TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Seminararbeit

Finanz- und Versicherungsmathematik

Two-step actuarial valuations

Karina Michalak

Matrikelnummer: 11901954

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

Wien, am 28. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation

Seit dem Inkrafttreten von dem Aufsichtsregime Solvency II in 2016 hat der Begriff der marktkonsistenten Bewertung erheblich an Bedeutung gewonnen. Die Versicherungsunternehmen sind nämlich verpflichtet, eine sogenannte Solvenzbilanz jährlich zu erstellen, in der alle Vermögenswerte sowie Verbindlichkeiten gemäß dem Grundsatz der Marktkonsistenz zu bewerten sind. Zur Bewertung der Aktiva, die an liquiden, transparenten Märkten replizierbar sind, werden die vorhandenen Marktpreise herangezogen (Mark-to-Market). Sonst wird vor allem auf Preisnotierungen für ähnliche Assets oder auf Bewertungsmodelle (Mark-to-Modell) zurückgegriffen.
Im Falle der Verbindlichkeiten wird die vollständige und verlässliche Replizierbarkeit eher selten vorliegen und die marktkonsistente Bewertung ist laut Versicherungsaufsichtsgesetz 2016 § 158 [1] folgendermaßen zu verstehen:

> ***§ 158.*** *(3) Die Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen erfolgt unter Berücksichtigung der von den Finanzmärkten bereitgestellten Informationen sowie allgemein verfügbarer Daten über versicherungstechnische Risiken und hat mit diesen konsistent zu sein (Marktkonsistenz).*

Diese Seminararbeit befasst sich mit dem Konzept der „zweistufigen aktuariellen Bewertungen“ (engl. two-step actuarial valuations), die im Gegensatz zur Marktkonsistenz „aktuariell konsistent“ sind. Diese zwei Begriffe stammen aus dem Paper *Two-step actuarial valuations* von Karim Barigou, Daniël Linders und Fan Yang [2], das im Jahr 2021 veröffentlicht wurde, und die Grundlage dieser Arbeit darstellt. Die Einführung der zweistufigen Bewertungen ist motiviert dadurch, dass die Versicherungsverbindlichkeiten oft sowohl von Finanzrisiken, als auch von versicherungstechnischen Risiken abhängig sind. Somit ist es notwendig, solche Bewertungen zu definieren, die die Methoden der Finanzmathematik und der Versicherungsmathematik kombinieren. Die aktuariell konsistenten Bewertungen sollen sich wiederum in erster Linie an den versicherungstechnischen Risiken orientieren, während bei den marktkonsistenten Bewertungsmethoden die Finanzrisiken im Vordergrund stehen.

Im Kapitel 2 werden die notwendigen mathematischen Grundlagen besprochen. Es werden vor allem einige versicherungsmathematische und finanzmathematische Bewertungsprinzipien sowie die entsprechenden Settings beschrieben. Demnächst wird im Teil 3 der Begriff der aktuariellen Konsistenz und die Klasse von zweistufigen aktuariellen Bewertungen definiert. Es wird vor allem bewiesen, dass die zweistufigen aktuariellen Bewertungen aktuariell konsistent sind, und dass im kohärenten Setting jede aktuariell konsistente Bewertung als eine zweistufige Bewertung dargestellt werden kann. Kapitel 4 umfasst mögliche Ansätze zur Definition von Marktkonsistenz, Definition der zweistufigen finanzmathematischen Bewertungen und den Begriff der fairen Bewertungen. Zum Schluss werden einige Beispiele dargestellt um einen Vergleich von den aktuariell konsistenten und den marktkonsistenten Bewertungen zu ermöglichen.

2 Finanzmathematische und versicherungsmathematische Bewertungen

Setting: Alle in dieser Arbeit angeführten Zufallsvariablen sind auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, bestehend aus einer Grundmenge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{F}$, einer Filtration $\mathbb{F}$ und einem Wahrscheinlichkeitsraum $\mathbb{P}$ definiert. Alle Gleichungen, Ungleichungen und ähnliches sind als $\mathbb{P}$-fast sicher zu verstehen (d.h. sie gelten bis auf $\mathbb{P}$-Nullmengen). Der Raum $L^2(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen wird als $\mathcal{C}$ bezeichnet.
Unser Ziel ist zunächst die Bewertung von bedingten Forderungen (engl. contingent claims). Ein Contingent Claim S $\in \mathcal{C}$ ist ein Finanzprodukt, dessen Payoff zum Maturitätszeitpunkt T vom Wert der Underlying (einer Referenzgröße) abhängt. In unserem Kontext wird S eine Verbindlichkeit des Versicherungsunternehmens sein.

Definition 2.1 (**Bewertung**). *Eine Abbildung $\Pi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir als* ***Bewertung****, wenn gilt:*

- $\Pi[0] = 0$.
- ***Translationsinvarianz****: Für alle $S \in \mathcal{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\Pi[S + \alpha] = \Pi[S] + \alpha.$$

Die Abbildung Π ordnet also jedem Claim S eine reelle Zahl zu, die wir als Wert bzw. Preis des bestimmten Claims interpretieren.

2.1 Lineare und kohärente Bewertung

Definition 2.2 (**Lineare Bewertung**). *Eine Bewertung Π heißt* ***linear****, wenn für alle Claims $S_1, S_2 \in \mathcal{C}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\Pi[a\, S_1 + b\, S_2] = a\, \Pi[S_1] + b\, Pi[S_2]$$

Da aber Linearität eine erhebliche Einschränkung im versicherungsmathematischen Kontext darstellt, wollen wir die Klasse von kohärenten Bewertungen einführen. Dafür definieren wir zunächst die Menge:

$$\mathcal{P} = \{\phi \in L^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}) : \phi \geq 0, \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\phi] = 1\}.$$

Jede kohärente Bewertung kann als Supremum der Erwartungswerte unter Wahrscheinlichkeitsmaßen $\tilde{\mathbb{P}}$ dargestellt werden, wobei $\tilde{\mathbb{P}}$ Elemente einer konvexen Menge sind und die Dichten $\phi = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \in \mathcal{P}$ wohldefiniert sind.

Definition 2.3 (Kohärente Bewertung). *Eine Bewertung Π heißt **kohärent**, wenn für alle Claims $S \in \mathcal{C}$ gilt:*

$$\Pi[S] = \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\phi S],$$

wobei $\mathcal{Q}$ eine Teilmenge von $\mathcal{P}$ ist.

Darüber hinaus kann man als $\mathcal{Q}$ eine konvexe Menge, sodass das Supremum angenommen wird, wählen.
Interpretation: Anstatt die Bewertung auf einem einzigen Wahrscheinlichkeitsmaß zu basieren, wird eine ganze Klasse von Verteilungen herangezogen. Als Wert des Claims wird vorsichtshalber das Supremum gewählt, da dieses das Worst-Case-Szenario für das Versicherungsunternehmen darstellt.

In der Literatur wird die kohärente Bewertung häufig als kohärentes Risikomaß bezeichnet und durch folgende Axiome charakterisiert:

- **Monotonie:** $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{C} : S_1 \leq S_2 \Rightarrow \Pi[S_1] \leq \Pi[S_2]$.
  Höhere Verbindlichkeiten stellen größere Risiken dar.

- **Translationsinvarianz:** $\forall \alpha \in \mathbb{R}, S \in \mathcal{C} : \Pi[S + \alpha] = \Pi[S] + \alpha$.
  Das Gesamtrisiko erhöht sich um einen sicheren Verlust α.

