Seminararbeit

Portfoliotheorie

ausgeführt im

Forschungsbereich für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Stefan Gerhold

durch

Mathias Lechner
Matrikelnummer: 11902001

Wien, am 27. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Seminararbeit soll dem Leser erste Eindrücke der Portfoliotheorie vermitteln. Nach einer kurzen Einführung in Risiko und Rendite werden wir uns mit Portfolios bestehend aus zwei und Portfolios bestehend aus mehreren Vermögenswerten beschäftigen und uns der Theorie der optimalen Ausbalancierung der Gewichtung der Vermögenswerte annehmen.

Bei Portfolios mit zwei Vermögenswerten werden wir, nachdem wir zeigen, wie man mit gegebener Gewichtung Risiko und Rendite berechnet, uns mit den verschiedenen Gewichtungen in der $(\sigma, \mu) - Ebene$ beschäftigen und dabei feststellen, dass diese die Form einer Hyperbel haben. Anschließend wird unser erstes wesentliches Ziel sein, das Risiko zu minimieren, während wir zugleich den Profit maximieren. Wir werden zudem das minimum variance portfolio kurz MVP kennenlernen, es ist jenes Portfolio mit dem geringstmöglichen Risiko. Weiters werden wir dem Marktportfolio kurz MP begegnen. Es ist das optimale Portfolio auf der Effizienzkurve, also jenes, welches vom Anleger bevorzugt werden sollte.

Anschließend werden wir uns Portfolios mit mehreren Vermögenswerten widmen, hier wird das Gewicht zu einem Vektor und wir arbeiten mit der Kovarianzmatrix. Wir werden dieselben wichtigen Portfolios wie bei zwei Vermögenswerten kennenlernen und als zentralen Satz der Portfoliotheorie das Two-Fund-Theorem beweisen.

Wir werden hierfür jedoch einige grundlegende Annahmen benötigen:

- Die Erwartungswerte und Kovarianzen sind gegeben.
- Es können Stückzahlen $x \in \mathbb{R}$ gekauft werden.
- Die Investoren entscheiden nur anhand von Risiko und Rendite.
- Investoren scheuen das Risiko.
- Kosten, welche durch das Kaufen und Halten von Vermögenswerten entstehen, werden außen vor gelassen.

Wenngleich manche dieser Annahmen nicht der Realität entsprechen, werden sie uns ermöglichen die Theorie zu beweisen.

Als Grundlage dieser Arbeit dienen die Kapitel eins, zwei und vier des Buches *"Portfolio Theory and Risk Management"*, von Maciej J. Capiński und Ekkehard Kopp [1].

2 Risiko und Rendite

Bevor wir in die Materie der Portfoliotheorie eintauchen geben wir noch einen Einblick in Risiko und Rendite, diese Theorie wird uns ständig begleiten.
Das grundlegende Ziel einer Finanzinvestition ist es, ein gegebenes Kapital in einer bestimmten Zeitspanne zu maximieren. Dabei gilt es jedoch die Balance zwischen Risiko und Rendite zu wahren. Da wir jedoch nicht wissen, welchen Wert unser Kapital zum Ende der Zeitspanne annimmt, handelt es sich hierbei um eine Zufallsvariable, wodurch auch die Rendite eine Zufallsvariable ist. Beim Risiko handelt es sich um die Varianz eines Vermögenswerts.

Wir werden uns auf zwei Zeitpunkte beschränken, dem Jetzt $t = 0$ und der Zukunft $t = 1$. Investieren wir nun in einen einzelnen Vermögenswert, so ist der Wert zu $t = 0$, also $S(0)$, bekannt, während der Wert $S(1)$ unbekannt ist.

Definition 2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Elemente $\omega \in \Omega$ nennen wir Szenarien. Wir definieren den Wert des zukünftigen Preises eines Vermögenswerts als

$$\begin{aligned} &S(1) : \Omega \to [0, \infty) &&\text{, falls } \Omega \text{ unendlich groß,} \\ &S(1, \omega_i) : \Omega \to [0, \infty) &&\text{, falls } \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \text{ mit } N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert und die Varianz sind für endliches Ω somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S(1)) &= \sum_{i=1}^{N} S(1, \omega_i) p_i, \\ Var(S(1)) &= \sum_{i=1}^{N} (S(1, \omega_i) - \mathbb{E}(S(1)))^2 p_i, \end{aligned}$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Szenario ω_i eintritt, sprich $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Die Rendite K eines Investments S ist gegeben durch

$$K = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)},$$

wodurch man, mit der Linearität des Erwartungswerts,

$$\mu := \mathbb{E}(K) = \frac{\mathbb{E}(S(1)) - S(0)}{S(0)}$$

erhält.

Wir messen das Risiko eines Investments anhand der Varianz der Rendite

$$\sigma^2 := Var(K) = \mathbb{E}(K - \mathbb{E}(K))^2 = \mathbb{E}(K^2) - \mu^2,$$

wobei wir folgende Darstellung verwenden werden:

$$Var(K) = Var(\frac{S(1) - S(0)}{S(0)}) = \frac{Var(S(1))}{S(0)^2}.$$

Definition 2.2. Ein Vermögenswert mit erwarteter Rendite μ_1 und Standardabweichung σ_1 dominiert einen anderen Vermögenswert mit erwarteter Rendite μ_2 und Standardabweichung σ_2, falls

$$\mu_1 \geq \mu_2 \qquad \textit{und} \qquad \sigma_1 \leq \sigma_2.$$

Es ist klar, dass ein Investor einen Vermögenswert bevorzugt, welcher höhere erwartete Rendite und zugleich niedrigeres Risiko birgt.

3 Portfolios mit zwei Vermögenswerten

Wir werden uns zuerst auf Portfolios mit zwei Vermögenswerten beschränken. Hier die grundlegende Theorie aufbauen und dann den allgemeinen Fall mit mehreren Vermögenswerten betrachten. Uns geht es hierbei darum, dass wir zwei feste Vermögenswerte so gewichten, dass unser Portfolio im Sinne des Risikos und der Rendite perfekt ausbalanciert ist. Wir werden hierbei eine Stückzahl $x \in \mathbb{R}$ zulassen. Wir erlauben also, dass $x < 0$ ist. Dabei handelt es sich um einen sogenannten Leerverkauf, sprich man leiht sich Aktien aus und verkauft diese sofort, zu einem späteren Zeitpunkt kauft man ebendiese Anzahl an geborgten Aktien vom Markt zurück und retourniert sie. Da Leerverkäufe nicht immer gestattet sind, werden wir hier auf einige Sonderfälle stoßen. Generell wollen wir annehmen, dass für Leerverkäufe keine zusätzlichen Gebühren anfallen.

