SEMINARARBEIT

The amazing Power of dimensional Analysis

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Angelli Christoph
Matrikelnummer: 11741641

Wien, am 31. Juli 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Dimensionsanalyse wird seit dem 19. Jahrhundert als mathematisches Verfahren eingesetzt, um Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen und Naturphänomenen zu erfassen. Dabei wurde sie von Physikern wie Ludwig Prandtl, Theodore von Kármán und John William Strutt, 3. Baron Rayleigh bei Laborexperimenten mit kontrollieren Rahmenbedingung eingesetzt. Diese Physiker beschäftigten sich aber damit, die Eigenschaften von Strömungen und bewegten Körpern in Fluiden zu untersuchen. [4]
Wir verwenden in dieser Arbeit aber nicht die Dimensionsanalyse auf dem Gebiet der Strömungsmechanik, sondern wir wollen sie auf Finanzmärkte anwenden. Dabei steht vor allem der Markteinfluss im Vordergrund.
Diese Arbeit orientiert sich dabei an der Arbeit „The amazing power of dimensional Analysis: Quantifying Market impact“aus dem Jahre 2017. Dabei versuchen wir das square-root law herzuleiten und die unterschiedlichsten Auswirkungen auf den Markteinfluss mathematisch zu beschreiben.

2 Kapitel

Ein typischer Aspekt von physikalischen Arbeiten ist das Auffinden von Beziehungen zwischen zwei physikalisch unabhängigen Größen, um daraus wiederum Gesetze herleiten zu können. Physikalische Größen sind beispielsweise Länge, Zeit, Masse oder Stromstärke. Solche Gesetze werden in der Regel in der Gestalt von mathematischen Gleichungen formuliert. Nicht immer liegt einem physikalischen Vorgang eine exakte Formel zugrunde, beziehungsweise sind die physikalischen Gesetzmäßigkeiten unbekannt. Dafür wurde die Dimensionsanalyse als mathematisches Verfahren entwickelt, um genau dieses Zusammenspiel von physikalischen Größen bei Naturphänomenen zu erfassen. Dabei benötigt es ein ausgeprägtes intuitives physikalisches Verständnis, Beobachtungsgabe und die Anwendung angewandter Mathematik. Um eine Dimensionsanalyse durchzuführen ist es notwendig einige physikalische Begriffe, wie „physikalische Größe“, „Basisgröße“, „Basiseinheit“und „Dimension“genauer zu beleuchten. Eine physikalische Größe bezeichnet eine quantitativ beschriebene Eigenschaft eines Vorgangs, beziehungsweise Phänomens eines physikalischen Objektes und wird auch als Größenwert bezeichnet. Soll eine physikalische Größe gemessen werden, bedeutet dies nichts anderes, als Größenarten (z. B. Geschwindigkeit) mit etwas zu vergleichen. Physikalische Größen die als Basis eines Größensystems, der systematischen Einordnung physikalischer Größen, gewählt werden, werden Basisgrößen genannt, durch die solch ein Größensystem definiert wird. Hingegen werden mit den Dimensionen physikalischer Größen die qualitativen Eigenschaften derer ausgedrückt. Dabei wird die Dimension einer physikalischen Größe als das Potenzprodukt von Dimensionen der Basisgrößen definiert. [2] [4]

2.1 Am Beispiel des Pendels

Zur Veranschaulichung einer Dimensionsanalyse betrachten wir die Periodendauer eines Pendels. Dazu stellen wir zuerst folgende physikalische Größen auf:

- l . . . die Länge des Pendels in Meter
- m . . . Masse des Pendels in Gramm
- g . . . Beschleunigung der Erdanziehungskraft in Meter pro Sekunde zum Quadrat

Betrachten wir jetzt das Pendel, wobei die Perdiodendauer, gemessen in Sekunden, nur von l, m und g abhängt und nehmen an, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$ existiert, sodass die Periodendauer gegeben ist durch

$$period = f(l, m, g)$$

Aus der Tabelle 2.1 erhalten wir die beiden Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch die die Dimension der physikalischen Größen l, m und g, als auch die Periodendauer respektive ihrer Maßeinheiten dargestellt werden. Da die Matrix D vollen Rang hat folgt mihilfe des Korollars 4.0.3 , welches wir später genauer betrachten, dass die Periodendauer durch den Ansatz

$$period = const \cdot l^{y_1} m^{y_2} g^{y_3}$$

für eine beliebige Konstante größer Null gegeben ist. Die eindeutige Lösung des linearen Systems $Dy = c$ ist demnach $y = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})^T$. Daraus folgt die bekannte Formel

$$period = const \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dieses Argument benutzen wir nachfolgend um den Markteinfluss einer „Meta-order", also einer großen Tradingorder, die in kleinere Orders aufgeteilt wird, welche dann schrittweise durchgeführt werden, zu analysieren. [1]

	l	m	g	a	Periodendauer
Länge	1	0	1	1	0
Masse	0	1	0	0	0
Zeit	0	0	-2	0	1

Tabelle 2.1: Zusammenfassung der Dimensionen physikalischer Größen als Matrix, welche zur Bestimmung der Periode eines Pendels in Betracht gezogen werden. [1]