- **Subadditivität:** $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{C} : \Pi[S_1 + S_2] \leq \Pi[S_1] + \Pi[S_2]$.
  Risikodiversifizierung mindert das Gesamtrisiko

- **positive Homogenität:** $\forall \alpha \geq 0, S \in \mathcal{C} : \Pi[\alpha S] = \alpha \Pi[S]$.
  Das Gesamtrisiko wächst proportional zu S.

Diese axiomatische Charakterisierung kommt sogar häufiger in der Literatur vor, und ist äquivalent zu der oben angeführten Definition. Für den Beweis sowie weitere Details verweisen wir jedoch auf [3] oder [4]. (Man muss jedoch beachten, dass S in unserem Kontext eine Verbindlichkeit bezeichnet. In der Literatur wird dieser Begriff sehr oft für Zufallsvariablen definiert, deren positive Werte Gewinne bedeuten. Je nach dem Kontext können also manche Definitionen voneinander abweichen.)

2.2 Versicherungsmathematische und finanzmathematische Bewertung

Versicherungsunternehmen sind einer Vielfalt von Risikoarten ausgesetzt. Dazu zählen vor allem Marktrisiko, Kreditrisiko, versicherungstechnisches Risiko, operationelles Risiko und Liquiditätsarisiko. Eine Versicherungsverbindlichkeit S $\in \mathcal{C}$ kann also eine Kombination von verschiedenen Risiken darstellen, was die Bewertung eines solchen Claims deutlich erschwert. Zur Vereinfachung werden wir die Risiken in zwei Arten unterteilen: Finanzrisiken und versicherungstechnische Risiken. Finanzrisiken sind diejenigen, die an öffentlichen Börsen gehandelt werden und von den Marktteilnehmern in beliebiger Menge gekauft und veräußert werden können. Die restlichen Risiken, die nicht börsengehandelt werden, gehören zu den versicherungstechnischen Risiken.

2.2.1 Finanzmathematische Bewertung

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit $n^{(1)} + 1$ Anlagen, die als Finanzrisiken interpretiert werden sollen. Der Payoff der i-ten Anlage zum Zeitpunkt t wird mit $Y_i(t)$ bezeichnet. $\mathbf{Y} = \{(Y(t))\}_{0 \leq t \leq T}$ beschreibt den Preisprozess dieser Anlagen, wobei $Y(t) = (Y_0(t), Y_1(t), ..., Y_{n^{(1)}}(t))$ dem Vektor der Risiken zum Zeitpunkt t entspricht, und die 0-te Komponente Y_0 risikolos ist (z.B. ein Bankkonto). Wir nehmen an, dass der risikolose Zinssatz r deterministisch und konstant ist. Zusätzlich definieren wir die zugehörige Filtration $\mathbb{F}^{(1)} = \left\{\mathcal{F}_t^{(1)}\right\}_{t \in [0,T]}$ so, dass $\mathcal{F}_T^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)}$ und $\mathcal{F}^{(1)} = \sigma(\mathbf{Y})$. In diesem Abschnitt betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}^{(1)}, \mathbb{F}^{(1)}, \mathbb{P}^{(1)})$, und widmen uns der Bewertung von Claims, die auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind.

Als **Financial Claim** mit Maturität T bezeichnen wir eine $\mathcal{F}_T^{(1)}$-messbare Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}^{(1)}, \mathbb{F}^{(1)}, \mathbb{P}^{(1)})$, die lediglich von den Finanzisiken $\mathbf{Y}$ abhängt. Die Menge aller solchen Zahlungsansprüchen definieren wir als $\mathcal{C}^{(1)}$. Für einen Claim $S^{(1)} \in \mathcal{C}^{(1)}$ gilt also: $S^{(1)} = f(\mathbf{Y})$ mit einer messbaren Funktion f.

Wie am Anfang des Kapitels erwähnt, werden die Finanzrisiken auf dem Finanzmarkt gehandelt. Weiters nehmen wir an, dass alle Marktteilnehmer die Preise beobachten können und die Assets in beliebiger Menge kaufen und verkaufen können. Wir können allerdings nicht davon ausgehen, dass der Verkaufspreis einer Anlage mit dem Kaufspreis zum Zeitpunkt t immer übereinstimmen wird. Daher definieren wir das **finanzmathematische Bewertungsprinzip** $\pi^{(1)}$ zur Bestimmung des Preises, zu dem man einen Pay-Off kaufen kann:

$$\pi^{(1)} : \mathcal{C}^{(1)} \to \mathbb{R}.$$

Der Funktionswert $\pi^{(1)}[S^{(1)}]$ entspricht also dem Preis, den man zum Zeitpunkt t=0 bezahlen muss, um die Auszahlung $S^{(1)}$ zum Maturitätszeitpunkt T zu erhalten. Die Wahl des Bewertungsprinzips $\pi^{(1)}$ hängt vom Marktmodell und dessen Annahmen ab. Wir stellen nun zwei mögliche Methoden vor.

1. **The law of one price (LOP)**
   Annahme: Der Markt ist arbitragefrei (D.h. es ist unmöglich einen risikolosen Gewinn zu erzielen, ohne eigenes Kapital einzusetzen.) und vollständig (D.h. Alle Zahlungsansprüche sind erreichbar). In diesem Setting existiert ein eindeutiges Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Folglich gibt es einen eindeutigen Preis, zu dem man einen Asset kaufen sowie verkaufen kann.

   $$\pi^{(1)}[S] = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S]$$

   Offensichtlich ist dieses Bewertungsprinzip linear.

   Dieses bekannte Modell stellt aber eine erhebliche Vereinfachung dar. In der Realität muss man mit zusätzlichen Transaktionskosten und nicht erreichbaren Claims rechnen. Dies führt zu nichtlinearen Bewertungsprinzipien und komplexeren Modellen mit den sogenannten Bid-Ask Spreads. Unter Bid-Ask Spread (auch Geld-Brief-Spanne genannt) verstehen wir die Differenz zwischen dem maximalen Preis, den die Käufer bereit zu zahlen sind, und dem minimalen Preis, den die Verkäufer akzeptieren würden.

2. **Unvollkommener Markt und Geld-Brief-Spanne** In diesem Setting betrachten wir einen unvollkommenen Markt. Aufgrund von dem aus der Marktunvollkommenheit resultierenden Bid-Ask Spread muss der Preis von $\pi^{(1)}[S]$ vorsichtiger gewählt werden und wird folglich höher als die oben angegebene risikoneutrale Bewertung.
   Anstatt die Preisbestimmung auf einem einzigen Martingalmaß zu basieren, wird also eine Klasse von „Stresstesst-Wahrscheinlichkeitsmaßen“ herangezogen. Der vorsichtig bestimmte Preis entspricht dann dem Supremum der Erwartungswerte unter diesen Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

   $$\pi^{(1)}[S] = e^{-rT}\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[S]$$

   Man beachte, dass dieses Bewertungsprinzip kohärent, aber nicht linear ist.

