SEMINARARBEIT

Rating Based Modeling of Credit Risk. Theory and Application of Migration Matrices.

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

**Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Stefan GERHOLD**

durch

Marisa SKOLKA
Matrikelnummer: 11913115

Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Thema Kreditrisiko ist nach wie vor das größte Problem für die Banken. Gerade deshalb müssen die Banken das Kreditrisiko erkennen, überwachen und kontrollieren sowie eine angemessene Eigenkapitalausstattung sicherstellen, um dem Risiko vorzugreifen. Wie schon von mehreren Instituten bestätigt, kann das Kreditrisiko, bzw. eine geringe Kreditqualität und eine schlechte Kreditbewertung einen Ausfall und das Scheitern einer Bank verursachen. Somit ist ein gutes Ratingsystem essenziell für das Kreditwesen. Um ein stabiles und möglichst einheitliches Ratingsystem zu erhalten, beschließt der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht Richtlinien und Empfehlungen. In Folge einer Krise und des Konkurses mehrerer Banken wurde dieser Ausschuss 1974 von den Zentralbanken und Bankaufsichtsbehörden der G10-Staaten gegründet. Daher ist die Hauptaufgabe des Ausschusses für die Einführung von hoher und möglichst einheitlicher Standards in der Bankenaufsicht zu sorgen, indem sie Richtlinien und Empfehlungen, auf die sich die Aufsichtsbehörden eines Landes beziehen können, beschließen. Basel II erlaubt es den Banken, ihre Eigenkapitalanforderungen sowohl auf interne als auch auf externe Ratingsysteme zu stützen. Daher werden ausgefeilte Kreditrisikomodelle entwickelt oder von den Banken gefordert, um das Risiko ihres Kreditportfolios besser bewerten zu können, indem die verschiedenen zugrunde liegenden Risikoquellen berücksichtigt werden. Infolgedessen sind Ausfallwahrscheinlichkeiten für bestimmte Rating-Kategorien, aber auch die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang von einem Rating-Status zu einem anderen, ein wichtiger Aspekt in solchen Modellen für Risikomanagement und Preisgestaltung.

Diese Seminararbeit befasst sich mit dem Buch 'Rating Based Modeling of Credit Risk. Theory and Application of Migration Matrices' von Stefan Trueck und Svetlozar T. Rachev. Die Arbeit ist in zwei große Bereiche aufgeteilt. Der erste Teil beschäftigt sich im allgemeinen mit dem Kreditwesen. Dieses Thema beinhaltet grundlegende Definitionen vom Kreditwesen, die Idee vom Rating, genauso wie das Bewertungsverfahren. Zusätzlich wird eine mögliche Scoring-Technik, die sogenannte Diskriminanz-Analyse, erläutert. Im zweiten Teil steht vor allem der mathematische Aspekt im Fokus. Es wird die Idee und die Definition der Migrationsmatrix erklärt, wie diese in verschiedenen Zeitformen berechnet wird und welche Rolle die Generatormatrix dabei spielt. Passend dazu werden Beispiele zur Anwendung gezeigt.

2 Kreditwesen

Da das Kreditrisiko im letzten Jahrzehnt zu einem der am intensivsten untersuchten Themen im Bereich der Finanzwirtschaft geworden ist, muss man die grundlegenden Definitionen kennen.
Im alltäglichen Leben wird oft der Begriff Kredit mit dem Bankkredit assoziiert, da auch dieser die wichtigste und bekannteste Kreditform darstellt. Somit gelten auch die Bankinstitute als die wichtigsten Kreditgeber der Wirtschaft.

2.1 Kreditmanagement

Der Ursprung des Wortes Kredit kommt von dem lateinischen Verb „credere“, was übersetzt „glauben, vertrauen“ bedeutet. Bei einem Kredit vertraut man einer weiteren Person einen Teil seines Vermögens an mit dem Glauben, dass diese es nach einem befristeten Zeitraum zurückzahlt. Ein Kredit wird somit als eine Verbindlichkeit zwischen einem Kreditnehmer und einem Kreditgeber definiert. Für ein befristetes Zeitintervall übergibt der Kreditgeber einen Vermögenswert, meistens Geld, an den Kreditnehmer, der sich dazu verpflichtet, den Wert auszugleichen und zusätzlich für eine Gegenleistung zu sorgen, meistens in der Form von Kreditzinsen.

Wenn nun ein Kreditinstitut einen Kredit vergibt, geht dieses auch ein Risiko ein, das Kreditrisiko. Darunter versteht man ein Wagnis, dass der Kreditnehmer seinen Verpflichtungen bzw. seinen Verbindlichkeiten nicht nachkommen kann. Dieses Risiko kann man im Bankmanagement in Migrations- und Ausfallrisiko untergliedern. Das Migrationsrisiko ist die Gefahr, dass sich die Bonität des Kreditnehmers verschlechtert und deshalb der Marktpreis der Anleihe oder des Kredits sinkt. Um dieses Risiko einzuschätzen, verwendet man in dem Fall Ratingklassen. Die Veränderung der Bonität wird dann durch einen Wechsel der Ratingklassen widergespiegelt. Das Ausfallrisiko ist somit ein Sonderfall des Migrationsrisikos. Wie der Begriff schon andeutet, geht es um den Zahlungsausfall, das heißt, der Kreditnehmer kann seine Schulden nicht mehr begleichen. Wenn so ein Fall eintritt, wird dieser Kreditnehmer in die schlechteste Ratingklasse herabgestuft.
Durch dieses Risiko versucht man im Interesse der Banken ein Ratingsystem zu erstellen, welches den Kunden bzgl. seiner Bonität einstuft. Unter Bonität versteht man den Ruf einer Person oder Firma im Hinblick auf ihre Zahlungsfähigkeit oder Kreditwürdigkeit. Somit können Banken daran ermessen, welches Risiko sie eingehen.

2.2 Rating

2.2.1 Alltägliches Beispiel

Fitch bestätigte Österreich-Rating mit „AA+“

23. Oktober 2021, 8.42 Uhr

Teilen

Die Ratingagentur Fitch hat die Kreditwürdigkeit der Republik Österreich erneut auf der zweitbesten Note „AA+“ mit stabilem Ausblick belassen. Zuletzt hatte die Agentur im Mai das Österreich-Rating bestätigt.

Abb. 1: Ausschnitt eines Artikels, veröffentlicht vom ORF im Oktober 2021

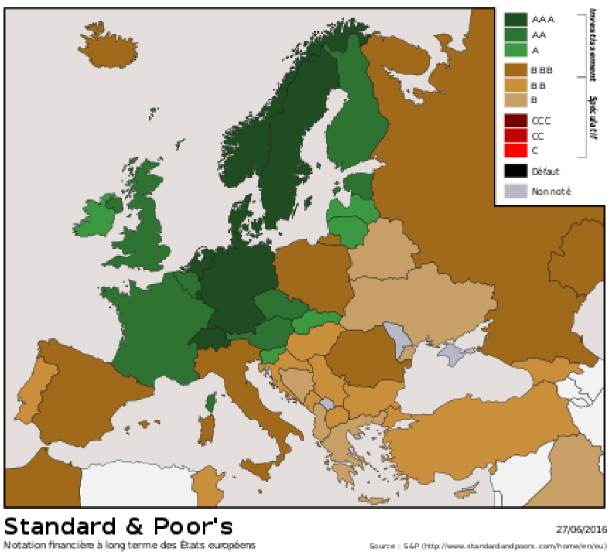

Abb. 2: Rating europäischer Staaten durch Standard & Poor’s;
Stand: 27. Juni 2016

Beide Abbildungen beschäftigen sich mit Ratings eines oder mehrerer Staaten. In Abbildung 1 bezieht sich das Rating auf Österreich, während sich die Abbildung 2 dem Rating europäischer Staaten widmet. Im alltäglichen Leben wird man mit dem Begriff Ratingklasse durch die Medien und Nachrichten konfrontiert. Vor allem in Krisenzeiten wird über den Wechsel einer Ratingklasse des betreffenden Landes berichtet. Es wird zum Beispiel im Artikel des ORFs (Abb. 1) geschrieben: „Die Ratingagentur Fitch hat die

Kreditwürdigkeit der Republik Österreich erneut auf der zweitbesten Note „AA+“ mit stabilem Ausblick belassen.” Es hat kein direkter Ratingwechsel stattgefunden, aber es gab mehrere ausschlaggebende Ereignisse, die das Rating von Österreich beeinflussen. Es gibt laut diesem Artikel zwei Ereignisse, die das Risikoprofil Österreichs verschlechtern. Einerseits der Rücktritt des Bundeskanzlers und andererseits die wirtschaftlichen Auswirkungen der Pandemie. Zwei Faktoren, die aber eine Herabstufung verhindert haben, waren die rasche Ernennung eines Ersatzkanzlers und somit der Ausblick auf politische Stabilität und auch der deutlich zu erkennende Trend der Reduktion der Staatsverschuldung.

Dieses Prinzip der Ratingklassen kann man aber nicht nur für Staaten, sondern auch für Unternehmen anwenden. In den meisten Fällen übernimmt eine Ratingagentur die Einstufung in den Ratingklassen. Das Rating der Länder in Abbildung 2 wurde von der Agentur Standard & Poor’s vorgenommen.