2.2 Am Beispiel eines Investors

Der Kauf oder Verkauf eines Finanztitels durch einen Marktteilnehmer, kann einen großen Einfluss auf die Preissteigerung oder des Preisverfalles eines Finanztitels haben. Dies wird als Markteinfluss bezeichnet und kann gegen das Interesse des Marktteilnehmers spielen. Speziell bei Transaktionen, bei denen ein signifikanter Geldbetrag bewegt wird, ist der Markteinfluss eine Kenngröße, die bei Entscheidungen von

Transaktionen berücksichtigt werden muss. [5]

Stellen wir uns einen Investor vor, der innerhalb einer befristeten Zeit, eine große Anzahl Aktien kaufen will und dafür eine Meta-order in kleinere Orders aufteilt und versuchen wir dann den Markteinfluss, den diese Meta-order hat, zu analysieren. Dabei erwarten wir, dass sich der Angebotspreis zum Nachteil des Börsenhändlers entwickelt. [1]

Zuerst beginnen wir damit die Variablen und deren Dimensionen zu identfizieren, von denen wir annehmen, dass sie große Auswirkungen auf den Markteinflusses haben. Betrachten wir die vier Variablen:

- Q ... Größe der Meta-order, gemessen an Anteilseinheiten $[Q] = S$
- P ... Preis einer Aktie, gemessen in Geld pro Anteil $[P] = \mathbb{U}/\mathbb{S}$,
- V ... Handelsvolumen eine Aktie, gemessen in den Einheiten der Anteile pro Zeit $[V] = \mathbb{S}/\mathbb{T}$,
- σ^2 ... Volatilität einer Aktie, gemessen als Prozentsatz einer Aktie pro Zeiteinheit $[\sigma^2] = \mathbb{T}^{-1}$.

Dabei werden die vier Variabelne an den drei grundlegenden Dimensionen Zeit, Geld und Aktien, respektive $\mathbb{T}, \mathbb{U}$ und $\mathbb{S}$, gemessen. Damit formulieren wir nun folgende Annahme. [1]

Annahme 2.2.1. *Der Markteinfluss G hängt nur von den vier oben definierten Variablen ab*

$$G = g(Q, P, V, \sigma^2)$$

,wobei wir eine Funktion $g : \mathbb{R}_+^4 \to \mathbb{R}_+$ als auch die Größe G als invariant bezüglich einer Änderung der Dimensionen $\mathbb{T}, \mathbb{U}$ und $\mathbb{S}$ voraussetzen. [1]

Dies stellt eine analoge Situation zu unserem Pendel dar. Betrachten wir G als einen Prozentsatz des Angebotspreises folgt daraus, dass es eine dimensionslose Größe ist, welche invariant bezüglich einer Änderung der Maßeinheiten $\mathbb{T}, \mathbb{U}$ und $\mathbb{S}$ ist. Um aber dasselbe Resultat wie in der Formel der Periodendauer des Pendels zu erhalten, brauchen wir eine zusätzliche Gleichung. Dafür benutzen wir das Modigliani-Miller Theorem, welches besagt, dass der Marktwert eines Unternehmens sich exakt durch den gegenwärtige Wert der zukünftigen Gewinne und des Basiswertes, einem Kassa- oder Termingeschäft zugrundeliegendem Wirtschaftsobjekt, welches für die Erfüllung und Bewertung eines Finanzkontrakts als Grundlage dient, berechnen lässt.[7] [9] Außerdem ist der Markwert eines Unternehmens unabhängig gegenüber

dessen Kapitalstruktur. [9] Wird dieses Theorem auf die Marktmikrostruktur angewandt, kann daraus ein zusätzliches Argument der Arbitragefreiheit (d.h. Preise werden in Abhängigkeit von Angebots- und Nachfragemengen so lange angepasst, bis sich der Markt im Gleichgewicht befindet. [6]) gewonnen werden.
Betrachten wir eine Aktie eines Unternehmens und nehmen an dass dieses seine Kapitalstruktur verändert, indem es Dividenden ausbezahlt oder versucht Kapital zu beschaffen. Das Modigliani-Miller Theorem sagt uns jetzt, welche Größen unverändert bleiben im Sinne von Verhältnis der Schulden und des Eigenkapitals des Unternehmens. Diese Erkenntnis liefert uns eine zusätzliche Gleichung, welche die Bedingung aus Annahme 2.2.1 erfüllt. Nachfolgende Annahme deutet auf eine zusätzliche Beschränkung hin, die wir als "leverage neutrality"bezeichnen. [1]