2.2.2 Versicherungsmathematische Bewertung

Analog zum vorigen Abschnitt betrachten wir $n^{(2)} + 1$ versicherungstechnische Risiken, deren Preispozess mit $\mathbf{X} = \{(X(t))\}_{0 \le t \le T}$ bezeichnet wird, wobei $X(t) = (X_0(t), X_1(t), ..., X_{n^{(2)}}(t))$ dem Vektor der Risiken zum Zeitpunkt t entspricht. Die zugehörige Filtration ist diejenige, die von diesen aktuariellen Risiken erzeugt wird, d.h. $\mathbb{F}^{(2)} = \left\{\mathcal{F}_t^{(2)}\right\}_{t \in [0,T]}$ und $\mathcal{F}_T^{(2)} = \mathcal{F}^{(2)} = \sigma(\mathbf{X})$

Actuarial Claim mit Maturität T ist eine $\mathcal{F}_T^{(2)}$-messbare Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}^{(2)}, \mathbb{F}^{(2)}, \mathbb{P}^{(2)})$. Analog zu den financial Claims, ist ihre Realisierung lediglich von den versicherungstechnischen Risiken $\mathbf{X}$ abhängig. Die Menge aller actuarial Claims werden wir als $\mathcal{C}^{(2)}$ bezeichnen. Für einen Zahlungsanspruch $S^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}$ gilt dementsprechend: $S^{(2)} = f(\mathbf{X})$ mit einer messbaren Funktion f.

Im Folgenden wollen wir, analog zum letzten Abschnitt, einige versicherungsmathematische Bewertungsprinzipien kurz beschreiben. Diese werden auch häufig Prämienkalkulationprinzipien genannt, da die Prämienbestimmung eine der wichtigsten Aufgaben der Versicherungsmathematik darstellt. Ein naheliegender Ausgangspunkt wäre das **Äquivalenzprinzip**, bei dem der Erwartungswert von $S^{(2)}$ als Preis angenommen wird. Ein Grund dafür ist das Gesetz der großen Zahlen, das den Ausgleich im Kollektiv ermöglicht. Außer den diversifizierbaren Risiken, die mit zunehmender Größe des Kollektivs abnehmen, gibt es allerdings auch nichtdiversifizierbare Risiken, die durch Risikostreuung nicht reduziert werden können. Ein Beispiel dafür wäre die Langlebigkeit, die sich in den letzten Jahrzehnten vor allem aufgrund vom medizinischen Fortschritt verbessert hat. Um solchen Risiken Rechnung zu tragen, wird bei den versicherungstechnischen Bewertungsprinzipien zusätzlich ein Sicherheits- bzw. Schwankungszuschlag berücksichtigt.

1. **Lineare Bewertung**

   $$\pi^{(2)}[S] = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}[S]$$

   Der Sicherheitszuschlag wird durch den entsprechen Maßwechsel von $\mathbb{P} \to \tilde{\mathbb{P}}$ modelliert. Der Maßwechsel kann folgendermaßen verstanden werden: Die zugrundeliegende Sterbetafel, die die Sterblichkeiten 2. Ordnung enthält (also „best estimate“-Schätzwerte für die Sterbewahrscheinlichkeiten) wird durch die Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung, die vorsichtig gewählt sind, ersetzt.

2. **Standardabweichungsprinzip**

   $$\pi^{(2)}[S] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S] + \beta\sqrt{Var^{\mathbb{P}}[S]} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S] + \beta\sigma_S,$$

   wobei $\beta \ge 0$. Hier ist der Risikozuschlag proportional zur Standardabweichung σ_S. Wir bemerken, dass diese Bewertungsmethode weder linear, noch kohärent ist.

3. **Varianzprinzip**

$$\pi^{(2)}[S] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S] + \beta Var^{\mathbb{P}}[S] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S] + \beta\sigma_S^2,$$

   mit $\beta \geq 0$, analog zum vorigen Prinzip.

4. **Kohärente Bewertung**

$$\pi^{(2)}[S] = \rho(S),$$

   wobei ρ eine kohärente Bewertung ist. Anders ausgedrückt:

$$\pi^{(2)}[S] = \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S]$$

   Der Claim wird also mit einer Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen bewertet und das konservativste Ergebnis wird als Wert von S angenommen.

2.3 Hybrid Claims

Nach dem wir einige Bewertungsmethoden von financial bzw. actuarial Claims beschrieben haben, betrachten wir wieder den am Anfang dieses Kapitels definierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, der eine Kombination aus $(\Omega, \mathcal{F}^{(1)}, \mathbb{F}^{(1)}, \mathbb{P}^{(1)})$ und $(\Omega, \mathcal{F}^{(2)}, \mathbb{F}^{(2)}, \mathbb{P}^{(2)})$ darstellt. Die Filtration $\mathbb{F}$ ist also die kleinste $\mathbb{F}^{(1)}$ und $\mathbb{F}^{(2)}$ umfassende Filtration, d.h. $\mathbb{F} = \sigma(\mathbb{F}^{(1)} \cup \mathbb{F}^{(2)})$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$ ist konsistent mit $\mathbb{P}^{(1)}$ und $\mathbb{P}^{(2)}$, d.h.:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}^{(i)}(A), \text{ wenn } A \in \mathcal{F}^{(i)}, i = 1, 2$$

Angenommen, die Abbildung $\Pi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ wird verwendet, um die Ansprüche S $\in \mathcal{C}$ zu bewerten. Da solche Claims sowohl finanzmathematische, als auch versicherungstechnische Risiken in sich tragen können, stellt sich die Frage, ob diese Risikoarten als unabhängig angenommen werden können, was die Bewertung natürlich vereinfachen würde.
Leider wird das nicht immer zutreffen, weil die Versicherungswelt und die Finanzwelt in gewissem Maße verzahnt sind. Ein Paradebeispiel dafür ist die COVID-19-Pandemie, die theoretisch als ein versicherungstechnisches Risiko (Pandemierisiko) eingestuft würde, aber gleichzeitig enorme Auswirkungen auf die Marktsituation auf der ganzen Welt gehabt hat. Ein anderes bedeutsames Risiko, das eine Herausforderung für die Versicherungen darstellt, ist die Langlebigkeit, die sich in den letzten Jahrzehnten, vor allem aufgrund vom medizinischen Fortschritt, verbessert hat. Um sich gegen dieses Risiko abzusichern, entwickelt man Finanzprodukte wie z.B. die Langlebigkeitsanleihen (engl. longevity bonds), wodurch die Langlebigkeit zu einem Finanzrisiko wird.

Daher darf die verwendete Bewertungsmethode Π nicht lediglich auf versicherungsmathematischen oder finanzmathematischen Bewertungsprinzipien basieren.

Wir betrachten zunächst $\mathcal{C}^{(\perp,1)}$ - die Menge aller financial Claims, die von versicherungstechnischen Risiken unabhängig sind. Analog definieren wir $\mathcal{C}^{(\perp,2)}$ als die Menge der actuarial Claims, die von Finanzrisiken unabhängig sind:

$$S^{(\perp,1)} \in \mathcal{C}^{(\perp,1)} \iff S^{(\perp,1)} \in \mathcal{C}^{(1)} \text{ und } S^{(\perp,1)} \perp \mathbf{X}$$
$$S^{(\perp,2)} \in \mathcal{C}^{(\perp,2)} \iff S^{(\perp,2)} \in \mathcal{C}^{(2)} \text{ und } S^{(\perp,2)} \perp \mathbf{Y}$$

Die Verbindlichkeiten $S^{(\perp,2)} \in \mathcal{C}^{(\perp,2)}$ sind rein versicherungstechnischer Natur, enthalten keine Informationen über Finanzrisiken und sollen daher nur mit $\pi^{(2)}$ bewertet werden. Analog soll der Wert von $S^{(\perp,2)} \in \mathcal{C}^{(\perp,2)}$ nur mithilfe von $\pi^{(1)}$ ermittelt werden . Daher fordern wir in diesem Kontext, dass Π konsistent mit $\pi^{(1)}$ und $\pi^{(2)}$ ist. D.h. Π korrespondiert mit $\pi^{(1)}$ für reine financial Claims $S^{(\perp,1)}$ und mit $\pi^{(2)}$ für reine actuarial Claims $S^{(\perp,2)}$.