2.2.2 Definition vom Rating

Kommen wir nun zur offiziellen Definition vom Rating. Das Wort „Rating“ ist ein häufig verwendeter Anglizismus und stammt vom englischen Verb „to rate“, was so viel wie „bewerten, schätzen“ bedeutet. Es ist somit eine Bewertung eines Objektes oder einer Person, welche durch eine Note ausgedrückt wird. Ein Kreditrating wird somit offiziell als eine ordinal-skalierte Einstufung der Bonität eines Wirtschaftssubjekts, also zum Beispiel eines Unternehmens oder eines Staates, definiert. Es wird im Kreditrating die Zahlungsfähigkeit und Zahlungswilligkeit bewertet. Je schlechter die vergebene Ratingnote von einem Unternehmen ist, desto höher wird die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls und dementsprechend wird auch der Kreditaufschlag höher angesetzt. Kreditnehmer mit dem gleichen Rating sollten dementsprechend in einer vergleichbaren Größenordnung Kreditaufschläge zugeordnet bekommen.

2.2.3 Ratingklassen

Tabelle 1: Definitionen der Ratingklassen von Moody's

Rating	Bedeutung
Anlagewürdig	(investment grade)
AAA	Zuverlässige und stabile Schuldner höchster Qualität
AA	Gute Schuldner, etwas höheres Risiko als AAA
A	Wirtschaftliche Gesamtlage ist zu beachten
BAA	Schuldner mittlerer Güte, die momentan zufriedenstellend agieren
Spekulativ	(speculative grade)
BA	Sehr abhängig von wirtschaftlicher Gesamtlage
B	Finanzielle Situation ist notorisch wechselhaft
CAA	Spekulativ, niedrige Einnahmen des Schuldners
CA	in der Regel liegen hier bereits Zahlungsstörungen vor
C	in Zahlungsverzug
NR	keine Bewertung (englisch not rated)

In dieser Arbeit werden die Noten eines Kreditratings alphabetisch ausgedrückt. Je nach Definition können die Bewertungen auch in Form von Zahlen oder mit Symbolen vergeben werden. Mögliche Definitionen der Ratingklassen sind in den Tabellen 1 und 2 zu finden. Tabelle 1 ist eine Übersicht der Bewertungen, die von Moody's vergeben werden. Mit der schriftlichen Definition der Ratingklassen kann man die Bewertung besser einschätzen und verstehen. In diesem Fall sind die Klassen von Triple A bis BAA „sicher genug“, um als Kreditgeber einen Kredit zu zulassen. Bei den restlichen Klassen würde man schon ein höheres Risiko eingehen. Die Tabelle 2 ist der grundlegenden Literatur entnommen. Diese gibt konkretere Definitionen der einzelnen Klassen an. Zum Beispiel lautet die Definition der Ratingklasse B wie folgt: „Der Schuldner ist derzeit in der Lage, seine finanziellen Verpflichtungen zu erfüllen. Ungünstige geschäftliche, finanzielle oder wirtschaftliche Bedingungen werden wahrscheinlich die Fähigkeit oder Bereitschaft des Schuldners zur Erfüllung seiner finanziellen Verpflichtungen beeinträchtigen.“ Also alle Unternehmen mit dieser Bewertung erfüllen diese Definition und werden momentan als zahlungsfähig eingestuft, doch durch eine wirtschaftliche Veränderung kann dies sich ändern. Normalerweise spiegeln Ratingklassen mehr Informationen als nur die schriftliche Definition wider. Sie kann auch eine Ausfallwahrscheinlichkeit oder eine Übergangswahrscheinlichkeit zu einer anderen Ratingklasse beinhalten.

Tabelle 2: Ratingkategorien und Erläuterung der Ratings,
S&P's Corporate Ratings Criteria (2000)

Bewertung	Definition
AAA	Die Fähigkeit des Schuldners, seinen finanziellen Verpflichtungen nachzukommen, ist äußerst stark.
AA	Eine mit AA bewertete Verbindlichkeit unterscheidet sich nur in geringem Maße von den am höchsten bewerteten Verbindlichkeiten. Die Fähigkeit des Schuldners, seinen finanziellen Verpflichtungen nachzukommen, ist sehr hoch.
A	Eine mit A bewertete Verbindlichkeit ist etwas anfälliger für die nachteiligen Auswirkungen von Veränderungen der Umstände und der wirtschaftlichen Bedingungen als Verbindlichkeiten in höheren Ratingkategorien.
BBB	Eine mit BBB bewertete Verbindlichkeit weist angemessene Schutzparameter auf. Bei ungünstigen wirtschaftlichen Bedingungen oder veränderten Umständen ist es jedoch wahrscheinlicher, dass der Schuldner nicht mehr in der Lage ist, seine finanziellen Verpflichtungen aus der Verbindlichkeit zu erfüllen.
BB	Eine mit BB bewertete Verbindlichkeit ist weniger anfällig für Zahlungsausfälle als andere spekulative Emissionen. Sie ist jedoch mit größeren anhaltenden Unsicherheiten konfrontiert oder ungünstigen geschäftlichen, finanziellen oder wirtschaftlichen Bedingungen ausgesetzt, die dazu führen könnten, dass der Schuldner nicht in der Lage ist, seine finanziellen Verpflichtungen aus der Verbindlichkeit zu erfüllen.
B	Der Schuldner ist derzeit in der Lage, seine finanziellen Verpflichtungen zu erfüllen. Ungünstige geschäftliche, finanzielle oder wirtschaftliche Bedingungen werden wahrscheinlich die Fähigkeit oder Bereitschaft des Schuldners zur Erfüllung seiner finanziellen Verpflichtungen beeinträchtigen.
CCC	Eine mit CCC bewertete Verbindlichkeit ist derzeit anfällig für Zahlungsausfälle und hängt von günstigen geschäftlichen, finanziellen und wirtschaftlichen Bedingungen ab, damit der Schuldner seinen finanziellen Verpflichtungen nachkommen kann.
CC	Eine mit CC bewertete Verbindlichkeit ist derzeit sehr anfällig für Zahlungsausfälle. Das Rating C kann verwendet werden, um eine Situation abzudecken, in der ein Konkursantrag gestellt oder eine ähnliche Maßnahme ergriffen wurde, aber die Zahlungen für diese Verbindlichkeit fortgesetzt werden.
D	Das D-Rating ist im Gegensatz zu anderen Ratings nicht prospektiv. Vielmehr wird es nur verwendet wenn ein Ausall tatsächlich eingetreten ist und nicht, wenn ein Ausfall nur erwartet wird.

Die Ratingklassen und deren Definitionen der verschiedenen Agenturen sind sich alle sehr ähnlich. „AAA“ steht für die höchstmögliche Bonität. Aber auch diese Klasse ist immer mit einem Ausfallrisiko gegeben, auch wenn dieses sehr gering sein mag. Man kann diese Klasse nicht als risikofrei betrachten. Meistens wird „D“ für „Default“ verwendet, um auf eine Zahlungsunfähigkeit beziehungsweise einen Zahlungsverzug hinzuweisen. In der ersten Tabelle steht das Rating „C“ für die Zahlungsunfähigkeit. In dieser Arbeit wird dennoch auf das „D“ für diese Ratingklasse zurückgegriffen. Ein Zahlungsverzug und sogar selbst eine unvollständige Rückzahlung wird bei den Ratingklassen als Ausfall eingestuft, aber in diesem Fall bleibt dem Kreditnehmer noch eine kurze Frist, um die Schuld zu begleichen oder den Ausfall zu verhindern. Ein weiteres Kriterium, um in die schlechteste Ratingklasse zu fallen, ist eine Beantragung eines Insolvenz- oder Konkursverfahrens.
Zusätzlich wird auch zwischen externen und internen Ratings unterschieden. Externe Ratings werden von öffentlichen Ratingagenturen vergeben. Diese Bewertungen werden auch meistens veröffentlicht. Abbildung 2 ist ein Beispiel für ein veröffentlichtes und externes Rating von Ländern, beurteilt und erstellt von der Ratingagentur Standard & Poor’s. Meistens werden die externen Ratings von Unternehmen bei den Agenturen beauftragt. Im Gegenzug wird bei einem internen Rating von einem bankindividuellen Verfahren gesprochen. Hierbei wird meist die Kreditwürdigkeit der Kunden von der Bank selbst eingeschätzt. Somit wird diese Bewertung auch nicht veröffentlicht und dient hauptsächlich internen Zwecken beim Risikomanagement der Bank.

2.2.4 Beispiele von den 3 größten Ratingagenturen

Abb. 3: Logo Fitch Ratings

Abb. 4: Logo Moody’s Corporation

Abb. 5: Logo S&P Global Ratings

„The Big Three“ ist eine Bezeichnung für die drei bekanntesten Ratingagenturen, welche 1975 von der Wertpapier- und Börsenaufsicht „SEC“ als „nationale anerkannte statistische Rating-Organisationen, (NRSROs = „Nationally Recognized Statistical Rating Organizations“), anerkannt wurde. Durch diese Anerkennung werden Agenturen gekennzeichnet, die in den Vereinigten Staaten Bewertungen für Kapitalmarktzwecke vornehmen dürfen. „The Big Three“ besteht aus den Unternehmen S&P Global Ratings, auch bekannt als Standard and Poor’s Corporation, Moody’s Corporation und Fitch Ratings. Alle drei haben ihren Hauptsitz in New York City.

