Saddlepoint Approximation Methods

in Financial Engineering

Enes KESER

Inhalt

1. Fourier-Transformation & charakteristische Funktion
2. Laplace-Transformation, mgf & cgf
3. Methode des steilsten Abstiegs
4. Sattelpunkt-Approximation für p_X, $P[X > x]$ und $E[(X - K)^+]$
5. Sattelpunkt-Approximation für Kreditportfolios

Verallgemeinerte Fourier Transformation

Angenommen $f(x)$ ist Fourier-integrierbar in einem Intervall (a,b), wobei $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}|f(x)|\,dx < \infty \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx}|f(x)|\,dx < \infty.$$

Die verallgemeinerte Fourier-Transformation von $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ist definert als

$$\hat{f}(z) = \mathscr{F}\{f(x)\}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x)\,dx\,, z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Die verallgemeinerte, inverse Fourier-Transformation ist für $z \in \mathbb{C}$ mit $a < \operatorname{Im} z < b$ gegeben durch

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}(z)\}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{iw-\infty}^{iw+\infty} e^{-ixz}\hat{f}(z)\,dz\,, a < w < b, \text{ wobei } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Komplexe charakteristische Funktion

Die *komplexe charakteristische Funkion* von einer Zufallsvariable X ist definiert als die verallgemeinerte Fourier-Tranformierte der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X, wobei

$$\phi_X(z) = E[e^{izX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} p_X(x)\, dx\,, a < w < b. \tag{3}$$

Mit der inversen Fourier-Transformation (2) folgt:

$$p_X(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{iw-\infty}^{iw+\infty} e^{-izx} \phi_X(z)\, dz\,, a < w < b. \tag{4}$$

Sei $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ stückweise stetig in jedem endlichen Intervall in $[0, \infty]$, die $|f(x)| \leq Me^{ax}$ für $x \in [0, \infty]$ erfüllt, wobei $M, a \in \mathbb{R}_+$ von x unabhängige Konstanten sind. Die *verallgemeinerte Laplace-Transformation* von $f(x)$ ist definiert als

$$\tilde{f}(z) = \mathscr{L}\{f(x)\}(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\, dx, \tag{5}$$

wobei $z \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re} z > a$. Die *inverse Laplace-Transformation* (Bromwich-integral) von $\tilde{f}(z)$, $z \in \mathbb{C}$, ist definiert als

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}\{\tilde{f}(z)\}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} e^{xz} \tilde{f}(z)\, dz, \tag{6}$$

Bilaterale Laplace-Transformation

Manchmal kann es hilfreich sein, die *bilaterale Laplace-Transformation* zu betrachten, die wie folgt definiert ist durch

$$f^{\approx}(x) = \mathscr{B}\{f(x)\}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zx} f(x)\, dx. \tag{7}$$

MGF und CGF

- *Momenterzeugendefunktion* $M_X(z) = E[e^{zX}]$
- *Kumulanterzeugendefunktion* $\kappa_X(z) = log M_X(z)$
- $M_X(-z) = e^{\kappa_X(-z)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zx} p_X(x)\, dx = \mathscr{B}\{p_X(x)\}(z)$
- Momente von X lassen sich mit der folgenden Formel berechnen:

$$E[X^n] = \frac{d^n}{dz^n} M_X(z)\bigg|_{z=0}. \tag{8}$$

- n-te Kumulante: n-te Ableitung von $\kappa_X(z)$ ausgewertet bei z=0; die ersten 4 Kumulanten:

$$\kappa_1 = \mu,\ \kappa_2 = \mu_2,\ \kappa_3 = \mu_3 \text{ und } \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 \tag{9}$$

wobei $\mu = E[X]$ und $\mu_n = E[(X - \mu)^n]$, $n = 2, 3, \ldots$

Proposition

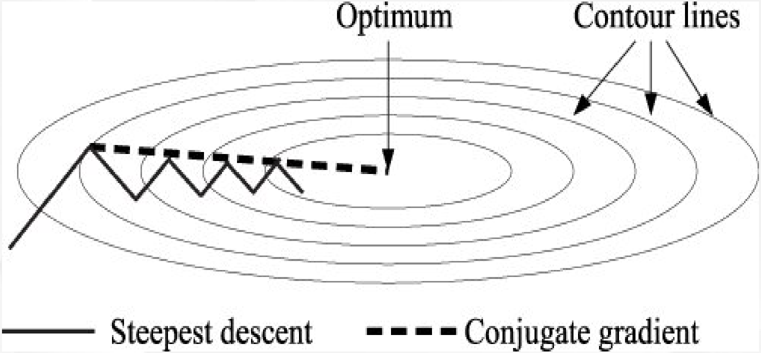
Sei X eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p_X(x)$ und Kumulanterzeugendefunktion $\kappa_X(z)$. Angenommen $\kappa_X(z)$ sei analytisch in einem offen Streifen $\{z \in \mathbb{C} : \alpha_- < \operatorname{Re} z < \alpha_+\}$, wobei $\alpha_- < 0$ und $\alpha_+ > 0$. Für alle $K \in \mathbb{R}$ erhalten wir dann