Wir betrachten zuerst ein einführendes Beispiel.

Beispiel 1. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, S_1(0) = 200$ und $S_2(0) = 300$.
Wir nehmen an, dass $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = {}^1/_2$. Weiters seien die Zukunftswerte S_1 und S_2 gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_1(1,\omega_1) &= 260, & S_2(1,\omega_1) &= 270, \\ S_1(1,\omega_2) &= 180, & S_2(1,\omega_2) &= 360. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die erwarteten Renditen und Standardabweichungen der einzelnen Vermögenswerte. Zudem auch jene eines Investments V, bei dem wir zu gleichen Teilen in S_1 und S_2 investieren, wobei wir für V die Notation μ_V und σ_V verwenden.

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = 10\% & \mu_2 = 5\% & \mu_V = 7\% \\ \sigma_1 = 20\% & \sigma_2 = 15\% & \sigma_V = 1\% \end{array}$$

Wir sehen also, dass durch Diversifizierung das Risiko drastisch verringert wurde, während die erwartete Rendite relativ hoch geblieben ist. △

Nehmen wir nun an, dass wir x_1 Stück der Aktie S_1 und x_2 Stück der Aktie S_2 kaufen, unser Portfolio hat demnach einen Startwert $V_{(x_1,x_2)}(0) = x_1 S_1(0) + x_2 S_2(0)$.

Die Gewichtung ist somit gegeben durch

$$w_1 = \frac{x_1 S_1(0)}{V_{(x_1,x_2)}(0)}, \qquad\qquad w_2 = \frac{x_2 S_2(0)}{V_{(x_1,x_2)}(0)},$$

wobei $w := w_1 + w_2 = 1$ ist.

Lemma 3.1. *Die Rendite K_w eines Portfolios, welches aus zwei Vermögenswerten besteht ist der gewichtete Durchschnitt, daher*

$$K_w = w_1 K_1 + w_2 K_2. \tag{3.1}$$

Beweis Mit

$$w_1 = \frac{x_1 S_1(0)}{V_{(x_1,x_2)}(0)} \iff x_1 = \frac{w_1 V_{(x_1,x_2)}(0)}{S_1(0)}$$

und

$$K = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)} \iff S(1) = S(0)(1 + K)$$

bekommen wir

$$\begin{aligned}
V_{(x_1,x_2)}(1) &= x_1 S_1(1) + x_2 S_2(1) \\
&= \frac{w_1 V_{(x_1,x_2)}(0)}{S_1(0)} S_1(1) + \frac{w_2 V_{(x_1,x_2)}(0)}{S_2(0)} S_2(1) \\
&= \frac{w_1 V_{(x_1,x_2)}(0)}{S_1(0)} S_1(0)(1 + K_1) + \frac{w_2 V_{(x_1,x_2)}(0)}{S_2(0)} S_2(0)(1 + K_2) \\
&= w_1 V_{(x_1,x_2)}(0)(1 + K_1) + w_2 V_{(x_1,x_2)}(0)(1 + K_2) \\
&= V_{(x_1,x_2)}(0)(w_1 + w_1 K_1 + w_2 + w_2 K_2) \\
&= V_{(x_1,x_2)}(0)(1 + w_1 K_1 + w_2 K_2),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus $\omega_1 + \omega_2 = 1$ folgt. Damit ergibt sich

$$K_w = \frac{V_{(x_1,x_2)}(1) - V_{(x_1,x_2)}(0)}{V_{(x_1,x_2)}(0)} = w_1 K_1 + w_2 K_2.$$

■

Wir führen nun folgende Notation für die Kovarianz und den Korrelationskoeffizient der Renditen ein:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &:= Cov(K_i, K_j) = \mathbb{E}(K_i K_j) - \mathbb{E}(K_j)\,\mathbb{E}(K_j), \\
\rho_{ij} &:= Cor(K_i, K_j) = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j},
\end{aligned}$$

wobei wir die Varianz der Rendite als ungleich 0 voraussetzen. Dies wäre, wie wir in Lemma 3.5 sehen werden, sowieso nur der Fall, wenn K_i fast sicher konstant ist. Ein derartiger Fall wird uns später als risikofreier Vermögenswert begegnen.

Satz 3.2. *Erwartungswert und Varianz eines Portfolios mit zwei Vermögenswerten sind folgendermaßen gegeben*

$$\mu_w = \mathbb{E}(K_w) = w_1\mu_1 + w_2\mu_2, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} &(3.3)\\ &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2. &(3.4)\end{aligned}$$

Beweis Aus (3.1) folgt mithilfe der Linearität des Erwartungswerts (3.2), da

$$\mu_w = \mathbb{E}(K_w) = \mathbb{E}(w_1K_1 + w_2K_2) = w_1\mu_1 + w_2\mu_2.$$

Kommen wir nun zu Gleichung (3.3) und (3.4). Wir verwenden wieder (3.1), sowie die Linearität des Erwartungswerts und bekommen

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 &= \mathbb{E}(K_w^2) - \mathbb{E}(K_w)^2\\ &= \mathbb{E}((w_1K_1 + w_2K_2)^2) - (w_1\mu_1 + w_2\mu_2)^2\\ &= \mathbb{E}(w_1^2K_1^2 + w_2^2K_2^2 + 2w_1w_2K_1K_2) - w_1^2\mu_1^2 - w_2^2\mu_2^2 - 2w_1w_2\mu_1\mu_2\\ &= w_1^2(\mathbb{E}(K_1^2) - \mu_1^2) + w_2^2(\mathbb{E}(K_2^2) - \mu_2^2) + 2w_1w_2(\mathbb{E}(K_1K_2) - \mu_1\mu_2)\\ &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12}\\ &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}\\ &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}.\end{aligned}$$

Somit sind alle Gleichungen gezeigt. ■

Falls $\mu_1 \neq \mu_2$ können wir $w_1 = w$ und $w_2 = 1 - w$ setzen, wodurch sich (3.2), beziehungsweise (3.4) anschreiben lassen als

$$\begin{aligned}\mu_w &= w\mu_1 + (1-w)\mu_2, &(3.5)\\ \sigma_w^2 &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2. &(3.6)\end{aligned}$$

Satz 3.3. *Falls $\mu_1 \neq \mu_2$ und $\rho_{12} \in (-1, 1)$, so befinden sich alle $(\sigma, \mu) -$ Paare auf einer Hyperbel, deren Mittelpunkt auf der vertikalen Achse liegt.*

Für den Beweis hierfür verweisen wir auf [1, Seite 31–33].