Die Moody's Corporation, deren Bonitätsnoten in Tabelle 1 gezeigt wurden, ist die Dachgesellschaft für Moody's Investors Service, eine Rating-Agentur, und Moody's Analytics, ein Anbieter von Risikomanagement-Software. Moody's Investors Service ist die älteste der drei großen Ratingagenturen, gegründet von John Moody in 1909. Moody's bewertet Wirtschaftsunternehmen und Banken nach ihren veröffentlichten Zahlen und beurteilt das Management.
Fitch Ratings hat nicht nur einen Hauptsitz in New York, sondern auch in London. Dieser ergibt sich durch die Fusion zwischen der Fitch Publishing Company und der Londoner IBCA Limited im Jahr 1997.
S&P Global Ratings ist eine international bekannte Kredit-Ratingagentur mit dem Kernbereich der Bewertung und Analyse anderer Wirtschaftsunternehmen, Banken und Staaten (Abb. 2) hinsichtlich ihrer Bonität.
Alle drei Ratingagenturen sind für eine ausführliche Bonitätsauskunft verantwortlich. Deren Entscheidungen können auch große Auswirkungen mit sich tragen. In der Theorie gilt natürlich, dass ein Kunde mit einem guten Rating bessere Konditionen für einen Kredit bekommt. Es müssen daher auch Kreditnehmer mit einem schlechteren Rating mit einem höheren Zinssatz rechnen. Es werden einmal pro Jahr die vergebenen Ratings kontrolliert und entsprechend angepasst. Wenn ein Kreditnehmer bei der Überprüfung Ratingklasse ändert, erhält er ein sogenanntes „Up- oder Downgrade". Durch diesen Wechsel kann es zu Auswirkungen im Kreditmanagement kommen.
Zum Beispiel hat die Agentur S&P 2011 die Vereinigten Staaten von der Bestnote „AAA" auf „AA+" „downgegradet" bzw. abgesenkt. Diese Entscheidung führte dazu, dass durch diesen „Downgrade" die Kosten für Kredite der Vereinigten Staaten schätzungsweise um 100 Mrd. Euro pro Jahr ansteigen. Zusätzlich sorgte es für große Unruhen an der Börse mit Belastung der amerikanischen Wirtschaft. Diese Herabstufung wurde durch politische Entscheidungen laut S&P verursacht. Die anderen zwei Rating Agenturen änderten damals das Rating nicht, aber gaben negative Aussichten diesbezüglich bekannt.
Daran ist zu erkennen, dass die diversen Ratingagenturen nicht immer genau das gleiche Rating vergeben, aber die vergebenen Bewertungen liegen sehr nah beieinander. Trotz unterschiedlicher Berechnungsmethoden der Ratings durch die Agenturen, machen die Regulierungsbehörden im Allgemeinen keinen Unterschied zwischen den Agenturen und deren Ergebnisse.

2.3 Bewertungsverfahren

Hierbei wird von einem externen Rating ausgegangen. Bei der Bewertung eines Unternehmens werden Analysten von der Agentur beauftragt, die die Kreditwürdigkeit durch Analysen von Zahlen, den Ruf des Unternehmens und auch durch persönliche Treffen einschätzen.

Der Ratingprozess beginnt mit dem Auftrag eines Kreditnehmers oder sogar eines Kreditgebers an eine Agentur und wird durch einen Vertragsabschluss festgelegt. Die Bewertung fängt dann mit einer standardisierten Voranalyse an. Dabei werden interne als auch externe Daten- und Informationsquellen beschafft. Die ersten Informationen und Daten des zu bewertenden Unternehmens werden vorab an die Agenturen weitergegeben, die dann durch Analysen schon die ersten Einschätzungen liefern können. Solche Daten beinhalten zum Beispiel Finanzpläne, die wichtigsten Wettbewerber, genaue Kosten- und Ertragsstrukturen sowie Planungen des Unternehmens. Es wird ein Analystenteam von Seite der Agentur zusammengestellt, das meist aus Spezialisten für die zu betrachtende Branche besteht. Daraufhin erfolgt eine Analyse der Branche und des Umfelds. Dabei werden vor allem das Branchen- wie auch das Länderrisiko und die zu erwartenden Erfolgsaussichten betrachtet. Diese Risiken haben auch Einfluss auf das Unternehmensrisiko, welches in das Geschäftsrisiko und das finanzielle Risiko aufgeteilt wird. Beim Geschäftsrisiko legt man den Fokus auf den Wettbewerb in der Branche, das Management und auch die gezielte Unternehmensstrategie. Das finanzielle Risiko wird durch die Analyse der finanziellen Kennzahlen und durch die Finanzpolitik eingeschätzt. Meist wird durch die Ratingagentur auch eine Vergleichsgruppe, die sogenannte Peer Group, erstellt. Diese Gruppe besteht aus vergleichbaren Wettbewerbern des betrachteten Unternehmens. Durch die zur Verfügung gestellten Daten- und Informationsquellen können Erwartungen und auch Einschätzung auf das zu bewertende Unternehmen verfasst werden. Als nächsten Schritt finden dann Analysegespräche statt. Danach erfolgt die Berechnung des vorläufigen Ratings, welches durch die Voranalyse, die erstellten Bewertungen und auch durch Prognosen, welche man mit Hilfe der Peer Group erstellt, berechnet wird. Dieses vorläufige Rating gilt als eine Empfehlung des Analystenteams, die dann dem Komitee präsentiert wird. Das offizielle Rating wird durch eine Abstimmung des Ratingkomitees festgelegt. Sobald das Rating feststeht, wird das Unternehmen diesbezüglich informiert und hat ein festgelegtes Zeitintervall, um auf die Ergebnisse zu reagieren, bevor diese veröffentlicht werden. Die weiteren Entwicklungen werden in regelmäßigen Zeitabständen oder im Bedarfsfall, zum Beispiel bei Fusionen, überprüft.

Tabelle 3: S&P's Kriterien für Unternehmensratings

Geschäftsrisiko	Finanzielles Risiko
Merkmale der Branche	Finanzielle Merkmale
Wettbewerbsposition	Finanzpolitik
Marketing	Rentabilität
Technologie	Kapitalstruktur
Effizienz	Schutz des Cashflows
Verordnung	Finanzielle Flexibilität
Verwaltung	

Die Tabelle 3 listet die wichtigsten zu bewertenden Faktoren auf, welche sich den Bereichen des Geschäftsrisikos und des finanziellen Risikos zuordnen lassen. Es werden die einzelnen Faktoren bewertet, allerdings wird auch das gesamte Risikoprofil in das Bewertungsverfahren mit einbezogen. Zusätzlich müssen auch externe Risiken berücksichtigt werden, wie auch zum Beispiel politische Einflüsse. Im Artikel des ORFs (Abb. 1) spielten die politischen Entscheidungen eine große Rolle im Ratingprozess.

Die Ratingagenturen können unterschiedliche Schwerpunkte festlegen. Bei der Rating Agentur S&P liegt der Fokus der Bewertung auf der Stärke und Stabilität der Branche, in der das Unternehmen tätig ist. Aber es gibt keine offizielle Formel, die das finale Rating errechnet. Dadurch wird auch bestätigt, dass das gegebene Rating als eine Meinung basierend auf quantitative und qualitative Faktoren zu verstehen ist. Nach der Analyse eines Risikoprofils wird der Bewertungsprozess durch den Vergleich von Risikoprofilen anderer Kunden fortgesetzt. Demnach wird dann der Kunde in die passende Ratingklasse eingestuft. Pro Klasse wird dann eine Ausfallwahrscheinlichkeit ausgerechnet und der dann auch zugewiesen.

2.4 Beispiel einer Kreditanalyse

Die Diskriminanzanalyse, offizielle „Discriminant analysis“ (DA), oder auch Mehrfachdiskriminanzanalyse (MDA) ist eine von viele Scoring Techniken, die ihre Verwendung im Bankmanagement gefunden hat. Es ist eine Methode aus der Statistik und dient der Unterscheidung zwischen Gruppen, die mit mehreren Merkmalen beschrieben werden. Diese Merkmale werden dann durch Variablen in der mathematischen Anwendung ersetzt. Bei der linearen Diskriminanzanalyse handelt es sich um eine Methode, bei der eine Linearkombination von mehreren Variablen erstellt wird.

$$Z = \omega_0 + \omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 + \omega_3 K_3 + ... + \omega_n K_n$$

wobei Z ... Score, diskriminante Punktezahl,
ω_0 ... eine Konstante,
ω_i ... Diskriminanzkoeffizienten,
K_i ... unabhängige Variablen.