Annahme 2.2.2 (leverage neutrality)**.** *Der Marktwert eines beliebigen Unternehmens, ist unabhängig von dessen Kapitalstruktur*

Durch diese Annahme finden wir uns in einer identen Situation zu unserem Pendel vor, da uns diese Invarianz eine weitere lineare Gleichung liefert. Jetzt haben wir dieselbe Anzahl von Gleichungen und Unbekannten, nämlich vier. [1]

Theorem 2.2.3. *Mithilfe der Annahmen 2.2.1 und 2.2.2 hat der Markteinfluss die Form*

$$G = const \cdot \sigma \sqrt{\frac{Q}{V}}$$

für eine beliebige Konstante größer Null.

Daraus resultierend, stellen wir fest, dass der Markteinfluss, den die Ordergröße Q hat, abhängig von der Quadratwurzel ist. [1]

Was passiert aber, wenn auf den jeweiligen Börsenhändler noch zusätzliche Kosten anfallen, wenn dieser Vorbereitungen über die Platzierung einer Meta-order treffen muss? Dadurch könnte eine neue Variable eine nicht unerhebliche Auswirkung auf den Markteinfluss haben. Wir nennen diese neue Variable „bet cost“und bezeichnen sie mit C. Die bet cost kann auch unabhängig von der Ordergröße Q, als auch den anderen Größen P, V und σ^2, variiern. Wir erwägen also C als fünfte Größe, die eine Auswirkung auf den Markteinfluss haben kann:

- C ... bet cost, gemessen in Geldeinheiten $[C] = \mathbb{U}$,

und stellen eine neue Annahme auf. [1]

Annahme 2.2.4. *Der Markteinfluss G hängt nur von den obigen fünf Variablen ab, wobei die Funktion $g : \mathbb{R}^5_+ \to \mathbb{R}_+$ als auch die Größe G invariant bezüglich der*

Einheiten, welche gewählt werden um die Dimensionen $\mathbb{T}, \mathbb{U}$ und $\mathbb{S}$ zu messen, sind. Dies drücken wir foldendermaßen aus:

$$G = g(Q, P, V, \sigma^2, C)$$

[1]

Daraus erhalten wir ein System von vier linearen Gleichungen mit fünf unbekannten, wobei die Lösung aber nicht mehr eindeutig ist. Das drücken wir durch eine Funktion, die wir f nennen, folgenderweise aus. [1]

Theorem 2.2.5. *Unter Zuhilfenahme von Annahme 2.2.2 und Annahme 2.2.4 hat der Markteinfluss die Form*

$$G = \frac{1}{L} f(Z),$$

wobei die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ und die Größen L und Z gegeben sind durch

$$L = \left(\frac{PV}{\sigma^2 C} \right) \quad \text{und} \quad Z = \left(\frac{Q^3 P^2 \sigma^2}{V C^2} \right)^{1/3}$$

[1]

Auf den ersten Blick wird die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ nicht durch die Annahme 2.2.4 beschränkt. Mithilfe des Ansatzes, den wir für die Periodendauer des Pendels benutzt haben, kann daraus geschlossen werden, dass f die Form $f(z) = const \cdot z^p$, für $p \geq 0$, hat. Daraus folgt, dass $G = const \cdot Z^p / L$ gilt. Für den Fall, dass $p = 1/2$, erhalten wir exakt die Relation aus Theorem 2.2.3. Die beiden Größen L und Z werden in einem finanziell bedeutendem Sinne von der Messbarkeit der Liquidität und der Größe einer Meta-order interpretiert. [1]

3 Square-root law und Markteinfluss

Einwirkungen auf den Markteinfluss können unterschiedliche Ursachen haben. Aus diversen empirischen und theoretischen Studien kristallisiert sich dabei heraus, dass der Markteinfluss nichtlinear in der Ordergröße und mit der Zeit vergehen wird. Insbesondere hat sich gezeigt, dass der Markteinfluss häufig konkav (d .h. eine reellwertige Funktion dessen Graph oberhalb jeder Verbindungsstrecke zweier Punkte liegt. [8]) bezüglich der Größe einer Meta-order ist. Dies Tatsache kommt im speziellen der Wurzelfunktion sehr nahe, deshalb auch der Name Square-root law. [1]