Im Folgenden befindet sich eine Darstellung einer solchen Hyperbel. Wir wollen an dieser Stelle zugleich die Effizienzkurve einführen, es handelt sich dabei um jene Portfolios, welche die anderen dominieren.

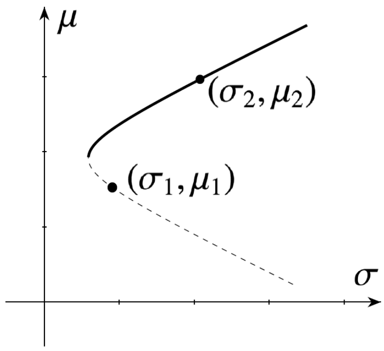

Abbildung 1: Beispiel einer solchen Hyperbel inklusive der Effizienzkurve [1, Seite 20]

Wir betrachten nun die Sonderfälle $\rho_{12} \in \{-1, 1\}$:

Lemma 3.4. *Falls $\rho_{12} \in \{-1, 1\}$, $\mu_1 \neq \mu_2$ und $\sigma_1 \neq \sigma_2$, so können wir das Risiko σ_w auf 0 minimieren.*

Beweis Wir bemerken zuerst, dass

$$\rho_{12} \in \{-1, 1\} \iff \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \in \{-1, 1\} \implies \sigma_i, \sigma_j \neq 0.$$

Mit (3.4) gilt für den Fall $\rho_{12} = -1$, dass

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 - 2 w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ &= (w_1 \sigma_1 - w_2 \sigma_2)^2. \end{aligned}$$

Wir lösen nun $\sigma_w = 0$. Hierfür setzen wir $w_1 = w$ und $w_2 = 1 - w$ und bekommen

$$\begin{aligned} 0 = \sigma_w &= w\sigma_1 - (1 - w)\sigma_2 = w(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2 \\ \iff w_1 = w &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \qquad w_2 = (1 - w) = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wir betrachten nun den Fall $\rho_{12} = 1$. Analog zu oben ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \\ &= (w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2)^2. \end{aligned}$$

Wieder lösen wir $\sigma_w = 0$, setzen dafür $w_1 = w$ und $w_2 = 1 - w$ und bekommen somit

$$\begin{aligned} 0 = \sigma_w &= w\sigma_1 + (1 - w)\sigma_2 = w(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2 \\ \iff w_1 = w &= \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \qquad w_2 = (1 - w) = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

■

Wir bemerken noch, dass $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$ und daher im Fall $\rho_{12} = -1$ gilt, dass w und $(1-w)$ sich im Intervall $[0,1]$ befinden, wodurch wir das Risiko ohne Leerverkäufe auf 0 minimieren können. Falls $\rho_{12} = 1$, so ist entweder w oder $(1-w)$ negativ, wodurch Leerverkäufe nötig sind.

Wir widmen uns nun noch dem Fall, dass einer unserer Vermögenswerte risikofrei ist, sodass beispielsweise $\sigma_1 = 0$ ist. Wir werden daraus schließen, dass die Rendite sicher ist. Es ist sinnvoll hier anzunehmen, dass $\mu_1 = R < \mu_2$ gilt, da sonst Vermögenswerte welche einem Risiko ausgesetzt sind niedrigere Erträge einbringen würden als jene welche risikofrei sind, wodurch niemand in nicht risikofreie Vermögenswerte investieren würde. Dies entspricht auch unserer Intuition, dass höheres Risiko höheren Ertrag zufolge hat.

Lemma 3.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, für die Zufallsvariable X gelte $X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, dann gilt $\mathbb{P}$-fast sicher*

$$Var(X) = 0 \iff X = c \in \mathbb{R}.$$

Beweis *Ist $Var(X) = 0$ so gilt*

$$\begin{aligned} 0 = Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \int_\Omega (X - \mathbb{E}(X))^2 d\mathbb{P} \\ \implies 0 = (X - \mathbb{E}(X))^2 \iff X = \mathbb{E}(X) =: c \qquad (\mathbb{P}\text{-}fs.). \end{aligned}$$

Gilt andererseits $X = c$ $\mathbb{P}$-fast sicher, so folgt

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = c^2 - (c)^2 = 0.$$

■

Falls also $\sigma_1 = 0$, so führt dies nach Satz 3.2 direkt zu

$$\begin{aligned} \mu_w &= w_1 R + w_2 \mu_2, \\ \sigma_w^2 &= w_2^2 \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es nun σ_w^2 zu minimieren.

Satz 3.6. *Falls Leerverkäufe erlaubt sind, also $w \in \mathbb{R}$ zulässig ist, $\mu_1 \neq \mu_2$ und entweder $\rho_{12} \neq 1$ oder $\sigma_1 \neq \sigma_2$, dann hat das Portfolio mit der minimalen Varianz die Gewichtung*

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}, \qquad w_2 = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}. \tag{3.9}$$

Wir nennen dieses Portfolio das minimum variance portfolio (MVP).

Beweis 1. Fall: $\rho_{12} \in (-1,1)$. Nach (3.6) gilt, dass

$$\sigma^2(w) := \sigma_w^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2.$$

Wir finden nun das Minimum von $\sigma^2(w)$.

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial w}\sigma^2(w) &= 2w\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2(1-w) + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2(1-2w) \\ &= 2w(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2) - 2\sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \iff w_1 = w &= \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist gegeben durch

$$2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2) > 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \geq 0,$$

wobei die erste Ungleichung aus $\rho_{12} \in (-1,1)$ folgt, womit es sich um das globale Minimum handelt.

2. Fall: $\rho_{12} = -1$. Nach (3.7) gilt, dass

$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}.$$

3. Fall: $\rho_{12} = 1$. Nach (3.8) gilt, dass

$$w_1 = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{-\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}.$$

Da wir aus der Darstellung von w_1 durch Erweitern direkt zu w_2 kommen, ist die Behauptung gezeigt. ■

Wir gehen nun noch kurz auf den Fall ein, dass wir uns in einem Markt befinden, welcher keine Leerverkäufe erlaubt. Wieder möchten wir σ_w^2 minimieren. Mit Satz 3.6 finden wir nun das Minimum, wir müssen jedoch die Fälle ausgrenzen, in denen $w_1 < 0$ oder $w_2 < 0$ und erhalten somit das Minimum bei

$$w = \begin{cases} 0 & \text{, falls } w_1 < 0 \\ w_1 & \text{, falls } w_1 \in [0,1] \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Es sei nun neben einem Portfolio auch noch ein risikofreier Vermögenswert mit Rendite R gegeben. Nach Satz 3.3 befindet sich ein Paar (σ, μ) in der $(\sigma,\mu)-$*Ebene* auf einer Hyperbel. Auf dieser finden wir nun einen Punkt, dessen Tangente die $\mu-$*Achse* auf Höhe der risikofreien Rendite schneidet. Diese Tangente wollen wir die Kapitalmarktlinie (CML) und den Punkt Marktportfolio nennen.