Offiziell gibt es keine festgelegten Werte für die Koeffizienten. Je nach Modell werden die Koeffizienten unterschiedlich gewählt.
Hierbei erhält jedes Unternehmen einen Diskriminanzwert, welcher durch den Vergleich mit einem gesetzten Grenzwert das Unternehmen in eine Ratingklasse einstuft.
Ein sehr bekanntes Modell ist das Z-Score-Modell von Altman (1968), welches die zu bewertenden Unternehmen in zwei Kategorien einteilt. Entweder gilt dann ein Unternehmen als „voraussichtlich solvent” oder „voraussichtlich insolvent”. Sein Modell hatte folgende Form:

$$Z = 0,012K_1 + 0,014K_2 + 0,033K_3 + 0,006K_4 + 0,999K_5$$

wobei

K_1 = (Umlaufvermögen – kurzfristige Verbindlichkeiten) / Bilanzsumme,
K_2 = einbehaltene Gewinne / Bilanzsumme,
K_3 = Ergebnis vor Zinsen und Steuern (EBIT)/ Bilanzsumme,
K_4 = Marktwert des Eigenkapitals / Summe der Verbindlichkeiten,
K_5 = Umsatz / Bilanzsumme.

Die Gewichtung der Faktoren basiert auf Daten von börsennotierten Herstellern. Dieses Modell beruht auf einer einjährigen Periode. Unternehmen mit

einem Wert von weniger als 1,81 gelten laut Altman als hochgradig insolvenzgefährdet und Unternehmen mit einem Ergebnis größer als 2,99 werden als ungefährdet angesehen.
Diese Methode zeigte gleich zu Beginn ihren Erfolg. Es wurden stichprobenartig 33 insolvente und 33 solvente Unternehmen gewählt und es gelang Altmann bei einem Prognosehorizont von einem Jahr, 31 der insolventen und 32 der nicht-insolventen Unternehmen richtig zu klassifizieren.

3 Migrationsmatrix

Veröffentlichte Migrationsmatrizen geben Aufschluss über die Stabilität der Rating-Noten einer Agentur im Zeitverlauf und zeigen Kreditinstituten mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bewertetes Unternehmen innerhalb eines gewissen Zeitraums von der Agentur in eine andere Rating-Klasse eingestuft wird.
Nun wird in der Arbeit der Fokus auf den mathematischen Aspekt gelegt. Die Frage, die sich stellt, ist, wie man die Wahrscheinlichkeiten einer Bonitätsänderung und die Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnen und auch darstellen kann. In diesem Kapitel wird zuerst erklärt, wie uns die Struktur der Matrix bei Ratingveränderungen nützlich sein kann. Die Markov-Kette spielt dabei eine wichtige Rolle. Für die unterschiedlichen Zeitformen, die man in der Mathematik betrachten kann, werden mögliche Methode zur Berechnung einer Migrationsmatrix präsentiert und mit Beispielen veranschaulicht. Für eine weitere Methode wird auch die Generatormatrix verwendet, daher wird diese näher vorgestellt.

3.1 Idee und Definition der Migrationsmatrix

3.1.1 Idee der Migrationsmatrix

Wie im Z-Score Modell, welches im Abschnitt 2.4 präsentiert wurde, werden die Unternehmen in nur zwei Kategorien eingeteilt. Entweder gilt ein Unternehmen als solvent oder als insolvent. Also wurde früher meistens zur Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit implizit davon ausgegangen, dass ein Kunde nur diese zwei Zustände haben kann. Somit rechnet man in dem Fall die PD (=Probability of Default, Ausfallwahrscheinlichkeit) angepasst an die Kreditwürdigkeit des Kreditnehmers als Wahrscheinlichkeit für einen auftretenden Kreditnehmerausfall. In dem Fall könnte man hier einen Ansatz zum Binomialverfahren verwenden. Doch die Bonität eines Kreditnehmers kann man in der Realität nicht so leicht vereinfachen. Betrachtet man die Entwicklung eines Kreditnehmers bis zu einem möglichen Ausfallzeitpunkt, stellt man in den meisten Fällen eine stetige Verschlechterung seiner Bonität fest.
In einem ratingbasierten Modell bedeutet das, dass der Kreditnehmer immer weiter in niedrigere Ratingklassen herabgestuft wird, bevor ein Zahlungsausfall zustande kommt. In diesem Fall würde der Kreditnehmer mehrere Zustände erlangen. Man stellt die Veränderung der Bonität somit durch das Wechseln des Ratings dar. Dadurch wird zusätzlich die Wahrscheinlichkeit des Wechsels zwischen den Ratings, die sogenannte Übergangswahrscheinlichkeit,

berechnet. Es wird vom Rating des Kunden zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgegangen. Nach einem festgelegten Zeitraum - meistens einem Jahr - betrachtet man, ob der Kreditnehmer sich in der gleichen oder in einer anderen Ratingklasse befindet. Dabei werden genau die Wahrscheinlichkeiten in der Form einer Migrationsmatrix abgebildet.

3.1.2 Allgemeine Definitionen und Axiome

Zur Rememorierung werden die allgemeinen Definitionen und damit die Struktur der Migrationsmatrix nocheinmal wiederholt.

Definition 3.1 *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist eine Tabelle von Elementen $a_{ij} \in \mathbb{K}$*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zusätzlich wissen wir, dass eine Matrix als Abbildung aufgefasst werden kann, mit den Indexmengen:
$I = \{1, ...m\}$ und $J = \{1, ...n\}$ schreibt man

$$A : I \times J \to K; (i, j) \to a_{ij}$$

Eine Migrationsmatrix hat die gleiche Darstellung wie eine gewöhnliche Matrix. Sie erfüllt nur zusätzliche Axiome. Dafür werden die Wahrscheinlichkeitsaxiome wiederholt.

Definition 3.2 *Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist eine Abbildung von Ereignissen auf reelle Zahlen, $\mathbb{P} : A \to \mathbb{R}$, die die folgenden Axiome erfüllt:*
1. Nicht negativ: $\mathbb{P}(A) \geq 0$; $\forall A \subset \Omega$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. σ-Additivität: Für jede abzählbare Folge von paarweise disjunkten Mengen $A_1, A_2, ...$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Aus der Kombination beider Definitionen ergibt sich die Definition einer Migrationsmatrix. Damit eine offizielle Definition der Migrationsmatrix erstellt werden kann, wird die Idee der Markov-Ketten im Vorfeld noch erläutert.

3.1.3 Markov-Ketten Ansatz

Es wurde schon erwähnt, dass ein Unternehmen mit einem Rating einen „Zustand“ annimmt und diesen auch wechseln kann. Diese Idee erinnert sehr an das Markov-Modell.

Definition 3.3 *Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\geq 0}$ heißt Markov-Kette mit Zustandsraum I, Anfangsverteilung λ und Übergangsmatrix P,*
wenn die X_n Werte in I annehmen, und für alle $n \geq 0$, $i_0, ..., i_{n+1} \in I$ gilt, dass

$$\mathbb{P}\left[X_0 = i_0\right] = \lambda_{i_0}$$

und (elementare Markov-Eigenschaft)

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, ..., X_n = i_n\right] = p_{i_n, i_{n+1}}.$$

Im Kreditmanagement werden die Ratingklassen als sogenannte Zustände angesehen. Die Übergangsmatrix P besteht aus den aktuellen Wahrscheinlichkeiten $p_{i,j}$, dass man vom Zustand i zum Zustand j wechselt. Es ist auch wichtig, dass die elementare Markov-Eigenschaft im betrachteten Modell erfüllt ist. Diese Eigenschaft sagt aus, dass die Vergangenheit beim Berechnen der Wahrscheinlichkeit keine Rolle spielt. Wird der Zeitsprung von t nach $t+1$ betrachtet, sind nur die Zustände zu diesen Zeitpunkten von Bedeutung für die Übergangswahrscheinlichkeit. Dies ist auch der Fall im Kreditrisiko. Die Markov-Eigenschaft gilt, da nur der aktuelle Zustand ausreichend für die Prognose ist. Am Anfang ist der Zustand des Kunden bekannt und daher wird nur die Wahrscheinlichkeit vom „Wechsel“ benötigt, dadurch können wir von bedingter Wahrscheinlichkeit reden:

$$p_{i,j} = \mathbb{P}\left(X_{t+1} = j \mid X_t = i\right) \text{ mit } t < t+1$$

3.1.4 Definition der Migrationsmatrix

Da die Markov-Ketten ihre Verwendung im Kreditmanagement finden, entsteht mit den zusätzlichen obrigen Definitionen die Definition der Migrationsmatrix.

Definition 3.4 *Die Migrationsmatrix hat folgende Darstellung:*

$$M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,K} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{K-1,1} & p_{K-1,2} & \cdots & p_{K-1,K} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei gilt:

$$p_{i,j} \geq 0 \quad \textit{und} \quad \sum_{j=1}^{K} p_{i,j} = 1, \forall i$$

Zur Modellierung der Übergänge werden zusätzliche Annahmen gestellt. Die Werte $p_{i,j}$ stehen für die Wahrscheinlichkeit, dass man vom Zustand i zum Zustand j wechselt. Also in unserem Fall besteht die Matrix aus Wahrscheinlichkeiten, dass man Ratingklasse wechselt. Der Zustandsraum S besteht aus den Ratingklassen, also ein Unternehmen kann zum Beispiel ein Rating von AAA zugeteilt bekommen und dies wäre dann auch sein Zustand im Markov-Modell. Meistens ist somit der Zustand S=1 das beste Rating bzw. die beste Bonität, die ein Kunde erhalten kann. Der Zustand K steht in diesem Fall für den Ausfall bzw. für das schlechteste Rating. Diese Klasse wird auch „Default-Klasse“ genannt, und man nimmt an, wenn ein Kreditnehmer in diese Klasse fällt, dieser nicht wieder in die höheren Ratingklassen zurück migrieren kann. Somit gilt dieser Zustand im Modell als absorbierend.