Das Square-root law wird dabei schon seit den 90er Jahren von Händlern benutzt und auch institutionelle Händler, wie die Salomon Brothers, Bloomberg und Barra implementierten es in ihrer Tradingsoftware. Dabei zeigt sich, dass das Square-root law nicht nur theoretisch, sondern auch empirisch verifiziert ist.
Das square-root law beschreibt aber nur das Verhältnis der Größe eines Trades mit dem täglichen Handelsvolumen. Es verweist aber nicht auf

- die Anzahl der Assets die gehandelt werden,
- wie der Handel ausgeführt wird,
- das Marktkapital eines Finanztitels. [3]

4 Lineare Algebra

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns damit grundlegende Ergebnisse der Dimensionsanalyse zu überprüfen. Dafür formuliern wir ganz Allgemein die Annahmenn hinter der Dimensionsanalyse und außerdem noch die Korollare 4.0.3 und 4.0.4. [1]

Annahme 4.0.1 (Dimensionsanalyse)**.**

(i) *Sei die Größe eines Unternehmensanteils* $U \in \mathbb{R}_+$ *von* n *Größen* $W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{R}_+$ *so abhängig, dass*

$$U = H(W_1, W_2, \ldots, W_n),$$

für eine beliebige Funktion $H : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$.

(ii) *Die Größen* $U, W_1, \ldots, W_n$ *werden als* m *Grunddimensionen gemessen und als* $L_1, \ldots, L_m$, *wobei* $m \leq n$ *gilt, bezeichnet. Sei nun* X *eine beliebige positive Größe, wobei ihre Dimension* $[X]$ *die Gleichung* $[X] = L_1^{x_1} \cdots L_m^{x_m}$, *für beliebige* $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, *erfüllt. Falls* $[X] = 1$ *gilt, bezeichnen wir die Größe* X *als dimensionslos.*
Die Dimensionen der Größen $U, W_1, W_2, \ldots, W_n$ *sind bekannt und werden als Vektoren* a *und* $b^{(i)} \in \mathbb{R}^m, i = 1, \ldots, n$ *dargestellt. Dabei gilt* $[U] = L_1^{a_1} \cdots L_m^{a_m}$ *und* $[W_i] = L_1^{b_{1i}} \cdots L_m^{b_{m}i}, i = 1, \ldots, n$. *Zusätzlich stellen wir* $B = (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)})$ *als* $m \times n$ *Matrix mit Spaltenvektoren* $b^{(i)} = (b_{1i}, \ldots, b_{mi})^T$, *für* $i = 1, \ldots, n$, *dar.*

(iii) *Um den Wert einer Größe zu messen, betrachten wir ein gegebene Menge an fundamentalen Dimensionen* $L_1, \ldots, L_m$ *und wählen eine geeignetes Einheitensystem. Wenn wir jetzt eine Änderung eines Einheitensystems in eine anderes vornehmen, müssen wir unsere, aus den vorhergegangenen Überlegungen stammende Größen, umskalieren. Im Allgemeinen ändern sich dimensionslose Größen und und auch die Formel aus (i) bleibt invariant bezüglich einer beliebigen Veränderung der fundamentalen Dimensionen.*

[1]

Mit diesem Wissen können wir nun die Quintessenz der Dimensionsanalyse formuliern.

Theorem 4.0.2 (Pi-Theorem)**.** *Unter Zuhilfenahme von Annahme 4.0.1 sei* $x^{(i)} := (x_{1i}, \dots, x_{ni})^T$ *mit* $i = 1, \dots, k := n - rank(B)$ *eine Basis der Lösungen des homogenen Systems* $Bx = 0$ *und* $y := (y_1, \dots, y_n)^T$ *eine Lösung des inhomogenen Systems* $By = a$*. Dann existiert eine Funktion* $F : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ *so, dass*

$$U \cdot W_1^{-y_1} \cdots W_n^{-y_n} = F(\pi_1, \dots, \pi_k),$$

wobei π_i *definiert ist als dimensionslose Größen* $W_1^{x_{1i}} \cdots W_n^{x_{ni}}$*, mit* $i = 1, \dots, k$*. [1]*

Wie benötigen dabei nur die beiden Spzialfälle $k = 0$ und $k = 1$, welche wir in den nachfolgenden Korollaren ausformuliern. [1]