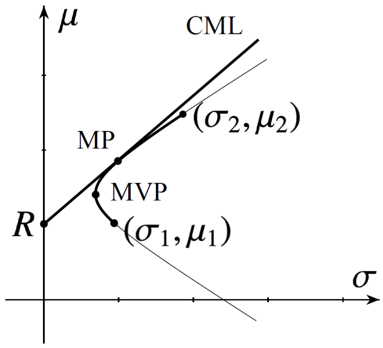

Abbildung 2: Marktportfolio und Kapitalmarktlinie [1, Seite 26]

Die erwartete Rendite ist somit gegeben durch

$$\mu = R + \frac{\mu_m - R}{\sigma_m}\sigma, \tag{3.10}$$

wobei μ_m die erwartete Rendite und σ_m die Standardabweichung eines Portfolios mit Gewichtung m sind.

Das Marktportfolio ist in Bezug auf die Rendite und das Risiko effizient [3, vgl. Seite 299]. Es sollte also vom Anleger bevorzugt werden. Folgender Satz wird uns die Gewichtung des Marktportfolios liefern.

Satz 3.7. *Die Gewichtung des Marktportfolios ist gegeben durch* $m = (w, 1-w)$ *mit*

$$w = \frac{\sigma_2^2(\mu_1 - R) - \sigma_{12}(\mu_2 - R)}{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - R(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_{12}(\mu_1 + \mu_2 - 2R)},$$

$$(1-w) = \frac{\sigma_1^2(\mu_2 - R) - \sigma_{12}(\mu_1 - R)}{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - R(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_{12}(\mu_1 + \mu_2 - 2R)}.$$

Beweis Wir definieren die erwartete Rendite eines Portfolios $(w, 1-w)$ als $\mu(w)$ und die Standardabweichung als $\sigma(w)$.
Wir möchten (3.10) maximieren, somit maximieren wir den Steigungskoeffizient

$$s(w) := \frac{\mu(w) - R}{\sigma(w)}.$$

Wir setzen also $s'(w) = 0$, bemerken jedoch zuerst, dass

$$\sigma'(w) = \left(\sqrt{\sigma^2(w)}\right)' = \frac{(\sigma^2(w))'}{2\sigma(w)}.$$

Damit folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 = s'(w) &= \frac{\mu'(w)\sigma(w) - (\mu(w) - R)\sigma'(w))}{\sigma^2(w)} = \frac{2\mu'(w)\sigma^2(w) - (\mu(w) - R)(\sigma^2(w))'}{2\sigma^3(w)} \\ \iff 0 &= 2\mu'(w)\sigma^2(w) - (\mu(w) - R)(\sigma^2(w))'. \end{aligned}$$

Mit (3.5) und (3.6) gilt

$$\begin{aligned} \mu'(w) &= \mu_1 - \mu_2, \\ (\sigma^2(w))' &= 2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 + 2\sigma_{12}(1-2w). \end{aligned}$$

Damit und (3.5) sowie (3.6) folgt nun

$$\begin{aligned} 0 &= 2\mu'(w)\sigma^2(w) - (\mu(w) - R)(\sigma^2(w))' \\ &= 2(\mu_1 - \mu_2)(w^2\sigma_2^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}) \\ &\quad - (w\mu_1 + (1-w)\mu_2 - R)(2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 + 2\sigma_{12}(1-2w)) \end{aligned}$$

und mit vereinfachen bekommen wir

$$\begin{aligned} &= w\left(\sigma_{12}(-2R + \mu_1 + \mu_2) + R(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2\right) + \sigma_{12}(R - \mu_2) - \sigma_2^2(R - \mu_1) \\ \iff w &= \frac{\sigma_2^2(\mu_1 - R) - \sigma_{12}(\mu_2 - R)}{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - R(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_{12}(\mu_1 + \mu_2 - 2R)}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

■

4 Portfolios mit mehreren Vermögenswerten

Es sei die Gewichtung eines Portfolios mit n verschiedenen Vermögenswerten dargestellt als

$$w = (w_1, \ldots, w_n)^T,$$

wobei $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Weiters definieren wir

$$\mathbf{1} := (1, \ldots, 1)^T.$$

Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$w_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

wobei w_i das Gewicht, x_i die Stückzahl, $S_i(0)$ der Kaufpreis und $V(0)$ der Portfoliowert am Anfang ist. Für den i-ten Vermögenswert bezeichne die Zufallsvariable K_i die Rendite und $\mu_i = \mathbb{E}(K_i)$ die erwartete Rendite. Damit ist

$$\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$$

die erwartete Rendite des Portfolios. Die Kovarianzen seien bezeichnet mit $\sigma_{ij} = Cov(K_i, K_j)$, womit die Kovarianzmatrix durch

$$C := \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Wir können K_w darstellen als

$$K_w = \sum_{i=1}^{n} w_i K_i.$$

Satz 4.1. *Die erwartete Rendite $\mu_w = \mathbb{E}(K_w)$ und die Varianz $\sigma_w^2 = Var(K_w)$ eines Portfolios mit Gewichtung w sind gegeben durch*

$$\mu_w = w^T \mu, \tag{4.1}$$
$$\sigma_w^2 = w^T C w. \tag{4.2}$$

Beweis Wir zeigen zuerst Gleichung (4.1). Mithilfe der Linearität des Erwartungswerts erhalten wir

$$\mu_w = \mathbb{E}(K_w) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} w_i K_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \mathbb{E}(K_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = w^T \mu.$$

Kommen wir nun zu (4.2). Hier verwenden wir die Bilinearität der Kovarianz und bekommen

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 = Var(K_w) = Cov(\sum_{i=1}^{n} w_i K_i, \sum_{j=1}^{n} w_j K_j) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(K_i, K_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} \\ &= w^T C w. \end{aligned}$$

