}{4}\mathbb{1}_{\{x\leq 1\}} + (1 - x(1 - \frac{(1+\epsilon)^2}{4}))\mathbb{1}_{\{1<x<\frac{1}{1-\epsilon}\}} + \frac{1}{4x}\mathbb{1}_{\{x\geq\frac{1}{1-\epsilon}\}}$$

umschreiben. Die Indikatorfunktionen ergeben sich, da $2x - 1 < x(1-\epsilon)$ für $\epsilon \in (0,1)$ äquivalent zu $x < \frac{1}{1-\epsilon}$ ist.

Für ein beliebiges $\epsilon \in (0,1)$ und $x_b := \frac{1}{1-\epsilon}$ ist die Funktion b_ϵ also nichtwachsend für alle $x \geq x_b$.

Nun ist

$$\int_{\log(x_b)}^{\infty} b_\epsilon(\exp(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{\log(\frac{1}{1-\epsilon})}^{\infty} \frac{1}{\exp(x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\frac{1}{\exp(x)}\Big|_{\log(\frac{1}{1-\epsilon})}^{\infty} < \infty.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 5.5 erfüllt. S ist also eine Spekulationsblase unter allen $\mathbb{P}_x$, für die S nicht $\mathbb{P}_x$-f.s. beschränkt ist. Dies ist für alle $\mathbb{P}_x$, $x > 0$, erfüllt, da $a(x) = \frac{1}{2} < 1$ für alle $x > 0$.

Bemerkung 5.7. Beispiel 5.6 bietet eine ähnliche Situation wie Beispiel 4.4 im vorherigen Kapitel. Die Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung, zuvor explizit angegeben, wird nun über die Funktion a berechnet und beträgt in beiden Beispielen $\frac{1}{2}$. Das Ausmaß einer Abwärtsbewegung, das wir im Kontext dieses Kapitels nun mit der Markterholungsfunktion b bzw. b_ϵ quantifizieren können, wird in Beispiel 5.6 mit wachsendem x immer drastischer, da $b_\epsilon(x) = \frac{1}{4x}$, wobei $x \geq x_b$, für $x \to \infty$ gegen 0 geht. Im Beispiel 4.4 war eine Erholung gänzlich unmöglich.

Während Korollar 5.1 und Satz 5.5 im Allgemeinen nützliche hinreichende Bedingungen an das Vorliegen bzw. Ausbleiben einer Spekulationsblase stellen, liefern sie keine notwendigen Bedingungen. Im folgenden Satz werden wir eine hinreichende und notwendige Charakterisierung von Spekulationsblase angeben, indem wir milde Anforderungen an die Funktionen a und b stellen.

Satz 5.8. *Sei ein Markovkern gegeben durch*

$$K(x,dy) = a(x)\delta_{\frac{b(x)x}{a(x)}}(\mathrm{d}y) + (1-a(x))\delta_{\frac{(1-b(x))x}{1-a(x)}}(\mathrm{d}y),$$

wobei $0 \le b(x) < a(x) < 1$ *und* $0 < \liminf_{x\to\infty} a(x) \le \limsup_{x\to\infty} a(x) < 1$. *Weiters existiere ein* $x_b > 0$ *sodass die Funktion* b *für* $x \ge x_b$ *nichtwachsend sei. Dann ist* S *genau dann eine Spekulationsblase, wenn* S *nicht* $\mathbb{P}_x$*-f.s. beschränkt ist und* $\int_{\log(x_b)}^{\infty} b(\exp(x))\mathrm{d}x < \infty$.

Beweis. Sei S nicht $\mathbb{P}_x$-f.s. beschränkt. Da aus $\lim_{x\to\infty} b(x) > 0$ einerseits $\int_{log(x_b)}^{\infty} b(exp(x))\mathrm{d}x = \infty$ folgt, und andererseits nach Korollar 5.1 keine Spekulationsblase sein kann, müssen wir nur noch den Fall $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$ betrachten.

Mit $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$ und $0 < \liminf_{x\to\infty} a(x) \le \limsup_{x\to\infty} a(x) < 1$, sowie einem falls notwendig passend vergrößerten x_b, dürfen wir annehmen, dass $0 < c < C$ existieren, sodass $1 + c \le \frac{1-b(x)}{1-a(x)} \le 1 + C$ für alle $x \ge x_b$. Nach Korollar 5.4 ist S eine Spekulationsblase unter $\mathbb{P}_x$ genau dann, wenn ein $k \ge 0$ existiert, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[S_n \mathbb{1}_{\{x_b \le S_k \le S_{k+1} \le \ldots \le S_{k+n}\}}] > 0.$$

Wegen $\{S_j \le S_{j+1}\} = \{S_{j+1} = \frac{1-b(S_j)}{1-a(S_j)} S_j\}$ für $j \in \mathbb{N}_0$ und einer Argumentation wie im Beweis von Satz 5.5 erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[S_k \mathbb{1}_{\{S_k \ge x_b\}}] \prod_{j=0}^{n-1} (1 - b(x_b(1+C)^j)) &\ge \mathbb{E}_x[S_n \mathbb{1}_{\{x_b \le S_k \le S_{k+1} \le \ldots \le S_{k+n}\}}] \\ &\ge \mathbb{E}_x[S_k \mathbb{1}_{\{S_k \ge x_b\}}] \prod_{j=0}^{n-1} (1 - b(x_b(1+c)^j)).\end{aligned}$$