Korollar 4.0.3. *Mithilfe von Annahmen 4.0.1 nehmen wir an, dass der* $rank(B) = n$ *ist und* y *definiert als* $(y_1, \dots, y_n)^T$ *eine eindeutige Lösung des linearen System* $By = a$ *ist. Dann existier eine Konstante größer Null, sodass*

$$U = const \cdot W_1^{y_1} \cdots W_n^{y_n}$$

[1]

Korollar 4.0.4. *Wieder aus Annahme 4.0.1, sei der Rang der Matrix* B *gleich* $n-1$ *und sei* x *definiert als* $(x_1, \dots, x_n)^T$ *respektive* y *definiert als* $(y_1, \dots, y_n)^T$*. Dies ist eine nicht triviale Lösung des homogenen, beziehungsweise inhomogenen Gleichungssystem* $Bx = 0$ *respektive* $By = a$*. Dann existiert eine Funktion* $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *so, dass*

$$U = F(W_1^{x_1} \cdots W_n^{x_n}) W_1^{y_1} \cdots W_n^{y_n}$$

[1]

5 Der Markteinfluss

In diesem Kapitel versuchen wir die Funktion für den Markteinfluss aus den Korollaren des vorhergegangen Kapitels herzuleiten. Dazu ist es notwendig die Theoreme 2.2.3 und 2.2.5 präzise zu formulieren und dann zu beweisen. Außerdem betrachten wir die Größen G, Q, P, V, σ^2 und C genauer, vor allem dann, wenn sich das Kapital eines Unternehmens ändert. Wir werden ebenfalls die Modigliani-Miller Dimension, welche wir schon in Kapitel 2 erwähnt haben, als weitere Variable einführen und notieren sie mit $\mathbb{M}$. Die Modigliani-Miller Dimension $\mathbb{M}$ eines Unternehmensanteils wird durch die Größe $\mathfrak{L}$ gemessen, welche wir wie folgt definieren:

$$\mathfrak{L} = \frac{\text{Gesamtvermögen}}{\text{Eigenkapital}}$$

Dieses Verhältnis ist ein wichtiger Indiktaor für die Schulden eines Unternehmens. Multipliziern wir jetzt $\mathfrak{L}$ mit einem Faktor $A > 1$ wäre dies äquivalent dazu, wenn das Unternehmen $(1 - A^{-1})$ des Eigenkapitals als Bardividenden ausbezahlen würde. Andererseits, falls $\mathfrak{L}$ mit einem Faktor $0 < A < 1$ multipliziert werden würde, entspräche dies einer Erhöhung des Kapitals um das $(A^{-1} - 1)$-fache des Eigenkapitals. Wir stellen eine neue Annahme, als Verweis auf die leverage neutrality, auf. [1]

Annahme 5.0.1 (Leverage neutrality)**.** *Wird die Modigliani-Miller Dimension $\mathbb{M}$ mit einem beliebigen Faktor $A \in \mathbb{R}_+$ skaliert, folgt daraus, dass*

- *Q, V und C konstant bleiben,*
- *P sich mit einem Faktor A^{-1} ändert,*
- *σ^2 sich mit einem Faktor A^2 ändert,*
- *G sich mit einem Faktor A ändert.*

[1]

Als nächstes formulieren wir das Theorem 2.2.3, indem wir die Aussage aus Annahme 2.2.2 durch die formalere Aussage aus Annahme 5.0.1 ersetzen, neu und werden dies darüber hinaus beweisen.

Theorem 5.0.2. *Mit Annahme 2.2.1 und Annahme 5.0.1 gilt, dass der Markteinfluss die Form*

$$G = const \cdot \sigma \sqrt{\frac{Q}{V}}$$

für eine beliebige Konstante größer Null hat. [1]

Beweis. Indem wir die Annahmen 2.2.1 und 5.0.1 mit den jeweiligen Dimensionen Q, P, V und σ^2, welche wir in Kapitel 2 kennengelernt haben, kombinieren, erhalten wir die Matrix B und den Vektor a.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Tabelle 5.1 können wir B und a ableiten. Betrachten wir die erste Zeile dieser Tabelle und nehmen an, dass $\mathbb{S}$, die Einheit der Unternehmensanteile, durch einen Faktor S neu skaliert wird. Daraus folgt, dass Q durch den Faktor S, P durch den Faktor S^{-1} und V durch den Faktor S verändert werde, während σ^2 gleich bleibt. In der letzten Zeile, die wir mit $\mathbb{M}$ bezeichnet haben, geht es darum, dass sich die Schulden eines Unternehmens mit einem Faktor A veränderen, Q verändert sich nicht und P ändert sich mit einem Faktor A^{-1}.
Da die Matrix B vollen Rang hat, also $rank(B) = 4 = n$ und Annahmen 4.0.1 erfüllt ist, folgt mit Korollar 4.0.3, dass

$$G = cons \cdot Q^{y_1} P^{y_2} V^{y_3} \sigma^{2y_4},$$

für eine beliebige Konstante größer Null. Der Vektor $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ ist dabei die eindeutige Lösung des linearen Systems $By = a$, die gegeben ist durch
$y = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$. [1] □