■

Lemma 4.2. *Die Kovarianzmatrix C ist symmetrisch und positiv semidefinit. Falls die Kovarianzmatrix C positiv definit ist, so ist sie auch invertierbar.*

Beweis Da $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, dass

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}(K_i K_j) - \mathbb{E}(K_i) \, \mathbb{E}(K_j) = \sigma_{ji},$$

folgt die Symmetrie von C. Sei nun $w \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir betrachten $K_w = \sum_{i=1}^{n} w_i K_i$, nun gilt nach Satz 4.1, dass

$$w^T C w = \sigma_w^2 = Var(K_w) \geq 0.$$

Damit ist auch die positive Semidefinitheit gezeigt. Wir zeigen noch die Invertierbarkeit im Fall, dass C positiv definit ist.
Angenommen C ist nicht invertierbar, dann existiert ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $Cx = 0$ womit $x^T C x = 0$, was jedoch ein Widerspruch zur positiv Definitheit ist. Somit muss C invertierbar sein.

■

Wir zeigen nun einige Darstellungen, welche wir später benötigen. Dafür verwenden wir folgende Definition aus [2, Seite 866].

Definition 4.3. Seien D$\subseteq$ $\mathbb{R}^n$ offen, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine in a partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$grad\ f(a) := (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a))^T \tag{4.3}$$

der Gradient von f in a.

Der Einfachheit halber werden wir anstelle von $grad\ f(a)$ das Symbol $\nabla f(a)$ verwenden.

Wir betrachten nun folgende Problemstellung:

Gesucht ist das Minimum der Funktion $f(v)$ unter der Nebenbedingung $g(v) = 0$. (4.4)

Satz 4.4 (Lagrange Multiplikatoren)**.** *Falls v^* eine Lösung des Problems* (4.4) *ist und $rang(g'(v^*)) = k$, so gilt*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \nabla f(v^*) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(v_i^*). \tag{4.5}$$

Wir nennen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Lagrange Multiplikatoren.

Einen Beweis zu diesem Satz findet man zum Beispiel in [1, Seite 45].

Satz 4.5. *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar, die Hessematrix $H(f, v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ positiv semidefinit, $g(v) = Av - c$, wobei A eine $k \times n$ Matrix und $c \in R^k$ ist. Dann gilt, falls $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $v^* \in \mathbb{R}^n$, sodass* (4.5) *erfüllt ist, dass v^* eine Lösung des Problems* (4.4) *ist.*

Einen Beweis hierzu findet man in [1, Seite 46].

Lemma 4.6. *Es gelten folgende Gleichungen:*

$$\nabla(w^T \mu) = \mu, \tag{4.6}$$

$$\nabla(w^T \mathbf{1}) = \mathbf{1}, \tag{4.7}$$

$$\nabla(w^T C w) = 2Cw. \tag{4.8}$$

Weiters ist die Hessematrix von $w^T C w$ gleich $2C$.

Beweis Wir zeigen zuerst (4.6):

$$\nabla(w^T \mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1}(w^T \mu) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w_n}(w^T \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1}(\sum_{i=1}^n w_i \mu_i) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w_n}(\sum_{i=1}^n w_i \mu_i) \end{pmatrix} = \mu.$$

Völlig analog bekommen wir (4.7):

$$\nabla(w^T \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1}(\sum_{i=1}^n w_i) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w_n}(\sum_{i=1}^n w_i) \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

Wir kommen nun zu (4.8), hier bemerken wir zuerst, dass für $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
w^T C w &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{ii} + \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_j \sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{ii} + w_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj} + w_k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} w_i \sigma_{ik} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} w_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k}}^{n} w_j \sigma_{ij}
\end{aligned}$$

gilt. Damit und mit der Symmetrie der Kovarianz folgt nun

$$\frac{\partial}{\partial w_k}(w^T C w) = 2 w_k \sigma_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} w_i \sigma_{ik} = 2 \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{kj}.$$

Daraus ergibt sich für $l, k \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial w_l \partial w_k}(w^T C w) = \frac{\partial}{\partial w_l}(2 \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{kj}) = 2 \sigma_{kl}.$$

Insgesamt bekommen wir also

$$\nabla(w^T C w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1}(w^T C w) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w_n}(w^T C w) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{nj} \end{pmatrix} = 2(Cw)$$

und

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial w_l w_k}(w^T C w) \right)_{l,k \in (1,\dots,n)} = 2C.$$

■

Wir möchten nun jene Gewichtung der Vermögenswerte unseres Portfolios finden, welche die Varianz minimiert. Wir beschränken uns hierbei vorerst darauf, dass keiner der Vermögenswerte risikofrei ist.

Satz 4.7. *Unter der Voraussetzung, dass die Kovarianzmatrix C invertierbar ist, hat das Portfolio mit der kleinsten Varianz die Gewichtung*

$$w_{min} = \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}}.$$

Dieses Portfolio nennen wir das minimum variance portfolio (MVP), wobei es sich hier um eine Verallgemeinerung von Satz 3.6 handelt.

Beweis Wir minimieren $w^T C w$, wobei $w^T \mathbf{1} = 1 = \mathbf{1}^T w$. Hierzu verwenden wir Satz 4.4, betrachten somit

$$\nabla(w^T C w) - \nabla(\lambda(\mathbf{1}^T w - 1)) = 0.$$

Nach (4.7) und (4.8) gilt

$$\begin{aligned} \nabla(w^T C w) - \nabla(\lambda(\mathbf{1}^T w - 1)) &= 2Cw - \lambda\mathbf{1} = 0 \\ &\iff w = C^{-1}\frac{\lambda\mathbf{1}}{2}, \end{aligned}$$

womit wir mittels einsetzen

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{1}^T w = \mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}\frac{\lambda}{2} \\ \iff \lambda &= \frac{2}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} \\ \implies w &= C^{-1}\frac{\lambda\mathbf{1}}{2} = \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} \end{aligned}$$

bekommen. Da nach Lemma 4.6 die Hessematrix von $w^T C w$ gleich 2C ist und C nach Lemma 4.2 positiv semidefinit ist, gilt nach Satz 4.5, dass w das globale Minimum ist. Wir bezeichnen w mit w_{min}. ■