Satz 2.1 (**Orthogonal-consistency**). *Eine Bewertung $\Pi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ heißt **orthogonal konsistent** mit $\pi^{(1)}$ und $\pi^{(2)}$, wenn für i=1,2 gilt:*

$$\Pi[S^{(\perp,i)}] = \pi^{(i)}[S^{(\perp,i)}], \text{ wenn } S^{(\perp,i)} \in \mathcal{C}^{(\perp,i)} \tag{2.1}$$

Satz 2.2 (**Hybrid Claim**). *Ein bedingter Zahlungsanspruch $\mathcal{C}$ wird Hybrid Claim genannt, wenn er sowohl von Finanzrisiken als auch von versicherungstechnischen Risiken abhängt, d.h.: $S \in \mathcal{C} \setminus (\mathcal{C}^{(1)} \cup \mathcal{C}^{(2)})$*

2.3.1 Bedingte Bewertung

An dieser Stelle führen wir den Begriff einer $\mathcal{F}^{(i)}$-bedingten Bewertung, die einen Claim $S \in \mathcal{C}$ auf eine $\mathcal{F}^{(i)}$-messbare Zufallsvariable abbildet, wobei i=1,2. Auf diese Weise kann ein beliebiger Claim S in einen financial Claim oder actuarial Claim transformiert werden.

Satz 2.3 (**$\mathcal{F}^{(i)}$-bedingte Bewertung**). *Eine $\mathcal{F}^{(i)}$-bedingte Bewertung ist eine Abbildung $\Pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{(i)}$, für die gilt:*

- $\Pi[0|\mathcal{F}^{(i)}] = 0$.
- ***Translationsinvarianz**: Für alle $S \in \mathcal{C}, S^{(i)} \in \mathcal{C}^{(i)}$ gilt:*
$$\Pi[S + S^{(i)}|\mathcal{F}^{(i)}] = \Pi[S|\mathcal{F}^{(i)}] + S^{(i)}.$$
- ***positive Homogenität** Für alle $S \in \mathcal{C}$ und positive $S^{(i)} \in \mathcal{C}^{(i)}$ gilt:*
$$\Pi[S \times S^{(i)}|\mathcal{F}^{(i)}] = S^{(i)} \times \Pi[S|\mathcal{F}^{(i)}].$$

Eine $\mathcal{F}^{(1)}$-bedingte Bewertung bildet einen beliebigen Claim S auf einen financial Claim $\Pi[S|\mathcal{F}^{(i)}]$ ab. Da die Filtration $\mathbb{F}^{(1)}$ von dem Preisprozess der Finanzrisiken $\mathbf{Y}$ erzeugt ist, ist das Bedingen auf $\mathcal{F}_T^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)}$ äquivalent zum Bedingen auf den stochastischen Prozess $\mathbf{Y}= \{(Y(t))\}_{0\leq t\leq T}$. Analoge Überlegungen lassen sich auf die $\mathcal{F}^{(2)}$-bedingte Bewertung übertragen.

3 Actuarial-consistency & Two-step actuarial valuations

3.1 Actuarial-consistent valuations

Wie im letzten Abschnitt besprochen, sollen unter der Bedingung (2.1) alle actuarial Claims, die unabhängig von Finanzrisiken sind, nach versicherungsmathematischen Bewertungsprinzip $\pi^{(2)}$ bewertet werden. Da jedoch diese Unabhängigkeit in vielen Fällen nicht vorliegen wird, definieren wir eine neue Klasse von aktuariell konsistenten Bewertungsmethoden, die alle actuarial Claims sachgerecht nach aktuariellen Methoden bewerten.

Definition 3.1 (**Strong actuarial-consistency**). *Eine Bewertung* Π *heißt* ***stark aktuariell konsistent*** *(engl. strong actuarial-consistent, strong ACV), wenn für alle* $S^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}, S \in \mathcal{C}$ *gilt:*

$$\Pi[S + S^{(2)}] = \Pi[S] + \pi^{(2)}[S^{(2)}]$$

Da aber diese Definition die Linearität der Bewertung implizieren würde, führen wir eine schwächere Variante der aktuariellen Konsistenz ein.

Definition 3.2 (**Weak actuarial-consistency**). *Eine Bewertung* Π *heißt* ***schwach aktuariell konsistent*** *(engl. weak actuarial-consistent, strong ACV), wenn für alle* $S^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}$ *gilt:*

$$\Pi[S^{(2)}] = \pi^{(2)}[S^{(2)}]$$

Die schwache aktuarielle Konsistenz fordert lediglich, dass zur Bewertung von actuarial Claims ein versicherungsmathematisches Bewertungsprinzip verwendet wird. Es ist ziemlich offensichtlich, dass die starke aktuarielle Konsistenz die schwache aktuarielle Konsistenz impliziert. Unter gewissen Umständen gilt aber auch die Umkehrung, was das folgende Lemma veranschaulicht.

Lemma 3.1. *Sei* Π *eine kohärente Bewertungsfunktion und* $\pi^{(2)}$ *eine versicherungsmathematische Bewertung, die linear ist, in dem Sinne, dass für alle* $S^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}$ *gilt:*

$$\pi^{(2)}[S^{(2)}] = \mathbb{E}[\phi^{(2)} S^{(2)}],$$

mit einer $\mathcal{F}^{(2)}$*-messbaren Dichtefunktion* $\phi^{(2)}$*.*
Dann sind äquivalent:

1. Π *ist stark aktuariell konsistent.*

2. Π *ist schwach aktuariell konsistent.*

Beweis. 1. $\Longrightarrow$ 2. : *Folgt direkt aus der Definition mit S=0.*

2. $\Longleftarrow$ 1. : *Seien* $S \in \mathcal{C}, S^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}$ *beliebig,* Π *eine beliebige kohärente Bewertungsfunktion. Nach Definition gilt also*

$$\Pi[S] = \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[\phi S].$$

Sei weiters $\pi^{(2)}$ *linear, mit einer* $\mathcal{F}^{(2)}$*-messbaren Dichte* $\phi^{(2)}$ *wie oben definiert. So erhalten wir für* $S^{(2)}$*:*

$$\begin{aligned} \pi^{(2)}[S^{(2)}] &= \mathbb{E}[\phi^{(2)} S^{(2)}] \\ &= \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[\phi S^{(2)}] \\ &= \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi S^{(2)} | \mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[S^{(2)} \mathbb{E}[\phi | \mathcal{F}^{(2)}]], \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Zeile aus der $\mathcal{F}^{(2)}$*-Messbarkeit von* $S^{(2)}$ *folgt.*

Wegen der Gleichheit $\mathbb{E}[\phi^{(2)} S^{(2)}] = \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[S^{(2)} \mathbb{E}[\phi | \mathcal{F}^{(2)}]]$*, genügt es solche Dichten* ϕ *zu betrachten, für die gilt:*

$$\phi \in \mathcal{Q} \;\; und \;\; \mathbb{E}[\phi | \mathcal{F}^{(2)}] = \phi^{(2)}.$$

Da $\phi^{(2)}$ *nichtnegativ ist, gilt für jede Zufallsvariable* $Z \in L^2(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ *mit* $\mathbb{E}[Z | \mathcal{F}^{(2)}] = 1$*:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi^{(2)} Z | \mathcal{F}^{(2)}] &= \phi^{(2)} \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}^{(2)}] \\ &= \phi^{(2)}. \end{aligned}$$