	Q	P	V	σ^2	C	G
$\mathbb{S}$	1	-1	1	0	0	0
$\mathbb{U}$	0	1	0	0	1	0
$\mathbb{T}$	0	0	-1	-1	0	0
$\mathbb{M}$	0	-1	0	2	0	1

Tabelle 5.1: Ein Überblick über die Matrix B mit den zugehörigen Dimensionen der Größen (Q, P, V, σ^2), respektive der Matrix K mit den zugehörigen Dimensionen der Größen (Q, P, V, σ^2, C), als auch der Vektor a zugehörig zu der Dimension von G. [1]

Aus Theorem 5.0.2 folgt direkt das schon bekannt square-root law. Dabei hängt die Herleitung des square-root law's nicht nur von den Größen G, P, V und σ^2, sondern auch von der leverage neutrality ab.

Wie weiter oben schon diskutiert, gibt es eine zusätzliche Variable C die Auswirkungen auf den Markteinfluss hat. Wir erinnern uns an die Matrix B die wir bei dem Beweis von Theorem 5.0.2 benutzt haben und erweitern sie um eine Spalte, die C repräsentieren soll. [1]

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $a = (0, 0, 0, 1)^T$ bleibt dabei unverändert und Tabelle 5.1 illustriert uns in welcher Beziehung C zu den anderen Dimensionen steht.
Durch den Kern der linearen Abbildung, welcher duch die Matrix K induziert wird, können wir die Lösungsraum $\mathfrak{H}$ des homogenen Systems $Kx = 0$ und den Lösungsraum $\mathfrak{I}$ des inhomogenen Systems $Ky = a$ berechnen.

$$\mathfrak{H} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{I} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

[1]

Theorem 5.0.3. *Es gelten die Annahmen 2.2.4 und 5.0.1. Wir fixieren uns eine Vektor $x = (x_1, \ldots, x_5)^T \in \mathfrak{H}$ und einen Vektor $y = (y_1, \ldots, y_5)^T \in \mathfrak{I}$. Dann existiert eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ so, dass*

$$G = Q^{y_1} P^{y_2} V^{y_3} \sigma^{2y_4} C^{y_5} f(Q^{x_1} P^{x_2} V^{x_3} \sigma^{2x_4} C^{x_5}).$$

[1]

Beweis. Für den Beweis kombinieren wir die beiden Annahmen 2.2.4 und 5.0.1 mit den Dimensionen von Q, P, V, σ^2 und C. Dabei erhalten wir wieder die Matrix K und den Vektor a der Seite zuvor. Da die Annahme 4.0.1 gilt und der Rang der Matrix K gleich vier ist, müssen wir nur noch Korollar 4.0.4 anwenden und wir sind fertig. [1] □

Als Beispiel betrachten wir die beiden Vektoren

$$x = (1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})^T \in \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad y = (0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T \in \mathfrak{I},$$

Aus Theorem 5.0.3 erhalten wir die exakte Formel, welche wir im Theorem 2.2.5 festgelegt haben.

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{\sigma^2 C}{PV}\right)^{1/3} f\left(\left(\frac{Q^3 P^2 \sigma^2}{VC^2}\right)^{1/3}\right) \\ &= \frac{1}{L} f(Z). \end{aligned}$$

Die beiden Größen L und Z sind dabei genau so defniert wie im Theorem 2.2.5. [1] Wir können aber auch andere Vektoren für $x \in \mathfrak{H}$ und $y \in \mathfrak{I}$ wählen, beispielsweise:

$$x = (3, 2, -1, 1, -2)^T \in \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad y = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T \in \mathfrak{I}$$

Die Formel aus Theorem 5.0.3 nimmt dann die Gestalt

$$G = \sigma\sqrt{\frac{Q}{V}} h(Z^3) = \sigma\sqrt{\frac{Q}{V}} h\left(\frac{Q^3 P^2 \sigma^2}{VC^2}\right)$$

an. Die Funktion h ist dabei keine Konstante und die Formel beschreibt auch eine Herleitung des square-root law's auf muliplikative Art. [1]

Begutachten wir wieder Theorem 5.0.3, dann erkennen wir, dass die beiden Formeln, die wir bei den beiden oben gezeigten Beispielen bekommen haben, eine Lösung für die Formel aus Theorem 5.0.3 darstellt. Die beiden Funktion h und f sind dabei nicht ident, sondern injektiv, wenn sie von der Gleichung aus dem ersten Beispiel in die des zweiten Beispieles überführt werden.