Proposition 4.8. *Für zwei Portfolios mit Gewichtungen*

$$w_A = (w_{A,1}, \dots, w_{A,n}), \qquad w_B = (w_{B,1}, \dots, w_{B,n}),$$

ist die Kovarianz der Rendite geben durch

$$Cov(K_{w_A}, K_{w_B}) = w_A^T C w_B.$$

Weiters gilt, falls die Kovarianzmatrix invertierbar ist,

$$Cov(K_{w_A}, K_{w_{min}}) = \sigma^2_{w_{min}}.$$

Beweis Für die erste Gleichung verwenden wir nur die Biliniarität der Kovarianz:

$$Cov(K_{w_A}, K_{w_B}) = Cov(\sum_{i=1}^n w_{A,i}K_i, \sum_{i=1}^n w_{B,i}K_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{A,i}w_{B,j}\sigma_{ij} = w_A^T C w_B.$$

Für die zweite Gleichung gilt, nach der ersten Gleichung und Satz 4.7,

$$Cov(K_{w_A}, K_{w_{min}}) = w_A^T C w_{min} = w_A^T C \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} = \frac{w_A^T\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} = \frac{1}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}}.$$

Da diese Gleichheit nicht von w_A abhängt, setzen wir $w_A = w_{min}$ und erhalten

$$\frac{1}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} = Cov(K_{w_{min}}, K_{w_{min}}) = \sigma^2_{w_{min}}.$$

■

Wir möchten nun eine erwartete Rendite $\mu_w = m$ festhalten. Es gibt nun verschiedene Gewichtungen w, um ebendiese erwartete Rendite zu bekommen. Es ist klar, dass wir jene möchten, welche die niedrigste Varianz aufweist. Die Familie der Gewichtungen, welche die geringste Varianz für feste erwartete Renditen aufweisen, liegen auf der sogenannten minimum variance line (MVL), siehe Abbildung 3.

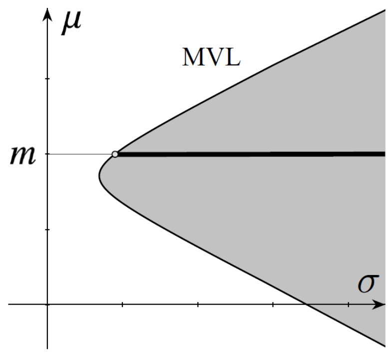

Abbildung 3: Beispiel der minimum variance line (MVL) aus [1, Seite 58]

Wir betrachten folgende Problemstellung:

Gesucht ist das Minimum von $w^T Cw$ unter den Nebenbedingung $w^T\mu = m$ und $w^T\mathbf{1} = 1$. (4.9)

Satz 4.9. *Seien M und die Kovarianzmatrix C invertierbar, wobei*

$$M := \begin{pmatrix} \mu^T C^{-1}\mu & \mu^T C^{-1}\mathbf{1} \\ \mu^T C^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Seien weiters M_1 und M_2 gegeben durch

$$M_1 := \begin{pmatrix} m & \mu^T C^{-1}\mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad M_2 := \begin{pmatrix} \mu^T C^{-1}\mu & m \\ \mu^T C^{-1}\mathbf{1} & 1 \end{pmatrix},$$

so ist

$$w = \frac{C^{-1}}{det(M)}(det(M_1)\mu + det(M_2)\mathbf{1}) \tag{4.10}$$

eine Lösung des Problems (4.9).

Beweis Wir minimieren $w^T Cw$, hierzu verwenden wir Satz 4.4 und 4.6.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla(w^T Cw) - \lambda_1\nabla(w^T\mu - m) - \lambda_2\nabla(w^T\mathbf{1} - 1) = 2Cw - \lambda_1\mu - \lambda_2\mathbf{1} \\ \iff \quad w &= C^{-1}\frac{\lambda_1\mu + \lambda_2\mathbf{1}}{2} \end{aligned}$$

Durch einsetzen in (4.9) bekommen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m = w^T\mu = \mu^T w &= \frac{\lambda_1}{2}\mu^T C^{-1}\mu + \frac{\lambda_2}{2}\mu^T C^{-1}\mathbf{1}, \\ 1 = w^T\mathbf{1} = \mathbf{1}^T w &= \frac{\lambda_1}{2}\mathbf{1}^T C^{-1}\mu + \frac{\lambda_2}{2}\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Durch umformen erhalten wir

$$\lambda_1 = \frac{2m - \lambda_2 \mu^T C^{-1} \mathbf{1}}{\mu^T C^{-1} \mu}, \qquad \lambda_2 = \frac{2 - \lambda_1 \mathbf{1}^T C^{-1} \mu}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}}.$$

Durch Lösen des Gleichungssystems bekommen wir schlussendlich

$$\lambda_1 = 2\frac{det(M_1)}{det(M)}, \qquad \lambda_2 = 2\frac{det(M_2)}{det(M)}$$

und damit wiederum

$$w = C^{-1}\frac{\lambda_1 \mu + \lambda_2 \mathbf{1}}{2} = C^{-1}\left(\frac{det(M_1)}{det(M)}\mu + \frac{det(M_2)}{det(M)}\mathbf{1}\right),$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ■

Korrolar 4.10. *Es gibt $a, b \in \mathbb{R}^n$, welche nur von der Kovarianzmatrix C und μ abhängen, sodass*

$$\forall m \in \mathbb{R} \textit{ gilt, dass } w = ma + b \textit{ eine Lösung von } (4.9) \textit{ ist.}$$

Beweis Es gilt für M_1 und M_2 aus *Satz* 4.9:

$$\begin{aligned} det(M_1) &= m\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1} - \mu^T C^{-1}\mathbf{1}, \\ det(M_2) &= \mu^T C^{-1}\mu - m\mu^T C^{-1}\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Seien a und b folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} a &:= \frac{C^{-1}}{det(M)}((\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1})\mu - (\mu^T C^{-1}\mathbf{1})\mathbf{1}), \\ b &:= \frac{C^{-1}}{det(M)}((\mu^T C^{-1}\mu)\mathbf{1} - (\mu^T C^{-1}\mathbf{1})\mu). \end{aligned}$$

Nun gilt nach (4.10), dass

$$\begin{aligned} w &= \frac{C^{-1}}{det(M)}(det(M_1)\mu + det(M_2)\mathbf{1}) \\ &= \frac{C^{-1}}{det(M)}\big((m\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1} - \mu^T C^{-1}\mathbf{1})\mu + (\mu^T C^{-1}\mu - m\mu^T C^{-1}\mathbf{1})\mathbf{1}\big) \\ &= m\frac{C^{-1}}{det(M)}\big((\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1})\mu - (\mu^T C^{-1}\mathbf{1})\mathbf{1}\big) + \frac{C^{-1}}{det(M)}\big((\mu^T C^{-1}\mu)\mathbf{1} - (\mu^T C^{-1}\mathbf{1})\mu\big) \\ &= ma + b \end{aligned}$$

eine Lösung des Problems (4.9) ist, wodurch die Behauptung gezeigt ist. ■

Wir zeigen nun einen zentralen Satz der Portfoliotheorie, welcher besagt, dass falls zwei effiziente Portfolios bekannt sind man durch diese die Gewichte aller anderen auf der Effizienzkurve liegenden Anlagekombinationen bekommt [3, vgl. Seite 127-128].