$$p_X(K) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\kappa_X(z) - zK} \, dz, \qquad \gamma \in (\alpha_-, \alpha_+) \tag{10}$$

$$P[X > K] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{\kappa_X(z) - zK}}{z} \, dz, \qquad \gamma \in (0, \alpha_+) \tag{11}$$

$$E[(X - K)^+] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{\kappa_X(z) - zK}}{z^2} \, dz, \qquad \gamma \in (0, \alpha_+) \tag{12}$$

Steepest descent method



Satz 2.1.

Angenommen, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, wobei $z = x + iy$, $u(x,y)$ und $v(x,y)$ reellwertige Funktionen sind. Innerhalb der Definitionsmenge von $f(z)$ lauten die Cauchy-Riemann Gleichungen:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{13}$$

Die 1.Ableitung von $f(z)$ is gegeben durch

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x \tag{14}$$

Korollar 2.1.

Der Realteil $u(x, y)$ besitzt kein lokales Maximum oder Minimum innerhalb der Definitionsmenge von $f(z)$. Jeder stationäre Punkt von $u(x, y)$ ist ein Sattelpunkt.

Proof.

In einem stationären Punkt von $u(x, y)$ gilt $u_x = u_y = 0$. Betrachtet man die Determinante der Hesse-Matrix, erhält man:

$$H = \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} = u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = -(v_{xy})^2 - (u_{xy})^2 < 0.$$

Man beachten, dass hier die Cauchy-Riemann-Gleichungen 13 verwendet wurden. Die Negativität von H impliziert, dass der stationäre Punkt von $u(x, y)$ ein Sattelpunkt ist und nicht ein lokales Extremum sein kann. □

Korollar 2.2

Die Niveaulinien von $u(x, y)$ sind überall orthogonal zu den Niveaulinien von $v(x, y)$.

Proof.

Betrachtet man die Gradienten von u und v,sieht man, dass sie orthogonal zu den Niveaulinien von u bzw. v sind. Mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen 13 erhält man

$$\nabla u \cdot \nabla v = (u_x, u_y) \cdot (v_y, v_y) = u_x v_x + u_y v_Y = 0.$$

Daraus folgt die Orthogonalität von ∇u und ∇v und dazu äquivalent die Orthogonalität von den Niveaulinien von u und v. $\square$

Bestimmung des steilsten Abstiegs

1. Sattelpunkt z_0 heißt einfach, wenn $f'(z_0) = 0$, aber $f''(z_0) \neq 0$

2. Re f besitzt wegen der Eigenschaft eines Sattelpunktes ein Maxima oder Minima im Sattelpunkt

3. $f''(z_0) = |f''(z_0)|e^{i\psi}$ und $z - z_0 = re^{i\theta}$

4. quadratische Potenzterm in der Taylorentwicklung von $f(z)$ um $z = z_0$ kann ausgedrückt werden als

$$\frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 = \frac{|f''(z_0)|}{2} r^2 e^{i(2\theta+\psi)}$$

5. Re f erreicht seinen steilsten Abstieg bei z_0, wenn θ so gewählt wird, dass $e^{i(2\theta+\psi)} = -1$ oder entlang des Pfades, wo $\theta = -\frac{\psi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$

Dichtefunktionen - Proposition 3.1 (Daniels 1954)

Sei $M(z) = E[e^{zX}]$ und $\kappa(z) = logM(z)$ die jeweilige Momenterzeugendefunktion und die Kumulantenerzeugendefunktion einer Zufallsvariable X, die in einem offenen vertikalen Streifen $\{z \in \mathbb{C} : \alpha_- < \text{Re}\, z < \alpha_+\}$ analytisch sind, wobei $\alpha_- < 0$ und $\alpha_+ > 0$. Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die die gleiche Momenterzeugendefunktion $M(z)$ besitzen. $p_{\overline{X}}$ bezeichne die Dichtefunktion des Stichprobenmittelwertes $\overline{X}$, wobei $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Die Sattelpunkt-Approximation der 2.Ordnung für $p_{\overline{X}}(x)$ ist gegeben durch

$$p_{\overline{X}}(x) \approx p_{\overline{X}}^{(2)}(x) = \frac{\sqrt{n}e^{n[\kappa(\hat{z})-\hat{z}x]}}{\sqrt{2\pi\kappa''(\hat{z})}}\left\{1 + \frac{1}{8n}\left[\lambda_4(\hat{z}) - \frac{5}{3}\lambda_3^{\frac{2}{3}}(\hat{z})\right]\right\}, \tag{15}$$