Definition 3.5 *Eine Klasse C ist abgeschlossen, wenn gilt:*

$$i \in C, i \rightarrow j \Rightarrow j \in C$$

Definition 3.6 *Ein Zustand i ist absorbierend, wenn $\{i\}$ eine abgeschlossene Klasse ist.*

Anbei ein vereinfachtes Markov-Modell mit den Ratings A, B, C und D:

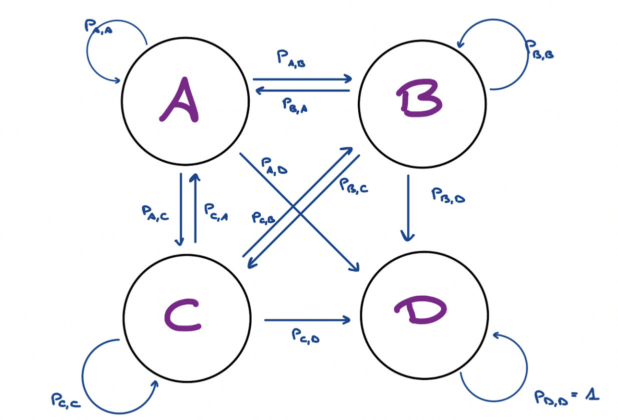

Abb. 6: Vereinfachtes Markov-Modell

3.1.5 Beispiel einer Einperioden-Übergangsmatrix

		Rating zum Jahresende								
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	C	D	N.R.
Ursprüngliches Rating	AAA	89,62%	5,92%	0,43%	0,09%	0,03%	0,00%	0,00%	0,00%	3,93%
	AA	0,80%	88,29%	6,78%	0,51%	0,05%	0,09%	0,02%	0,01%	3,66%
	A	0,06%	2,10%	87,79%	5,04%	0,43%	0,17%	0,04%	0,05%	4,33%
	BBB	0,03%	0,23%	4,36%	84,43%	4,15%	0,73%	0,23%	0,26%	5,58%
	BB	0,02%	0,06%	0,41%	5,75%	75,98%	7,05%	1,09%	1,22%	8,42%
	B	0,00%	0,08%	0,27%	0,35%	4,77%	74,15%	3,90%	5,96%	10,53%
	C	0,11%	0,00%	0,22%	0,67%	1,45%	8,95%	51,34%	24,72%	12,53%
	D	0,06%	2,10%	87,79%	5,04%	0,43%	0,17%	0,04%	0,05%	4,33%
	N.R.	0,03%	0,23%	4,36%	84,43%	4,15%	0,73%	0,23%	0,26%	5,58%

Abb. 7: Einjährige Migrationsmatrix für die Rating-Klassen von Standard & Poor's, 2002

Die Matrix würde dementsprechend so aussehen:

$$M = \begin{pmatrix} 0,8962 & 0,0592 & 0,0043 & 0,0009 & 0,0003 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,0080 & 0,8829 & 0,0678 & 0,0051 & 0,0005 & 0,0009 & 0,0002 & 0,0001 \\ 0,0006 & 0,0210 & 0,8779 & 0,0504 & 0,0043 & 0,0017 & 0,0004 & 0,0005 \\ 0,0003 & 0,0023 & 0,0436 & 0,8443 & 0,0415 & 0,0073 & 0,0023 & 0,0026 \\ 0,0002 & 0,0006 & 0,0041 & 0,0575 & 0,7598 & 0,0705 & 0,0109 & 0,0122 \\ 0.00 & 0,0008 & 0,0027 & 0,0035 & 0,0477 & 0,7415 & 0,0390 & 0,0596 \\ 0,0011 & 0.00 & 0,0022 & 0,0067 & 0,0145 & 0,0895 & 0,5134 & 0,2472 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im Laufe der Arbeit werden die Matrizen vorzugsweise in einer Tabellenform dargestellt, dies trägt zur Leserlichkeit bei. Betrachtet man nun die Matrix und rechnet man alle Werte einer Zeile zusammen, würde man annehmen, dass die Summe 1 ergibt. Die letzte Spalte in der Tabelle ergibt die Differenz zu den 100%. Diese Spalte ergibt sich dadurch, dass die Tabelle durch Kohorten Betrachtung bestimmt wird. „N.R." steht für nicht bewertete Kunden, („Not Rated anymore"). Das ist der Anteil an betrachteten Kunden mit einem Anfangsrating, das während der Periode entzogen wurde. Begründung dafür, dass kein weiteres Rating vorgenommen wurde, kann zum Beispiel eine Fusion mit einem anderen Unternehmen sein. Somit kann man betroffene Kunden nicht mehr direkt bei der Schätzung berücksichtigen. Zusätzlich erkennt man auch, dass die Wahrscheinlichkeiten vor allem in der Diagonale hoch sind. Also herrscht eine Tendenz, dass die Unternehmen ihre Ratings am Ende beibehalten. Auch andere Beobachtungen als in der Theorie angenommen können auftreten.

Wie schon im Vorfeld erläutert und bei den später aufgezeigten Methoden erkennbar, wird in der Theorie angenommen, dass ein Unternehmen, welches in einen Zahlungsverzug bzw. in die Ratingklasse D gerutscht ist, nicht mehr upgegradet wird. Somit ergibt sich die letzte Zeile, die nur 0 und in der letzten Spalte eine 1 beinhaltet. Ab den 1990er wurden erstmals die Ausfall- und Übergangswahrscheinlichkeiten mit der Theorie der Markov-Ketten modelliert.

3.2 Generator Matrix

3.2.1 Definition

Die Generator Matrix lässt sich im zeithomogenen Fall definieren. Zusätzlich ist es wichtig, dass die Markov-Kette die zeithomogene Eigenschaft erfüllt. Bei dieser Eigenschaft geht es darum, dass der Zeitsprung die entscheidende Rolle spielt und nicht der Zeitpunkt.

Definition 3.7 *Eine Markov-Kette heißt zeithomogen, wenn für alle Zustände $i, j \in S$ und für alle $u, t \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:*

$$P = [X(t+u) = j \mid X(t) = i] = P[X(u) = j \mid X(0) = i]$$

Definition 3.8 *Eine $K \times K$ Generator Matrix:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1K} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{K-1,1} & \lambda_{K-1,2} & \cdots & \lambda_{K-1,K} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_{ij} \geq 0$, für alle i, j
und $\lambda_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq i}}^{K} \lambda_{ij}$, für $i = 1, \ldots, K$.

Die Werte außerhalb der Diagonale stehen für die Intensität des Sprungs vom Zustand - im Kreditmanagement das Rating - i zu j. Der Standardwert K ist ein absorbierender Zustand.

Satz 3.9 *Ein Generator einer zeitkontinuierlichen Markov-Kette ist durch eine Matrix $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ gegeben, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:*
1. $\sum_{j=1}^{K} \lambda_{ij} = 0$ für alle $i = 1, ..., K$;
2. $0 \leq -\lambda_{ii} \leq \infty$ für alle $i = 1, ..., K$;
3. $\lambda_{ij} \geq 0$ für alle $i, j = 1, ..., K$ mit $i \neq j$.

Dieser Satz ist eine Umformulierung der Definition. Dieser lässt einem die Eigenschaften deutlicher erkennen. Die Summe der Werte in einer Zeile müssen 0 ergeben. Zusätzlich sind die Werte in der Diagonale negativ und die restlichen müssen dafür positiv sein. Es existiert auch eine weitere wichtige Äquivalenz, die später in einer Methode verwendet wird.

Satz 3.10 *Es gilt für eine Matrix $\Lambda \in \mathbb{R}^{k \times k}$:*
Λ erfüllt die Eigenschaften einer Generator Matrix (Satz 3.9)
$\Leftrightarrow exp\,(t\Lambda)$ ist eine Übergangsmatrix für alle $t \geq 0$

Daraus folgt, dass die $K \times K$ t-perioden Übergangsmatrix demnach gegeben ist, durch:

$$P(t) = e^{t\Lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\Lambda)^k}{k!}$$

3.2.2 Berechnung im diskreten Fall

Die Generator Matrix kann in einem zeitdiskreten Modell mit einer Ein-Jahres-Übergangsmatrix anhand folgenden Ausdrucks berechnet werden:

$$\Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(P-I)^k}{k}$$

Im zeitdiskreten Modell kann die Übergangsmatrix mithilfe der Kohorten Methode bestimmt werden. Mit dieser Matrix und der obigen Formel kann die Generator Matrix berechnet werden. Anhand eines Beispiels wird es anschaulicher. Man geht von einer Übergangsmatrix P aus, welche wie folgt dargestellt werden kann:

P	A	B	D
A	0.90	0.08	0,02
B	0.1	0.80	0.01
D	0	0	1

Mit der obigen Formel kommen wir dann auf folgende Generator Matrix:

Λ	A	B	D
A	-0.1107	0.0946	0.0162
B	0.1182	-0.2289	0.1107
D	0	0	0

3.2.3 Anwendung

Die Idee der Generator Matrix findet viele Verwendungen im Kreditrisiko. Ein Beispiel zur Verwendung ist die Konstruktion von Kreditkurven mithilfe der Generator Matrix. Die Kreditkurven geben Auskunft über kumulative Ausfallraten. Dies findet zum Beispiel Anwendung im Modell von Jarrow (1997).