Satz 4.11 (Two-Fund-Theorem). *w_1 und w_2 seien zwei Portfolios, welche sich auf der MVL befinden, deren erwartete Renditen nicht gleich sind. Falls sich das Portfolio w auf der MVL befindet, dann existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $w = \alpha w_1 + (1-\alpha) w_2$.*

Beweis Wir finden zuerst α, sodass

$$\mu_w = \alpha \mu_{w_1} + (1-\alpha)\mu_{w_2}.$$

Da $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$, können wir α als

$$\alpha = \frac{\mu_w - \mu_{w_2}}{\mu_{w_1} - \mu_{w_2}}$$

wählen. Da die zwei Portfolios nach Voraussetzung auf der MVL liegen gilt

$$\begin{aligned} w_1 &= \mu_{w_1} a + b, \\ w_2 &= \mu_{w_2} a + b. \end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \alpha w_1 + (1-\alpha) w_2 &= \alpha(\mu_{w_1} a + b) + (1-\alpha)(\mu_{w_2} a + b) \\ &= a(\alpha \mu_{w_1} + \mu_{w_2} - \alpha \mu_{w_2}) + b \\ &= a \mu_w + b. \end{aligned}$$

Da jedoch w auch auf der MVL liegt folgt mit $w = a\mu_w + b$ die Behauptung. ■

Satz 4.12. *Angenommen es existieren zwei Portfolios w_1, w_2 auf der MVL mit verschiedenen Erwartungswerten $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$, dann ist die MVL eine Hyperbel, deren Mittelpunkt auf der vertikalen Achse liegt.*

Beweis Seien K_{w_1}, K_{w_2} die Renditen der Portfolios mit Gewichtung w_1 und w_2. Nach Satz 4.11 gilt

$$w = \alpha w_1 + (1-\alpha) w_2,$$

womit die Rendite des Portfolios w gegeben ist durch

$$K_w = \alpha K_{w_1} + (1-\alpha) K_{w_2}.$$

Wir betrachten nun K_{w_1} und K_{w_2} nicht als Portfolios, sondern als einzelne Vermögenswerte. Damit gilt nach Satz 3.2

$$\begin{aligned} &\mu_w = \alpha \mu_{w_1} + (1-\alpha)\mu_{w_2}, \\ &\sigma_w^2 = \alpha^2 \sigma_{w_1}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_{w_2}^2 + 2\alpha(1-\alpha) Cov(K_{w_1}, K_{w_2}). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$, gilt nach Satz 3.3, dass die Kurve (σ_w, μ_w) eine Hyperbel ist, deren Mittelpunkt auf der vertikalen Achse liegt. ■

Wie im Falle eines Portfolios mit zwei Vermögenswerten, können wir auch hier die Gewichtung des Marktportfolios (MP) angeben.

Satz 4.13. *Falls die erwartete Rendite R eines risikofreien Vermögenswertes kleiner als jene des MVP ist, so existiert das Marktportfolio und ist gegeben durch*

$$m = \frac{C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})}.$$

Beweis Nach Satz 4.12 ist die MVL eine Hyperbel, deren Mittelpunkt auf der vertikalen Achse liegt. Es existiert ein Punkt auf der Hyperbel, dessen Tangente den Punkt $(0, R)$ schneidet. Diese Gerade wird beschrieben durch folgende Funktion

$$f(\sigma) = R + \sigma \frac{\mu_w - R}{\sigma_w}, \tag{4.11}$$

wobei wir die Steigung nach Satz 4.1 als

$$\frac{\mu_w - R}{\sigma_w} = \frac{w^T \mu - R}{\sqrt{w^T C w}}$$

angeben können. Wir maximieren nun mithilfe von Satz 4.4 und formen mit Satz 4.1 und Lemma 4.6 weiter um.

$$\begin{aligned} 0 = \nabla \frac{w^T\mu - R}{\sqrt{w^T C w}} - \lambda \nabla (w^T \mathbf{1} - 1) &= \frac{\mu \sqrt{w^T C w} - \frac{Cw}{\sqrt{w^T C w}}(w^T \mu - R)}{w^T C w} - \lambda \mathbf{1} \\ &= \frac{\mu \sigma_w - \frac{Cw}{\sigma_w}(\mu_w - R) - \lambda \mathbf{1} \sigma_w^2}{\sigma_w^2} \end{aligned}$$

Nun gilt mithilfe von Satz 4.1, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \sigma_w - \frac{Cw}{\sigma_w}(\mu_w - R) - \lambda \mathbf{1} \sigma_w^2 \\ \iff \frac{(\mu_w - R)}{\sigma_w^2} Cw &= \mu - \lambda \mathbf{1} \sigma_w \qquad (4.12) \\ \iff \frac{(\mu_w - R)}{\sigma_w^2} w^T C w &= w^T (\mu - \lambda \mathbf{1} \sigma_w) \\ \iff (\mu_w - R) &= \mu_w - \lambda \sigma_w \\ \iff \frac{R}{\sigma_w} &= \lambda. \end{aligned}$$

Durch einsetzen von λ in (4.12) bekommen wir mit $\mathbf{1}^T w = 1$

$$\begin{aligned} \frac{(\mu_w - R)}{\sigma_w^2} Cw &= \mu - R\mathbf{1} \qquad (4.13) \\ \iff \frac{(\mu_w - R)}{\sigma_w^2} \mathbf{1}^T w &= \mathbf{1}^T C^{-1} (\mu - R\mathbf{1}) \\ \iff \frac{(\mu_w - R)}{\sigma_w^2} &= \mathbf{1}^T C^{-1} (\mu - R\mathbf{1}). \end{aligned}$$

Durch einsetzen in (4.13) bekommen wir somit

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})Cw &= \mu - R\mathbf{1} \\ \iff w &= \frac{C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ■

Die Gerade (4.11) wird, wie vorhin, die Kapitalmarktlinie genannt. Der Term

$$\sigma \frac{\mu_w - R}{\sigma_w}$$

eines Portfolios, welches auf dieser Gerade liegt, wird Risikoprämie genannt.