Folglich können wir schreiben:

$$\phi = \phi^{(2)} Z, \;\; wobei \; Z \in \mathcal{Q}_{(2)} := \{Z \in L^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}) | \; \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}^{(2)}] = 1\}.$$

Schliesslich erhalten wir also:

$$
\begin{aligned}
\Pi[S+S^{(2)}] &= \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)}Z(S+S^{(2)})] \\
&= \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \Big(\mathbb{E}[\phi^{(2)}ZS] + \mathbb{E}[\phi^{(2)}ZS^{(2)}]\Big) \\
&= \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \Big(\mathbb{E}[\phi^{(2)}ZS] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi^{(2)}ZS^{(2)}|\mathcal{F}^{(2)}]]\Big) \\
(\phi^{(2)}, S^{(2)} \textit{ sind } \mathcal{F}^{(2)}\textit{-messbar }) &= \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \Big(\mathbb{E}[\phi^{(2)}ZS] + \mathbb{E}[\phi^{(2)}S^{(2)}\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}^{(2)}]]\Big) \\
&= \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \Big(\mathbb{E}[\phi^{(2)}ZS] + \mathbb{E}[\phi^{(2)}S^{(2)}]\Big) \\
&= \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \Big(\mathbb{E}[\phi^{(2)}ZS] + \pi^{(2)}[S^{(2)}]\Big) \\
&= \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \Big(\mathbb{E}[\phi^{(2)}ZS]\Big) + \pi^{(2)}[S^{(2)}] \\
&= \Pi[S] + \pi^{(2)}[S^{(2)}],
\end{aligned}
$$

was der Definition der starken aktuariellen Konsistenz entspricht. ■

3.2 Two-step actuarial valuations

Nun kann der wichtigste Begriff dieser Arbeit vorgestellt werden. Es handelt sich um eine Klasse von aktuariell konsistenten Bewertungen die von Karim Barigou, Daniël Linders und Fan Yang in Ihrem Paper als zweistufige aktuarielle Bewertungen definiert wurden. Wie der Name suggeriert, erfolgt eine solche Bewertung in zwei Schritten. Als Erstes wird ein Claim $S \in \mathcal{C}$ nach einem finanzmathematischen Bewertungsprinzip bedingt durch aktuarielle Szenarien bewertet. Dieser bedingte Payoff ist dann eine $\mathcal{F}^{(2)}$-messbare Zufallsvariable, zu deren Bewertung im zweiten Schritt ein versicherungsmathematisches Bewertungsprinzip angewendet wird.

Definition 3.3 (Two-step actuarial valuation). *Eine Bewertungsfunktion Π bezeichnen wir als **zweistufige aktuarielle Bewertung** (engl. two-step actuarial valuation), wenn sie folgendermaßen dargestellt werden kann:*

$$\Pi[S] = \pi^{(2)}[\pi^{(1)}[S|\mathcal{F}^{(2)}]],$$

wobei $\pi^{(2)}$ eine versicherungsmathematische Bewertung,
und $\pi^{(1)}$ eine $\mathcal{F}^{(2)}$-bedingte finanzmathematische Bewertung ist.

Die erste Eigenschaft, die man ziemlich einfach begründen kann, ist dass die zweistufigen aktuariellen Bewertungen orthogonal-konsistent sind.

Beweis. *Seien* Π *eine zweistufige aktuarielle Bewertung mit* $\pi^{(1)}$ *und* $\pi^{(2)}$ *wie oben definiert,* $S^{(\perp,i)} \in \mathcal{C}^{(\perp,i)}$ *für* $i = 1,2$.
Da $S^{(\perp,1)}$ *von* $\mathcal{F}^{(2)}$ *unabhängig ist, gilt nach Eigenschaften der bedingten Bewertung*

$$\begin{aligned}\Pi[S^{(\perp,1)}] &= \pi^{(2)}[\pi^{(1)}[S^{(\perp,1)}|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \pi^{(2)}[\pi^{(1)}[S^{(\perp,1)}]] \\ &= \pi^{(1)}[S^{(\perp,1)}],\end{aligned}$$

da $\pi^{(1)}[S^{(\perp,1)}]$ *deterministisch ist. Andererseits ist* $S^{(\perp,2)}\mathcal{F}^{(2)}$*-messbar, was folglich ergibt*

$$\begin{aligned}\Pi[S^{(\perp,2)}] &= \pi^{(2)}[\pi^{(1)}[S^{(\perp,2)}|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ \Pi[S^{(\perp,2)}] &= \pi^{(2)}[S^{(\perp,2)}\pi^{(1)}[1|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \pi^{(2)}[S^{(\perp,2)}].\end{aligned}$$

Demnächst, soll es gezeigt werden, dass jede zweistufige aktuarielle Bewertung schwach aktuariell konsistent ist. Fordert man zusätzlich, dass die Bewertung kohärent ist, so gilt auch die Umkehrung: Jede schwach aktuariell konsistente Bewertung hat eine Darstellung als zweistufige aktuarielle Bewertung.

Satz 3.1 (Charakterisierung von schwacher aktuariellen Konsistenz). *Es gilt:*

1. *Jede zweistufige aktuarielle Bewertung ist schwach ACV*
2. *Sei* Π *eine kohärente schwache ACV. Dann existiert eine* $\mathcal{F}^{(2)}$*-bedingte kohärente Bewertung* $\pi^{(1)}$ *und eine kohärente versicherungsmathematische Bewertung* $\pi^{(2)}$ *mit:*
$$\Pi[S] = \pi^{(2)}[\pi^{(1)}[S|\mathcal{F}^{(2)}]].$$

Beweis. ***Zu 1. :*** *Sei* Π *eine zweistufige aktuarielle Bewertung,* $S^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}$ *beliebig. Da* $S^{(2)}\mathcal{F}^{(2)}$*-messbar ist, folgt:*

$$\begin{aligned}\Pi[S^{(2)}] &= \pi^{(2)}[\pi^{(1)}[S^{(2)}|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \pi^{(2)}[S^{(2)}[\pi^{(1)}[1|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \pi^{(2)}[S^{(2)}],\end{aligned}$$

womit die erste Aussage gilt.

Zu 2. *: Sei* Π *kohärent,* $S \in \mathcal{C}$ *beliebig.*
Da Π *kohärent ist, gilt nach Definition:*

$$\Pi[S] = \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[\phi S],$$

wobei $\mathcal{Q}$ *eine Teilmenge von* $\mathcal{P} = \{\phi \in L^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}) : \phi \geq 0, \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\phi] = 1\}$ *ist.*
Andererseits ist Π *auch schwach aktuariell konsistent. Dementsprechend gilt für jedes* $S^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}$*:*

$$\Pi[S^{(2)}] = \sup_{\phi^{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)} S^{(2)}],$$

wobei hier das Supremum über $\mathcal{F}^{(2)}$*-messbare Dichten* $\phi^{(2)}$ *betrachtet wird.*
Dies ist nur dann erfüllt, wenn $\sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[\phi S^{(2)}] = \sup_{\phi^{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)} S^{(2)}]$ *gilt,*
bzw. genauer ausgeführt:

$$\begin{aligned} \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[\phi S^{(2)}] &= \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi S^{(2)} | \mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[S^{(2)} \mathbb{E}[\phi | \mathcal{F}^{(2)}]] && (3.1) \\ &\overset{!}{=} \sup_{\phi^{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)} S^{(2)}]. && (3.2) \end{aligned}$$

Wir schreiben also $\phi = \phi^{(2)} Z$*, mit* $Z \in \mathcal{Q}_{(2)} := \{Z \in L^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}) | \ \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}^{(2)}] = 1\}$.
So gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\phi \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[S^{(2)} \mathbb{E}[\phi | \mathcal{F}^{(2)}]] &= \sup_{\phi^{(2)}} \sup_{Z \in \mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[S^{(2)} \mathbb{E}[\phi^{(2)} Z | \mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \sup_{\phi^{(2)}} \sup_{Z \in \mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)} S^{(2)} \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \sup_{\phi^{(2)}} \sup_{Z \in \mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)} S^{(2)} 1] \\ &= \sup_{\phi^{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)} S^{(2)}], \end{aligned}$$

und somit die gewünschte Gleichheit 3.1 = 3.2.