Für eine gegebene Generatormatrix Λ berechnen wir einen Vektor p_t^i mit der folgenden Formel:

$$p_t^i = exp(t\Lambda)x_i^t$$

wobei x_i^t die Zeile der entsprechenden Übergangsmatrix für das gegebene Rating R bezeichnet. Die kumulative Ausfallrate PD_t^i für die Ratingklasse i ist dann durch den K-ten Eintrag des Vektors gegeben.

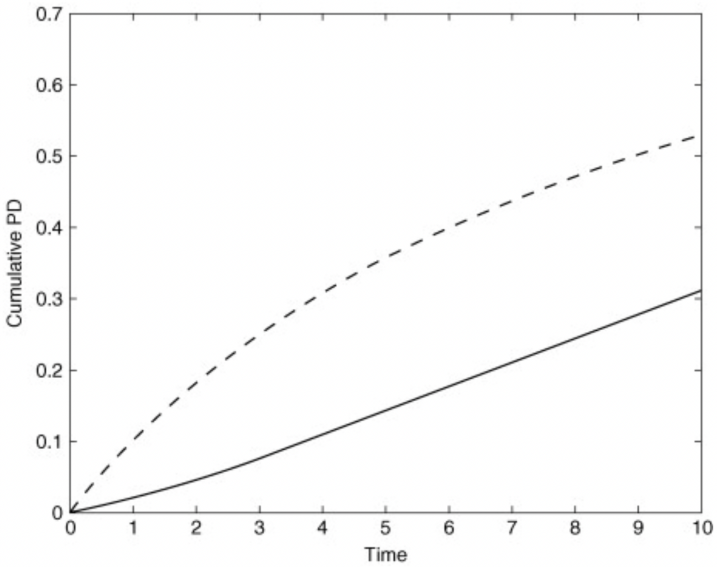

Abb. 8: Kreditkurven für eine beispielhafte Übergangsmatrix mit drei Ratingstufen. Kumulative Ausfallwahrscheinlichkeiten für die exemplarischen Ratingklassen A (durchgezogene Linie) und B (gestrichelte Linie).

Diese Abbildung ist eine Grafik, die die Kreditkurve mit unserer gegebenen Übergangsmatrix P abbildet. Daran lässt sich die Entwicklung der kumulierten Ausfallwahrscheinlichkeit - die Wahrscheinlichkeiten für den Ausfall innerhalb mehrerer Jahre - erkennen. Zum Beispiel kann aus dieser Graphik heraus gelesen werden, dass im Laufe der Zeit ein Unternehmen mit Rating B eher und auch schneller zu einem Zahlungsverzug bzw. einem Ausfall neigt als ein Unternehmen der Ratingklasse A.

3.3 Methoden für die Berechnung von Migrationsmatrizen

In diesem Abschnitt geht es vor allem um die Berechnung der Übergangsmatrix. Wie vorher gezeigt wurde, kann man mithilfe der Übergangsmatrix eine Generator Matrix berechnen, aber auch die andere Richtung ist möglich. Man kann in stetiger Zeit mit einer Generator Matrix die Migrationsmatrix bestimmen. Zuerst wird die Kohorten Methode präsentiert, da diese sehr verständlich und zusätzlich eine oft verwendete Methode im Kreditmanagement ist. Diese Berechnungen werden aber nur diskret betrachtet. Für den stetigen Fall werden zwei Schätzer verwendet, die später erläutert werden.

3.3.1 Kohortenmethode

Der zeitdiskrete Ansatz wird meist von den Rating-Agenturen für die Analyse von Rating-Übergangsdaten verwendet. In diesem Ansatz können Sprünge erkannt werden, da von einem Startzeitpunkt ausgegangen wird und erst nach einer festgelegten Dauer Zustände und Daten überprüft werden. Damit können durch Analysen der Entwicklungen Schätzungen beschlossen werden. Das ist die sogenannte Kohorten Methode, bei der man basierend auf historische bzw. Stammdaten die Wahrscheinlichkeiten berechnet. Da Ratingagenturen meist einmal pro Jahr ein Rating vergeben bzw. die Ratings überprüft werden, ist es in diesen Fall nicht notwendig, eine Methode für den stetigen Fall zu betrachten. Daher findet die Kohorten Methode, auch als Multinomialmethode bekannt, bei den Agenturen ihre Beliebtheit.
Bei dieser Methode existiert somit ein Startzeitpunkt, bei der die Anzahl der Unternehmen mit dem Rating i bekannt ist. Die Variable N_i präsentiert diese Anzahl der Unternehmen. Dadurch gilt N_{ij} als die Anzahl der Unternehmen, die von der ursprünglichen Ratingklasse i zur Ratingklasse j gewechselt sind. Bei dieser Methode schaut die Formel der Übergangswahrscheinlichkeit folgendermaßen aus:

$$p_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i}$$

für $i \neq j$.

Mit N_i ... Anzahl der Unternehmen mit dem ursprünglichen Rating i;
N_{ij} ... Anzahl der Unternehmen, die von der ursprünglichen Ratingklasse i zur Ratingklasse j übergegangen sind.

Um die Werte auf der Diagonale zu berechnen, verwenden wir die Eigenschaft, dass die Summe der Werte in einer Zeile gleich 1 sein muss, also:

$$p_{ii} = 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{K} p_{ij}$$

Ein Problem, welches dadurch entstehen kann, ist, dass seltene Ereignisse bei dieser Rechenweise der Übergangswahrscheinlichkeiten nicht erfasst werden, wie zum Beispiel der Übergang vom besten Rating (AAA) zum Ausfall (Default). Zusätzlich wird bei dieser Methode nur der Anfangszustand und der Zustand nach vereinbarter Zeit (zum Beispiel einem Jahr) betrachtet. Somit werden Veränderungen im Laufe dieser Periode nicht erfasst. Ein Kunde könnte zum Beispiel im Laufe des Jahres mehrmals im Rating herabgestuft werden bis zum Ausfall und dann wäre bei der obigen Methode die Wahrscheinlichkeit beim Übergang von AAA nach Default ungleich null.

3.3.2 Beispiel der Kohortenmethode

Wir betrachten ein Beispiel, welches direkt aus der verwendeten Literatur entnommen wurde. Es wird die Situation angenommen, dass der Zustandsraum aus 3 Ratingklassen A, B und D besteht. Unser Zeitraum beträgt 1 Jahr. Wir haben zu Beginn des Jahres jeweils 10 Unternehmen in Ratingklasse A und B, und D bleibt somit leer. Ein Unternehmen mit Rating A wird nach einem Monat auf B herabgestuft und verbleibt in dieser Klasse bis zum Ende des Zeitraums. Ein Unternehmen wechselt nach 2 Monaten von Ratingklasse B hinauf zur Klasse A, und auch dieses Unternehmen verbleibt mit diesem Rating. Ein Unternehmen mit Rating B gerät nach 6 Monaten in Verzug, weswegen es in der Klasse D endet. Auch da gilt das Prinzip, dass man aus der Ratingklasse D nicht mehr hinaufgestuft werden kann. Da uns in der diskreten Ansicht, die genaueren Zeitangaben im Laufe des Zeitraums keine Rolle spielen, erhalten wir die folgende vereinfachte Situation: Von der Ratingklasse A wechselt ein Unternehmen nach B, somit bleiben 9 von 10 ursprüngliche Unternehmen in der Klasse A und 1 von 10 befindet sich in der Klasse B. Es wechselt kein Unternehmen von der Klasse A nach D. Somit kann schon die erste Zeile der Migrationsmatrix bestimmt werden. Mit der Verwendung der obigen Formel kommt man auf:

$$\begin{aligned}
p_{A,B} &= \frac{N_{AB}}{N_A} = \frac{1}{10} = 0,1 \\
p_{A,C} &= \frac{N_{AC}}{N_A} = \frac{0}{10} = 0 \\
p_{A,A} &= 1 - (p_{A,B} + p_{A,C}) = 1 - 0,1 = 0,9
\end{aligned}$$