Abschließend wollen wir die eingeführte Theorie anhand eines Beispiels anwenden, wobei die Idee dafür aus [4, vgl. Seite 2] stammt.

Beispiel 2. Wir betrachten folgende drei Aktien und den risikofreien Vermögenswert R:

	Aktie i	erwartete Rendite μ_i	Standardabweichung σ_i
(A)	Microsoft	0.0427	0.1000
(B)	Nordstrom	0.0150	0.1044
(C)	Starbucks	0.0285	0.1411
	R	0.0050	0

Weiters sei die Kovarianzmatrix gegeben als

$$C := \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{AC} & \sigma_{BC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0.1)^2 & 0.0018 & 0.0011 \\ 0.0018 & (0.1044)^2 & 0.0026 \\ 0.0011 & 0.0026 & (0.1411)^2 \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass die erwartete Rendite des Portfolios nach Angabe gegeben ist durch

$$\mu := \begin{pmatrix} 0.0427 \\ 0.0150 \\ 0.0285 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun das MVP sowie das MP berechnen.

Wir berechnen zuerst das MVP mithilfe von Satz 4.7.

$$\begin{aligned} w_{min} = \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} &= (83.5153, 69.2319, 36.573)^T \frac{1}{189.3197} \\ &= (0.4411, 0.3657, 0.1932)^T \end{aligned}$$

Mit dieser Gewichtung bekommen wir nach Satz 4.1 folgende erwartete Rendite und Standardabweichung:

$$(\sigma_{min}, \mu_{min}) = (7.27\%, 2.98\%).$$

Kommen wir nun zum MP:
Nach Satz 4.13 ist die Gewichtung als

$$m = \frac{C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})} = (3.6484, 0.0841, 0.9678)^T \frac{1}{4.7}$$
$$= (0.7762, 0.0179, 0.2059)^T$$

gegeben. Mit dieser Gewichtung bekommen wir nach Satz 4.1:

$$(\sigma_m, \mu_m) = (8.54\%, 3.93\%).$$

Falls wir nun ein anderes Portfolio auf der MVL berechnen wollen, so können wir dafür Satz 4.11 (Two-Fund-Theorem) verwenden, da sowohl das MVP als auch das MP bereits auf der MVL liegen.

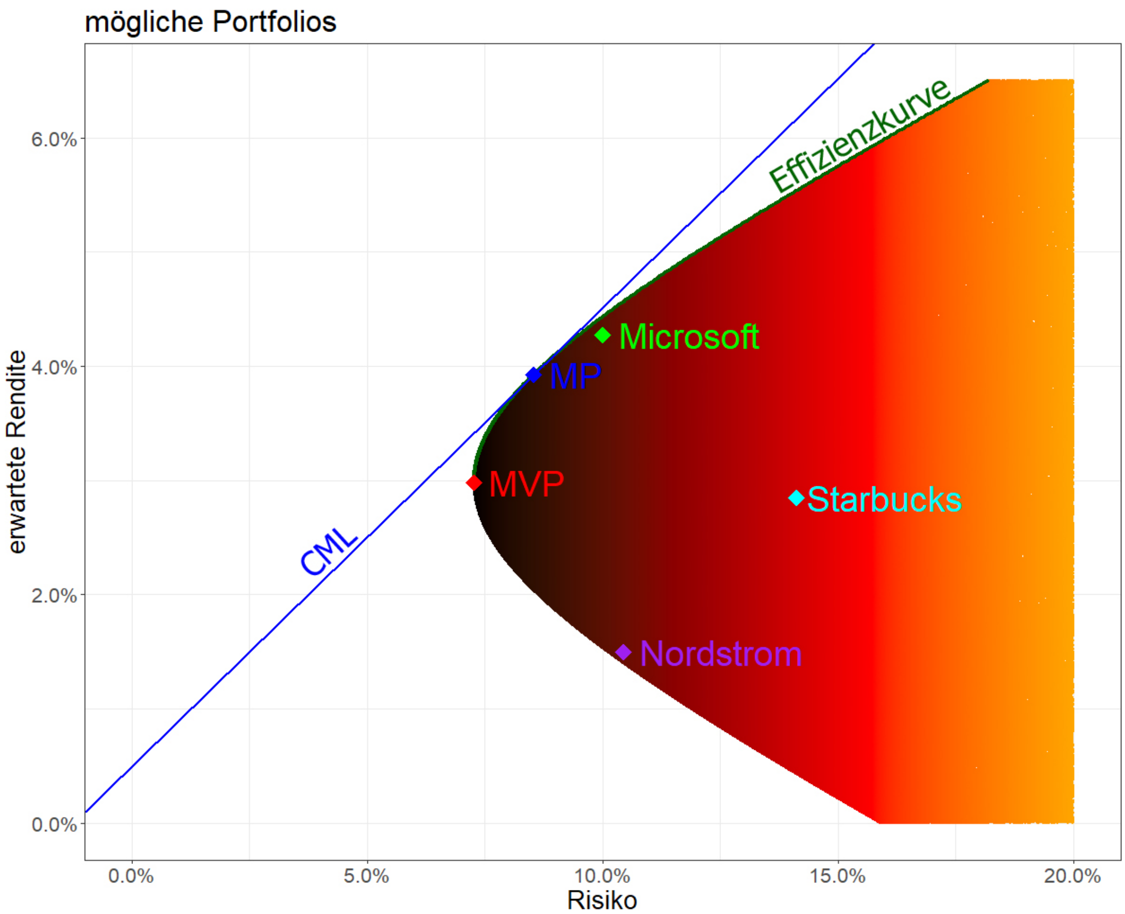

Abbildung 4: mögliche Portfolios

△

Abbildungsverzeichnis

Literatur

[1] Maciej J. Capiński, Ekkehard Kopp: *Portfolio Theory and Risk Management*, Cambridge University Press, Cambridge 2014.

[2] Tilo Arens, Rolf Busam, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Hellmuth Stachel: *Grundwissen Mathematikstudium - Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*, Springer-Verlag, Berlin 2013.

[3] Enzo Mondello: *Portfoliomanagement - Theorie und Anwendungsbeispiele*, Springer Verlag, Wiesbaden 2015.

[4] Eric Zivot: *Portfolio Theory with Matrix Algebra* (07.08.2013), https://faculty.washington.edu/ezivot/econ424/portfolioTheoryMatrix.pdf (06.12.2021)