Wie wir gleich sehen werden, können unterschiedliche Funktionen h und f zu anderen Modellierungen des Markteinflusses führen. [1]

(a) Ist der Markteinfluss proportional, das heißt, dass $f \equiv const$ und $h(x) = const \cdot x^{-1/6}$ zu nachfolgendem Ergebnis führen würde.

$$G = const \cdot \left(\frac{\sigma^2 C}{PV}\right)^{1/3}$$

(b) Hat der Markteinfluss die Form: $f(z) = const \cdot z^{1/2}$ und $h \equiv const$ ergbit das

$$G = const \cdot \sigma\sqrt{\frac{Q}{V}},$$

und wir bezeichnen dies als den square-root Einfluss. Die eindeutige Lösung ist außerdem unabhängig von C.

(c) Ist der Markteinfluss linear, also $f(z) = const \cdot z$, wobei $h(x) = const \cdot x^{1/6}$ gilt, erhalten wir

$$G = const \cdot Q \left(\frac{\sigma^4 P}{CV^2} \right)^{1/3}$$

[1]

Für die Dimensionsanalyse werden aber nur zwei Eigenschaften von C herangezogen, nämlich die Dimension von C, welche nichts anderes als Geld ist und durch $[C] = \mathbb{U}$ beschrieben wird. Und das C unverändert bleibt, wenn die Modigliani-Miller Dimension $\mathbb{M}$ durch den Faktor $A \in \mathbb{R}_+$ skaliert wird. In anderen Worten ausgedrückt heißt das, dass das oben genannte Resultat nicht von der Größe C, als bet cost, abhängt. Dasselbe gilt auch für jede andere Größe die dieselben Eigenschaften wie C hat.

Folgendes Beispiel illustriert uns jetzt, dass wir nicht nur die Größe C, die bet cost, benutzen müssen, sondern auch eine andere, die spread cost $\mathfrak{C}$, als Größe in Betracht ziehen können. Die Größe $\mathfrak{C}$ wird dabei als Transaktionskosten, die bei einen Handel mit Q Anteilen enstehen interpretiert. Wir notieren außerdem noch S als bid-ask spread, also die Differenz von Geld- und Briefkurs, und messen sie in Geld pro Anteil $[S] = \mathbb{U}/\mathbb{S}^2$. Die spread cost $\mathfrak{C}$ einer Meta-order mit Ordergröße Q ist dann definiert als $\mathfrak{C} := QS$ und wird in Geldeinheiten $[C] = \mathbb{U}$ gemessen. Die mathematische Analyse bleibt demnach unverändert, wenn wir C durch $\mathfrak{C}$ ersetzen und die analoge Formel dazu ergibt sich folgendermaßen:

$$G = \sqrt{\frac{Q}{V}} h \left(\frac{Q^3 P^2 \sigma^{2^2}}{VC} \right)$$

[1]

Zum Abschluss führen wir noch eine andere Variable T ein, um eine andere Menge an Größen zu betrachten. Wir ersetzen dabei C oder $\mathfrak{C}$ durch eine Variable anderer Dimension, nämlich die Länge eines Zeitintervalls $[0, T]$ in der eine Meta-order durchgeführt wird. Die Länge T wird dabei derartig präzise definiert:

- T ... die Länge des Zeitintervalls in der eine Order ausgeführt wird, gemessen in Zeiteinheiten $[T] = \mathbb{T}$.

