SEMINARARBEIT

No Arbitrage in Insurance

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Karoline Vonach
Matrikelnummer: 11825340

Wien, am 27. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Seminararbeit befasst sich mit dem Begriff der Arbitrage auf einem Versicherungs-Finanzmarkt, einem Marktmodell bei dem sowohl mit Anlagen als auch mit Versicherungsverträgen gehandelt wird. Die Arbeit basiert zum großen Teil auf dem im Jahr 2020 veröffentlichten Paper *No arbitrage in insurance and the QP-rule* von P. Artzner, K. Eisele, und T. Schmidt.

Unter einer Arbitragemöglichkeit versteht man eine Handelsmöglichkeit, bei der ohne Verlustrisiko Profit gemacht werden kann. Das Ziel der Arbeit ist diese auf einem Versicherungs-Finanzmarkt genau zu definieren und in weiterer Folge eine obere Schranke für Prämien einzuführen, sodass die dazugehörigen Versicherungsverträge für das Versicherungsunternehmen keine Arbitragemöglichkeit sind. Zusätzlich wird die QP Regel, eine einfache marktkonsistente Bewertungsmöglichkeit von Versicherungsverträgen vorgestellt und anhand eines Beispiels illustriert.

Zunächst werden in Kapitel 2 die benötigten finanzmathematischen Grundlagen und deren Notation wiederholt. In Kapitel 3 wird der hier verwendete Versicherungs-Finanzmarkt genau beschrieben und die Insurance Finance Arbitrage (IFA) darauf definiert. Kapitel 4 stellt die QP Regel vor und beweist deren Eindeutigkeit mit der Proposition 4.1 über die Erweiterung eines Maßes auf eine größere Sigmaalgebra. Die Arbitragefreiheit der QP Regel wird dann in Kapitel 5 mit dem Theorem 5.1 bewiesen, welches arbitragefreie Prämien für Versicherungsverträge nach oben beschränkt. Abschließend werden in Kapitel 6 die Erkenntnisse dieser Seminararbeit zusammengefasst sowie ein Ausblick auf weitere Anwendungen dieses Modells gegeben.

2 Finanzmathematische Grundlagen

Dieses Kapitel dient zur Wiederholung der finanzmathematischen Grundlagen, auf denen die weitere Arbeit aufbaut. Es orientiert sich an Kapitel 1 und 5 des Buchs *Stochastic Finance* von Föllmer H. und Schied A. (2004).

2.1 Ein-Perioden Modell

2.1.1 Grundbegriffe

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit $d+1$ *Anlagen*, wobei $d \in \mathbb{N}$. In einem Ein-Perioden Modell können diese nur zum Zeitpunkt $t=0$ ge- oder verkauft werden. Mit

$$\bar{\pi} = (\pi^0, \pi^1, .., \pi^d) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$$

bezeichnen wir den *Preis* der Anlagen zum Zeitpunkt $t=0$. Um die Situation auf einem realen Markt zu modellieren gehen wir von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aus, auf dem sich der *Wert* der Anlagen zum Zeitpunkt $t=1$ als nichtnegative Zufallsvariable

$$\bar{S} = (S^0, S^1, .., S^d)$$

darstellen lässt.

Zusätzlich nehmen wir an, dass die Anlage S_0 risikolos ist, d.h. es gilt

$$\pi^0 = 1 \quad \text{und} \quad S^0 = 1 + r$$

wobei r für den Zinssatz steht, der hier konstant und zum Zeitpunkt $t=0$ bekannt ist. Außerdem wird $S^0 > 0$ angenommen.

2.1.2 Portfolios und Arbitrage

Ein Investment mit *Portfolio*

$$\bar{\xi} = (\xi^0, \xi^1, .., \xi^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

bedeutet, dass zum Zeitpunkt $t=0$ genau ξ^i Einheiten der i-ten Anlage erworben werde. Der *Portfoliopreis* dieses Portfolios ist dann

$$\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = \sum_{i=0}^{d} \xi^i \pi^i$$

und der *Portfoliowert* zum Zeitpunkt $t=1$ ist die Zufallsvariable

$$\bar{\xi} \cdot \bar{S} = \sum_{i=0}^{d} \xi^i S^i.$$

Somit hat das Portfolio abhängig vom eingetretenen Ereignis $\omega \in \Omega$ den Wert

$$\bar{\xi} \cdot \bar{S}(\omega) = \sum_{i=0}^{d} \xi^i S^i(\omega).$$

Kommen wir nun zur Definition der *Arbitrage* auf diesem Marktmodell.

Definition 2.1 (Arbitrage im Ein-Perioden Modell des Finanzmarkts)**.** *Ein Portfolio $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ ist eine* Arbitragemöglichkeit *wenn $\bar{\pi} \cdot \bar{\xi} \leq 0$, $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0$ P-fast sicher und $P[\bar{\xi} \cdot \bar{S} > 0] > 0$ gilt.*

Bei einem derartigen Portfolio würde es sich um eine risikolose Gewinnmöglichkeit handeln, da durch die ersten beiden Eigenschaften der Portfoliowert zum Zeitpunkt $t = 1$ P-fast sicher größer gleich dem Portfoliopreis ist und zusätzlich durch die dritte Bedingung $P[\bar{\xi} \cdot \bar{S} > 0] > 0$ eine positive Wahrscheinlichkeit besteht, dass der Wert größer als der Preis ist.