Folglich erhalten wir für beliebiges $S \in \mathcal{C}$*:*

$$\begin{aligned} \Pi[S] &= \sup_{\phi^{(2)}} \sup_{Z \in \mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)} Z S] \\ &= \sup_{\phi^{(2)}} \sup_{Z \in \mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi^{(2)} Z S | \mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \sup_{\phi^{(2)}} \sup_{Z \in \mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)} \mathbb{E}[Z S | \mathcal{F}^{(2)}]]. \end{aligned}$$

Um die gesuchte zweistufige Darstellung zu finden, müssen wir also nur noch die folgende Gleichung beweisen:

$$\sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)}\mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]] = \mathbb{E}[\sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \phi^{(2)}\mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]]. \tag{3.3}$$

Für jedes $Z \in \mathcal{Q}_{(2)}$ gilt:

$$\mathbb{E}[\phi^{(2)}\mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]] \leq \mathbb{E}[\sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \phi^{(2)}\mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]],$$

woraus folgende Ungleichung folgt:

$$\sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)}\mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]] \leq \mathbb{E}[\sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \phi^{(2)}\mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]]. \tag{3.4}$$

Andererseits kann nach Definition vom Supremum eine Folge $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{Q}_{(2)}$ konstruiert werden, für die gilt:

$$\mathbb{E}[Z_1S|\mathcal{F}^{(2)}] \leq \mathbb{E}[Z_2S|\mathcal{F}^{(2)}] \leq \mathbb{E}[Z_3S|\mathcal{F}^{(2)}] \leq \ldots$$
$$\textit{und} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_nS|\mathcal{F}^{(2)}] = \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]$$

Nun können wir nach dem Satz von der monotonen Konvergenz den Grenzwert mit dem Erwartungswert vertauschen und erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\phi^{(2)}\mathbb{E}[Z_nS|\mathcal{F}^{(2)}]] = \mathbb{E}[\phi^{(2)} \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]].$$

Es gilt auch:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\phi^{(2)}\mathbb{E}[Z_nS|\mathcal{F}^{(2)}]] \leq \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)}\mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]].$$

Die zwei letzten Aussagen implizieren nun:

$$\mathbb{E}[\phi^{(2)} \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]] \leq \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)}\mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]]. \tag{3.5}$$

3.4 und 3.5 ergeben insgesamt 3.3.

Wir fassen jetzt alles zusammen und erhalten:

$$\begin{aligned}\Pi[S] &= \sup_{\phi^{(2)}} \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)}\mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ &\overset{3.3}{=} \sup_{\phi^{(2)}} \mathbb{E}[\phi^{(2)} \sup_{Z\in\mathcal{Q}_{(2)}} \mathbb{E}[ZS|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \pi^{(2)}[\pi^{(1)}[S|\mathcal{F}^{(2)}]],\end{aligned}$$

womit der Beweis beendet ist. ■

4 Faire Bewertungen

4.1 Market-consistency & two-step financial valuations

Im folgenden Abschnitt betrachten wir den Begriff der Marktkonsistenz, der nach dem Inkrafttreten des Solvency-II-Regimes erheblich an Bedeutung gewonnen hat. Grob gesagt: nach dem Prinzip der marktkonsistenten Bewertung sollen die Vermögenswerte sowie Verbindlichkeiten des Versicherungsunternehmens in erster Linie anhand der Marktdaten bewertet werden. Wir werden hier, genauso wie bei den aktuariell konsistenten Bewertungen, zwei Varianten der Definitionen dieses Begriffs einführen.

Definition 4.1 (Starke Marktkonsistenz). *Eine Bewertung* Π *heißt* ***stark marktkonsistent*** *(engl. strong market-consistent, strong MCV), wenn für alle* $S^{(1)} \in \mathcal{C}^{(1)}, S \in \mathcal{C}$ *gilt:*

$$\Pi[S + S^{(1)}] = \Pi[S] + \pi^{(1)}[S^{(1)}]$$

Da diese Definition ebenso Linearität der Bewertung fordern würde, wäre sie bei unvollständigen Marktmodellen mit Bid-Ask-Spreads nicht anwendbar. Deshalb schwächen wir sie zur „schwachen Marktkonsistenz“ ab, die lediglich fordert, dass alle financial Claims nach finanzmathematischen Bewertungsprinzipien bewertet werden.

Satz 4.1 (Schwache Marktkonsistenz). *Eine Bewertung* Π *heißt* ***schwach marktkonsistent*** *(engl. weak market-consistent, weak MCV), wenn für alle* $S^{(1)} \in \mathcal{C}^{(1)}$ *gilt:*

$$\Pi[S^{(1)}] = \pi^{(1)}[S^{(1)}]$$

Um die zweistufigen aktuariellen Bewertungen „nachzuahmen“, definieren wir nun analog eine Klasse von zweistufigen finanzmathematischen Bewertungen.

Satz 4.2 (Two-step financial valuation). *Die Bewertungsfunktion* Π *bezeichnen wir als eine* ***zweistufige finanzmathematische Bewertung*** *(engl. two-step financial valuation), wenn sie folgendermaßen dargestellt werden kann:*

$$\Pi[S] = \pi^{(1)}[\pi^{(2)}[S|\mathcal{F}^{(1)}]],$$

wobei $\pi^{(1)}$ *eine finanzmathematische Bewertung,*
und $\pi^{(2)}$ *eine* $\mathcal{F}^{(1)}$*-bedingte versicherungsmathematische Bewertung ist.*

Satz 4.3 (Charakterisierung von schwacher Marktkonsistenz). *Es gilt:*

1. *Jede zweistufige finanzmathematische Bewertung ist schwach marktkonsistent*
2. *Sei Π eine kohärente schwach marktkonsistente Bewertung. Dann existiert eine $\mathcal{F}^{(2)}$-bedingte kohärente Bewertung $\pi^{(1)}$ und eine kohärente versicherungsmathematische Bewertung $\pi^{(1)}$ mit:*

$$\Pi[S] = \pi^{(1)}[\pi^{(2)}[S|\mathcal{F}^{(1)}]]$$

Beweis. *Analog zum Beweis vom Satz 3.1*

4.2 Faire Bewertung

Nach dem wir zwei Klassen von konsistenten Bewertungen definiert haben, stellt sich die Frage: Kann man eine faire Bewertung definieren, in dem Sinne, dass sie sowohl aktuariell, als auch marktkonsistent ist?

Definition 4.2 (Faire Bewertung). *Eine Bewertung Π bezeichnen wir als* ***Faire Bewertung*** *(engl. fair valuation), wenn sie sowohl schwach marktkonsistent, als auch schwach aktuariell konsistent ist.*

Leider ist das nicht immer möglich. Insbesondere, wenn in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ Finanzrisken und versicherungstechnische Risiken voneinander abhängig sind, muss man sich zwischen der **marktkonsistenten** Bewertung (kalibriert anhand Marktpreise) und der **aktuariell konsistenten** Bewertung (kalibriert auf Basis der historischen aktuariellen Daten) entscheiden.