Die Länge des Intervalls T kann dabei von mehreren Tagen bishin zu wenigen Stunden variieren. In der nachfolgenden Annahme wird also T berücksichtigt. [1]

Annahme 5.0.4. *Der Markteinfluss G hängt nur von den Variablen Q, P, V, σ^2 und T ab und wird so dargestellt:*

$$G = g(Q, P, V, \sigma^2, T).$$

Die Funktion $g : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}_+$ als auch die Größe G bleiben dabei invariant bezüglich einer Änderung der Einheiten mit denen die Dimensionen $\mathbb{T}, \mathbb{U}$ und $\mathbb{S}$ gemessen werden. [1]

Wir benutzen die Matrix B, die wir im Beweis zu Theorem 5.0.2 verwendet haben und erweitern sie um eine Spalte.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir benutzen den Vektor $a = (0, 0, 0, 1)^T$ und der Lösungsraum $\mathfrak{H}$ respektive $\mathfrak{I}$ des homogenen Systems $Kx = 0$ beziehungsweise des inhomogenen Systems $Ky = a$ lautet folgendermaßen:

$$\mathfrak{H} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

[1]

Gilt die leverage neutrality und, dass der Markteinfluss G von Q, P, V, σ^2 und T abhängt, liefert uns die Dimensionsanalyse folgendes Resultat.

Theorem 5.0.5. *Es gelten die Annahmen 5.0.1 und 5.0.4. Wir fixiern einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_5)^T \in \mathfrak{H}$ und einen Vektor $y = (y_1, \dots, y_5)^T \in \mathfrak{I}$. Dann existiert eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, sodass*

$$G = Q^{y_1} P^{y_2} V^{y_3} \sigma^{2y_4} T^{y_5} f(Q^{x_1} P^{x_2} V^{x_3} \sigma^{2x_4} T^{x_5})$$

gilt. [1]

Beweis. Da die Annahme 4.0.1 gilt und der Rang der Matrix K gleich vier ist, folgt die Behauptung direkt aus Korollar 4.0.4. [1] □

Wählen wir nämlich die Vektoren

$$x = (1, 0, -1, 0, -1)^T \in \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad y = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T \in \mathfrak{I},$$

erhalten wir die Formel

$$G = \sigma \sqrt{\frac{Q}{V}} h \left(\frac{Q}{VT} \right)$$

Die Funktion h charakterisiert in diesem Fall die Herleitung des square-root law's in Abhängigkeit der Länge des Intervalls T. Wir können dabei feststellen, dass die Bedingung unter der wir das square-root law erhalten ganz einfach die ist, dass falls T nur von den Größen Q, V, P und σ^2 abhängt, wir einfach Annahme 5.0.4 durch Annahme 2.2.1 ersetzen können und uns dann in einer perfekt analogen Situation zu Theorem 2.2.3 befinden würden. Damit schließt sich der Kreis und der Markteinfluss gehorcht dem Gesetz des square-root law's. [1]

6 Fazit

Zusammenfassend liegt das Hauptaugenmerk dieser Arbeit darauf, dass square-root law für den Markteinfluss herzuleiten. Mithilfe des Konzepts der Dimensionsanalyse wird außerdem eine Funktion die den Markteinfluss charakterisiert beschrieben, als auch das Konzept der leverage neurality. Interessanterweise hängt die Herleitung des square-root law's nur von zwei Annahmen ab. Erstens hängt der Markteinfluss nur von dem Aktienpreis, des Tradingvolumens als auch der Volatilität ab. Zweitens wenden wir das Konzept der leverage neutrality an, welches gleich dem des Modigliani-Miller Theorems ist. Damit erklären wir, wie sich bestimmte Größen verhalten, wenn das Kapital eines Unternehmes verändert wird. Die Dimensionsanalyse wird auf diese Annahmen angewandt und es zeigt sich, dass der Markteinfluss einer Meta-order proportional zu der Volatilität, als auch proprtional zu der Quadratwurzel einer Ordergröße und invers zu der Quadratwurzel des Tradingvolumens ist. [1]

Literaturverzeichnis

[1] The amazing power of dimensional analysis: Quantifying market impact, Pohl, Mathias, Ristig, Alexander, Schachermayer, Walter, Tangpi, Ludovic, 2017

[2] Dimensionsanalysemethoden in der Physik, Finger, Steffen, Lettmann, Tobias, 2013/2014

[3] Three models of market impact, Gatheral, Jim, 2016

[4] Wikipedia, Dimensionsanalyse, Wikipedia, die freie Enzyklopädie, 31. Juli 2021

[5] Wikipedia, Market Impact, Wikipedia, die freie Enzyklopädie, 31. Juli 2021

[6] Wikipedia, Arbitragefreiheit, Wikipedia, die freie Enzyklopädie, 31. Juli 2021

[7] Wikipedia, Basiswert, Wikipedia, die freie Enzyklpädie, 31. Juli 2021

[8] Wikipedia, konvexe und konkave Funktionen, Wikipedia, die freie Enzyklopädie, 31. Juli 2021

[9] Modiglinai-Miller Theorem, Chen, James, Investopedia, 25. April 2020