SEMINARARBEIT

# Rule-based strategies for a dynamic life cycle investment

**Finanz- und Versicherungsmathematik**
Technische Universität Wien

verfasst von
**Johannes Pfennigbauer**
Matrikelnummer: 11902046

unter Anleitung von
**Assoc. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Stefan Gerhold**

vorgelegt Februar 2022

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Einleitung

Diese Seminararbeit beschäftigt sich mit dem gleichnamigen Paper „Rule-based strategies for dynamic life cycle investment“ von T.R.B. den Haan, K.W. Chau, M. van der Schaans und C.W. Oosterlee. Der Inhalt dieser Arbeit stammt grundsätzlich aus dem eben genannten Paper. Vereinzelt wurde aus den darin zitierten Quellen ergänzt.
Heutzutage wird es als normal angesehen eine private Pensionsvorsorge zu besitzen. Es wirkt als würde man sein ganzes Leben damit verbringen für die Pension zu sparen. Man setzt sich ein genaues Ziel, dass man erreichen möchte. Oft macht man dieses Ziel abhängig von dem eigenen Gehalt, typischerweise in etwa 70%, so wird es auch hier angenommen. Dennoch ist dieser Prozess mit viel Risiko verbunden und man kann nie sicher sagen, dass man das Ziel erreichen wird. In dieser Seminararbeit werden dynamische Strategien vorgestellt, welche diesen Weg in Richtung des Ziels optimieren sollen.
Diese Strategien werden so vorgehen, dass sie nach Jahren mit guter Rendite das Risiko reduzieren. Es wird angenommen, dass das Potenzial nach oben und unten gleich ist. Hier sollte man erwähnen, dass die Strategien nicht auf maximalen Gewinn aus sind. Es ist dem Investierenden gleichgültig ob er am Ende 80% oder 100% als Pension zurückbekommt, denn es zählt nur ob das Ziel von 70% erreicht wird. Im Gegensatz dazu, soll es nicht egal sein, wie weit eine Strategie ihr Ziel nach unten verfehlt, denn das soll ein wesentliches Merkmal für die Performance einer Strategie darstellen.
In dieser Arbeit wird gezeigt werden, dass hinsichtlich dieser Kriterien die vorgestellten Strategien besser laufen als typische statische Strategien, indem sie unnötiges Risiko verhindern. Was eine statische Strategie ist, sieht man am besten an einem Beispiel. Die Regel von Bogle besagt, dass man in jedem Jahr 100% minus seinem aktuellen Alter in risikoreiche Anlagen investieren sollte und den Rest in ein sicheres Depot. Man erkennt sofort, woher der Name statisch kommt, denn die Verteilungen zwischen risikoreichen und sicheren Depot sind hier von Anfang an fix vorgegeben. Das ist eine große Schwäche, wenn zum Beispiel eine 20-jährige Person fünf Jahre lang eine sehr gute Rendite erzielt, aber streng nach der Regel von Bogle handelt, sind mit 25 Jahren immer noch 75% ihres Vermögens in risikoreichen Anlagen und damit auch der Großteil des unrealisierten Gewinns. Bei einem Crash oder einer längeren Baisse, würde die Person große Teile ihres Gewinnes wieder verlieren. Die Strategien die hier vorgestellt werden sind zwar ebenfalls regelbasiert, aber sie sind dynamisch, das heißt sie passen sich in der Zukunft an.

Wenn man von solchen dynamischen Strategien liest, stößt man unweigerlich auch auf dynamisches Programmieren. In diesem Kontext meint man damit, ein Problem rückwärts durch die Zeit zu optimieren. Das heißt wenn ich ein Teilproblem löse, kann ich annehmen, dass alle zukünftigen bereits annähernd optimal laufen. Der Erste, der diesen Zusammenhang mit einer risikoreichen und einer risikoarmen Anlage genauer beschrieb war Merton in dem Artikel Lifetime portfolio selection under uncertainty" 1969. Er erkannte dabei, dass die optimale Strategie von einer Risiko-Nutzen-Funktion abhängt und sich stetig neugewichtet. [2]
Zur optimalen Vermögensverteilung gibt es sehr viel Literatur. Für die ursprüngliche Arbeit war unter anderem eine Veröffentlichung von Li und Ng wichtig, die Mean-Variance-Strategien mit einem Vermögensziel in Verbindung brachten. Damit kann ein Überschuss erkannt werden, wenn das aktuelle Vermögen über seinem Ziel liegt. Im umgekehrten Fall, sieht man daraus, dass man mehr in risikoreichere Anlagen investieren muss. Zhang und andere Kollegen haben ein ähnliches Problem bearbeitet und dieses auch mit dem dynamischen Programmieren in Verbindung gebracht. Dafür haben sie die Least Square Monte Carlo Methode verwendet. Mit den oberen und unteren Grenzen für das Vermögen in Kapitel 3.3 orientierte man sich an diesem Paper. Forsyth und Vetzal haben sich ebenfalls mit dem dynamischen Programmieren in diesem Kontext auseinandergesetzt und dafür ähnliche mean-variance Probleme der Zukunft zeitgleich zum jetzigen mit einem Lösungsalgorithmus für partielle Differentialgleichungen gelöst. Zusätzlich haben sie dasselbe auch mit einem fixen Vermögensziel versucht. Beide zuletzt genannten Artikel haben versucht unnötiges Risiko zu reduzieren indem das überschüssige Vermögen in ein risikofreies Depot eingezahlt wurde.[3][4]
In diesem Artikel wird der Überschuss in ein risikoarmes, aber kein risikofreier Depot investiert. Generell wird angenommen, dass es keine Arbitragemöglichkeit gibt. Durch dieses Rebalancing werden wir sehen, dass die Schlussverteilung im Vergleich zu statischen Strategien deutlich zentrierter ist. Das heißt auch das Risiko nach unten zu verfehlen wird kleiner.
Neben all diesen Vorteilen möchte ich hier aber auch die negativen Seiten betonen. Erstens ist der Rechenaufwand von dynamischen Strategien deutlich höher, vor allem im Vergleich zu einfachen statischen Ansätzen. Zweitens darf man nicht vergessen, dass es hier um stochastische Modelle geht, die sehr weit in die Zukunft abbilden. Durch kleine Veränderungen in den Parametern können bereits ganz andere Investmententscheidungen ausgelöst werden. Vor allen das starke Schwanken und die Umschichtungen der Vermögenswerte sind aus praktischer Sicht nicht immer ganz nachvollziehbar. Und da sogar die Pensionszahlungen aufgrund der Inflation stochastisch sind, kann man das dynamische Programmieren nicht einfach so implementieren, da damit

möglicherweise auch Verteilungen verändert werden.
Zwischen den statischen und dynamischen Strategien gibt es regelbasierte dynamische Strategien. Diese versuchen das Beste von beiden zu verknüpfen. In dieser Arbeit werden zwei regelbasierte und zusätzlich eine, mit dem dynamischen Programmieren kombinierte, Strategien vorgestellt. Durch einige numerische Experimente ermöglicht man einen Vergleich der Strategien.

# 2. Einige Vorbereitungen

In diesem Abschnitt wird die notwendige Umgebung erklärt. Da die Autoren des zugrundeliegenden Artikels aus den Niederlanden sind orientiert sich auch diese Seminararbeit am niederländischen Pensionssystem, welches hier kurz vorgestellt wird. Anschließend wird auf die Situation, Methoden und die verwendeten Variablen eingegangen. Abschließend wird das verwendete stochastische Modell vorgestellt, ehe im nächsten Kapitel auf die konkreten Strategien eingegangen wird.

## 2.1 Das niederländische Pensionssystem

Wie breits erwähnt geht man von einer niederländischen Person aus. Alle Daten, wie Pensionsantrittsalter und Lebenserwartung, wurden aus öffentlichen Statistiken genommen. Grundsätzlich besteht das Pensionssystem aus drei Säulen. Die erste Säule bildet eine gesetzliche Mindestpension, welche sich auf circa 70% des Mindesteinkommen beläuft. Diese wird mit Steuergeld von der Regierung ausgezahlt. Jeder der mehr als 13.123 Euro, knapp über dem Mindesteinkommen, verdient, hat zusätzlich Anspruch auf Säule zwei. Diese Säule besteht aus einem kollektiven Pensionsschema, in welches jeder, der teilnehmen möchte, einzahlt. Damit hat er später Anspruch auf Geld aus diesem Topf abhängig von seinem Einkommen. Die dritte Säule ist ebenfalls ergänzend zu den anderen und bildet die private Pensionsvorsorge. Es wird also privat angespart bis zum Pensionsantrittsalter und schließlich lässt man sich diesen Betrag dann in periodischen Zahlungen als Pension auszahlen. In diesem Artikel soll der Investierende volle Kontrolle über seine möglichen Auszahlungen haben. Das heißt wir befinden sich entweder in der dritten Säule oder in einem individuellen Topf der zweiten Säule, wobei die investierende Person die Kontrolle darüber hat.

## 2.2 Das Setting

In diesem Abschnitt möchte ich die Situation erläutern, die wir hier annehmen. Zur Zeit $t = 0$ beschließt unsere fiktive Person, welche zu diesem Zeitpunkt 26 Jahre alt sein soll, eine Altersvorsorge anzusparen. Das macht sie in dem sie jährlich einen Teil ihres Jahresgehalts abzweigt. Ihr Ziel ist es mit 67 Jahren in Pension zu gehen und weiter 70% ihres Gehalts zu bekommen. Die staatliche Pension beläuft sich auf etwa 70% des Mindesteinkommens, das heißt sie muss so viel ansparen, dass sie damit 70% der Differenz zwischen ihrem tatsächlichen Einkommen und dem Mindesteinkommen abdecken kann. Die Pension erhält sie dann ab dem Pensionsantritt für eine fixe Laufzeit $N$, die wir hier mit 20 Jahren annehmen. Natürlich ist die Person damit einem gewissen Langlebigkeitsrisiko ausgesetzt, das heißt wenn sie älter als 87 Jahre alt werden würde, würde in unserem Experiment die private Pension wegfallen. Solche Vereinfachungen sollen hier aber keine Rolle spielen, da die Ergebnisse dennoch sehr brauchbar sind und der Fokus in dieser Arbeit ganz klar auf die Zeit vor Pensionsantritt gerichtet ist.
Konkret wird angenommen, dass die Person beim Pensionsantritt mit all dem angesparten Geld eine Anleihe oder ähnliches kauft, die jährlich ausbezahlt wird. Diese soll mit einem Zins versehen sein, der zumindest die erwartete Inflation decken soll.
Generell kann die Person jedes Jahr ihr Vermögen entweder in das risikoreiche oder das sichere Depot, aus welchem dann später die Pension ausgezahlt wird, investieren. Vor Pensionsantritt soll das sichere Depot die Gewinne absichern und nur mit der erwarteten Inflation wachsen. Das bedeutet auch hier gibt es ein gewisses Risiko. Dennoch wird angenommen, dass man keine Hedgingstrategie gegen die Inflation verfolgt und wie schon erwähnt, gibt es keine Arbitragemöglichkeit.

Da die Person einmal jährlich investiert passieren alle Investments, Verteilungen und Zahlungen in diskreter Zeit. Man startet bei $t = 0$, zahlt ein bis zum Pensionsantritt bei $t = T$ und erhält dann $N$ Jahre Auszahlungen bis $t = T + N - 1$. Investiert wird immer ein Anteil $\alpha_t \in [0, 1]$ des Vermögens $W_t$, wobei Leerverkäufe oder eine Kreditaufnahme ausgeschlossen sind. Dieses $\alpha$ nennt man control alpha da im Rahmen des dynamischen Programmierens die Person damit die Kontrolle über den Ausgang behält.
Eine Strategie versteht man hier als eine Funktion, welche die aktuellen verfügbaren Informationen $Z_t$, wie zum Beispiel die vergangene Rendite oder das aktuelle Vermögen, auf eine passende Verteilung abbildet:

$$\alpha_t : \mathbb{R}^K \ni Z_t \mapsto \alpha_t(Z_t) \in [0, 1].$$

Die Informationen $Z_t$ sind adaptiert an eine Filtration $\mathcal{F}_t$, von dem zugrundeliegenden stochastischen Prozess. Das heißt vor dem Zeitpunkt $t$ ist $Z_t$ noch unbekannt, also ist $\alpha_t$ hier stochastisch. Das ist ein wesentlicher Unterschied zu den statischen Strategien, wo $\alpha$ zu jedem Zeitpunkt bekannt ist, also deterministisch.

Bevor das jährliche Rebalancing stattfindet, macht die Person eine Verteilung $c_t$ von ihrem Jahresgehalt. Diese Verteilungen sind abhängig vom Alter ein Prozensatz des Einkommens, wie in der Abbildung 5.1 am Ende des Dokuments zu sehen. Es wird angenommen, dass die Person einen durchschnittlichen deterministischen Karriereweg durchläuft, das heißt ihr Jahresgehalt steigt mit den Jahren an. Zusätzlich erhöht sich das Jahresgehalt mit der Lohninflation $w_t$. In Abbildung 5.1 sieht man auch die Erwartung und Standardabweichung der jährlichen Sparquoten, hier muss man beachten, dass diese Verteilungen hauptsächlich vom Karrierweg und der Inflation abhängen und nicht von den Investmententscheidungen oder der möglichen Rendite.
Das Ziel die 70% zu erreichen, bezeichnen wir mit einer Replacement Ratio, $RR_T$, zum Zeitpunkt des Pensionsantritts. Diese lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$RR_T = \frac{W_T}{M_T} \cdot \frac{T+1}{\sum_{t=0}^{T} s_t \prod_{\tau=t+1}^{T}(1+\pi_\tau)}. \tag{2.1}$$

Der zweite Term ist der Kehrwert des durschnittlichen Gehalts. Diese setzt sich aus der Summe aller Jahresgehälter, welche jeweils mit der Inflation multipliziert werden, zusammen. Der erste Term teilt das verfügbare Vermögen zum Zeitpunkt $t = T$ durch den Marktwert $M_T$ der Pensionszahlungen. Diesen kann man wie folgt berechnen:

$$M_t = \sum_{\tau=T}^{T+N-1} (1 + r_t^{\tau-t})^{t-\tau} \mathbb{E}\Big[ \prod_{\tau'=t+1}^{\tau} (1+\pi_{\tau'} \Big] \tag{2.2}$$

Hier bezeichnet $\mathbb{E}_t$ den Erwartungswert in Bezug auf die Filtration $\mathcal{F}_t$ und $r_t^{\tau-t}$ repräsentiert einen Diskontfaktor von $\tau - t$ Jahren in der Zukunft auf die Gegenwart. Dieser wird zusätzlich mit der erwartenden Inflation multipliziert. Teilt man nun das aktuelle Vermögen durch diesen Marktwert erhält man die Kaufkraft des aktuellen Vermögens in Bezug auf die Pensionszahlungen. Zusammenfassend teilt der erste Term von $RR_T$ also das aktuelle Vermögen auf $N$ Pensionszahlungen auf und reduziert es auf die tatsächliche Kaufkraft. Mutlipliziert mit dem Kehrwert der Kaufkraft des durchschnittlichen Jahresgehalts, ergibt dies einen Faktor wie viel die Pension tatsächlich wert ist.

Um zu messen ob die Strategie ihr Ziel erreicht, führen wir an dieser Stelle eine Utility-Funktion $U$ ein. Anhand dieser soll der folgende Ausdruck maximiert werden:

$$\max_{\alpha_t,\dots,\alpha_{T-1}} \mathbb{E}[U(Z_T)|\mathcal{F}_t] \tag{2.3}$$

In Worten formuliert bedeutet das, dass man gegeben der aktuellen Situation $\mathcal{F}_t$ die beste Verteilung $\alpha_i$ finden will um den erwarteten Nutzen $U(Z_T)$ zum Pensionsantritt so groß wie möglich zu gestalten. Hier meint man den Nutzen im Sinne davon, dass Ziel zu erreichen und nicht die maximale Rendite. Deswegen wird $U$ wie folgt definiert:

$$U(Z_T) := \min(RR_T - 70\%, 0) \tag{2.4}$$

Um die Performance der einzelnen Strategien zu vergleichen wird zusätzlich noch der 10% conditional value at risk, kurz $10\% CVaR$, berechnet. Dieser stellt die 10% der schlechtesten Szenarien dar und ist definiert als:

$$CVaR_{0.1}(RR_T) = \mathbb{E}[RR_T|RR_T \leq F^{-1}_{RR_T}(0.1)] \tag{2.5}$$

wobei hier $F^{-1}_{RR_T}(0.1)$ die Inverse der Verteilungsfunktion von $RR_T$ bezeichnet und die Zahl 0.1 steht für das erwähnte 10%-Quantil.

## 2.3 Das stochastische Modell

Für eine generelle Anwendung sollten die Strategien nicht von den Parametern des stochastischen Modells abhängen, damit man die Strategien auch auf andere Modelle übertragen kann. Hier wird das Modell durch die Erwartungswerte einer Monte Carlo Simulation repräsentiert. Man verwendet hier ein Standard Modell, welches auf der Website der Niederländischen Zentralbank öffentlich einsehbar ist. Konkret werden Daten aus dem ersten Quartal des Jahres 2017 verwendet.
In diskreter Zeit ist das Modell ein Vektor-Autoregressiver Prozess, VAR(1), mit normalverteilten Inkrementen. Die Klammer bedeutet, dass das Modell nur von einem Vergangenheitswert abhängt. Basierend auf diesem Modell werden nun einige Pfade für die Rendite $x_t$ des risikoreichen Portfolios, die Inflation $\pi_t$, die Lohninflation $w_t$, welche gleich der Inflation plus $0,5\%$ sein soll, und ein Leitzins $r_t^m$ mit Maturität $m$ simuliert. Zusätzlich berechnet man noch Pfade für die Änderung des Marktwertes der Pensionszahlungen $m_t$, mit der Formel:

$$m_t = \frac{M_t}{M_{t-1}} - 1 \tag{2.6}$$

Wobei $M_t$ definiert ist wie in (2.2). Das sichere Portfolio soll die investierende Person vor der erwarteten Inflation schützen. Diese wird durch die least Square Monte Carlo Technik ermittelt.
Die Ergebnisse der Simulation sind in der untenstehenden Abbildung 2.1 in einer Tabelle zusammengefasst. Da die Marktwerte der zukünftigen Pensionszahlungen stark schwanken, haben beide Renditen eine ähnliche Standardabweichung. Dennoch kann man das sichere Depot als risikoärmer bezeichnen in Bezug auf die Ziele der investierenden Person, denn durch das Investieren in das sichere Depot wird die Person den entsprechenden Betrag der Anleihe unabhängig von den zukünftigen Marktwerten bekommen.
Aufgrund der Definition der Lohninflation ergibt sich eine perfekte positive Korrelation zwischen ihr und der Inflation selbst.

| | $x_t$ | $m_t$ | $r_t^{10}$ | $\pi_t$ | $w_t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Mean | 6.1% | 3.4% | 2.5% | 1.6% | 2.1% |
| Standard deviation | 18.3% | 18.5% | 2.4% | 1.5% | 1.5% |
| Correlations | | | | | |
| Equity return ($x_t$) | 1.00 | | | | |
| Matching return ($m_t$) | – 0.06 | 1.00 | | | |
| 10 year interest ($r_t^{10}$) | 0.17 | – 0.17 | 1.00 | | |
| Inflation ($\pi_t$ ) | 0.11 | – 0.04 | 0.82 | 1.00 | |
| Wage inflation ($w_t$) | 0.11 | – 0.04 | 0.82 | 1.00 | 1.00 |

Abbildung 2.1: Werte der Variablen des stochastischen Modells, die durch eine Kombination aller möglichen Pfade berechnet wurden.

# 3. Strategien

In diesem Kapitel werden die Strategien, welche in der Einleitung bereits erwähnt wurden, einzeln vorgestellt. Alle Strategien verfolgen das Ziel eine Replacement Ratio von 70% zu erreichen und versuchen das Risiko nach Jahren mit guter Entwicklung zu reduzieren. Die Strategien unterscheiden sich lediglich in dem Punkt, wann die Entwicklung ausreichend gut ist, um das Risiko reduzieren zu können und in der Art und Weise wie diese Reduktion passiert.

## 3.1 Cumulative target Strategy

Frei übersetzt kann man den Namen als Strategie mit einem gemeinsamen Ziel deuten. Das bedeutet, dass die Investments aller Jahre ein gemeinsames Ziel für ihre Summe haben. Unter anderem haben Zhang und auch Forsyth und Vetzal ähnliche Strategien vorgestellt, welche das Risiko reduzieren sobald das Vermögen ein vorher definiertes Ziel überschreitet. Im Unterschied zu diesen Strategien spart unsere investierende Person für ihre Pension in Form einer Anleihe oder einem ähnlichen Finanzinstrument mit der gewünschten jährlichen Pension als Auszahlung.[4]
Mit dem stochastischen Modell aus dem vorherigen Kapitel hängt diese Strategie im Wesentlichen nur noch von zwei Parametern ab: die echte Rendite $r$ bis zur Pension und einem Diskontfaktor $\delta$ während der Pension um die zukünftigen Pensionszahlungen auf ihren Barwert zum Pensionsantrittsalter abzudiskontieren.
Zu jedem Zeitpunkt $t \in 0, ..., T$ spart die investierende Person einen Anteil $c_t$ ihres Jahresgehalts. Alle vorherigen Ansparnisse, d.h. alle $c_\tau$ mit $\tau < t$ wachsen mit der echten Rendite $r$ plus der Inflation $\pi$. Für diese ergibt sich als Ziel zum Pensionsantritt $c_\tau \mathbb{E}_t F_\tau$, wobei hier $F_\tau$ definiert ist als:

$$F_\tau = \prod_{\tau'=\tau+1}^{T} (1 + r + \pi_{\tau'}). \tag{3.1}$$

Hier bedeutet $\mathbb{E}_t$, dass bis zum Zeitpunkt $t$ die realisierte und danach die erwartete Inflation angenommen wird.
Nun werden die Ziele jeder einzelnen Verteilung summiert. Verbindet man diese Summe mit einem Diskontfaktor für alle Pensionszahlungen $\bar{M}_T$ mit Diskontrate $\delta$ erhält man ein Ziel für das Gesamtvermögen:

$$\bar{M}_T = \sum_{\tau=T}^{T+N-1} \frac{1}{(1+\delta)^{\tau-T}}, \tag{3.2}$$

Da hier $\bar{M}_T$ eher eine Annuität mit dem Zins $\delta$ darstellt, setzt man für das Ziel des Gesamtvermögens diese in Relation zu dem Marktwert $M_t$:

$$\tilde{W}_t = \frac{M_t}{\bar{M}_T} \sum_{\tau=0}^{t} c_t \mathbb{E}_t F_\tau, \tag{3.3}$$

Wobei die Summe die oben angesprochene Zusammenführung von allen einzelnen Zielen darstellt.
Zusammengefasst entsteht das Vermögensziel aus dieser Summe, $\bar{M}_T$ entspricht einer Annutiät mit Zins $\delta$ um die erste Pension zu approximieren und $M_t$ indiziert die erste Pension mit der erwarteten Inflation und diskontiert alle zukünftigen Pensionszahlungen.
Grundsätzlich wird hier die Verteilung $c_t$ immer in das risikoreiche Portfolio investiert. Falls jedoch das aktuelle Vermögen inklusive $c_t$ das Ziel übersteigt, so wird das Risiko reduziert. Dies geschieht indem das gesamte Vermögen auf das sichere Depot transferiert wird. Hier verfolgt die investierende Person eine Buy-and-Hold Strategie. Falls zum Zeitpunkt des Investierens das aktuelle Vermögen bereits größer als das Ziel ist, wird direkt in das sichere Depot eingezahlt. Damit ergibt sich für das control alpha zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\alpha_0 = \begin{cases} 0 & \text{falls } W_0 \geq \tilde{W}_0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.4}$$

und für alle weiteren Zeitpunkte $t = 1, ..., T$

$$\alpha_t = \begin{cases} 0 & \text{falls } W_t \geq \tilde{W}_t \\ \frac{\alpha_{t-1}(1+x_t)}{\alpha_{t-1}(1+x_t)+(1-\alpha_{t-1})(1+m_t} & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.5}$$

## 3.2 Individual target Strategy

Diese Strategie geht etwas anders vor als die Cumulative Target Strategy. Der Unterschied liegt darin, dass hier jede Verteilung ihr eigenes Ziel verfolgt. Bei der ersten vorgestellten Strategie war es so, dass versucht wird mit allen Verteilungen ein gemeinsames Ziel zu erreichen. Konkret heißt das, dass die Ziele der einzelnen Investments nicht mehr aufsummiert werden um ein Großes zu benennen. Das Vermögen $W_t$ zum Zeitpunkt $t$ setzt sich zusammen als:

$$W_t = \sum_{\tau=0}^{t} W_{t,\tau}, \tag{3.6}$$

wobei $W_{t,\tau}$ der momentane Wert zum Zeitpunkt $t$ eines Investments $c_\tau$ vom Zeitpunkt $\tau \in \{0, ..., t\}$ ist. Für jedes $W_{t,\tau}$ definiert man ein individuelles Ziel

$$\bar{W}_{t,\tau} = \frac{M_t}{\bar{M}_T} c_\tau \mathbb{E}_t F_\tau \tag{3.7}$$

Dieses individuelle Ziel setzt sich analog zu (3.3) zusammen, mit dem Unterschied, dass hier nicht die Summe der Verteilungen betrachtet wird.
Abgesehen davon funktioniert die Strategie sehr ähnlich. Sobald eine Verteilung $c_t$ ihr Ziel erreicht, wird sie in das sichere Depot transferiert. Jede neue Verteilung wird durch die Zielsetzung jedoch zuerst in das risikoreiche Depot investiert.[3]
Beachte, dass man hier für jedes Investment auch ein eigenes control alpha $\alpha_{t,\tau}$ benötigt. Dieses lässt sich jedoch leicht darstellen als:

$$\alpha_{t,\tau} = \begin{cases} 0 & \text{falls für ein } \tau' = \tau, ..., t \text{gilt } W_{\tau',t} \geq \tilde{W}_{\tau',\tau} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.8}$$

Zusätzlich ist dann das control alpha $\alpha_t$ für alle zusammen gegeben als:

$$\alpha_t = \frac{1}{W_t} \sum_{\tau=0}^{t} W_{t,\tau} \alpha_{t,\tau}. \tag{3.9}$$

Zusammengefasst unterscheiden sich diese zwei Strategien in dem, was zu einer Reduktion des Risikos führt. Der Nachteil der Cumulative target Strategy liegt darin, dass neue Investments für möglich Verluste von vorherigen bürgen müssen. Andererseits kann dies auch ein Vorteil sein, denn wenn ein Investment gute Rendite bringt profitieren auch alle anderen davon. Das kann sogar dazu führen, dass man eine neue Investition direkt auf das sichere Depot einzahlen kann. Dies ist bei der Individual target Strategy nie möglich, denn jedes Investment hat ein eigenes Ziel, das es erreichen muss, bevor es transferiert werden kann.

## 3.3 Kombinierte Strategie

Bei beiden bereits vorgestellten Strategien wird immer entweder zur Gänze auf das sichere Depot transferiert oder gar nicht. Je nach dem ob das Ziel erreicht wurde oder nicht. Hier soll diese Strategie ansetzen, welche die Individual target Strategy mit dem Dynamischen Programmieren kombiniert. Für diese dritte Strategie definieren wir einen Faktor $Z_{t,\tau}$, der den aktuellen Wert einer Verteilung $W_{t,\tau}$ in Relation zu ihrem Ziel $\bar{W}_{t,\tau}$ setzt:

$$Z_{t,\tau} = \frac{W_{t,\tau}}{\bar{W}_{t,\tau}}. \tag{3.10}$$

Mit diesem Faktor löst man den Ausdruck

$$V(z,t,\tau) = \sup_{\mathcal{A}_{t,\tau}} \mathbb{E}[\tilde{U}(Z_{T,\tau}) | Z_{T,\tau} = z], \tag{3.11}$$

mit der Nutzenfunktion $\tilde{U}$, einer Wertfunktion $V(z,t,\tau)$ für das Problem des Dynamischen Programmierens und dem control $\mathcal{A}_{t,\tau}$, welches aus allen zukünftigen Investitionen besteht:

$$\mathcal{A}_{t,\tau} = \{\alpha_{t,\tau}, ..., \alpha_{T,\tau}\}. \tag{3.12}$$

Das Prinzip des Dynamischen Programmierens ermöglicht es, dass Problem rückwärts durch die Zeit zu optimieren, denn es gilt für $\mathcal{A}^*_{t,\tau}$:

$$\mathcal{A}^*_{t,\tau} = \{\alpha^*_{t,\tau}, ..., \alpha^*_{t+1,\tau}\}. \tag{3.13}$$

Da wir angenommen haben, dass Potenzial nach oben gleichermaßen mit einem Abwärtsrisiko kommt und da die investierende Person das Risiko nach unten zu verfehlen möglichst gering halten will, ist es sinnvoll zu versuchen den Faktor $Z_{t,\tau}$ zwischen geeigneten Grenzen zu halten. Dafür sorgt die Nutzenfunktion $\tilde{U}$, welche definiert ist als:

$$\tilde{U}(z) = \frac{-(z-\beta)^2 - (z - z^*_{min})^2}{z}, \tag{3.14}$$

mit

$$\beta = \sqrt{2(z^*_{max})^2 - (z^*_{min})^2}. \tag{3.15}$$

Die Funktion (3.14) ist positiv konkav und stetig auf $\mathbb{R}_{>0}$. In Abbildung 3.1 ist sie graphisch dargestellt. Es zeigt sich, dass die Wahl $z^*_{min} = 1$ und $z^*_{max} = 3$ sich sehr gut für die Ziele der investierenden Person eignen. Später wird damit auch der zusätzliche Wert, den diese Strategie bringt, deutlich werden.[4]

Bevor wir zur praktischen Implementierung des Algorithmus übergehen, brauchen wir zunächst noch einige Vorbereitungen. Man kann nämlich zeigen, dass sich der Faktor $Z_{t,\tau}$ mit der Zeit entwickelt. Genau genommen verändert sich der Zähler durch die tatsächliche Rendite der Investitionen und der Nenner durch die Veränderung der erwarteten Inflation. Da diese Veränderung jedoch unabhängig von $\tau$ sind, kann man zeigen, dass das optimale control alpha $\alpha^*_{t,\tau}$ unabhängig von $\tau$ ist. das heißt wennn man das optimale control alpha einmal gefunden hat, kann man es auf alle Verteilungen anwenden. Dazu formuliert man folgendes Lemma:

**Lemma 3.3.1.** *Falls das optimale control alpha $\alpha^*_{t,\tau}$ des dynamic programming problem existiert und eindeutig ist, dann ist es unabhängig von der Verteilung $c_\tau$ und der Zeit $\tau$.*

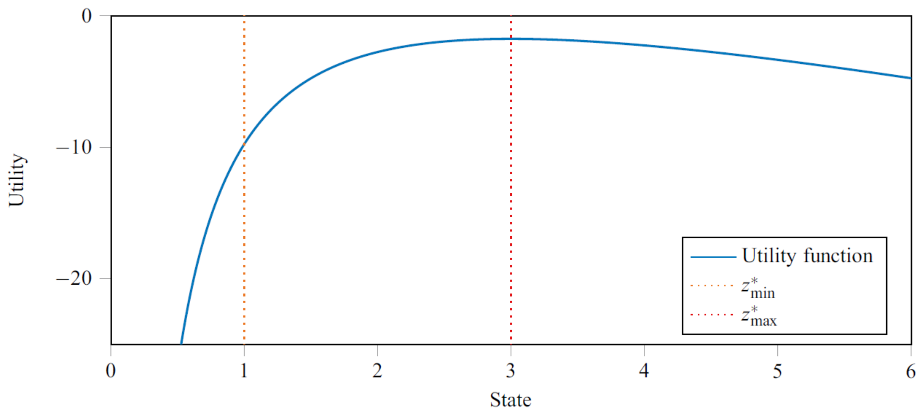


Abbildung 3.1: Nutzenfunktion (3.14) mit den Grenzen $z^*_{min} = 1$ und $z^*_{max} = 3$

*Proof.* Das Vermögen $W_{t,\tau}$ welches durch die Investition $c_\tau$ generiert wurde, wächst mit der tatsächlichen Rendite und erfüllt deswegen

$$W_{t,\tau} = [(1 + x_t)\alpha_{t-1,\tau} + (1 + m_t)(1 - \alpha_{t-1,\tau})]W_{t-1,\tau}. \tag{3.16}$$

Gemeinsam mit (3.3), (3.1) und (2.6) gilt damit für das Ziel dieser Investition:

$$\tilde{W}_{t,\tau} = \frac{\mathbb{E}_t F_{t-1}}{\mathbb{E}_{t-1} F_{t-1}}(1 + m_t)\tilde{W}_{t-1,\tau}. \tag{3.17}$$

Durch einsetzen von (3.16) und (3.17) in (3.11) erhält man für das optimale control alpha $\alpha^*_{t,\tau}$, dass es folgenden Ausdruck löst:

$$\sup_{\mathcal{A}_{t,\tau}} \mathbb{E}[\tilde{U}(z \prod_{\tau'=t+1}^{T} \frac{(1 + x_{\tau'+1}\alpha_{\tau',\tau} + (1 + m_{\tau'+1})(1 - \alpha_{\tau',\tau})}{\frac{\mathbb{E}_t F_{t-1}}{\mathbb{E}_{t-1} F_{t-1}}(1 + m_t)\tilde{W}_{t-1,\tau}})|Z_{T,\tau} = z]$$

Da das Argument von $\tilde{U}$ nur mehr von dem control alpha $\alpha_{\tau',\tau}$, zukünftigen Renditen des risikoreichen und sicheren Depots abhängen, lösen alle optimalen control alpha $\alpha^*_{t,\tau}$ als Funktion von $z$, dieselbe Sequenz von Optimierungsproblemen, rückwärts durch die Zeit. Damit sind sowohl die Wertfunktion $V(z, t, \tau)$, als auch das optimale control alpha $\alpha^*_{t,\tau}$ unabhängig von $\tau$. Mit einem ähnlichen Argument kann man auch die Unabhängigkeit von der Verteilung $c_\tau$ zeigen. □

Laut diesem Lemma reicht es also, wenn das dynamic programming problem ein einziges Mal gelöst wird. Das heißt, wenn man das optimale control alpha als Funktion von $z$ betrachtet, ist es für alle Investitionen gleich. Man kann also das optimale control alpha von $c_0$ auch für alle anderen Investitionen verwenden.

### 3.3.1 Dynamic Programming Implementation

In diesem Unterkapitel wird ein kleiner Einblick in die Implementierung des Algorithmus für die Kombinierte Strategie im Stil des Dynamischen Programmierens gewährt.
Wie bereits erwähnt läuft der Algorithmus rückwärts durch die Zeit. Um dies einfacher zu gestalten soll der Lösungsraum diskret sein, das heißt:

$$a_i \in \{a_1, a_2, ..., a_k\}$$

mit $a_j \in [0, 1]$ für $j \in \{1, ..., k\}$. Die investierende Person kann also zu jeder Zeit $t$ nur zwischen $k$ verschiedenen Verteilungen entscheiden.
Der Algorithmus löst die Teilprobleme rückwärts durch die Zeit, indem er mittels lokaler Regression mit der Zustandsvariable $Z_t$ den erwarteten Nutzen $\mathbb{E}[\tilde{U}(Z_T)]$ berechnet.
Durch das Lösen vom Teilproblem zur Zeit $t$ können sich jedoch die zukünftigen Zustandsvariablen $Z_{t+1}, ..., Z_T$ verändern. Diese werden wiederum bei der lokalen Regression der Lösungen für die zukünftigen Teilprobleme zu den Zeitpunkten $t + 1, ..., T$ verwendet. Deswegen läuft der Algorithmus schlangenartig durch die Zeit. Das heißt nachdem für das Teilproblem zur Zeit $t$ die optimale Lösung gefunden wurde, werden alle zukünftigen Teilprobleme entsprechend angepasst. Anschließend werden alle angepassten Teilprobleme erneut rückwärts durch die Zeit optimiert bis zum Zeitpunkt $t$ und dann einen Schritt weiter bis zum Teilproblem $t - 1$, welches jetzt zum ersten Mal gelöst wurde. Ab hier beginnt die Schleife von vorne.[2]
Sobald alle Teilprobleme gelöst sind, kann die Lösung durch eine Wiederholung des Ganzen weiter verbessert werden. Jede Wiederholung des Algorithmus läuft schlangenartig von $T$ bis zu $t_0$.

**Algorithm 1:** Dynamic programming investment strategy

**Data:** Scenario Set, asset allocations $a_1, \dots, a_k$
**Result:** Optimal admissible asset control $\mathscr{A}^*$
Initialization: create initial solution by choosing $\alpha_t = a_1$ for all $t = 0, \dots, T$ for all scenarios.
**for** $m = 1, \dots,$ number of iterations **do**
  **for** $j = 1, \dots, k$ **do**
    Set $\alpha_{T-1} = a_j$ for all scenarios
    Determine the expected utility function $f_{j,T-1}$,
    $$f_{j,T-1}(z) = \mathbb{E}\left[\check{U}(Z_T) | Z_{T-1} = z, \alpha_{T-1} = a_j\right],$$
    by using local regression for $Z_{T-1}$ and $\check{U}(Z_T)$ (Least Squares Monte Carlo method)
  Determine optimal asset allocation decision at time $T-1$ for all scenarios:
  $$m = \arg\max_{j \in \{1,\dots,m\}} f_{j,T-1}(Z_{T-1})$$
  $$\alpha^*_{T-1} = a_m$$
  **for** $t = T-2, T-3, \dots, 0$ **do**
    Update optimal allocation decisions (backward update):
    **for** $\tau = T, \dots, t+1$ **do**
      Update expected utility function $f_{j,\tau}$, for $j = 1, \dots, k$
      Update optimal asset allocation decision $\alpha^*_\tau$, for all scenarios
    Determine optimal asset allocation decision at time $t$ for the first time
    **for** $j = 1, \dots, k$ **do**
      Set $\alpha_t = a_j$ for all scenarios
      Determine the expected utility function $f_{j,t}$,
      $$f_{j,t}(z) = \mathbb{E}\left[\check{U}(Z_T) | Z_t = z, \alpha_t = a_j, \mathscr{A}_{t+1} = \mathscr{A}^*_{t+1}\right],$$
      by using local regression for $Z_t$ and $\check{U}(Z_T)$ (Least Squares Monte Carlo method)
    Determine optimal asset allocation decision at time $t$, for all scenarios:
    $$m = \arg\max_{j \in \{1,\dots,k\}} f_{j,t}(Z_t)$$
    $$\alpha^*_t = a_m$$
    Update optimal allocation decisions (forward update):
    **for** $\tau = t+1, \dots, T-1$ **do**
      Update expected utility function $f_{j,\tau}$, for $j = 1, \dots, k$
      Update optimal asset allocation decision $\alpha^*_\tau$, for all scenarios

Abbildung 3.2: Implementierung der kombinierten Strategie als Algorithmus

### 3.3.2 Zustandsvariable Z

Grundsätzlich sind die Vermögensziele einer Strategie nie konstant, sondern abhängig von der erwarteten Inflation und dem Marktwert der zukünftigen Pensionszahlungen. Abgesehen davon hängen sie natürlich auch davon ab, wie viel die investierende Person von ihrem Jahresgehalt sparen kann. Für den Ansatz des Dynamischen Programmierens ist ein konstantes Ziel jedoch unbedingt notwendig. Dieses Problem lässt sich lösen durch die Einführung des Faktors $Z_t$ in (3.10). Damit ist das Ziel für die Zustandsvariable konstant 1.
Ein entscheidender Vorteil dieser Wahl ist, dass die Lösung des Dynamischen

Programmierens theoretisch nur ein einziges Mal berechnet werden muss. Die Lösung für die erste Investition spannt den Zeitrahmen $t_0, ..., T$ auf. Bei jedem Rebalancing ist die von $Z_t$ abhängige optimale Investitionsentscheidung bereits einmal berechnet worden. Dies ist möglich wegen der Wahl von $Z_t$ und dem in diesem Kapitel gezeigten Lemma.
Aus praktischer Sicht zeigt sich jedoch, dass das nicht ganz zutrifft, da der Algorithmus nicht vollständig konvergiert, da die Stichprobengröße begrenzt ist. Lässt man den Algorithmus für jede Investition einzeln laufen, erhält man im Durchschnitt eine bessere Näherung für die optimale Lösung.

# 4. Numerische Experimente

In diesem Kapitel werden die vorgestellten regelbasierten Strategien anhand des stochastischen Modells aus Kapitel 2.3 simuliert. Außerdem wird ein Vergleich dieser untereinander und zusätzlich mit anderen statischen Strategien vollzogen.

## 4.1 Regelbasierte Strategien

Um die ersten zwei Strategien aus den Kapiteln 3.1 und 3.2 zu illustrieren, sehen Sie in der Abbildung 4.1 oben links einen der 2000 möglichen Pfade für die Entwicklung des Vermögens. In diesem Graph sieht man wie sich das Vermögensziel (gelb) im Vergleich zu der Cumulative Target Strategy (orange), Individual Target Strategy (grün) und zusätzlich einer optimalen statischen Strategie (blau) verhält. Die Pfade verlaufen recht ähnlich doch man erkennt hier recht gut, dass genau dann, wenn eine der beiden regelbasierten Strategien ihr Ziel von unten nach oben schneidet, Geld auf das sichere Depot transferiert wird. Dieser Geldfluss ist in dem unterem rechten Graphen dargestellt (mit derselben Farbverteilung). Hier sieht man den Unterschied der Cumulative Target Strategy und Individual Target Strategy deutlich. Bei der Ersteren wird nämlich immer, wenn das Ziel übertroffen wird, das gesamte risikoreiche Depot transferiert. Während bei der zweiten Strategie auch nur teilweise Transfer stattfinden können. Das sieht man zum Beispiel rund um $t = 20$ unten links, wo nur einige - aber nicht alle - Investitionen ihr Ziel überschreiten.

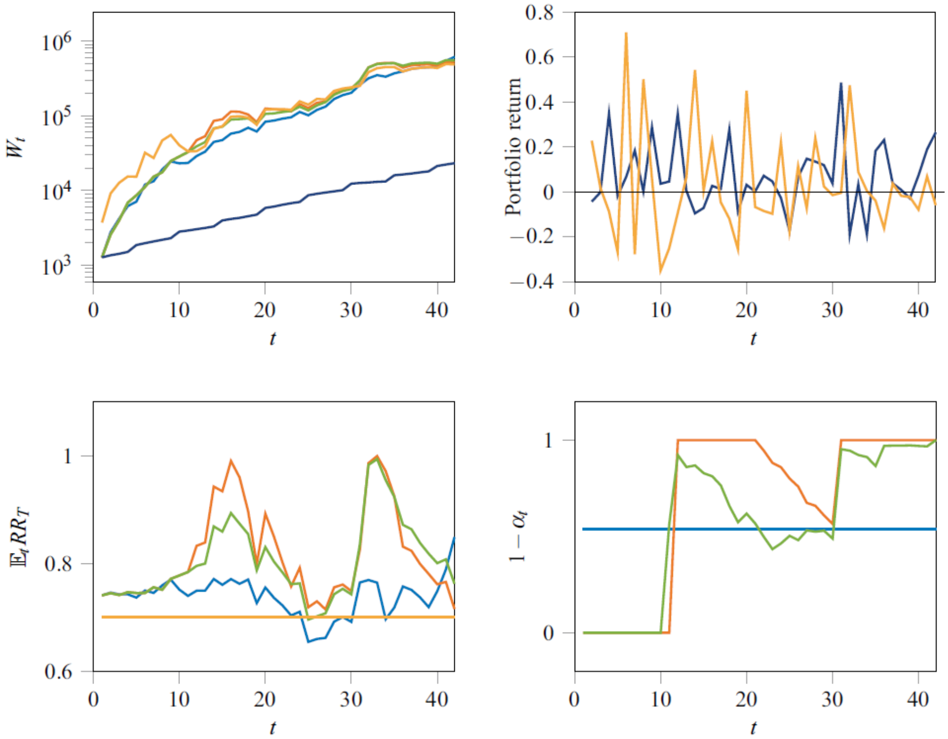


Abbildung 4.1: Beispielpfade der Cumulative target Strategy (orange), Individual target Strategy (green), optimalen statischen Strategy (blau) für: das Vermögen $W_t$ mit dem Vermögensziel (gelb) (oben links); der Rendite des sicheren (dunkelblau) und dem risikoreicheren Depot (orange) (oben rechts); der erwarteten Replacement Ratio mit dem Ziel 0.7 (gelb) (unten links); die Umschichtung $1 - \alpha_t$ (unten rechts)

Der Graph unten links zeigt wie sich die erwartete Replacement Ratio über die Zeit entwickelt. Hier erkennt man eine klare Outperformance der regelbasierten Strategien im Vergleich zu einer optimalen statischen Strategie (blau), obwohl die regelbasierten Strategien nur in den ersten 10 Jahren höhere Anteile in dem risikoreichen Portfolio haben. Man könnte also argumentieren, dass die bessere Performance von den gesetzten Regeln und nicht vom höheren Risiko kommt.
Die kombinierte Strategie lässt sich am besten durch die Erwartungswerte der tatsächlichen Investments, also dem optimal control $\alpha_{t,\tau}$ aus 3.3 darstellen. In Abbildung 4.2 sehen Sie den optimalen Anteil des sicheren Depots $1-\alpha_{t,0}$ für die erste Investition $c_0$ als Funktion über die Zeit $t$ und den Faktor $Z$ des Vermögens zu seinem Vermögensziel. Im Gegensatz zu den anderen beiden Strategien kann hier auch ein Transfer vom risikoarmen zum risikoreichen

Depot erfolgen. Damit ist diese Strategie etwas raffinierter als die ersten beiden, welche am sicheren Depot eine reine Buy-and-Hold Strategie verfolgen.

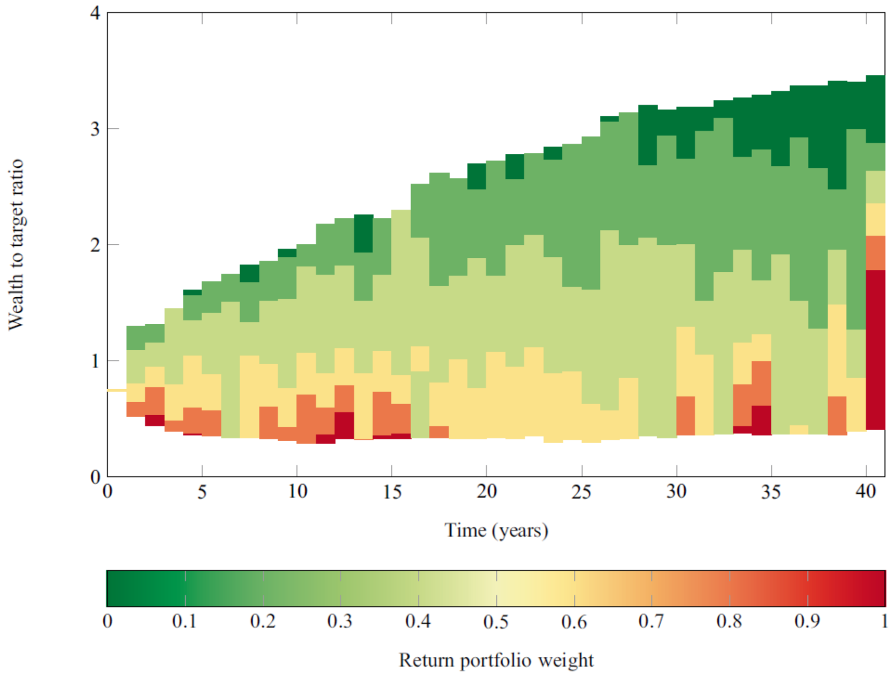


Abbildung 4.2: Optimaler Anteil $1 - \alpha_{t,0}$ des sicheren Depots, als Funktion von dem Faktor $Z$ aus (3.10), für die Kombinierte Strategie

In Abbildung 4.3 ist die Schlussverteilung der Replacement Ratio für die 3 vorgestellten Strategien und einer statischen Strategie (blau) dargestellt. Mit diesen Verteilungen kann man auch die Performance der Strategien vergleichen, wenn man betrachtet mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ziel der 70% nicht erreicht wird. Hier bestätigt sich der, in der Einleitung erwähnte, Vorteil der dynamischen Strategien, dass sie zentrierter sind und damit das Risko nach unten zu verfehlen schmälern.

Um nun alle Strategien miteinander Vergleichen zu können, sieht man sich an, wie oft eine Strategie zum Erfolg führt. In dem Kontext dieser Arbeit bedeutet das, ob das Ziel der 70% erreicht wird in Relation zu dem Risiko es zu verfehlen, wie in Abbildung 4.4 zu sehen. Aus dieser Darstellung kann man klar schließen, dass die dynamischen Strategien traditionelle statische Strategien outperformen. Neben der ohnehin intuitiven Annahme das Risiko nach einigen Jahren guter Rendite zu reduzieren, zeigt das den zusätzlichen Wert den diese Strategien mit sich bringen.

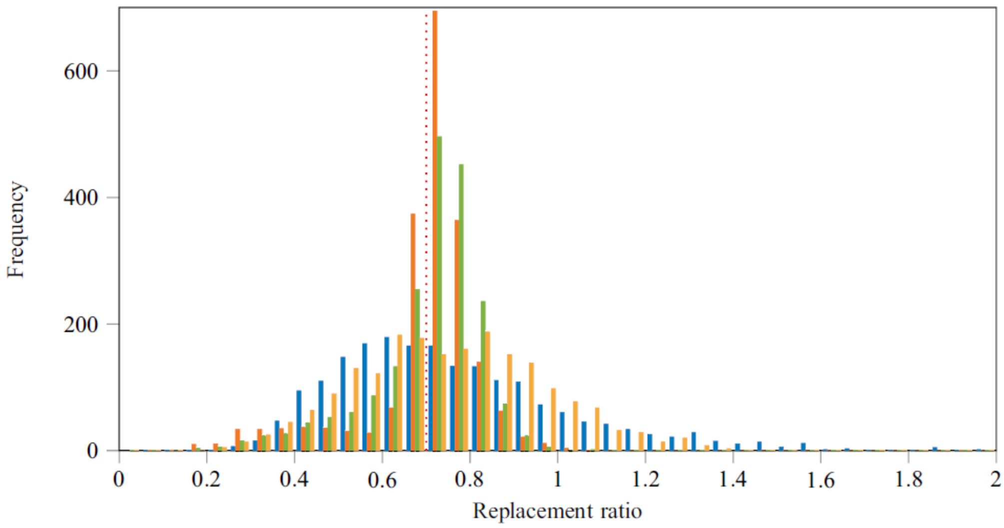


Abbildung 4.3: Verteilungsfunktionen der Replacement Ratios für die Cumulative target Strategy (orange), Individual target Strategy (grün), Kombinierte Strategie (gelb) und eine statische Strategie (blau).

Dennoch muss man erwähnen, dass das nur Stichproben einer Simulation sind und man daraus nicht eindeutig sagen kann, welche Strategie besser als eine andere ist. Vor allem zwischen den drei hier vorgestellten Strategien kann man hier nicht erkennen, dass eine deutlich effektiver als die anderen ist. Abgesehen davon sind diese dynamischen Strategien sehr sensibel gegenüber der Parameter des zugrundeliegenden stochastischen Modells. Durch Veränderung von diesen und dem Verwenden anderer Modelle, kann man jedoch die Strategien sicher noch weiter verbessern, worauf hier aber verzichtet wird.

## 4.2 Diskussion

Einer der entscheidenden Vorteile von statischen Strategien ist, dass im Normalfall das Risiko gegen Ende hin stark abnimmt, das heißt in den Jahren kurz vor Pensionsantritt, kann man sehr genau schätzen, mit welcher Pension man rechnen kann. In der Abbildung 4.5 sieht man einen tabellarischen Vergleich zwischen den dynamischen und traditionellen Strategien. Konkret ist hier die Standardabweichung ziwschen der erwarteten Replacement Ratio 5 Jahre vor Pensionsantritt und der tatsächlich Angenommenen angegeben. Daraus kann man schließen, dass dieser Vorteil auch beim Verwenden der dynamischen Strategien erhalten bleibt.

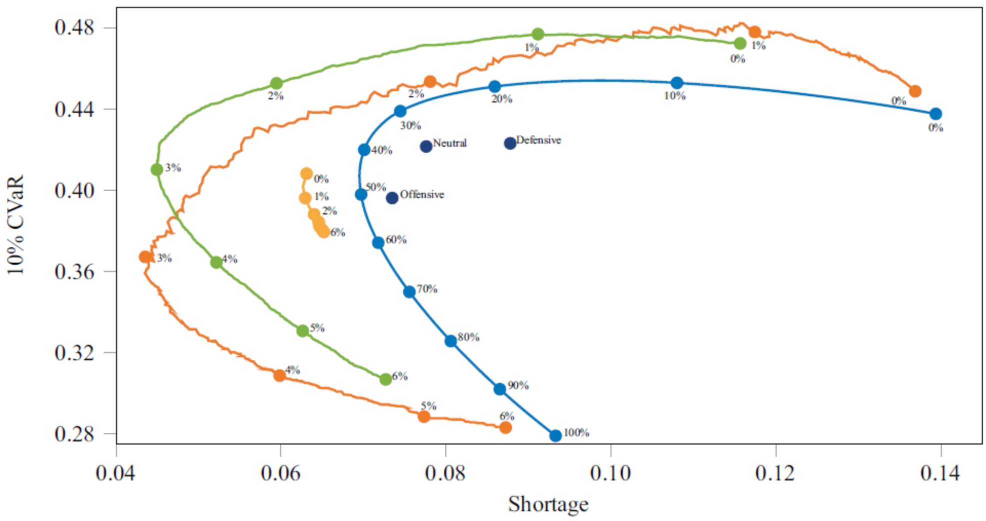


Abbildung 4.4: Erwartete Verfehlung des 70% Ziels der Replacement Ratio im Vergleich zu den 10% CVaR für die Cumulative target Strategy (orange), Individual target Strategy (grün), Kombinierte Strategie (gelb), einige klassische statische Strategien (dunkelblau), sowie jährlich angepasste Verteilungen (blau).

Obwohl die vorgestellten Strategien eine bessere Performance lieferten, muss man dennoch ihre Risiken erwähnen. Wenn zum Beispiel bei der Cumulative Target Strategy die Rendite nur mittelmäßig ist und das Ziel nie überschritten wird, bleiben über die gesamte Laufzeit 100% des Vermögens in risikoreichen Anlagen. Solche Szenarien können durchaus eintreten. Dieser Gefahr kann die Individual Target Strategy eher entgehen.
Im Vergleich zu den ersten beiden kann die kombinierte Strategie dem Versprechen, dass das Vermögen bis zum Pensionsantritt stetig und sicher in Richtung des Ziels steigt nicht ganz nachkommen. Da dies bei den zuerst vorgestellten Strategien besser funktionierte, muss man daraus schließen, dass die kombinierte Strategie noch Verbesserungspotenzial hat.
Dennoch ist ein wesentlicher Vorteil der kombinierten Strategie, dass die Umverteilungen zwischen risikoreichen und risikoarmen Depot sehr viel sanfter ablaufen. Das ist womöglich für die investierende Person deutlich leichter zu verstehen, als ein Transfer des gesamten Vermögens in ein sicheres Depot, nachdem es gerade so gut gelaufen ist.

| | Static mix | | | Static life cycle | | | Dynamic strategies | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0% | 100% | 46.02% | Def. | Neut. | Off. | Cum. | Indiv. | Comb. |
| Averages ($R$) | | | | | | | | | |
| Mean | 0.56 | 1.13 | 0.77 | 0.66 | 0.71 | 0.79 | 0.70 | 0.70 | 0.75 |
| 10% CVaR | 0.44 | 0.28 | 0.41 | 0.42 | 0.42 | 0.40 | 0.36 | 0.41 | 0.40 |
| 5% CVaR | 0.42 | 0.24 | 0.37 | 0.39 | 0.39 | 0.36 | 0.28 | 0.34 | 0.35 |
| Percentiles ($R$) | | | | | | | | | |
| Median | 0.56 | 0.83 | 0.72 | 0.64 | 0.67 | 0.72 | 0.72 | 0.73 | 0.75 |
| 10% VaR | 0.46 | 0.36 | 0.47 | 0.47 | 0.47 | 0.46 | 0.51 | 0.52 | 0.47 |
| 5% VaR | 0.44 | 0.29 | 0.41 | 0.43 | 0.44 | 0.41 | 0.37 | 0.44 | 0.41 |
| Goal (70% $R$) | | | | | | | | | |
| Shortage | 0.139 | 0.093 | 0.070 | 0.088 | 0.078 | 0.073 | 0.044 | 0.045 | 0.063 |
| Goal reached | 6% | 60% | 53% | 35% | 44% | 53% | 65% | 65% | 57% |
| Estim. error ($R$) | | | | | | | | | |
| Mean | 0.088 | 0.398 | 0.139 | 0.095 | 0.092 | 0.115 | 0.113 | 0.091 | 0.144 |
| Std dev. | 0.06 | 0.57 | 0.12 | 0.06 | 0.06 | 0.10 | 0.09 | 0.07 | 0.12 |

Abbildung 4.5: Statistiken für verschiedene Strategien

# 5. Schlussfolgerung

In dieser Seminararbeit wurden einige dynamische Investmentstrategien vorgestellt, die das Ziel verfolgt haben einen Teil des Gehalts der investierenden Person als Pension auszuzahlen. Das Hauptaugenmerk der Strategien lag dabei auf dem Realisieren von Gewinnen des risikoreichen Portfolios. Da die Verteilung zwischen risikoreichen und risikoarmen Depot unter anderem von deren Renditen abhängt, sind diese Vorgehensweisen deutlich flexibler als traditionelle statische Ansätze. Außerdem wurde in numerischen Experimenten gezeigt, dass die vorgestellten dynamischen Strategien in der Lage sind traditionelle Statische zu übertreffen und zusätzlich unnötiges Risiko zu reduzieren.
Zuerst wurden zwei einfache regelbasierte Ansätze vorgestellt. Beide versuchen den richtigen Zeitpunkt zu finden um das Vermögen auf ein risikoärmeres Depot umzuschichten und damit das Risiko zu reduzieren, aber dennoch das Ziel zu erreichen. Natürlich könnte man diese Strategien sofort in der Praxis umsetzen, davor sollte man sich aber auch Alternativen ansehen, die insbesondere in den Jahren vor Pensionsantritt weniger Risiko nehmen. Ich möchte daran erinnern, dass es bei der Cumulative Target Strategy passieren kann, dass bis zum Schluss 100% des Vermögens im risikoreichen Depot

bleiben.
Anschließend wurde die Individual Target Strategy weiter verfeinert und mit dem Dynamischen Programmieren kombiniert. In dem hier verwendeten Setup ist diese Kombinierte Strategie noch nicht optimal, wie wir in den numerischen Experimenten gesehen haben. Dennoch erkennt man, dass das Dynamische Programmieren sehr viel Mehrwert bringt, wenn man es richtig einsetzt. Diese Strategie kann man sicher noch weiter verbessern.
Es gibt nicht **die** eine Strategie, die am besten ist. Aus theoretischer Sicht nicht, da es immer abhängig vom zugrundeliegenden stochastischen Modell ist. Aus praktischer Sicht ebenso nicht, da es sehr wahrscheinlich ist, dass eine investierende Person nicht ihr ganzes Leben lang stur dieser folgt, sondern, aufgrund von persönlichen Gefühlen oder unerwarteten globalen Veränderungen, Anpassungen vornimmt. Das ist vor allem deswegen wahrscheinlich, da diese Strategien nicht immer ganz intuitive Umschichtungen zwischen dem risikoreichen und risikoarmen Depot vornehmen.
Zusammenfassend sind die Ergebnisse dieser Arbeit dennoch positiv, da man erfolgreich den Mehrwert dynamischer Strategien zeigen konnte. Außerdem hat man bestätigt, dass es möglich ist mit weniger Risiko und mehr Flexibilität bessere Ergebnisse zu erzielen als traditionelle statische Strategien.

| Year | Expected inflation (%) | Expected salary | Contribution | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Expected | Stdev. |
| 2016 | | 29,403 | 1270 | |
| 2017 | 0.7 | 30,816 | 1362 | 9 |
| 2018 | 0.8 | 32,168 | 1454 | 18 |
| 2019 | 0.9 | 33,610 | 1551 | 31 |
| 2020 | 1.0 | 35,147 | 1909 | 53 |
| 2021 | 1.1 | 36,784 | 2036 | 73 |
| 2022 | 1.2 | 38,527 | 2171 | 97 |
| 2023 | 1.2 | 40,380 | 2315 | 124 |
| 2024 | 1.3 | 42,351 | 2469 | 154 |
| 2025 | 1.3 | 44,446 | 3070 | 219 |
| 2026 | 1.4 | 46,218 | 3225 | 259 |
| 2027 | 1.4 | 48,087 | 3389 | 303 |
| 2028 | 1.5 | 50,058 | 3562 | 351 |
| 2029 | 1.5 | 52,133 | 3744 | 403 |
| 2030 | 1.6 | 54,319 | 4574 | 534 |
| 2031 | 1.6 | 56,621 | 4810 | 606 |
| 2032 | 1.6 | 59,043 | 5058 | 683 |
| 2033 | 1.7 | 61,585 | 5320 | 763 |
| 2034 | 1.7 | 64,261 | 5596 | 851 |
| 2035 | 1.7 | 67,078 | 6852 | 1104 |
| 2036 | 1.7 | 69,347 | 7111 | 1206 |
| 2037 | 1.8 | 71,716 | 7382 | 1316 |
| 2038 | 1.8 | 74,185 | 7665 | 1433 |
| 2039 | 1.8 | 76,754 | 7960 | 1555 |
| 2040 | 1.8 | 79,428 | 9607 | 1956 |
| 2041 | 1.8 | 82,213 | 9979 | 2113 |
| 2042 | 1.8 | 85,112 | 10,368 | 2280 |
| 2043 | 1.9 | 88,142 | 10,775 | 2464 |
| 2044 | 1.9 | 91,297 | 11,199 | 2658 |
| 2045 | 1.9 | 94,580 | 13,687 | 3366 |
| 2046 | 1.9 | 97,022 | 14,041 | 3572 |
| 2047 | 1.9 | 99,540 | 14,405 | 3784 |
| 2048 | 1.9 | 102,134 | 14,780 | 4003 |
| 2049 | 1.9 | 104,806 | 15,167 | 4230 |
| 2050 | 1.9 | 107,554 | 18,453 | 5288 |
| 2051 | 1.9 | 110,402 | 18,942 | 5588 |
| 2052 | 1.9 | 113,314 | 19,441 | 5881 |
| 2053 | 1.9 | 116,312 | 19,956 | 6186 |
| 2054 | 2.0 | 119,400 | 20,486 | 6503 |
| 2055 | 2.0 | 122,588 | 23,776 | 7732 |
| 2056 | 2.0 | 125,859 | 24,411 | 8116 |
| 2057 | 2.0 | 129,229 | 25,064 | 8515 |

Abbildung 5.1: Entwicklung des Gehalts und der Spargoute $c_t$

# Abbildungsverzeichnis



# Literaturverzeichnis

[1] Rule-based Strategies for dynamic Life Cycle Investment; T.R.B. dem Haan, K.W. Chan, M. van der Schans, C.W. Oosterlee; 2021

[2] Lifetime portfolio selection under certainty: the continuous-time case; Merton R.; 1996

[3] Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation; Li D., Ng W.L.; 2000

[4] Optimal asset allocation for retirement saving: deterministic vs. time consistent adaptive strategies; Forsyth P.A., Vetzal K.R.; 2019