Um das zu belegen, und zu veranschaulichen, beweisen wir zunächst folgende Aussage: Wenn in einem Setting eine faire Bewertung Π existiert, so stimmen die Werte von zwei fast sicher gleichen Claims $S^{(1)} \in \mathcal{C}^{(1)}, S^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}$ überein. Dies wird uns ermöglichen, anhand eines einfachen Beispiels zu zeigen, dass eine solche Bewertung nicht immer definiert werden kann.

Lemma 4.1. *Angenommen es existieren Claims $S^{(1)} \in \mathcal{C}^{(1)}, S^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}$, sodass:*

$$S^{(1)} = S^{(2)} \; f.s..$$

Dann gilt für eine Bewertung Π, die sowohl schwach marktkonsistent, als auch aktuariell konsistent ist:

$$\pi^{(1)}[S^{(2)}] = \pi^{(2)}[S^{(1)}]. \tag{4.1}$$

Beweis. *I. Da Π schwach marktkonsistent ist, und $S^{(1)} \overset{f.s.}{=} S^{(2)}$, gilt:*

$$\Pi[S^{(1)}] = \pi^{(1)}[S^{(1)}] = \pi^{(1)}[S^{(2)}].$$

II. Weiters ist Π ist schwach aktuariell konsistent, und $S^{(1)} \overset{f.s.}{=} S^{(2)}$, woraus folgt:

$$\Pi[S^{(2)}] = \pi^{(2)}[S^{(2)}] = \pi^{(2)}[S^{(1)}].$$

III. Schließlich gilt wegen $S^{(1)} \overset{f.s.}{=} S^{(2)}$:

$$\Pi[S^{(1)}] = \Pi[S^{(2)}],$$

woraus die Gleichheit folgt.

Beispiel 1. *Wir betrachten eine Call-Option $S^{(1)} \in \mathcal{C}^{(1)}$ mit Strike K=100, eine Erlebensversicherung mit Versicherungssumme 100, die durch $S^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}$ modelliert wird. Weiters nehmen wir an, dass der risikofreier Zinssatz gleich null ist. Die Payoffs können also folgendermaßen dargestellt werden:*

$$S^{(1)} = (Y-K)^+ = \begin{cases} 0 & \textit{falls } Y = 50, \\ 100 & \textit{falls } Y = 200. \end{cases} \quad \textit{und } S^{(2)} = \begin{cases} 0 & \textit{falls } I = 0, \\ 100 & \textit{falls } I = 1. \end{cases}$$

Sei $\mathbb{P}[(Y,I) = (200,1)]$=:p und $P[(Y,I) = (50,0)]$=1-p, mit $p \in (0,1)$. Es ist leicht zu sehen, dass

$$\mathbb{P}[S^{(1)} \neq S^{(2)}] = P[(Y,I) \in \{(50,1),(200,0)\}] = 0.$$

D.h. $S^{(1)} = S^{(2)}$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

Weiters seien gegeben:

- *$p = \mathbb{P}[I = 1]$ und $q := \mathbb{Q}[Y = 200]$, wobei $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß ist,*
- *$\pi^{(1)}$ risikoneutrales Bewertungsprinzip,*
- *$\pi^{(2)}$ Standardabweichungsprinzip.*

Folglich ergibt sich:

$$\begin{aligned} \pi^{(2)}[S^{(1)}] &= \pi^{(1)}[S^{(1)}] = 100q, \\ \pi^{(1)}[S^{(2)}] &= \pi^{(2)}[S^{(2)}] = 100\big(p + \beta\sqrt{p(1-p)}\big). \end{aligned}$$

Wir haben also zwei ($\mathbb{P}$-f.s.) identische Risiken, deren Preise komplett unterschiedlich sein können. Nach dem Lemma 4.1 gibt es in diesem Setting keine faire Bewertung.

Da man sich meistens zwischen der aktuariell konsistenten und der marktkonsistenten Bewertung entscheiden muss, wollen wir als letzter Punkt dieser Seminararbeit die beiden zweistufigen Bewertungsmethoden anhand von Beispielen untersuchen und vergleichen.

Beispiel 2 (Vergleich von MCV und ACV). *Wir betrachten ein Portfolio von Erlebensversicherungsverträgen für belgische Versicherungsnehmer im Alter x zum Zeitpunkt 0. Die Versicherungsleistung beträgt jeweils 1 und wird ausbezahlt, falls die versicherte Person zum Zeitpunkt T lebendig ist.*
Der aggregierte Payoff kann als $\boldsymbol{S = L_{x+T}}$ dargestellt werden, wobei $\boldsymbol{L_{x+T}}$ die Anzahl der lebendigen Versicherten zum Zeitpunkt T beschreibt.
Andererseits besteht der Finanzmarkt aus einer risikolosen Anlage $\boldsymbol{Y_{(0)}(t) = e^{rt}}$, und einer Langlebigkeitsanleihe (engl. longevity bond) $\boldsymbol{Y_{(1)}(T) = \tilde{L}_{x+T}}$, dem Äquivalent von L_{x+T} für niederländische Population.

1. *Zunächst bestimmen wir den Best-Estimate-Schätzwert für S unter Verwendung der zweistufigen aktuariellen Bewertung.*

$$\begin{aligned} BE[S] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}S|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}L_{x+T}|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{-rT}L_{x+T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_{x+T}]. \end{aligned}$$

   Die aktuariell konsistente Bewertung legt nahe, dass man in die risikolose Anlage investieren soll.

2. *Nun verwenden wir die zweistufige finanzmathematische Bewertung zu demselben Zweck.*
   Angenommen die Lebenserwartung der belgischen Bevölkerung ist kürzer, als die der Niederländer:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_{x+T}|\tilde{L}_{x+T}] = \beta\tilde{L}_{x+T} \text{ mit } \beta < 1.$$

   So ergibt sich:

$$\begin{aligned} BE^*[S] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S|\mathcal{F}^{(1)}]] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_{x+T}|\mathcal{F}^{(1)}]] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\beta\tilde{L}_{x+T}] \\ &= \beta Y_{(1)}(0), \end{aligned}$$

   wobei $Y_{(1)}(0)$ dem Preis der Langlebigkeitsanleihe entspricht. Das zweite Ergebnis suggeriert also, dass man in die risikobehaftete Langlebigkeitsanleihe investieren soll.