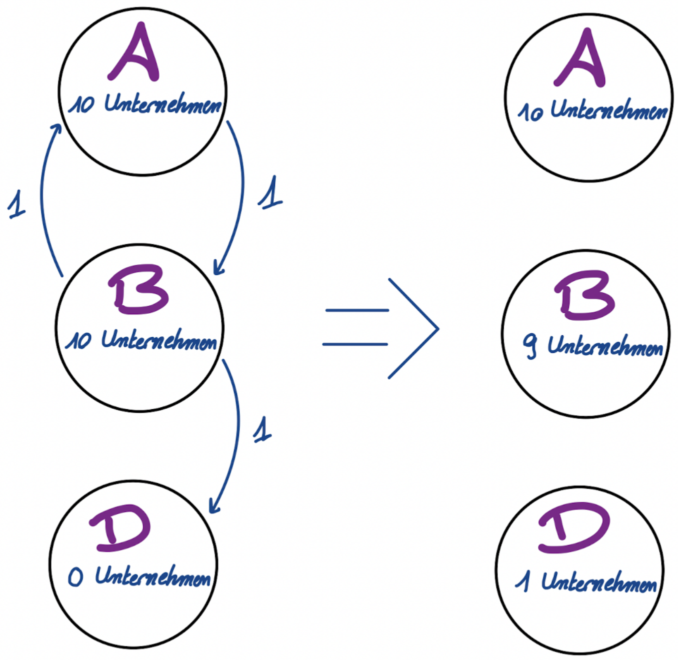

Abb. 9: Schema in diskreter Ansicht von dem gewählten Beispiel

Wenn wir von der Ratingklasse B ausgehen, bleiben 8 von 10 in der gleichen Ratingklasse, und jeweils 1 von 10 Unternehmen wird up- und downgegradet. Analog wird somit die zweite Zeile der Matrix berechnet. In diesem Beispiel ist die dritte Zeile trivial, da die Annahme gilt, dass die Default Klasse absorbierend ist.
Damit kommt man auf folgende Migrationsmatrix:

P	A	B	D
A	0.90	0.10	0
B	0.10	0.8	0.10
D	0	0	1

Man kann erkennen, dass laut diesem Modell es als unmöglich gilt, von dem besten Rating in die Default-Klasse herabgestuft zu werden. Auch wenn diese Wahrscheinlichkeit in der Realität sehr gering scheint, kann diese niemals genau 0 sein kann, da die beste Ratingklasse nicht als risikofrei angesehen werden darf.

3.3.3 Maximum Likelihood Schätzer

Auch im stetigen Fall gibt es eine Methode zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, die auch das Problem mit der 0 Wahrscheinlichkeit umgeht. Bei der Stetigkeit gibt es zwei mögliche Schätzer, die verwendet werden können. Die erste Möglichkeit ist der Maximum-Likelihood Schätzer. Für diese Methode spielt die Generator Matrix eine wichtige Rolle, daher muss auch die zeithomogene Eigenschaft der Markov-Kette gelten. Die angewandten Berechnungen sind angelehnt an die Methode von Küchler und Sorensen:

$$\lambda_{ij} = \frac{N_{ij}\left(T\right)}{\int_0^T Y_i\left(s\right) ds}$$

wobei $T \ldots$ kompletter Zeitraum,
$Y_i\left(s\right) \ldots$ Anzahl der Unternehmen mit dem Rating i zum Zeitpunkt s,
$N_{ij}\left(T\right) \ldots$ Gesamtzahl der Übergänge im Zeitraum von i nach j mit $i \neq j$.

Da wir nun von der Annahme der zeitlichen Homogenität im unserem Zeitraum T ausgehen, kann die Übergangswahrscheinlichkeit durch folgende Formel berechnet werden:

$$P\left(t\right) = e^{t\Lambda}$$

3.3.4 Beispiel des Maximum Likelihood Schätzers

Über ein Beispiel kann man veranschaulichen, wie man das Delta bestimmen kann. Es wird das gleiche Beispiel wie im diskreten Fall betrachtet, damit man auch die Ergebnisse vergleichen kann. Also die Situation bleibt unverändert. Dieses Mal spielen die Zeitangaben eine wichtige Rolle. Schematisch dargestellt erhalten wir somit folgende Situation: (Abb. 10)
Wir befinden uns im zeitkontinuierlichen Ansatz. Mit der gegebenen Formel können wir den Maximum-Likelihood-Schätzer berechnen:

$$\lambda_{ij} = \frac{N_{ij}\left(T\right)}{\int_0^T Y_i\left(s\right) ds}$$

Bei dieser Formel ist es wichtig, dass $i \neq j$, somit können wir damit nur die Einträge, die sich nicht auf der Diagonale befinden, berechnen.
Wir wählen $T = 1$, damit die Entwicklung auf ein Jahr betrachtet wird. So haben wir die gleichen Bedingungen wie beim Beispiel ausgerechnet mit der Kohorten Methode. Zuerst werden die einzelnen Werte der Generator Matrix

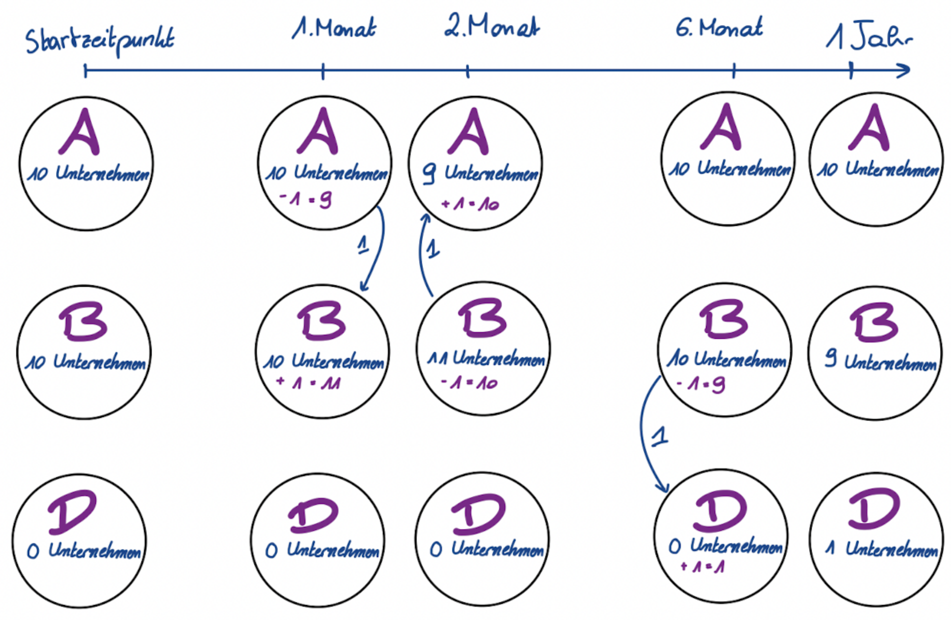

Abb. 10: Schema in stetiger Ansicht von dem gewählten Beispiel

berechnet. Die Berechnungen der ersten Zeile schauen wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\lambda_{AB} &= \frac{N_{AB}(1)}{\int_0^1 Y_A(s)\,ds} \\ &= \frac{1}{9+\frac{1}{12}+\frac{10}{12}} \\ &= 0,10084\end{aligned}$$

Um die Einträge in der Diagonale zu berechnen, muss die Zeilensumme laut Definition der Generator Matrix gleich 0 ergeben.

$$\begin{aligned}\lambda_{AA} &= -\left(\lambda_{AB}+\lambda_{AC}\right) \\ &= -0,10084\end{aligned}$$

Die zweite Zeile wird analog errechnet und die dritte Zeile wäre in diesem Fall wieder trivial. Somit erhalten wir folgende Generator Matrix:

P	A	B	D
A	-0,10084	0,10084	0
B	0,10909	-0,21818	0,10909
D	0	0	0

Mit der Formel $P(t) = e^{t\Lambda}$ wird nun die Übergangsmatrix nach einem Jahr bestimmt. Auch hier wird $t = 1$ gesetzt, so betrachten wir die Wahrscheinlichkeiten nach genau einem Jahr. Damit kann man die Übergangmatrizen der verschiedenen Methoden besser miteinander vergleichen.
Wir erhalten:

P	A	B	D
A	0.90887	0,08618	0,00495
B	0,09323	0,80858	0,09819
D	0	0	1

Was hier gleich erkennbar wird, ist, dass die Wahrscheinlichkeit vom besten Rating zum schlechtesten ungleich 0 ist, somit gilt das Rating nicht mehr als risikofrei, was der Realität entspricht. Am Ende dieses Abschnitts werden die Ergebnisse aller drei Methoden miteinander verglichen.

3.3.5 Nelson Aalen Schätzer

Es muss noch betrachtet werden, dass die zeithomogene Eigenschaft der Markov-Ketten nicht erfüllt ist. Hierfür wird der Nelson-Aalen Schätzer mit einer angepassten Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit verwendet. Auch hier wird der Ansatz an die Methode von Küchler und Sorensen angelehnt. Für den Nelson-Aalen Schätzer gilt folgende Formel:

$$\lambda_{hj}(t) = \sum_{\left\{k:T_{hjk} \geq t\right\}} \frac{1}{Y_h(T_{hjk})}$$

mit $T_{hj1} < T_{hj2} < ...$ ... die beobachteten Zeiten der Übergänge von den Ratings h nach j;
$Y_h(t)$ ... Anzahl der Unternehmen mit dem Rating h zum Zeitpunkt t.