wobei $\lambda_3(\hat{z}) = \frac{\kappa''(\hat{z})}{\kappa(\hat{z})^{\frac{3}{2}}}$ und $\lambda_4(\hat{z}) = \frac{\kappa^{(4)}(\hat{z})}{\kappa''(\hat{z})^2}$; und $\hat{z}$ die eindeutige reelle Wurzel ist, die die Sattelpunktgleichung löst:

$$\kappa'(z) = x. \tag{16}$$

Anwendung von Prop. 3.1

Wir wenden Proposition 3.1. auf die Gamma-Verteilung an.

1. Dichtefunktion der Gamma-Verteilung:

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad x > 0,$$

   wobei $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

2. Kumulantenerzeugendefkt. der Gamma-Verteilung

$$\kappa(z) = -\alpha \log(1 - z)$$

3. dadurch erhalten wir die Sattelpunktgleichung:

$$\kappa'(z) = \frac{\alpha}{1 - z} = x.$$

4. der eindeutige und einfache Sattelpunkt ist also

$$\hat{z} = 1 - \frac{\alpha}{x}, x > 0$$

5. $\kappa''(\hat{z}) = \frac{x^2}{\alpha}$

6. Wenn man $n = 1$ setzt und 15 anwendet, erhält man die Sattelpunkt-Approximation für die Gamma-Verteilung, die wie folgt lautet:

$$p_{app}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2/\alpha}} \exp(-\alpha \log(1 - \hat{z}) - \hat{z}x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\alpha}}, x > 0.$$

Randwahrscheinlichkeiten - Prop 3.2

(Lugannani and Rice 1980) Sei $\kappa(z)$ die Kumulantenerzeugendefunktion der Zufallsvariable X, die den Voraussetzungen der Proposition 3.1 genügt. Die Sattelpunkt-Approximationsformel für $P[X > x]$ ist dann gegeben durch

$$P(X > x) \approx \begin{cases} 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left[\frac{1}{\hat{z}\kappa''(\hat{z})^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\hat{w}} \right], & x \neq E[X] = \kappa'(0) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\kappa'''(0)}{\kappa''(0)^{3/2}}, & x = E[X] = \kappa'(0) \end{cases} \tag{3.3}$$

wobei $\hat{z}$ die Sattelpunktgleichung (16) erfüllt. $\hat{w}$ ist gegeben durch:

$$\hat{w} = \operatorname{sgn}(\hat{z})\sqrt{2[\hat{z}x - \kappa(\hat{z})]}$$

Man beachte, dass wenn $x = E[X] = \kappa'(0)$ gilt, $\hat{z} = \hat{w} = 0$ ist.
Φ bezeichnet hier die Standnormalverteilungsfunktion und ϕ die dazugehörige Dichtefunktion.

Randerwartungen - Change of measure Approach

Idee: die Randerwartung $E[(X-K)^+]$ wird durch die Randwahrscheinlichkeit ausgedrückt.
Dazu geht man wie folgt vor:

1. $Y = X + L$ und $\mu_X = E[X]$, sodass Y nichtnegativ ist und $\mu_Y = \mu_X + L$ gilt

2. Wir erhalten:

$$E[(X-K)^+] = E[(Y-L-K)\mathbb{1}_{(Y>L+K)}] = E[Y\mathbb{1}_{(Y>L+K)}] - (L+K)P[Y>L+K]$$

3. Nun definieren wir ein neues Maß durch:

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{Y}{\mu_Y}.$$

4. Daraus folgt:

$$E[Y\mathbb{1}_{(Y>L+K)}] = \mu_Y E_Q[\mathbb{1}_{(Y>L+K)}] = \mu_Y Q[Y>L+K].$$

5. Kombiniert man 2. und 4., erhält man:

$$E[(X-K)^{+}] = \mu_Y Q[X > K] - (L+K)P[X > K]$$

6. CGF von X unter P ist durch $\kappa(z) = \log(E[e^{zX}])$ gegeben.

7. $\kappa' = \frac{E[Xe^{zX}]}{E[e^{zX}]}$

8. CGF von X unter Q ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\kappa_Q(z) &= \log\left[\frac{E[(X+L)e^{zX}]}{\mu_Y}\right] \\ &= \log\left(\frac{E[Xe^{zX}] + LE[e^{zX}]}{E[e^{zX}]}\right) + \log E[e^{zX}] - \ln \mu_Y \\ &= \log(\kappa'(z) + L) + \kappa(z) - \ln \mu_Y.\end{aligned}$$

Sattelpunkt-Approximation für Kreditportfolios

gesamter Zufallsverlust ... L (n Kreditschuldnern in einem Kreditportfolio über den Zeithorizont T)
D_i Ausfallindikator für den i-ten Schuldner, $i = 1, 2, ..., n$,
D_i eine Bernuolli-ZV ,die wie folgt definiert ist

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{,wenn der } i\text{-te Schuldner innerhalb des Zeithorizonts T nicht zahlt} \\ 0 & \text{,sonst} \end{cases}$$

Ausfall des i-ten Schuldners wird auch durch den zufälligen Zeitpunkt des Ausfalls $\tau_i, i = 1, 2, ..., n$ charakterisiert. für festes T gilt, dass $D_i = \mathbb{1}_{(\tau_i \leq T)}$
p_i sei die marginale Ausfallwahrscheinlichkeit des i-ten Schuldners, dann ist $p_i = P[Di = 1]$
w_i ... effektive Ausfallrisiko des i-ten Schuldners
der zufällige Ausfallverlust Ldes Portfolios mit n Kreditschuldnern innerhalb des Zeithorizonts T ist gegeben durch

$$L = \sum_{i=1}^{n} w_i D_i.$$

Value-at-Risk

VaR eines Kreditportfolios ist als das α-Quantil von L definiert:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{l \geq 0 : P[L \leq l] \geq \alpha\}$$

intuitive Interpretation:

$$F_L(\text{VaR}_\alpha(L)) = \alpha. \tag{4.3}$$

Da VaR ein Quantil ist, erfüllt er die folgenden Eigenschaften:

1. *Monotonie*

   $$\text{Für } L \leq Y \text{ gilt: } \text{VaR}(L) \leq \text{VaR}(Y)$$

2. *Positive Homogenität*

   $$\text{VaR}(\lambda L) = \lambda \text{VaR}(L), \quad \lambda \geq 0.$$

3. *Translationsinvarianz*

   $$\text{VaR}(L + x) = \text{VaR}(L) + x$$

Expected Shortfall

Für eine stetige Verteilung des Verlustes L ist der ES für ein gegebenes Konfidenzniveau α definiert durch:

$$ES_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha] = \frac{1}{1-\alpha} E[L \mathbb{1}_{L \geq \mathrm{VaR}_\alpha}] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\mathrm{VaR}_\alpha}^{\infty} l f_L(l) dl \qquad (4.6a)$$

wobei $f_L(l)$ die Dichtefunktion von L ist.

Die Beziehung zwischen $ES(L)$ und $\mathrm{VaR}(L)$ sieht folgendermaßen aus:

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(L) du.$$

Herleitung des ES mittels Sattelpunkt-Approximation

Die Bromwich-Integraldarstellung von $E[L\mathbb{1}_{\{L\geq \mathrm{VaR}_\alpha\}}]$:

$$E[L\mathbb{1}_{\{L\geq \mathrm{VaR}_\alpha\}}] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \kappa_L'(z)\frac{e^{\kappa_L(z)-zt}}{z}\,dz, \qquad \gamma \in (0,\alpha_+),$$

wobei t den VaR_α bezeichnet.

Die Herleitung von Martin(2006):

1. Integrand ersetzen durch:

$$\kappa_L'(z)\frac{e^{\kappa_L(z)-zt}}{z} = \left[\frac{\mu_L}{z} + \frac{\kappa_L'(z)-\mu_L}{z}\right]e^{\kappa_L(z)-zt}.$$

2. Integral des 1.Ausdruckes:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mu_L\frac{e^{\kappa_L(z)-zt}}{z}\mathrm{d}z = \mu_L P[L>t].$$

Herleitung des ES mittels Sattelpunkt-Approximation

3. Für den zweiten Term wird der Integrationsweg transformiert, sodass er durch den Sattelpunkt $\hat{z}$ geht, wobei $\kappa_L' = t$. Wir approximieren die Integration des zweiten Terms wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{z}-i\infty}^{\hat{z}+i\infty} \frac{\kappa_L'(z) - \mu_L}{z} e^{\kappa_L(z)-zt}\,dz &\approx \frac{t-\mu_L}{\hat{z}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{z}-i\infty}^{\hat{z}+i\infty} e^{\kappa_L(z)-zt}\,dz \\ &= \frac{t-\mu_L}{\hat{z}} f_L(t).\end{aligned}$$

4. Durch Zusammenfügen der Ergebnisse erhält Martin (2006) die folgende Sattelpunkt-Approximationsformel für ES:

$$E[L\mathbb{1}_{\{L\geq \mathrm{VaR}_\alpha\}}] \approx \mu_L P[L>t] + \frac{t-\mu_L}{\hat{z}} f_L(t), \quad t = \mathrm{VaR}_\alpha.$$

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!