Beispiel 3. *Um den Unterschied zwischen der aktuariell konsistenten und der marktkonsistenten Bewertung genauer zu analysieren, erweitern wir das vorige Beispiel 2. Wir nehmen an, dass r=0, und dass der zweidimensionale Vektor* $(L_{x+T}, \tilde{L}_{x+T})$ *bestehend aus der belgischen Population und der niederländischen Population unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}$ *bivariat normalverteilt ist:*

$$(L_{x+T}, \tilde{L}_{x+T}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \text{ mit}$$
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Beide Populationen sind also normalverteilt mit dem Korrelationskoeffizienten ρ. *Weiters seien* $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}$ *durch*

$$\pi^{(1)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S],$$
$$\pi^{(2)} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S] + \beta\sqrt{Var^{\mathbb{P}}[S]}$$

definiert. Die zweistufige aktuarielle Bewertung $\Pi^{(2)}[S]$ *von* $S = L_x + T$ *ergibt folglich:*

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}[S] &= \pi^{(2)}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L_{x+T}|\mathcal{F}^{(2)}]] \\ &= \pi^{(2)}[L_{x+T}] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_{x+T}] + \beta\sqrt{Var^{\mathbb{P}}[L_{x+T}]} \\ &= \mu_1 + \beta\sigma_1. \end{aligned}$$

Um die zweistufige finanzmathematische Bewertung zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass für bedingte Verteilung von zwei normalverteilten Zufallsvariablen gilt:

$$\begin{aligned} L_{x+T}|\tilde{L}_{x+T} &\overset{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{N}\Big(\mu_1 + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2}(\tilde{L}_{x+t} - \mu_2), \sigma_1^2 - \frac{(\rho\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_2^2}\Big) \\ &= \mathcal{N}(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\tilde{L}_{x+t} - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)). \end{aligned}$$

Weiters nehmen wir an, dass die Verteilung von $\tilde{L}_{x+T}$ *unter dem risikoneutralen Maß* $\mathbb{Q}$ *der Normalverteilung*

$$\tilde{L}_{x+T} \overset{\mathbb{Q}}{\sim} \mathcal{N}(\mu - \sigma_2\kappa, \sigma_2^2)$$

entspricht, wobei $\kappa > 0$ *den Marktpreis für das Risiko aus der Langlebigkeitsanleihe* $\tilde{L}_{x+T}$ *bezeichnet. Wir erhalten folgende zweistufige finanzmathematische Bewertung* $\Pi^{(1)}[S]$*:*

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}[S] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\pi^{(2)}[L_{x+T}|\mathcal{F}^{(1)}]] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\pi^{(2)}[L_{x+T}|\tilde{L}_{x+T}]] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\tilde{L}_{x+t} - \mu_2) + \beta\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\Big] \\ &= \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{L}_{x+t}] - \mu_2) + \beta\sigma_1\sqrt{1-\rho^2} \\ &= \mu_1 - \rho\sigma_1\kappa + \beta\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}. \end{aligned}$$

Vergleich von diesen zwei Ergebnissen liefert

$$\Pi^{(1)}[S] - \Pi^{(2)}[S] = \sigma_1[\beta(\sqrt{1-\rho^2} - 1) - \rho\kappa]. \tag{4.2}$$

Es lässt sich feststellen, dass der Betrag der Differenz zwischen den Preisen positiv von

- *der Korrelation ρ zwischen L_{x+T} und $\tilde{L}_{x+T}$,*
- *und dem Risikoaufschlag κ für die Langlebigkeitsanleihe*

abhängt, was man intuitiv erwarten würde.
Wenn man sich zwischen der risikofreien Investition und der Investition in die niederländischen Langlebigkeitsanleihe entscheiden muss, wird man sich überlegen, ob die daraus resultierenden Vorteile die notwendigen Kosten übersteigen. Die Frage ist also, ob der zusätzliche Preis 4.2, den man für die Langlebigkeitsanleihe bezahlen muss, durch die Risikoreduktion ausgeglichen wird. Wir vergleichen nun die Preise zum Zeitpunkt 0 und die entsprechenden Restverluste zum Maturitätszeitpunkt.

Preis zum Zeitpunkt 0	*Restverlust zum Maturitätszeitpunkt*
$\Pi^{(1)}[S]$	$R_1 = L_{x+T} - \left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\tilde{L}_{x+T} - \mu_2) + \beta\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\right)$ $\sim \mathcal{N}(-\beta\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}, (1-\rho^2)\sigma_1^2)$
$\Pi^{(2)}[S]$	$R_2 = L_{x+T} - \mu_1 - \beta\rho_1 \sim \mathcal{N}(-\beta\sigma_1, \sigma_1^2)$

Es lässt sich beobachten, dass durch die Investition in die Langlebigkeitsanleihe die Volatilität des verbleibenden Verlustes sinkt. Der erwartete Verlust wird allerdings höher im Vergleich zur risikolosen Anlage.
Es stellt sich auch hinaus, dass im Fall $\rho = \pm 1$ der Restverlust R_1 fast sicher gleich null ist, und der Claim S wird dadurch abgesichert.
Man kann erwarten, dass die erste Strategie gewählt wird, wenn die Risikominderung, die aus der Investition in $\tilde{L}_{x+T}$ resultiert, den Aufschlag auf den Preis übersteigt. Um diese Werte zu vergleichen, kann man beispielsweise das Risikomaß Value at Risk, das dem p-Quantil der Verlustfunktion entspricht, verwenden:

$$\begin{aligned}\sigma_1[\beta(\sqrt{1-\rho^2} - 1) - \rho\kappa] &< VaR_p[R_1] - VaR_p[R_2] \\ &= \sigma_1[\Phi^{-1}(p) - \beta](\sqrt{1-\rho^2} - 1).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Andernfalls wird sich der Preis der Langlebigkeitsanleihe als zu hoch erweisen und aktuariell konsistente Bewertung wird bevorzugt.

Bemerkung: *Die Gleichheit 4.3 ergibt sich daraus, dass für eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable X, $p \in [0, 1]$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}$:*

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}\Big[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\Big] = \Phi\Big[\frac{x-\mu}{\sigma}\Big]$$

gilt, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Entspricht x dem VaR zum Konfidenzniveau p, so erhalten wir:

$$F_X(x) = \Phi\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right] = p,$$

und durch das Anwenden von Φ^{-1}:

$$\Phi^{-1}(p) = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$
$$\Longrightarrow Var_p[X] = x = \sigma\Phi^{-1}(p) + \mu.$$

5 Conclusio

In dieser Arbeit haben wir das Konzept der aktuariell konsistenten Bewertungen sowie eine Klasse von zweistufigen aktuariellen Bewertungen, die schwach aktuariell konsistent sind, vorgestellt. Wir haben einige Eigenschaften dieser Bewertungsmethoden untersucht. Unter anderem haben wir gezeigt, dass im kohärenten Setting jede schwach aktuariell konsistente Bewertung eine Darstellung als zweistufige Bewertung besitzt. Außerdem haben wir zweistufige finanzmathematische Bewertungen als eine Klasse von marktkonsistenten Bewertungen definiert. Es wurde gezeigt, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, eine Bewertung zu definieren, die gleichzeitig marktkonsistent und aktuariell konsistent ist. Insbesondere wenn die Finanzrisiken und die versicherungstechnischen Risiken in einem Wahrscheinlichkeitsraum nicht unabhängig sind, wird es notwendig sein, eine der oben genannten Methoden zu wählen. Zu guter Letzt haben wir diese zwei zweistufigen Bewertungen anhand von Beispielen verglichen. Es hat sich herausgestellt, dass beide Methoden unterschiedliche Ergebnisse und Interpretationen liefern. Wir können natürlich nicht beurteilen, welche Methode objektiv besser ist. Obwohl zur Zeit das Hauptaugenmerk auf der Marktkonsistenz liegt, ist dies nicht die einzige Sichtweise. Diese Seminararbeit sollte somit einen kleinen Einblick in das neue Konzept der aktuariell konsistenten Bewertungen gewähren.

Literaturverzeichnis

[1] *Versicherungsaufsichtsgesetz 2016 § 158*, Fassung vom 25.02.2022

[2] Barigou K., Linders D., Yang F. (2021), *Two-step actuarial valuations*,

[3] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D. (1999), 'Coherent measures of risk', *Mathematical finance*,

[4] Föllmer H., Schied A. (2016), *Stochastic Finance*, Fourth Edition, Walter De Gruyter