Für $\gamma \in \{c, C\}$ gilt genau dann

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 - b(x_b(1+\gamma)^j) > 0,$$

wenn

$$\sum_{j=0}^{\infty} b(\exp(\log(x_b) + \log(1+\gamma)j)) < \infty,$$

was äquivalent zu $\int_{\log(x_b)}^{\infty} b(\exp(x))\mathrm{d}x < \infty$ ist (vergleiche den Beweis von Satz 5.5). Damit folgt die Behauptung. $\square$

6 Die Default-Funktion von Markov-Martingalen

Im letzten Kapitel dieser Arbeit beschäftigen wir uns weiterhin mit Markov-Martingalen. Wir nehmen an, dass $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine positives Markov-

Martingal mit Markovkern $K : (0, \infty) \times \mathcal{B}_{(0,\infty)} \to [0, \infty)$ ist, angefangen mit $S_0 = x > 0$. Wir führen zum Abschluss noch einen neuen Begriff zur weiteren Untersuchung von Spekulationsblasen ein, die Default-Funktion von S.

Definition 6.1. Die Borel-messbare Funktion $M_S : (0, \infty) \to [0, \infty)$, gegeben durch

$$M_S(x) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{S_n \geq S_{n-1} \geq \ldots \geq S_1 \geq x\}}],$$

wird als Default-Funktion von S bezeichnet.

Bemerkung 6.2. Die Funktion M_S ist Borel-messbar, da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$x \mapsto \mathbb{E}_x[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{S_n \geq S_{n-1} \geq \ldots \geq S_1 \geq S_0\}}]$$

Borel-messbar ist, und somit auch M_S als Grenzwert dieser Funktionen.

Bemerkung 6.3. Man sieht, dass $M_S(x) = \mathbb{E}_x[S_{\tau_1}]$. M_S quantifiziert also den Massenverlust bei der ersten Abwärtsbewegung von S. Offensichtlich ist $\mathbb{P}_x$ ein spekulatives Bewertungsmaß für S, wenn $M_S(x) > 0$, da dann mit $k = 1$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\mathbb{E}_x[S_{\tau_k}] < S_0$, was unserer ursprünglichen Definition einer Spekulationsblase entspricht.

Die folgenden beiden Resultate zeigen, dass die Funktion M_S im Grunde das Verhalten von S als Spekulationsblase unter $\mathbb{P}_x$ für alle $x > 0$ vollständig beschreibt.

Korollar 6.4. *Sei $M_S(x) = 0$ für alle $x \geq x'$ für ein $x' > 0$. Dann ist $M_S(x) = 0$ für alle $x > 0$ und $\mathbb{P}_x$ ist für kein $x > 0$ eine spekulatives Bewertungsmaß für S.*

Beweis. Wir fixieren ein $x > 0$.

Dann gilt mit der Markoveigenschaft, dem Satz von der dominierten Konvergenz und der Annahme, dass $M_S(x) = 0$ für alle $x \geq x'$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{x' \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_x[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{x' \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}]\Big] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_{S_k}[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}]\mathbb{1}_{\{S_k \geq x'\}}\Big] \\
&\quad = \mathbb{E}_x\Big[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{S_k}[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}]\mathbb{1}_{\{S_k \geq x'\}}\Big] \\
&\quad = \mathbb{E}_x\Big[M_S(S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \geq x'\}}\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Mit Korollar 4.6 folgt, dass S keine Spekulationsblase unter $\mathbb{P}_x$ ist. Per Kontraposition folgt damit $M_S(x) = 0$. □

Korollar 6.5. *Sei $\liminf_{x\to\infty} M_S(x) > 0$. Dann ist S eine Spekulationsblase unter $\mathbb{P}_x$ für alle $x > 0$, für die S nicht $\mathbb{P}_x$-f.s. beschränkt ist.*

Beweis. Wir fixieren ein $x > 0$ und nehmen an, dass S nicht $\mathbb{P}_x$-f.s. beschränkt ist. Nach Annahme existiert ein $x' \geq x$, sodass $M_S(y)$ für alle $y \geq x'$.

Da S nach Annahme nicht $\mathbb{P}_x$-f.s. beschränkt ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$, sodass $\mathbb{P}_x[S_k \geq x'] > 0$. Es folgt mit der Markoveigenschaft, dem Satz von der dominierten Konvergenz und der Wahl von x', dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{x' \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}] \\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_x[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{x' \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}]\Big] \\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_{S_k}[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}]\mathbb{1}_{\{S_k \geq x'\}}\Big] \\
&\qquad = \mathbb{E}_x\Big[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{S_k}[(S_n - S_\infty)\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k+1} \leq \ldots \leq S_n\}}]\mathbb{1}_{\{S_k \geq x'\}}\Big] \\
&\qquad = \mathbb{E}_x\Big[M_S(S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \geq x'\}}\Big] > 0.
\end{aligned}$$

Nach Korollar 4.6 ist S damit eine Spekulationsblase unter $\mathbb{P}_x$. $\square$

7 Literaturverzeichnis

Herdegen, Martin & Kreher, Dörte. 2021. *Bubbles in discrete time models.*

Grill, Karl. 2022(2016). *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie.* Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik. TU Wien.

Kusolitsch, Norbert. 2014(2011). *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer Spektrum. Heidelberg.

Miermont, Grégory. 2006. *Advanced Probability.* University of Cambridge.

Schomaker, Jens. *Einführung in die Theorie der Markov-Ketten.*