Damit wird die Matrix $\Delta\Lambda(T)$ für die Wahrscheinlichkeitsformel bestimmt:

$$\Delta\Lambda(T) = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta N_1(T_i)}{Y_1(T_i)} & \frac{\Delta N_{12}(T_i)}{Y_1(T_i)} & \cdots & \frac{\Delta N_{1K}(T_i)}{Y_1(T_i)} \\ \frac{\Delta N_{21}(T_i)}{Y_2(T_i)} & -\frac{\Delta N_2(T_i)}{Y_2(T_i)} & \cdots & \frac{\Delta N_{2K}(T_i)}{Y_2(T_i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\Delta N_{K-1,1}(T_i)}{Y_{K-1}(T_i)} & \frac{\Delta N_{K-1,2}(T_i)}{Y_{K-1}(T_i)} & \cdots & -\frac{\Delta N_{K-1,K}(T_i)}{Y_{K-1}(T_i)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $T \ldots$ kompletter Zeitraum,

$T_i \ldots$ eine Sprungzeit im Intervall $(s;t]$;

$Y_h(t) \ldots$ Anzahl der Unternehmen mit dem Rating h zum Zeitpunkt t.

In der Diagonalen stehen die Gesamtzahlen der Übergänge von Klasse i in einen anderen Ratingstatus, geteilt durch die Anzahl der ausgesetzten Unternehmen. Ähnlich funktioniert es für die Elemente außerhalb der Diagonale. Diese Werte ergeben die Anzahl der Übergänge in die entsprechende Ratingklasse j geteilt durch die Anzahl der exponierten Unternehmen. Wird dieser Schätzer genauer betrachtet, kann dieser Schätzer als eine Kohorten Methode angesehen werden, aber auf einem sehr kleinen Zeitintervall basierend.
Um die Wahrscheinlichkeitsmatrix zu berechnen wird folgende Formel verwendet:

$$P(s,t) = \prod_{i=1}^{m} (I + \Delta\Lambda(T))$$

wobei I die Einheitsmatrix ist.

3.3.6 Beispiel des Nelson Aalen Schätzers

Auch diese Methode wird auf das gleiche Beispiel angewandt. Es gilt schematisch das gleiche wie in Abbildung 10. Da das Wechseln der Ratingklassen im ersten, zweiten, und sechsten Monat stattfinden, werden $\Delta\Lambda\left(T_{\frac{1}{12}}\right)$, $\Delta\Lambda\left(T_{\frac{2}{12}}\right)$ und $\Delta\Lambda\left(T_{\frac{6}{12}}\right)$ passend dazu berechnet. Mit der obigen Formel werden diese drei Matrizen gebildet:

$$\Delta\Lambda\left(T_{\frac{1}{12}}\right) = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Delta\Lambda\left(T_{\frac{2}{12}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Delta\Lambda\left(T_{\frac{6}{12}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun wird

$$P(s,t) = \prod_{i=1}^{m} (I + \Delta\Lambda(T))$$

verwendet und man wählt als betrachtendes Intervall $(0;1)$, damit die Entwicklung eines Jahres miteingebunden ist. Dadurch erhält man:

$$\begin{aligned}
P(0,1) &= \left(I + \Delta\Lambda\left(T_{1/12}\right)\right)\left(I + \Delta\Lambda\left(T_{2/12}\right)\right)\left(I + \Delta\Lambda\left(T_{1/2}\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/11 & 10/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.90909 & 0.08181 & 0.00909 \\ 0.09091 & 0.81818 & 0.09091 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Als Tabelle ergibt das:

P	A	B	D
A	0.90909	0.08181	0.00909
B	0.09091	0.81818	0.09091
D	0	0	1

3.4 Vergleich aller drei Methoden

P	A	B	D
A	0.90	0.10	0
B	0.10	0.8	0.10
D	0	0	1

Abb. 11: Berechnet mit der Kohorten Methode

P	A	B	D
A	0.90887	0,08618	0,00495
B	0,09323	0,80858	0,09819
D	0	0	1

Abb. 12: Berechnet mit dem Maximum-Likelihood Schätzer

P	A	B	D
A	0.90909	0.08181	0.00909
B	0.09091	0.81818	0.09091
D	0	0	1

Abb. 13: Berechnet mit dem Nelson-Aalen Schätzer

Die Übergangswahrscheinlichkeiten bei den verschiedenen Methoden sind nahezu gleich. Sobald man die Übergangsmatrix mit dem Maximum-Likelihood-Schätzer berechnet und aufrundet, erhält man die Übergangsmatrix in der diskreten Zeit. Doch ein wichtiger Unterschied muss hervorgehoben werden. Man erkennt, dass im Fall des Maximum-Likelihood-Schätzers die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls von einem Unternehmen mit Rating A ungleich null ist, obwohl dieser Fall in unserer aufgestellten Situation nicht vorkommt. Aber man betrachtet nun auch die Möglichkeit, dass ein Unternehmen mit Rating A im Laufe des Zeitraums auf die Ratingklasse B und dann auf D herabgestuft werden kann. Hier haben wir nun alle Ergebnisse der drei verschiedenen Methoden. Diese Methoden sind abhängig, in welcher zeitlichen Form wir uns befinden. Wir haben damit alle 3 Möglichkeiten abgedeckt: zeitlich homogene in diskreter und stetiger Zeit und auch zeitlich inhomogene Markov-Ketten in stetiger Zeit. Durch das Prinzip, sich nicht aus der Default Klasse retten zu können, ist schon mal die letzte Reihe ident, trivialerweise. Wie man erkennen kann, sind auch diesmal die Werte sehr ähnlich bei beiden Tabellen. Der Unterschied zwischen den letzten beiden Tabellen ist geringer, als wenn man die Kohorten Methode mit der MLE (=Maximum-Likelihood-Estimator) Methode vergleicht. Die Ergebnisse unterscheiden sich nicht drastisch voneinander, vor allem in großen Datensätzen. Aber aus den letzteren Methoden erhalten wir realistischere Nicht-Null-Schätzungen für Wahrscheinlichkeiten von eher selteneren Ereignissen. In der Tabelle sind auch Werte mit 0,00... abgebildet, doch diese sind nicht unbedingt null. Bei der Multinomial Methode ist es möglich eine Wahrscheinlichkeit mit dem Wert 0 zu erhalten. Ein zusätzlicher Vorteil bei der Verwendung der Generator Matrix ist die Erstellung von Übergangsmatrizen in beliebigen Zeithorizonten. Beim zeitkontinuierlichen Ansatz muss die gewählte Jahresperiode nicht beachtet werden. Im Vergleich mit der Multinomial Methode ist der Ausgangspunkt ausschlaggebend für das Ergebnis.

4 Schlussfolgerung

Vergleicht man die Ergebnisse mit realitätsgetreuen Übergangsmatrizen erkennt man, dass in der Theorie und auch in den Methoden, die ich hier aufgezeigt habe, Ereignisse angenommen werden, um die Modellierung zu vereinfachen. Zusätzlich erkennt man auch, dass die Wahrscheinlichkeiten vor allem in der Diagonale hoch ist. Also herrscht eine Tendenz, dass die Unternehmen ihre Ratings am Ende beibehalten. Auch andere Beobachtungen können beim Vergleich mit den realitätsgetreuen Beispielen gemacht werden. In der Thoerie wird angenommen, dass ein Unternehmen, welches in einen Zahlungsverzug gerät, kein Upgrade mehr erfahren kann. Trotz der genaueren Methoden wird die Kohorten Methode in den internen Ratingsystemen verwendet, da häufig Ratingänderungen nur einmal im Jahr ohne genaue Zeitangabe bekannt gegeben werden, damit wäre die Verwendung des Maximum-Likelihood- oder des Nelsons-Aalen-Schätzers nicht sehr sinnvoll. Ein weiterer Grund, warum bei Banken die zeitdiskrete historische Übergangsmatrix verwendet wird, ist die Frage der Existenz und der Eindeutigkeit der Generator Matrix und zusätzlich auch die Anpassung an die Übergangsmatrix. Die Verwendung der anderen Methoden ist auch für Banken nicht uninteressant, aber es gibt für einige diskrete Übergangsmatrizen keine Generator Matrix, oder eine mit negativen Werten, die sich nicht auf der Diagonale der Matrix befinden. Dies führt dann zu negativen Übergangswahrscheinlichkeiten beim Betrachten eines kurzen Zeitintervalls. Trotz dieser Annahmen hat sich die Anwendung der Methoden in der Finanzmarktwirtschaft bewährt.

Literatur

Brzezniak, Zdzislaw und Tomasz Zastawniak: *Basic stochastic processes: a course through exercises*. Springer Science & Business Media, 2000.

Havlicek, Hans: *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*. Heldermann, 2006.

Fitch bestätigte Österreich-Rating mit „AA+“. `https://orf.at/stories/`. Veröffentlicht am 23.10.2021.

Die 3 größten Ratingagenturen. `https://anlegerplus.de/die-big-three`. Veröffentlicht am 17.08.2011.

Trueck, Stefan und Svetlozar T Rachev: *Rating based modeling of credit risk: theory and application of migration matrices*. Academic press, 2009.

Definitionen von Wirtschaftsbegriffen. `https://wirtschaftslexikon.gabler.de/`.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis