SEMINARARBEIT

Lokale Martingale in diskreter Zeit

ausgeführt am

Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Julian Pachschwöll
Matrikelnummer: 11908538

Wien, Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Thema der vorliegenden Seminararbeit ist die Theorie der lokalen Martingale in diskreter Zeit. Einerseits wollen wir den Begriff des lokalen Martingales vorstellen und charakterisieren und andererseits auch in Form eines konkreten Resultates zur Anwendung bringen.

Zunächst werden wir die bedingte Erwartung auf Zufallsvariablen ausdehnen, die nicht unbedingt integrierbar sind. Mit dieser *verallgemeinerten bedingten Erwartung* versuchen wir folgend, den wohlbekannten Begriff des Martingales durch *verallgemeinerte Martingale*, *lokale Martingale* und *Martingaltransformierte* auf drei unterschiedliche Arten zu generalisieren. Anschließend zeigen wir, dass tatsächlich kein Unterschied zwischen den auf den ersten Blick sehr verschieden erscheinenden Begriffen besteht, womit wir eine sehr vielseitige Charakterisierung von lokalen Martingalen in diskreter Zeit aufzeigen können. Sofern nicht anderes angegeben, stammen alle Definitionen, Sätze und Beweise der Kapitel zwei bis fünf aus dem Werk *Probability* von A. N. Shiryaev, siehe dazu [Shi96].

Ausgestattet mit allen notwendigen Begriffen und Resultaten werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit den Begriff des lokalen Martingales auch anhand eines konkreten Resultates vorstellen. Dazu wollen wir das Hauptresultat und den Beweis des Papers 'Local martingales in discrete time' von Vilmos Prokaj und Johannes Ruf ausarbeiten, siehe dazu [PR18]. Betrachtet man im Setting eines filtrierten Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ ein lokales Martingal S, so garantiert dieses Resultat unter anderem die Existenz eines zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes Q, das den Prozess S zu einem Martingal macht und erinnert damit stark an das aus der Finanzmathematik bekannte *Fundamental Theorem of Asset Pricing* (FTAP). Dabei folgt aus passenden No-Arbitrage-Bedingungen an den diskontierten Preisprozess X ebenso die Existenz eines äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes, das X zu einem Martingal macht.

2 Grundlagen

In diesem Abschnitt soll zunächst der wahrscheinlichkeitstheoretische Rahmen gesetzt und für diese Seminararbeit wichtige Definitionen und grundlegende Resultate wiederholt werden.

2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretischer Rahmen und Notation

Wir betrachten in dieser Arbeit einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ mit dem Grundraum Ω, der Sigmaalgebra $\mathscr{F}$ und dem Wahrscheinlichkeitsmaß P. Für Erwartungswerte und (verallgemeinerte) bedingte Erwartungen bezüglich einem Wahrscheinlichkeitsmaß Q und einer Teilsigmaalgebra $\mathscr{G}$ werden wir die Notation $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[\,.\,]$ bzw. $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[\,.\,|\mathscr{G}]$ verwenden. Des weiteren betrachten wir immer einen d-dimensionalen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ oder $S = (S_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$. Um das Lesen zu erleichtern, werden wir außerdem weitestgehend auf den Zusatz 'P-fast sicher' verzichten.

2.2 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Als Grundlage für unsere weiteren Überlegungen dienen folgende Definitionen und Resultate.

Definition 2.2.1 (Filtration)**.** *Wir nennen eine Familie von Sigmaalgebren $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, falls für alle $t \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}_{t+1}$ und $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$.*

Definition 2.2.2 (Adaptierter Prozess)**.** *Der Prozess X ist an die Filtration $\mathbb{F}$ adaptiert, falls X_t für jedes $t \in \mathbb{N}_0$ $\mathscr{F}_t$-messbar ist.*

Definition 2.2.3 (Vorhersehbarer Prozess)**.** *Der Prozess X heißt bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$ vorhersehbar, falls X_t für jedes $t \in \mathbb{N}_0$ bereits $\mathscr{F}_{t-1}$-messbar ist (mit $\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0$).*

Definition 2.2.4 (P-Martingal)**.** *Der Prozess X heißt P-Martingal bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$, falls*

(i) X an $\mathbb{F}$ adaptiert ist,

(ii) $E_P[|X_t|] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ und

(iii) $E_P[X_{t+1}|\mathscr{F}_t] = X_t$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$.

Punkt *(iii)* aus der Definition eines Martingales nennt man dabei auch *Martingaleigenschaft.*

Definition 2.2.5 (Stoppzeit)**.** *Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt Stoppzeit bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$, falls $\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$.*

Da eine Stoppzeit τ nach unserer Definition nur höchstens abzählbar viele Werte annimmt, kann man in der Definition auch fordern, dass $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$ anstatt $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$. Betrachten wir dazu folgendes Lemma.

Lemma 2.2.6. *Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$ genau dann, wenn $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Sei zunächst τ eine Stoppzeit, dann folgt

$$\{\tau = t\} = \underbrace{\{\tau \leq t\}}_{\in \mathscr{F}_t} \setminus \underbrace{\{\tau \leq t-1\}}_{\in \mathscr{F}_{t-1} \subseteq \mathscr{F}_t} \in \mathscr{F}_t.$$

Erfüllt τ hingegen $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$ für jedes $t \in \mathbb{N}_0$, so gilt

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{s \leq t, s \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\{\tau = s\}}_{\in \mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t}.$$

Da τ nur höchstens abzählbare viele Werte annehmen kann, ist obige Vereinigung höchstens abzählbar, womit $\{\tau \leq t\}$ in $\mathscr{F}_t$ enthalten ist. Damit ist τ also eine Stoppzeit. $\square$

Definition 2.2.7 (Gestoppter Prozess)**.** *Für einen Prozess X und eine Stoppzeit τ ist der gestoppte Prozess $X^\tau = (X_t^\tau)_{t \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch $X_t^\tau(\omega) := X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega)$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega$.*

Bevor wir dieses Kapitel abschließen, formulieren wir noch einen Satz, der das Zusammenspiel einer Stoppzeit und eines Martingales näher beleuchtet.

Satz 2.2.8. *Sei τ eine Stoppzeit und X ein P-Martingal, jeweils bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$. Dann ist auch der gestoppte Prozess X^τ ein P-Martingal bezüglich $\mathbb{F}$.*

Beweis. Für ein beliebiges $t \in \mathbb{N}_0$ erhält man die Darstellung

$$X_t^\tau = X_{t \wedge \tau} = \sum_{m=0}^{t-1} X_m 1_{\{\tau = m\}} + X_t 1_{\{\tau \geq t\}},$$

die im wesentlichen eine Fallunterscheidung für die möglichen Werte von τ darstellt. Da X adaptiert ist und τ eine Stoppzeit ist, sind alle Zufallsvariablen und Indikatoren in der obigen Summendarstellung $\mathscr{F}_t$-messbar, womit X^τ also adaptiert ist. Durch die Dreiecksungleichung und da X ein Martingal ist, erhält man die Abschätzung

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}}[|X_t^\tau|] \leq \sum_{m=0}^{t-1} \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[|X_m|] + \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[|X_t|] < \infty,$$

womit X_t^τ auch integrierbar ist. Um die Martingaleigenschaft nachzuweisen, betrachten wir die Differenz

$$\begin{aligned} X_{(t+1)\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau} &= \sum_{m=0}^{t} X_m 1_{\{\tau = m\}} + X_{t+1} 1_{\{\tau \geq t+1\}} - \sum_{m=0}^{t-1} X_m 1_{\{\tau = m\}} - X_t 1_{\{\tau \geq t\}} \\ &= X_{t+1} 1_{\{\tau \geq t+1\}} + X_t 1_{\{\tau = t\}} - X_t 1_{\{\tau \geq t\}} \\ &= 1_{\{\tau > t\}}(X_{t+1} - X_t) \end{aligned}$$

und erhalten somit insgesamt

$$X_{(t+1)\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau} = 1_{\{\tau>t\}}(X_{t+1} - X_t). \tag{2.1}$$

Wenn wir nun auf beiden Seiten der Gleichung (2.1) die bedingte Erwartung bezüglich $\mathscr{F}_t$ bilden, folgt mit der Martingaleigenschaft von X und der Tatsache $\{\tau > t\} \in \mathscr{F}_t$, dass

$$\mathrm{E}_\mathrm{P}[X_{(t+1)\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau}|\mathscr{F}_t] = 1_{\{\tau>t\}}\mathrm{E}_\mathrm{P}[X_{t+1} - X_t|\mathscr{F}_t] = 0.$$

Damit besitzt X^τ also auch die Martingaleigenschaft, womit die Aussage bewiesen ist. □

3 Verallgemeinerte bedingte Erwartung

In der Grundvorlesung wurde der Begriff der bedingten Erwartung einer integrierbaren Zufallsvariable bereits eingeführt. Wir wollen diesen Begriff nun auch auf nicht notwendigerweise integrierbare Zufallsvariablen ausdehnen. Man definiert die *verallgemeinerte bedingte Erwartung* dazu zunächst für nichtnegative Zufallsvariablen. Durch die Zerlegung in Positiv- und Negativteil erhält man die verallgemeinerte bedingte Erwartung schließlich für beliebige Zufallsvariablen. Wir betrachten dazu folgende Definition.

Definition 3.1 (Verallgemeinerte bedingte Erwartung)**.** *Sei Y eine nicht negative Zufallsvariable. Dann ist $E_P[Y|\mathscr{G}]$ die verallgemeinerte bedingte Erwartung von Y bezüglich der Teilsigmaalgebra $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$, falls $E_P[Y|\mathscr{G}]$ bezüglich $\mathscr{G}$ messbar ist und für alle $A \in \mathscr{G}$ gilt*

$$\int_A Y dP = \int_A E_P[Y|\mathscr{G}]dP.$$

Sei W beliebige Zufallsvariable. Sofern

$$E_P[W^+|\mathscr{G}] < \infty \qquad \text{oder} \qquad E_P[W^-|\mathscr{G}] < \infty$$

fast sicher, sei die verallgemeinerte bedingte Erwartung definiert durch

$$E_P[Y|\mathscr{G}] = E_P[W^+|\mathscr{G}] - E_P[W^-|\mathscr{G}].$$

Auf der P-Nullmenge $\{E_P[W^+|\mathscr{G}] = E_P[W^+|\mathscr{G}] = \infty\}$ wird $E_P[W|\mathscr{G}]$ ein beliebiger Wert zugeordnet (zum Beispiel Null).

An dieser Stelle bemerkt man natürlich sofort, dass die verallgemeinerte bedingte Erwartung und die bedingte Erwartung für integrierbare Zufallsvariablen überein stimmen.

Bemerkung 3.2. *Wie bei integrierbaren Zufallsvariablen kann mit dem Satz von Radon-Nikodym gezeigt werden, dass die verallgemeinerte bedingte Erwartung für nichtnegative Zufallsvariablen existiert und auch fast sicher eindeutig ist. Siehe dafür zum Beispiel [Shi96, Seite 213].*

Im nächsten Satz sollen einige wichtigen Eigenschaft der verallgemeinerten bedingten Erwartung aufgezählt werden.

Satz 3.3 (Eigenschaften der verallgemeinerten bedingten Erwartung)**.** *Sei $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ eine Teilsigmaalgebra. Es sei weiter angenommen, dass alle vorkommenden Zufallsvariablen im Sinne der Definition existieren.*

1. *Wenn $X \leq Y$, so gilt $E_P[X|\mathscr{G}] \leq E_P[Y|\mathscr{G}]$.*
2. *$|E_P[X|\mathscr{G}]| \leq E_P[|X||\mathscr{G}]$.*
3. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $E_P[aX + bY|\mathscr{G}] = aE_P[X|\mathscr{G}] + bE_P[Y|\mathscr{G}]$.*
4. *Sei $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$. Dann gilt $E_P[X|\mathscr{G}] = E_P[X]$.*
5. *$E_P[X|\mathscr{F}] = X$.*
6. *Seien $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ Teilsigmaalgebren. Dann gilt*
$$E_P[E_P[X|\mathscr{H}]|\mathscr{G}] = E_P[E_P[X|\mathscr{G}]|\mathscr{H}] = E_P[X|\mathscr{H}].$$
7. *Sei X unabhängig von $\mathscr{G}$, sodass $E_P[X]$ definiert ist. Dann gilt*
$$E_P[X|\mathscr{G}] = E_P[X].$$
8. *Sei Y $\mathscr{G}$-messbar und es gelte $E_P[|X|] < \infty$ und $E_P[|XY|] < \infty$. Dann gilt*
$$E_P[XY] = YE_P[X].$$

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [Shi96, Seite 215 ff.] □

Für eine nichtnegative Zufallsvariable Y lässt sich die verallgemeinerte bedingte Erwartung auch als Grenzwert der bedingten Erwartungen von $Y \wedge k$ darstellen. Wir betrachten dazu folgendes Lemma.

Lemma 3.4. *Sei Y eine nichtnegative Zufallsvariable und $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ eine Teilsigmaalgebra. Dann ist die verallgemeinerte bedingte Erwartung $E_P[Y|\mathscr{G}]$ gegeben durch*
$$\lim_{k \uparrow \infty} E_P[Y \wedge k|\mathscr{G}].$$

Beweis. Sei Y nichtnegative Zufallsvariable. Nun ist $\lim_{k\uparrow\infty} \mathrm{E_P}[Y \wedge k|\mathscr{G}]$ als Grenzwert $\mathscr{G}$-messbarer Funktionen selbst wieder $\mathscr{G}$-messbar. Für $A \in \mathscr{G}$ gilt mit monotoner Konvergenz angewandt auf die Funktionenfolgen $\mathrm{E_P}[Y \wedge k|\mathscr{G}]$ und $Y \wedge k$ nun
$$\begin{aligned}\int_A \lim_{k\uparrow\infty} \mathrm{E_P}[Y \wedge k|\mathscr{G}]dP &= \lim_{k\uparrow\infty} \int_A \mathrm{E_P}[Y \wedge k|\mathscr{G}]dP \\ &= \lim_{k\uparrow\infty} \int_A Y \wedge k \; dP \\ &= \int_A \lim_{k\uparrow\infty} Y \wedge k \; dP \\ &= \int_A Y \; dP.\end{aligned}$$

Damit erfüllt $\lim_{k\uparrow\infty} \mathrm{E}_\mathrm{P}[Y \wedge k|\mathscr{G}]$ die Voraussetzungen aus Definition 3.1, womit aus der fast sicheren Eindeutigkeit folgt

$$\lim_{k\uparrow\infty} \mathrm{E}_\mathrm{P}[Y \wedge k|\mathscr{G}] = \mathrm{E}_\mathrm{P}[Y|\mathscr{G}].$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Aus diesem Lemma folgt unmittelbar, dass wir für die verallgemeinerte bedingte Erwartung folgende, aus [PR18] stammende, alternative Definition heranziehen können.

Definition 3.5. *Sei Y eine nichtnegative Zufallsvariable und $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ eine Teilsigmaalgebra. Dann definieren wir die verallgemeinerte bedingte Erwartung durch*

$$E_P[Y|\mathscr{G}] = \lim_{k\uparrow\infty} E_P[Y \wedge k|\mathscr{G}].$$

Sei W beliebige Zufallsvariable. Sofern

$$E_P[W^+|\mathscr{G}] < \infty \qquad \textit{oder} \qquad E_P[W^-|\mathscr{G}] < \infty$$

fast sicher, sei die verallgemeinerte bedingte Erwartung definiert durch

$$E_P[Y|\mathscr{G}] = E_P[W^+|\mathscr{G}] - E_P[W^-|\mathscr{G}].$$

Auf der P-Nullmenge $\{E_P[W^+|\mathscr{G}] = E_P[W^+|\mathscr{G}] = \infty\}$ wird $E_P[W|\mathscr{G}]$ ein beliebiger Wert zugeordnet (zum Beispiel Null).

4 Verallgemeinerung von Martingalen

In diesem Abschnitt wollen wir den Martingalbegriff auf verschiedene Arten verallgemeinern. Dazu werden wir zunächst die eben eingeführte verallgemeinerte bedingte Erwartung nutzen um die wohl naheliegendste Verallgemeinerung eines Martingales aufzuzeigen.

Definition 4.1 (P-verallgemeinertes Martingal)**.** *Der Prozess X heißt P-verallgemeinertes Martingal bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$, falls*

(i) *X an $\mathbb{F}$ adaptiert ist,*

(ii) *$E_P[|X_{t+1}||\mathscr{F}_t] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ und*

(iii) *$E_P[X_{t+1}|\mathscr{F}_t] = X_t$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$.*

Der einzige Unterschied zwischen Martingalen und verallgemeinerten Martingalen liegt also in Punkt *(ii)* der jeweiligen Definition. Bei verallgemeinerten Martingalen verwirft man die Forderung nach der Integrierbarkeit der einzelnen Zufallsvariablen und fordert stattdessen $\mathrm{E}_\mathrm{P}[|X_{t+1}||\mathscr{F}_t] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$. Im folgenden möchten wir noch kurz darauf eingehen warum man diese Forderung stellt.

Bemerkung 4.2. *Wir erinnern uns, dass die verallgemeinerte bedingte Erwartung $E_P[X_{t+1}|\mathscr{F}_t]$ definiert ist, falls*

$$E_P[X_{t+1}^+|\mathscr{F}_t] < \infty \qquad \textit{oder} \qquad E_P[X_{t+1}^-|\mathscr{F}_t] < \infty,$$

fast sicher. Gilt also

$$0 \leq E_P[X_{t+1}^+|\mathscr{F}_t] + E_P[X_{t+1}^-|\mathscr{F}_t] = E_P[|X_{t+1}||\mathscr{F}_t] < \infty,$$

so folgt

$$E_P[X_{t+1}^+|\mathscr{F}_t] < \infty \qquad \textit{und} \qquad E_P[X_{t+1}^-|\mathscr{F}_t] < \infty.$$

Mit der Forderung $E_P[|X_{t+1}||\mathscr{F}_t] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ wird also lediglich sichergestellt, dass alle verallgemeinerten bedingten Erwartungen wohldefiniert sind.

Die nächste Verallgemeinerung stellen sogenannte lokale Martingale dar.

Definition 4.3. *Der Prozess X heißt P-lokales Martingal, falls er an die Filtration $\mathbb{F}$ adaptiert ist und es eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass $\tau_n \uparrow \infty$ und der Prozess $X^{\tau_n}1_{\{\tau_n>0\}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein P-Martingal ist.*

Die Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Definition eines lokalen Martingales nennt man auch *Lokalisierungsfolge*. Wenn wir einen stochastischen Prozess X betrachten mit integrierbarem Startwert X_0, so vereinfacht sich die Definition des lokalen Martingales ein wenig.

Lemma 4.4. *Sei X ein Prozess mit integrierbarem Startwert X_0. Dann ist X ein P-lokales Martingal bezüglich $\mathbb{F}$, genau dann wenn X an $\mathbb{F}$ adaptiert ist und es eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass $\tau_n \uparrow \infty$ und der gestoppte Prozess X^{τ_n} für alle $n \in \mathbb{N}$ ein P-Martingal ist.*

Beweis. Wir müssen unter den gegebenen Voraussetzungen nur zeigen, dass $X^{\tau_n}1_{\{\tau_n>0\}}$ ein P-Martingal ist, genau dann wenn X^{τ_n} eines ist. Fixiere dazu ein beliebiges $t \in \mathbb{N}_0$.
$\Rightarrow$: Zur Integrierbarkeit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E_P}[|X_t^{\tau_n}|] &\leq \mathrm{E_P}[|X_t^{\tau_n}|1_{\{\tau_n=0\}}] + \mathrm{E_P}[|X_t^{\tau_n}|1_{\{\tau_n>0\}}] \\
&= \mathrm{E_P}[|X_0|1_{\{\tau_n=0\}}] + \mathrm{E_P}[|X_t^{\tau_n}|1_{\{\tau_n>0\}}] \\
&\leq \underbrace{\mathrm{E_P}[|X_0|]}_{<\infty \text{ lt. VS}} + \underbrace{\mathrm{E_P}[|X_t^{\tau_n}|1_{\{\tau_n>0\}}]}_{<\infty \text{ lt. VS}} < \infty
\end{aligned}$$

Zur Martingaleigenschaft: Man bemerke, dass die Indikatoren $1_{\{\tau_n>0\}}$ und $1_{\{\tau_n=0\}}$ jeweils $\mathscr{F}_0$-messbare Funktionen sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E_P}[X_{t+1}^{\tau_n}|\mathscr{F}_t] &= \mathrm{E_P}[X_{t+1}^{\tau_n}1_{\{\tau_n=0\}}|\mathscr{F}_t] + \mathrm{E_P}[X_{t+1}^{\tau_n}1_{\{\tau_n>0\}}|\mathscr{F}_t] \\
&= \mathrm{E_P}[X_0 1_{\{\tau_n=0\}}|\mathscr{F}_t] + \mathrm{E_P}[X_{t+1}^{\tau_n}1_{\{\tau_n>0\}}|\mathscr{F}_t] = X_0 1_{\{\tau_n=0\}} + X_t^{\tau_n}1_{\{\tau_n>0\}} = X_t^{\tau_n}.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Zur Integrierbarkeit:

$$\mathrm{E_P}[|X_t^{\tau_n}1_{\{\tau_n>0\}}|] \leq \mathrm{E_P}[|X_t^{\tau_n}|] < \infty$$

Zur Martingaleigenschaft: Man bemerke wieder, dass der Indikator $1_{\{\tau_n>0\}}$ eine $\mathscr{F}_0$-messbare Zufallsvariable ist. Dann folgt

$$\mathrm{E_P}[X_{t+1}^{\tau_n} 1_{\{\tau_n>0\}} | \mathscr{F}_t] = 1_{\{\tau_n>0\}} \mathrm{E_P}[X_{t+1}^{\tau_n} | \mathscr{F}_t] = X_t^{\tau_n} 1_{\{\tau_n>0\}},$$

womit die Äquivalenz bewiesen ist. □

Anhand der folgenden Bemerkung und des folgenden Beispieles wollen wir den Zusammenhang von Martingalen und lokalen Martingalen klären.

Bemerkung 4.5. *Jedes Martingal X ist auch ein lokales Martingal. Um das einzusehen, wähle beispielsweise für $n \in \mathbb{N}$ die Stoppzeiten $\tau_n = \infty$. Damit gilt natürlich $\tau_n \uparrow \infty$. Nach Satz 2.2.8 ist der gestoppte Prozess X^{τ_n} auch ein Martingal. Nach Lemma 4.4 ist X also ein lokales Martingal.*

Wie das nächste Beispiel aus [PR18] nun zeigen soll ist umgekehrt aber nicht jedes lokale Martingal auch ein Martingal. Man nennt solche Prozesse *strikte lokale Martingale.*

Beispiel 4.6. *Wir betrachten auf unserem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ zwei unabhängige Zufallsvariablen U und θ. Dabei sei U auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilt und θ genüge der Verteilung $P[\theta = -1] = \frac{1}{2} = P[\theta = 1]$. Definiere nun die Filtration $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ durch $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathscr{F}_1 = \sigma(U)$ und $\mathscr{F}_t = \sigma(U, \theta)$ für alle $t \geq 2$. Sei der stochastische Prozess $S = (S_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch $S_t = {}^{\theta}/_{U} \cdot 1_{\{t\geq 2\}}$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ und sei die Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch*

$$\tau_n = 1 \cdot 1_{\{1/U > n\}} + \infty \cdot 1_{\{1/U \leq n\}}, \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $t = 1$ gilt $\{\tau_n = 1\} = \{1/U > n\} \in \mathscr{F}_1$ und für $t \neq 1$ gilt $\{\tau_n = t\} = \emptyset \in \mathscr{F}_t$, womit es sich bei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 2.2.6 um eine Folge von Stoppzeiten handelt.

Wir zeigen nun, dass S ein P-lokales Martingal mit Lokalisierungsfolge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Da $\mathscr{F}_0$ trivial ist, müssen wir wegen Lemma 4.4 nur zeigen, dass der Prozess S^{τ_n} ein P-Martingal ist. Betrachte für $t \geq 2$

$$\begin{aligned} E_P[|S_t^{\tau_n}|] &= E_P[|S_t^{\tau_n}| 1_{\{1/U>n\}}] + E_P[|S_t^{\tau_n}| 1_{\{1/U\leq n\}}] \\ &= E_P[|S_1| 1_{\{1/U>n\}}] + E_P[|S_t| 1_{\{1/U\leq n\}}] \\ &= 0 + E_P[|\tfrac{1}{U}| 1_{\{1/U\leq n\}}] \leq n < \infty, \end{aligned}$$

womit die Integrierbarkeit gezeigt ist. Es gilt

$$E_P[S_2|\mathscr{F}_1] = E_P[\tfrac{\theta}{U}|U] = \tfrac{1}{U} E_P[\theta|U] = \tfrac{1}{U} E_P[\theta] = 0 = S_1,$$

womit auch die Martingaleigenschaft folgt (alle anderen Fälle sind trivial). Da der Prozess S an $\mathbb{F}$ adaptiert ist und offenbar $\tau_n \uparrow \infty$ gilt, ist S tatsächlich ein lokales Martingal.

Nun gilt

$$E_P[|S_2|] = E_P[|\tfrac{\theta}{U}|] = E_P[\tfrac{1}{U}] = \int_0^1 \tfrac{1}{x}\, dx = \infty,$$

weswegen S_2 also nicht integrierbar ist und der Prozess S damit kein Martingal ist. Es handelt sich bei S also tatsächlich um ein striktes lokales Martingal.

Abschließend wollen wir noch den Begriff der Martingaltransformierten einführen, die wir folgendermaßen definieren:

Definition 4.7 (Martingaltransformierte)**.** *Sei $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein an die Filtration $\mathbb{F}$ adaptierter Prozess und sei $(V_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein bezüglich $\mathbb{F}$ vorhersehbarer Prozess. Der Prozess*

$$X_t := (V \cdot Y)_t := V_0 Y_0 + \sum_{i=1}^{t} V_i \Delta Y_i,$$

wobei $\Delta Y_i := Y_i - Y_{i-1}$, heißt Transformierte von Y bezüglich V. Ist Y sogar ein Martingal, so nennt man X Martingaltransformierte bezüglich V.

5 Charakterisierung von lokalen Martingalen

Der nächste Satz dient zur Charakterisierung von lokalen Martingalen in diskreter Zeit. Insbesondere soll dabei die Äquivalenz von verallgemeinerten Martingalen, lokalen Martingalen und Martingaltransformierten gezeigt werden.

Satz 5.1. *Für den Prozess X sind äquivalent (jeweils bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$ und dem Maß P):*

(i) X ist lokales Martingal

(ii) X ist verallgemeinertes Martingal

(iii) X ist eine Martingaltransformierte

Dieser Satz, inklusive Beweis, stammt dabei aus [Shi96, Seite 478 ff.]. Es sei allerdings angemerkt, dass in diesem Werk die vereinfachende Annahme $X_0 = 0$ getroffen worden ist. Die notwendigen Modifikationen, um auch den allgemeinen Fall zu beweisen, sind in [Mey72, Seite 47 ff.] zu finden. Für den Beweis benötigen wir zunächst noch folgendes Lemma.

Lemma 5.2. *Für eine Teilsigmaalgebra $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ und eine stochastische Größe Y gilt $E_P[|Y||\mathscr{G}] < \infty$ genau dann, wenn das Maß $\int_A |Y| dP$, $A \in \mathscr{G}$, sigmaendlich ist.*

Beweis. Wir schreiben zur Vereinfachung $\mathrm{E_P}[|Y||\mathscr{G}] = Y_0$ und setzen $\mu(A) = \int_A |Y| dP$ für $A \in \mathscr{G}$.
$\Rightarrow$: Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $A_n = \{n-1 \leq Y_0 < n\}$ und die P-Nullmenge $A_0 = \{Y_0 = \infty\}$. Dann ist $A_0, A_1, A_2, \ldots$ offenbar eine disjunkte Zerlegung des Grundraumes Ω mit Mengen aus $\mathscr{G}$. Außerdem gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(A_n) = \int_{A_n} |Y| dP = \int_{A_n} Y_0 dP \leq n \qquad \text{und} \qquad \mu(A_0) = 0,$$

womit das Maß μ also tatsächlich sigmaendlich ist.
$\Leftarrow$: Wähle nun eine disjunkte Zerlegung $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Grundraumes mit Mengen aus $\mathscr{G}$, sodass $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für beliebige $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} k \cdot \mathrm{P}[\{Y_0 = \infty\} \cap A_n] &= \int_{\{Y_0=\infty\}\cap A_n} k d\mathrm{P} \leq \int_{\{Y_0=\infty\}\cap A_n} Y_0 d\mathrm{P} \\ &\leq \int_{A_n} Y_0 d\mathrm{P} = \int_{A_n} |Y| d\mathrm{P} = \mu(A_n) < \infty. \end{aligned}$$

Es gilt also für alle $k \in \mathbb{N}$

$$k \cdot \mathrm{P}[\{Y_0 = \infty\} \cap A_n] \leq \mu(A_n) < \infty,$$

womit $\mathrm{P}[\{Y_0 = \infty\} \cap A_n] = 0$ gelten muss. Damit folgt nun

$$\mathrm{P}[Y_0 = \infty] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}[\{Y_0 = \infty\} \cap A_n] = 0,$$

also $Y_0 < \infty$ fast sicher, womit die Aussage bewiesen ist. □

Beweis von Satz 5.1. (i) $\Rightarrow$ *(ii)* : Sei X lokales Martingal mit Lokalisierungsfolge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für alle $t \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$\mathrm{E}_\mathrm{P}[|X_t^{\tau_n}| 1_{\{\tau_n > 0\}}] < \infty,$$

womit folgt

$$\mathrm{E}_\mathrm{P}[|X_{t+1}| 1_{\{\tau_n > t\}}] = \mathrm{E}_\mathrm{P}[|X_{t+1}^{\tau_n}| 1_{\{\tau_n > t\}}] \leq \mathrm{E}_\mathrm{P}[|X_{t+1}^{\tau_n}| 1_{\{\tau_n > 0\}}] < \infty. \tag{5.1}$$

Da $\{\tau_n > t\} \in \mathscr{F}_t$, folgt mit (5.1)

$$1_{\{\tau_n > t\}} \mathrm{E}_\mathrm{P}[|X_{t+1}||\mathscr{F}_t] = \mathrm{E}_\mathrm{P}[|X_{t+1}| 1_{\{\tau_n > t\}} |\mathscr{F}_t] < \infty.$$

Schicken wir nun $n \to \infty$, so gilt $1_{\{\tau_n > t\}} \to 1$ und damit

$$\mathrm{E}_\mathrm{P}[|X_{t+1}||\mathscr{F}_t] < \infty. \tag{5.2}$$

Damit ist die bedingte Erwartung $\mathrm{E}_\mathrm{P}[X_{t+1}|\mathscr{F}_t]$ definiert und es bleibt noch zu argumentieren, dass $\mathrm{E}_\mathrm{P}[X_{t+1}|\mathscr{F}_t] = X_t$. Wir zeigen dafür zunächst

$$\int_A X_{t+1} dP = \int_A X_n dP,$$

für $A \in \mathscr{F}_t$ mit $\int_A |X_{t+1}| dP < \infty$.

Da $X^\tau 1_{\{\tau_n > 0\}}$ ein Martingal ist, gilt für $t \in \mathbb{N}_0$ mit der Dreiecksungleichung

$$|X_t^{\tau_n}| 1_{\{\tau_n > 0\}} = |\mathrm{E}_\mathrm{P}[X_{t+1}^{\tau_n} 1_{\{\tau_n > 0\}} |\mathscr{F}_t]| \leq \mathrm{E}_\mathrm{P}[|X_{t+1}^{\tau_n}| 1_{\{\tau_n > 0\}} |\mathscr{F}_t]. \tag{5.3}$$

Sei nun $A \in \mathscr{F}_t$, dann gilt wegen (5.3)

$$\begin{aligned} \int_{A\cap\{\tau_n > t\}} |X_t| dP &= \int_{A\cap\{\tau_n > t\}} |X_t^{\tau_n}| 1_{\{\tau_n > 0\}} dP \\ &\leq \int_{A\cap\{\tau_n > t\}} |X_{t+1}^{\tau_n}| 1_{\{\tau_n > 0\}} dP = \int_{A\cap\{\tau_n > t\}} |X_{t+1}| dP. \end{aligned}$$

Mit $n \to \infty$ gilt also

$$\int_A |X_t| dP \leq \int_A |X_{t+1}| dP. \tag{5.4}$$

Sei nun $A \in \mathscr{F}_t$ mit $\int_A |X_{t+1}| dP < \infty$. Da X ein lokales Martingal ist, erhalten wir die Gleichheit

$$\int_{A \cap \{\tau_n > t\}} X_t dP = \int_{A \cap \{\tau_n > t\}} X_{t+1} dP,$$

wodurch wir mit (5.4) und dominierter Konvergenz beim Grenzübergang $n \to \infty$ schließlich

$$\int_A X_t dP = \int_A X_{t+1} dP \tag{5.5}$$

erhalten.

Gleichung (5.5) gilt für alle $A \in \mathscr{F}_t$ mit $\int_A |X_{t+1}| dP < \infty$. Da das Maß $\int_A |X_{t+1}| dP$, $A \in \mathscr{F}_t$, nach Lemma 5.2 und Gleichung (5.2) sigmaendlich ist, gibt es eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathscr{F}_t$, mit $A_n \uparrow \Omega$ und $\int_{A_n} |X_{t+1}| dP < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit (5.5) gilt damit für jedes $A \in \mathscr{F}_t$

$$0 = \int_{A \cap A_n} X_{t+1} - X_t dP = \int_A 1_{A_n} (X_{t+1} - X_t) dP,$$

womit

$$0 = \mathrm{E_P}[1_{A_n} (X_{t+1} - X_t) | \mathscr{F}_t] = 1_{A_n} \mathrm{E_P}[X_{t+1} - X_t | \mathscr{F}_t]$$

folgt. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert die Behauptung.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei X ein verallgemeinertes Martingal. Definiere zunächst $V_0 = |X_0|$ und

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} \qquad \text{und} \qquad V_t = \mathrm{E_P}[|\Delta X_t| | \mathscr{F}_{t-1}]$$

für $t \in \mathbb{N}$. Setze

$$W_t = \begin{cases} V_t^{-1}, & V_t \neq 0 \\ 0, & V_t = 0 \end{cases}, \quad Y_t = X_0 W_0 + \sum_{i=1}^{t} W_i \Delta X_i$$

für $t \in \mathbb{N}_0$. Nun gilt für $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ und $t \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{E_P}[|\Delta Y_t| | \mathscr{F}_{t-1}] = \mathrm{E_P}[|W_t \Delta X_t| | \mathscr{F}_{t-1}] = W_t \mathrm{E_P}[|\Delta X_t| | \mathscr{F}_{t-1}] \leq 1.$$

Da X ein verallgemeinertes Martingal ist, folgt

$$\mathrm{E_P}[\Delta Y_t | \mathscr{F}_{t-1}] = \mathrm{E_P}[W_t \Delta X_t | \mathscr{F}_{t-1}] = W_t \underbrace{\mathrm{E_P}[\Delta X_t | \mathscr{F}_{t-1}]}_{=0} = 0,$$

womit Y ein Martingal ist. Da der Prozess V vorhersehbar ist und $X = V \cdot Y$ gilt, ist X also eine Martingaltransformierte, womit die Implikation gezeigt ist.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Wir nehmen nun also an, dass $X = V \cdot Y$ mit einem vorhersehbaren Prozess V und einem Martingal Y. Definiere nun für $n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |V_{t+1}| > n\}$$

mit der üblichen Konvention $\inf \emptyset = \infty$. Da der Prozess V vorhersehbar ist, handelt es sich bei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um eine Folge von Stoppzeiten.

Wir zeigen nun, dass der Prozess $V \cdot Y$ ein lokales Martingal ist mit Lokalisierungsfolge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aufgrund der Definition der Stoppzeit τ_n gilt auf der Menge $\{\tau_n > 0\}$ die Ungleichung $|V_{t\wedge\tau_n}| \leq n$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt nun für $t \in \mathbb{N}_0$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}}[|(V \cdot Y)_{t\wedge\tau_n}|1_{\{\tau_n>0\}}] < \infty.$$

Des weiteren gilt wegen (2.1) aus dem Beweis von Satz 2.2.8 angewandt auf $(V\cdot Y)_{(t+1)\wedge\tau_n} - (V \cdot Y)_{t\wedge\tau_n}$ für $t \in \mathbb{N}_0$ und da Y ein Martingal ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\mathrm{P}}[(V \cdot Y)_{(t+1)\wedge\tau_n}1_{\{\tau_n>0\}} &- (V \cdot Y)_{t\wedge\tau_n}1_{\{\tau_n>0\}}|\mathscr{F}_t] \\
&= 1_{\{\tau_n>0\}}\mathrm{E}_{\mathrm{P}}[(V \cdot Y)_{(t+1)\wedge\tau_n} - (V \cdot Y)_{t\wedge\tau_n}|\mathscr{F}_t] \\
&= 1_{\{\tau_n>t\}}\mathrm{E}_{\mathrm{P}}[(V \cdot Y)_{t+1} - (V \cdot Y)_t|\mathscr{F}_t] \\
&= 1_{\{\tau_n>t\}}V_{t+1}\mathrm{E}_{\mathrm{P}}[\Delta Y_{t+1}|\mathscr{F}_t] = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist der Prozess $((V \cdot Y)_{t\wedge\tau_n}1_{\{\tau_n>0\}})_{t\in\mathbb{N}_0}$ also ein Martingal. Da auch $\tau_n \uparrow \infty$, ist X ein lokales Martingal, womit auch die letzte Implikation bewiesen ist. $\square$

6 Resultat aus dem Paper 'Local martingales in discrete time'

In diesem Abschnitt möchten wir das Hauptresultat mit zugehörigem Beweis des Papers 'Local martingales in discrete time' von Vilmos Prokaj und Johannes Ruf ausarbeiten, der im Setting eines d-dimensionalen P-lokalen Martingales S die Existenz eines zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes Q garantiert, das S zu einem Q-Martingal macht. Das Maß Q kann dabei derart gewählt werden, dass die Dichte $d\mathrm{Q}/d\mathrm{P}$ mit $1+\epsilon$ für beliebiges $\epsilon > 0$ beschränkt ist und der Prozess S bezüglich dem Maß Q alle Momente besitzt, i.e. $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[|S_t|^p] < \infty$, für $t \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathbb{N}$.

Wir erkennen hierbei auch eine gewisse Analogie zu dem aus der Finanzmathematik bekannten '*Fundamental Theorem of Asset Pricing*'. Dabei folgt aus passenden No-Arbitrage-Bedingungen an den diskontierten Preisprozess X ebenso die Existenz eines zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes Q, das X zu einem Q-Martingal macht.

Zuvor betrachten wir ein Lemma, das wir im folgenden gebrauchen werden. Dabei wird gezeigt, dass man die Bedingung der integrierbaren Majorante im Satz der dominierten Konvergenz im bedingten Fall ein wenig abschwächen kann.

Lemma 6.1. *Sei $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ eine Teilsigmaalgebra und sei H eine nichtnegative Zufallsvariable mit $E_P[H|\mathscr{G}] < \infty$. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $|X_n| \leq H$ für $n \in \mathbb{N}$, sodass X_n gegen die Zufallsvariable X konvergiert. Dann gilt*

$$\lim_{n\uparrow\infty} E_P[X_n|\mathscr{G}] = E_P[X|\mathscr{G}].$$

Beweis. Da laut Voraussetzung $\mathrm{E_P}[H|\mathscr{G}] < \infty$ gilt, ist das Maß $\int_A H d\mathrm{P}$, $A \in \mathscr{G}$, nach Lemma 5.2 sigmaendlich. Folglich gibt es eine Partition des Grundraumes $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\int_{A_j} H d\mathrm{P} = \mathrm{E_P}[H 1_{A_j}] < \infty \tag{6.1}$$

und $A_j \in \mathscr{G}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere auf jedem A_j von $H1_{A_j}$ dominiert wird, gilt also wegen dominierter Konvergenz für bedingte Erwartungswerte und (6.1) auf jedem A_j,

$$1_{A_j} \lim_{n\uparrow\infty} \mathrm{E_P}[X_n|\mathscr{G}] = \lim_{n\uparrow\infty} \mathrm{E_P}[X_n 1_{A_j}|\mathscr{G}] = \mathrm{E_P}[X 1_{A_j}|\mathscr{G}] = 1_{A_j}\mathrm{E_P}[X|\mathscr{G}].$$

Da $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Partition des Grundraumes bildet, folgt die Behauptung. □

Kommen wir nun zu besagtem Satz.

Satz 6.2. *Sei S ein P-lokales Martingal bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein gleichmäßig integrierbares P-Martingal $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ sodass*

(i) Z von oben mit $1+\epsilon$ beschränkt ist,

(ii) $Z_\infty = \lim_{t\uparrow\infty} Z_t > 0$,

(iii) ZS ein P-Martingal ist und

(iv) $E_P[Z_t|S_t|^p] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathbb{N}$.

Später wird ersichtlich, dass wir mit der Dichte Z_∞ das zu P äquivalente Maß Q definieren können, sodass S zum Q-Martingal wird.

Wir widmen uns nun dem Beweis von Satz 6.2 und möchten davor noch einen kurzen Überblick über die einzelnen Beweisschritte geben: Wir beweisen zunächst Lemma 6.3. Da es den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, werden wir uns hierbei auf den eindimensionalen Fall ($d = 1$) beschränken. Aufbauend auf diesem Lemma können wir 6.4 beweisen und infolgedessen Lemma 6.5. Schließlich haben wir mit Lemma 6.5 die nötigen Hilfsmittel zur Verfügung um auch Satz 6.2 beweisen zu können.

Wir beginnen nun mit dem ersten Lemma.

Lemma 6.3. *Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{F})$ seien $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$ Teilsigmaalgebren. Sei W ein $\mathscr{H}$-messbarer d-dimensionaler Zufallsvektor mit*

$$E_Q[|W||\mathscr{G}] < \infty \qquad \textit{und} \qquad E_Q[W|\mathscr{G}] = 0.$$

Sei $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge $\mathscr{H}$-messbarer Zufallsvariablen sodass $\lim_{k\uparrow\infty} \alpha_k = 1$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein Folge von Zufallsvariablen $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sodass *(i)* V_k *$\mathscr{H}$-messbar ist und für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *Werte in* $(1-\epsilon, 1]$ *annimmt und*

(ii) $\lim_{k\uparrow\infty} 1_{\{E_Q[V_k\alpha_k W|\mathscr{G}]=0\}} = 1$.

Wir bereits erwähnt möchten wir für dieses Lemma lediglich den Beweis für den Fall $d = 1$ wiedergeben. Für den allgemeinen Fall sei dabei auf [PR18, Lemma 3.1] verwiesen.

Beweis. Lemma 6.3 für $d = 1$*.* Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ und mit der Konvention $\frac{0}{0} = 1$ die Zufallsvariable

$$C_k = \frac{\mathrm{E}_\mathrm{Q}[\alpha_k W^+|\mathscr{G}]}{\mathrm{E}_\mathrm{Q}[\alpha_k W^-|\mathscr{G}]}.$$

Da $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und $\mathrm{E}_\mathrm{Q}[W^\pm|\mathscr{G}] < \infty$ gilt, folgt mit Lemma 6.1

$$\lim_{k\uparrow\infty} |C_k - 1| = \left| \frac{\mathrm{E}_\mathrm{Q}[W^+|\mathscr{G}]}{\mathrm{E}_\mathrm{Q}[W^-|\mathscr{G}]} - 1 \right| = \frac{1}{\mathrm{E}_\mathrm{Q}[W^-|\mathscr{G}]} \left|\mathrm{E}_\mathrm{Q}[W^+|\mathscr{G}] - \mathrm{E}_\mathrm{Q}[W^-|\mathscr{G}]\right| = 0. \tag{6.2}$$

Definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable V_k durch

$$V_k = (1 - \epsilon/2) \vee (1_{\{W\geq 0\}}(1 \wedge C_k^{-1}) + 1_{\{W<0\}}(1 \wedge C_k)),$$

so bemerken wir sofort, dass V_k für $k \in \mathbb{N}$ messbar bezüglich $\mathscr{H}$ ist und Werte in $(1-\epsilon, 1]$ annimmt, womit *(i)* erfüllt ist.

Betrachten wir nun für $k \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$A_k = \{1 - \epsilon/2 \leq C_k \leq \tfrac{1}{1-\epsilon/2}\} = \{1 - \epsilon/2 \leq C_k^{-1} \leq \tfrac{1}{1-\epsilon/2}\}.$$

Mit der Tatsache, dass auf der Menge A_k

$$V_k = 1_{\{W\geq 0\}}(1 \wedge C_k^{-1}) + 1_{\{W<0\}}(1 \wedge C_k)$$

gilt und da $1_{\{W\geq 0\}}W = W^+$ und $1_{\{W<0\}}W = -W^-$, folgt

$$1_{A_k} V_k \alpha_k W = 1_{A_k} \alpha_k W^+(1 \wedge C_k^{-1}) - 1_{A_k} \alpha_k W^-(1 \wedge C_k). \tag{6.3}$$

Des weiteren gilt auf der Menge A_k entweder

$$(1 \wedge C_k) = C_k \qquad \text{und} \qquad (1 \wedge C_k^{-1}) = 1 \tag{6.4}$$

oder

$$(1 \wedge C_k) = 1 \qquad \text{und} \qquad (1 \wedge C_k^{-1}) = C_k^{-1}. \tag{6.5}$$

Mit (6.3), (6.4), (6.5) und der Definition von C_k folgt

$$\begin{aligned} 1_{A_k}\mathrm{E}_\mathrm{Q}[V_k\alpha_k W|\mathscr{G}] &= \mathrm{E}_\mathrm{Q}[1_{A_k} V_k \alpha_k W|\mathscr{G}] \\ &= 1_{A_k}(1 \wedge C_k^{-1})\mathrm{E}_\mathrm{Q}[\alpha_k W^+|\mathscr{G}] - 1_{A_k}(1 \wedge C_k)\mathrm{E}_\mathrm{Q}[\alpha_k W^-|\mathscr{G}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt also $A_k \subseteq \{\mathrm{E}_\mathrm{Q}[V_k\alpha_k W|\mathscr{G}] = 0\}$ und damit $1_{A_k} \leq 1_{\{\mathrm{E}_\mathrm{Q}[V_k\alpha_k W|\mathscr{G}]=0\}}$, womit mit (6.2)

$$1 = \lim_{k\uparrow\infty} 1_{A_k} \leq \lim_{k\uparrow\infty} 1_{\{\mathrm{E}_\mathrm{Q}[V_k\alpha_k W|\mathscr{G}]=0\}} \leq 1$$

folgt. Damit folgt auch *(ii)*, womit das Lemma bewiesen ist. □

Da wir Lemma 6.3 nun bewiesen haben, können wir auch Lemma 6.4 formulieren und beweisen.

Lemma 6.4. *Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{F})$ mit Teilsigmaalgebren $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$. Sei Y eine nichtnegative eindimensionale Zufallsvariable mit $E_Q[Y|\mathscr{H}] < \infty$. Sei zudem W ein $\mathscr{H}$-messbarer d-dimensionaler Zufallsvektor, sodass*

$$E_Q[|W||\mathscr{G}] < \infty \qquad \textit{und} \qquad E_Q[W|\mathscr{G}] = 0.$$

Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ eine Zufallsvariable z mit folgenden Eigenschaften:

(i) z *ist* $\mathscr{H}$*-messbar mit Werten in* $(0, 1+\epsilon)$

(ii) $Q[z < 1-\epsilon] < \epsilon$

(iii) $E_Q[z|\mathscr{G}] = 1$

(iv) $E_Q[zW|\mathscr{G}] = 0$

(v) $E_Q[zY|\mathscr{G}] < \infty$

Beweis. Wir definieren zunächst für $k \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable

$$\alpha_k = 1_{\{\mathrm{E_Q}[Y|\mathscr{H}] \leq k\}} + \frac{1}{\mathrm{E_Q}[Y|\mathscr{H}]} 1_{\{\mathrm{E_Q}[Y|\mathscr{H}] > k\}}.$$

Dann ist α_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine $\mathscr{H}$-messbare Zufallsvariable mit Werten in $(0, 1]$. Da laut Voraussetzung $\mathrm{E_Q}[Y|\mathscr{H}] < \infty$ gilt, folgt auch $\lim_{k\uparrow\infty} \alpha_k = 1$.

Damit sind nun alle Voraussetzungen von Lemma 6.3 erfüllt und es gibt eine Familie von $\mathscr{H}$-messbaren Zufallsvariablen $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sodass V_k Werte in $(1/(1+\epsilon/2), 1]$ annimmt und $\lim_{k\uparrow\infty} 1_{\{\mathrm{E_Q}[V_k \alpha_k W|\mathscr{G}]=0\}} = 1$ erfüllt.

Mit diesen Eigenschaften können wir nun eine $\mathscr{G}$-messbare Zufallsvariable K mit Werten in $\mathbb{N}$ definieren, sodass

$$\mathrm{E_Q}[V_K \alpha_K W|\mathscr{G}] = 0, \quad \mathrm{E_Q}[V_K \alpha_K|\mathscr{G}] > \frac{1}{1+\epsilon} \quad \text{und} \quad \mathrm{Q}[\mathrm{E_Q}[Y|\mathscr{G}] > K] < \epsilon. \tag{6.6}$$

Wir gehen dazu folgendermaßen vor: Da $\mathrm{E_Q}[Y|\mathscr{H}] < \infty$, gibt es ein $M > 0$, sodass $\mathrm{Q}[\mathrm{E_Q}[Y|\mathscr{H}] > M] < \epsilon$. Definiere nun die $\mathscr{G}$-messbare Zufallsvariable

$$K = \inf\{k \geq M, k \in \mathbb{N} |\ \mathrm{E_Q}[V_k \alpha_k W|\mathscr{G}] = 0 \ \text{ und } \ \mathrm{E_Q}[V_k \alpha_k|\mathscr{G}] > \frac{1}{1+\epsilon}\}.$$

Aufgrund der Definition von K folgt

$$\mathrm{E_Q}[V_K \alpha_K W|\mathscr{G}] = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{E_Q}[V_K \alpha_K|\mathscr{G}] > \frac{1}{1+\epsilon}.$$

Da K größer oder gleich M ist, gilt auch

$$\mathrm{Q}[\mathrm{E_Q}[Y|\mathscr{G}] > K] \leq \mathrm{Q}[\mathrm{E_Q}[Y|\mathscr{G}] > M] < \epsilon,$$

womit in Summe also (6.6) folgt.

Setze nun

$$z := \frac{V_K \alpha_K}{\mathrm{E_Q}[V_K \alpha_K | \mathscr{G}]}.$$

Mit (6.6) und der Definition von α_K folgen die gewünschten Eigenschaften *(i)*, *(iii)*, *(iv)* und *(v)*. Für *(ii)* betrachte

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}[z < 1 - \epsilon] &\leq \mathrm{Q}[\alpha_K < (1-\epsilon)(1+\tfrac{\epsilon}{2})] \\ &\leq \mathrm{Q}[\alpha_K < 1] = \ \mathrm{Q}[\mathrm{E_Q}[Y|\mathscr{G}] > K] < \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Schließlich können wir uns auch dem letzten Lemma widmen, bevor wir in der Lage sind Satz 6.2 zu beweisen.

Lemma 6.5. *Für $n \in \mathbb{N}_0$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathscr{F})$, sodass S ein Q-lokales Martingal ist und eine nichtnegative eindimensionale Zufallsvariable Y mit $E_Q[Y|\mathscr{F}_n] < \infty$ gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein zu Q äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q' mit Dichte ${}^{dQ'}\!/_{dQ} = Z^{(n)}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $Z^{(n)} \in (0, 1+\epsilon)$

(ii) $Q[Z^{(n)} < 1 - \epsilon] < \epsilon$

(iii) *S ist Q'-lokales Martingal*

(iv) $E_{Q'}[Y] < \infty$

Beweis. Wähle zunächst $\widetilde{\epsilon} > 0$ hinreichend klein, sodass

$$(n+1)\widetilde{\epsilon} \leq \epsilon, \qquad (1+\widetilde{\epsilon})^{n+1} \leq 1 + \epsilon \qquad \text{und} \qquad (1-\widetilde{\epsilon})^{n+1} \geq 1 - \epsilon. \tag{6.7}$$

Wir setzen zudem $\mathscr{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\Delta S_0 = 0$. Nun konstruieren wir iterativ eine Folge von Zufallsvariablen $z_0, ..., z_n$, sodass für jedes $t = 0, \ldots, n$ gilt

$$z_t \in (0, 1+\widetilde{\epsilon}), \quad \mathrm{Q}[z_t < 1 - \widetilde{\epsilon}] < \widetilde{\epsilon}, \quad \mathrm{E_Q}[z_t|\mathscr{F}_{t-1}] = 1, \quad \mathrm{E_Q}[z_t \Delta S_t|\mathscr{F}_{t-1}] = 0 \tag{6.8}$$

und

$$\mathrm{E_Q}[Y \prod_{i=t}^{n} z_i | \mathscr{F}_{t-1}] < \infty. \tag{6.9}$$

Wir beginnen bei $t = n$ und definieren

$$W = \Delta S_n, \qquad \mathscr{G} = \mathscr{F}_{n-1} \qquad \text{und} \qquad \mathscr{H} = \mathscr{F}_n.$$

Der Prozess S ist als Q-lokales Martingal nach Satz 5.1 auch ein verallgemeinertes Martingal, womit $\mathrm{E_Q}[|W||\mathscr{G}] < \infty$ und $\mathrm{E_Q}[W|\mathscr{G}] = 0$ folgt. Damit können wir Lemma 6.4 mit $\widetilde{\epsilon}$ anstelle von ϵ anwenden und erhalten eine Zufallsvariable z_n die (6.8) und (6.9) erfüllt.

Wir wählen $0 \leq t < n$ und nehmen an, dass wir $z_{t+1}, ..., z_n$ bereits konstruiert haben sodass (6.8) und (6.9) erfüllt sind. Wir setzen

$$W = \Delta S_t, \qquad \mathscr{G} = \mathscr{F}_{t-1} \qquad \text{und} \qquad \mathscr{H} = \mathscr{F}_t$$

und wenden wiederum Lemma 6.4 an mit $\widetilde{\epsilon}$ anstelle von ϵ und $Y\prod_{i=t+1}^{n} z_i$ anstelle von Y, womit wir unser z_t mit den gewünschten Eigenschaften erhalten. Damit haben wir die Folge $z_0, ..., z_n$ konstruiert.

Wir setzen $Z^{(n)} = \prod_{i=0}^{n} z_i$ und können das Wahrscheinlichkeitsmaß Q' über die Radon-Nikodym Dichte $\frac{d\mathrm{Q}'}{d\mathrm{Q}} = Z^{(n)}$ definieren. Nun gilt wegen (6.7)

$$0 < Z^{(n)} = \prod_{i=0}^{n} \underbrace{z_i}_{\in(0,1+\widetilde{\epsilon})} < (1+\widetilde{\epsilon})^{n+1} \leq 1+\epsilon,$$

womit $Z^{(n)}$ *(i)* erfüllt. Da wegen (6.7) und (6.8)

$$\mathrm{Q}[Z^{(n)} < 1-\epsilon] \leq \mathrm{Q}[Z^{(n)} < (1-\widetilde{\epsilon})^{n+1}] \leq \mathrm{Q}\left[\bigcup_{i=0}^{n}\{z_i < 1-\widetilde{\epsilon}\}\right] < (n+1)\widetilde{\epsilon} \leq \epsilon$$

gilt und mit (6.9) und der Definition von $\mathscr{F}_{-1}$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}'}[Y] = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[YZ^{(n)}] = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[Y\prod_{i=0}^{n} z_i|\mathscr{F}_{-1}] < \infty$$

folgt, erfüllt $Z^{(n)}$ auch *(ii)* und *(iv)*.

Wir müssen also nur mehr argumentieren, dass S ein Q'-lokales Martingal ist. Wähle dazu eine Stoppzeit τ, sodass der Prozess $S^{\tau}1_{\{\tau>0\}}$ ein Q-Martingal ist. Für fixes $t \in \mathbb{N}_0$ ist $S_t^{\tau}1_{\{\tau>0\}}$ bezüglich Q' integrierbar, da die Dichte $Z^{(n)}$ beschränkt ist. Um die Martingaleigenschaft des Prozesses $S_t^{\tau}1_{\{\tau>0\}}$ für das Maß Q' nachzuweisen, bemerken wir, dass z_t per Konstruktion (bzw. Lemma 6.4) für jedes $t = 0, \ldots, n$ bezüglich $\mathscr{F}_t$ messbar ist. Mit iterativer Anwendung der Turmeigenschaft der bedingten Erwartung und (6.8) erhalten wir daher für $t \leq n$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[\prod_{i=t}^{n} z_i|\mathscr{F}_{t-1}] &= \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[\prod_{i=t}^{n} z_i|\mathscr{F}_{n-1}]|\mathscr{F}_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[\underbrace{\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[z_n|\mathscr{F}_{n-1}]}_{=1}\prod_{i=t}^{n-1} z_i|\mathscr{F}_{t-1}] = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[\prod_{i=t}^{n-1} z_i|\mathscr{F}_{t-1}] = ... = 1.
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit die Gleichung

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[Z^{(n)}|\mathscr{F}_{t-1}] = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[\prod_{i=t}^{n} z_i|\mathscr{F}_{t-1}]\prod_{i=0}^{t-1} z_i = \prod_{i=0}^{t-1} z_i. \tag{6.10}$$

Mit einer analogen Argumentation erhalten wir

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[Z^{(n)}\Delta S_t 1_{\{\tau\geq t\}}|\mathscr{F}_{t-1}] = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[z_t\Delta S_t 1_{\{\tau\geq t\}}|\mathscr{F}_{t-1}]\prod_{i=0}^{t-1} z_i. \tag{6.11}$$

Mit (6.10), (6.11) und dem Satz von Bayes gilt nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\mathrm{Q}'}[\Delta S_t 1_{\{\tau\geq t\}}|\mathscr{F}_{t-1}] &= \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[Z^{(n)}\Delta S_t 1_{\{\tau\geq t\}}|\mathscr{F}_{t-1}]}{\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[Z^{(n)}|\mathscr{F}_{t-1}]} \\
&= \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[z_t\Delta S_t 1_{\{\tau\geq t\}}|\mathscr{F}_{t-1}]\prod_{i=0}^{t-1} z_i}{\prod_{i=0}^{t-1} z_i} = 1_{\{\tau\geq t\}}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[z_t\Delta S_t|\mathscr{F}_{t-1}] = 0,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wieder aus (6.8) folgt. Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\mathrm{Q}'}[S_t^\tau - S_{t-1}^\tau|\mathscr{F}_{t-1}] &= \mathrm{E}_{\mathrm{Q}'}[(S_t^\tau - S_{t-1}^\tau)1_{\{\tau\geq t\}}|\mathscr{F}_{t-1}] + \mathrm{E}_{\mathrm{Q}'}[(S_t^\tau - S_{t-1}^\tau)1_{\{\tau< t\}}|\mathscr{F}_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}_{\mathrm{Q}'}[\Delta S_t 1_{\{\tau\geq t\}}|\mathscr{F}_{t-1}] + \mathrm{E}_{\mathrm{Q}'}[\underbrace{(S_t^\tau - S_{t-1}^\tau)1_{\{\tau< t\}}}_{=0}|\mathscr{F}_{t-1}] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

womit wir die Martingaleigenschaft für Q' gezeigt haben. Damit ist nun jede Lokalisierungsfolge von S bezüglich Q auch eine Lokalisierungsfolge von S bezüglich Q', womit auch *(iii)* folgt und wir das Lemma bewiesen haben. □

Da wir die drei Lemmata nun bewiesen haben, sind wir nun in der Lage Satz 6.2 zu beweisen.

Beweis von Satz 6.2. Wir werden Lemma 6.5 nutzen, um eine Folge von zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathrm{Q}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und eine Folge positiver reeller Zahlen $(\epsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu konstruieren.

Wir gehen iterativ vor und beginnen mit $\mathrm{Q}^{(-1)} = \mathrm{P}$. Nehmen wir für fixes $n \in \mathbb{N}_0$ an, dass wir $\mathrm{Q}^{(0)}, \dots, \mathrm{Q}^{(n-1)}$ und $\epsilon^{(0)}, \dots, \epsilon^{(n-1)}$ schon konstruiert haben, sodass $\prod_{k=0}^{n-1}(1+\epsilon^{(k)}) < 1+\epsilon$. Mit dem ϵ-δ-Kriterium (siehe Satz 7.3) finden wir ein hinreichend kleines $\epsilon^{(n)} > 0$, sodass $\prod_{k=0}^{n}(1+\epsilon^{(k)}) < 1+\epsilon$ gilt und für jedes $A \in \mathscr{F}_n$ mit $\mathrm{Q}^{(n-1)}[A] < \epsilon^{(n)}$ folgt, dass $\mathrm{P}[A] < 2^{-n}$.

Wir wenden nun Lemma 6.5 mit $\epsilon^{(n)}$ anstelle von ϵ, mit $e^{|S_n|}$ anstelle von Y und mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{(n-1)}$ an. Wir erhalten damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathrm{Q}^{(n)}$ mit der Dichte $Z^{(n)}$ bezüglich $\mathrm{Q}^{(n-1)}$. Damit haben wir unsere Folgen $(\mathrm{Q}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\epsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ induktiv definiert. Insbesondere ergibt sich für $n \in \mathbb{N}_0$ aus der Konstruktion mithilfe von Lemma 6.5, dass

(a) $Z^{(n)} \in (0, 1+\epsilon^{(n)})$,

(b) $\mathrm{Q}^{(n-1)}[Z^{(n)} < 1-\epsilon^{(n)}] < \epsilon^{(n)}$,

(c) S ein $\mathrm{Q}^{(n)}$-lokales Martingal ist,

(d) $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}^{(n)}}[e^{|S_n|}] < \infty$ und

(e) $\prod_{k=0}^{n}(1+\epsilon^{(k)}) < 1+\epsilon$.

Aus (a) und (b) folgt nun für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathrm{Q}^{(n-1)}[|1-Z^{(n)}| > \epsilon^{(n)}] = \mathrm{Q}^{(n-1)}[Z^{(n)} < 1-\epsilon^{(n)}] < \epsilon^{(n)}$$

und damit wegen der Wahl von $\epsilon^{(n)}$

$$\mathrm{P}[|1-Z^{(n)}| > \epsilon^{(n)}] < 2^{-n}.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli (siehe Lemma 7.1 und Folgerung 7.2) gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |1-Z^{(n)}| < \infty.$$

Des weiteren konvergiert $Z_\infty = \prod_{n=0}^\infty Z^{(n)}$ nach Lemma 7.4 fast sicher und ist auch fast sicher positiv. Klarerweise gilt auch $Z_\infty \leq 1+\epsilon$.

Wir definieren das Wahrscheinlichkeitsmaß Q nun durch die Radon-Nikodym Dichte ${}^{d\mathrm{Q}}/_{d\mathrm{P}} = Z_\infty$ und sei für $t \in \mathbb{N}_0$ der entsprechende Dichtenprozess durch $Z_t = \mathrm{E}_\mathrm{P}[Z_\infty|\mathscr{F}_t]$ gegeben.

Für $t \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$Z_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} Z^{(n)} = \underbrace{\prod_{n=0}^{t} Z^{(n)}}_{=d\mathrm{Q}^{(t)}/d\mathrm{P}} \underbrace{\prod_{n>t} Z^{(n)}}_{\leq 1+\epsilon} \leq (1+\epsilon)\frac{d\mathrm{Q}^{(t)}}{d\mathrm{P}}$$

und damit

$$\mathrm{Q}[A] = \int_A Z_\infty dP \leq (1+\epsilon)\int_A Z^{(t)} dP = (1+\epsilon)Q^{(t)}[A],$$

für $A \in \mathscr{F}$. Es gilt also $Q \leq (1+\epsilon)Q^{(t)}$, womit mit (d) folgt

$$\mathrm{E}_\mathrm{P}[Z_t e^{|S_t|}] = \mathrm{E}_\mathrm{Q}[e^{|S_t|}] \leq (1+\epsilon)\mathrm{E}_{\mathrm{Q}^{(t)}}[e^{|S_t|}] < \infty. \tag{6.12}$$

Damit gilt nach Lemma 7.5 aber $\mathrm{E}_\mathrm{P}[Z_t|S_t|^p] < \infty$ für beliebige $t, p \in \mathbb{N}_0$.

Wir zeigen nun noch, dass ZS ein P-Martingal ist oder äquivalent, dass S ein Q-Martingal ist. Die Q-Integrierbarkeit von S folgt bereits aus (6.12) und Lemma 7.5.

Wir zeigen nun also noch die Martingaleigenschaft, $\mathrm{E}_\mathrm{Q}[S_t|\mathscr{F}_{t-1}] = S_{t-1}$ für $t \in \mathbb{N}$. Laut (c) ist S für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ein $Q^{(n)}$-lokales Martingal und nach Satz 5.1 auch ein verallgemeinertes Martingal. Es gilt daher für $t \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}^{(n)}}[S_t|\mathscr{F}_{t-1}] = S_{t-1}. \tag{6.13}$$

Für $t \in \mathbb{N}$ gilt mit dem Satz von Bayes, dominierter Konvergenz (bzw. Lemma 6.1) und (6.13) nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_\mathrm{Q}[S_t|\mathscr{F}_{t-1}]Z_{t-1} &= \mathrm{E}_\mathrm{Q}[S_t|\mathscr{F}_{t-1}]\mathrm{E}_\mathrm{P}[Z_\infty|\mathscr{F}_{t-1}] = \frac{\mathrm{E}_\mathrm{P}[S_t Z_\infty|\mathscr{F}_{t-1}]}{\mathrm{E}_\mathrm{P}[Z_\infty|\mathscr{F}_{t-1}]}\mathrm{E}_\mathrm{P}[Z_\infty|\mathscr{F}_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}_\mathrm{P}[S_t Z_\infty|\mathscr{F}_{t-1}] = \lim_{n\uparrow\infty} \mathrm{E}_\mathrm{P}[S_t \prod_{m=0}^{n} Z^{(m)}|\mathscr{F}_{t-1}] \\
&= \lim_{n\uparrow\infty} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}^{(n)}}[S_t|\mathscr{F}_{t-1}]\mathrm{E}_\mathrm{P}[\prod_{m=0}^{n} Z^{(m)}|\mathscr{F}_{t-1}] \\
&= S_{t-1} \lim_{n\uparrow\infty} \mathrm{E}_\mathrm{P}[\prod_{m=0}^{n} Z^{(m)}|\mathscr{F}_{t-1}] \\
&= S_{t-1}Z_{t-1}.
\end{aligned}$$

Da $Z_{t-1} > 0$ gilt, ist die Martingaleigenschaft bewiesen.

Man beachte noch, dass der Prozess $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein gleichmäßig integrierbaren Martingal ist. Wir wollen das an dieser Stelle nicht beweisen und verweisen auf [Kus14, Seite 272].

Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

7 Appendix

In diesem kurzen Appendix befinden sich einige Resultate, die wir für den Beweis von Theorem 6.2 benötigen. Lemma 7.1 und Lemma 7.3 inklusive Beweis stammen dabei aus [Kus14, Satz 3.27 und Satz 12.13].

Lemma 7.1 (Borel-Cantelli)**.** *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Mengenfolge, wobei $A_n \in \mathscr{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu[A_n] < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mu[\lim_n \sup A_n] = 0.$$

Beweis. Da $\lim_n \sup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$ folgt mit Monotonie und Subadditivität für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu[\lim_n \sup A_n] \leq \mu\left[\bigcup_{k\geq n} A_k\right] \leq \sum_{k\geq n} \mu[A_k].$$

Laut Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu[A_n]$, womit der Reihenrest gegen 0 konvergieren muss, also

$$0 \leq \mu[\lim_n \sup A_n] \leq \sum_{k\geq n} \mu[A_k] \to 0, \text{ wenn } n \to \infty.$$

Dadurch erhalten wir also $\mu[\lim_n \sup A_n] = 0$, womit die Aussage bewiesen ist. □

Folgerung 7.2. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ und $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen sodass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| > \epsilon_n] < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty.$$

Dann folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|$ P-fast sicher konvergiert.

Beweis. Definiere $A_n = \{|X_n| > \epsilon_n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Laut Voraussetzung gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}[A_n] < \infty$, womit wir das Lemma von Borel-Cantelli anwenden können. Es folgt also $\mathrm{P}[\lim_n \sup A_n] = 0$ oder dazu äquivalent $\mathrm{P}[\lim_n \inf A_n^c] = 1$. Setze $\Omega' = \lim_n \inf A_n^c$. Da

$$\Omega' = \lim_n \inf A_n^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k^c,$$

gibt es für jedes $\omega \in \Omega'$ ein $n \in \mathbb{N}$ sodass für alle $k \geq n$ gilt $|X_k(\omega)| \leq \epsilon_k$. Damit folgt nun

$$\sum_{k=0}^{\infty} |X_k(\omega)| = \sum_{k=0}^{n-1} |X_k(\omega)| + \sum_{k\geq n}^{\infty} |X_k(\omega)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |X_k(\omega)| + \sum_{k\geq n}^{\infty} \epsilon_k < \infty,$$

da laut Voraussetzung $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ gilt. Da Ω' volle Wahrscheinlichkeit besitzt, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|$ also P-fast sicher. $\square$

Lemma 7.3 (ϵ-δ-Kriterium)**.** *Sei ν ein endliches Maß auf dem Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Dann ist ν absolut stetig bezüglich μ genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass*

$$\forall A \in \mathscr{A} : \ \mu[A] < \delta \quad \Longrightarrow \quad \nu[A] < \epsilon.$$

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, wir beweisen also noch die Hinrichtung. Wir setzen also voraus, dass $\mu \gg \nu$. Angenommen es gibt ein $\epsilon > 0$, sodass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $A_n \in \mathscr{A}$ gibt, sodass $\mu[A_n] < 2^{-n}$ und $\nu[A_n] > \epsilon$. Damit gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \mu[A_k] < \infty$, womit aus dem Lemma von Borel Cantelli folgt, dass $\mu[\lim_n \sup A_n] = 0$.

Da $\lim_n \sup A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_n =: A$ und $\nu[\bigcup_{k \geq n} A_k] \geq \nu[A_n] > \epsilon$ folgt wegen der Stetigkeit des endlichen Maßes ν, dass $\nu[A] \geq \epsilon$. Da aber $\mu[A] = 0$, ist dies ein Widerspruch zur absoluten Stetigkeit und damit zu unserer anfänglich getroffenen Annahme. Damit muss das ϵ-δ-Kriterium gelten. $\square$

Lemma 7.4. *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von positiven reellen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} |1 - X_n| < \infty$ fast sicher. Dann konvergiert auch $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ fast sicher. Insbesondere ist $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ fast sicher positiv.*

Beweis. Wähle Ω' mit $\mathrm{P}[\Omega'] = 1$, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} |1 - X_n| < \infty$ auf ganz Ω' konvergiert. Sei nun $\omega \in \Omega'$ beliebig und definiere $x_n := X_n(\omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} |1 - x_n| < \infty$. Insbesondere gilt $|1 - x_n| \to 0$, womit es ein $N \in \mathbb{N}_0$ geben muss sodass für alle $n \geq N$ folgt, dass $x_n > e^{-1}$. Durch eine einfache Rechnung erhält man, dass für alle $x > e^{-1}$ gilt $|\log(x)| \leq e|1 - x|$. Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |\log(x_n)| &= \sum_{n=0}^{N-1} |\log(x_n)| + \sum_{n=N}^{\infty} |\log(x_n)| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} |\log(x_n)| + e \sum_{n=N}^{\infty} |1 - x_n| < \infty.
\end{aligned}$$

Damit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |\log(x_n)|$ absolut, womit auch $\sum_{n=0}^{\infty} \log(x_n)$ konvergiert. Es folgt

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{\infty} x_k &= \lim_{n \uparrow \infty} \exp(\sum_{k=0}^{n} \log(x_k)) \\
&= \exp(\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{k=0}^{n} \log(x_k)) = \exp(\sum_{k=0}^{\infty} \log(x_k)).
\end{aligned}$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} \log(x_n)$ existiert, existiert also auch $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$ und ist positiv. Da $\omega \in \Omega$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 7.5. *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable auf Ω. Ist $E_P[e^{|X|}] < \infty$, so ist $E_P[|X|^p] < \infty$ für jedes $p \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Wähle $a > 0$, sodass für alle $x \geq a$ gilt $x^p \leq e^x$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[|X|^p] &= \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[|X|^p 1_{\{|X|<a\}}] + \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[|X|^p 1_{\{|X|\geq a\}}] \\ &\leq a^p + \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[e^{|X|} 1_{\{|X|\geq a\}}] \\ &\leq a^p + \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[e^{|X|}] < \infty, \end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Literaturverzeichnis

[Kus14] N. Kusolitsch. *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie: Eine Einführung*, volume 2. Springer Spektrum, 2014.

[Mey72] P. A. Meyer. *Martingales and Stochastic Integrals. I. Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1972.

[PR18] V. Prokaj and J. Ruf. *Local martingales in discrete time*. 2018.

[Shi96] A. N. Shiryaev. *Probability*, volume 2. Springer, 1996.