2.1.3 Charakterisierung arbitragefreier Märkte

Für den folgenden essentiellen Satz benötigen wir die Definitionen 2.2 und 2.3.

Definition 2.2 (Äquivalente Maße)**.** *Zwei Maße P und P^* sind äquivalent auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ wenn sie die gleiche Nullstellenmenge haben. Das bedeutet für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt*

$$P[F] = 0 \leftrightarrow P^*[F] = 0$$

Wir schreiben dann auch $P^* \approx P$.

Definition 2.3 (Risikoneutrales Maß oder Martingalmaß)**.** *Ein Wahrscheinlichkeitmaß P^* auf $(\Omega, \mathcal{F})$ wird als risikoneutral bzw. als Martingalmaß bezeichnet, wenn für alle $i \in \{0, ..d\}$*

$$\pi^i = E_{P^*}\left[\frac{S^i}{1+r}\right]$$

gilt. Mit

$$\mathcal{M}(P) := \{P^* | P^* risikoneutral, P^* \approx P\}$$

wird die Menge aller äquivalenten risikoneutralen Maße zu P bezeichnet.

Die Arbitragefreiheit eines Marktmodells lässt sich nun durch folgende Eigenschaft charakterisieren.

Satz 2.4. *Ein Marktmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn $\mathcal{M}(P) \neq \emptyset$.*

In einem arbitragefreien Markt gibt es auch die Möglichkeit zusätzliche Finanzinstrumente, sogenannte *Zahlungsansprüche* arbitragefrei zu bewerten.

Definition 2.5 (Zahlungsanspruch)**.** *Eine Zufallsvariable C auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist ein Zahlungsanspruch wenn gilt*

$$0 \leq C < \infty$$

P fast sicher.

In einem arbitragefreien Markt kann die Menge aller arbitragefreien Preise $\Pi(C)$ für Zahlungsanspruch C durch folgende Menge dargestellt werden.

Satz 2.6. *Für $\mathcal{P} \neq \emptyset$, C Zahlungsanspruch gilt*

$$\Pi(C) = \left\{ E_{P^*}\left[\frac{C}{1+r}\right] | P^* \in \mathcal{M}(P) : E_{P^*}[C] < \infty \right\}$$

2.1.4 Vollständiger Markt

Definition 2.7 (Vollständiger Markt)**.** *Einen Finanzmarkt bezeichnen wir als vollständig wenn es genau ein äquivalentes risikoneutrales Maß gibt. Es muss $|\mathcal{M}(P)| = 1$ gelten.*

Vollständige Finanzmärkte sind nach Satz 2.4 arbitragefrei und haben folgende wichtige Eigenschaft:

Satz 2.8. *Auf einem vollständigen Finanzmarkt gilt $|\Pi(C)| = 1$, d.h. jeder Zahlungsanspruch hat genau einen arbitragefreien Preis.*

Da es nur ein $P^* \in \mathcal{M}(P)$ gibt, folgt dieser Satz aus Satz 2.6.

2.2 Mehr-Perioden Modell

In einem T-periodischen Modell des Finanzmarkts können zu jedem Zeitpunkt $t \in \{0, .. T-1\}$ Aktien erworben und verkauft werden. Wir betrachten weiterhin $d+1$ Anlagen, wobei nun der *Preis* der Anlage i zum Zeitpunkt t mit der nichtnegativen Zufallsvariable S_t^i bezeichnet weit. Zusätzlich zu unserem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ haben wir nun eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,..T\}}$. Einefiltration ist eine aufsteigende Folge von Sigmaalgebren:

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset .. \subset \mathcal{F}_T$$

Unter der Sigmaalgebra $\mathcal{F}_t$ stellen wir uns alle zum Zeitpunkt t bekannten Informationen vor. Dementsprechend nehmen wir an, dass wir zum Zeitpunkt $t = 0$ keine Information haben und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ gilt. Zum Zeitpunkt T nehmen wir hingegen an, dass wir alles wissen und $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ hält.

Somit gilt auch, dass $\bar{S}_t = (S_t^0, S_t^1, ..S^d)$ mit $\mathcal{F}_t$ messbar ist. Die Preise sind dementsprechend ein adaptierter stochastischer Prozess.

Es wird analog zum Ein-Perioden Modell angenommen, dass S^0 eine risikolose Anlage ist und nur von den vorhersehbaren Zinssätzen r_t der einzelnen Perioden abhängt:

$$S_t^0 = \prod_{k=1}^{t}(1 + r_k)$$

Unter der Annahme dass $S_t^0 > 0$ P-fast sicher, definieren wir den *diskontierten Preisprozess*:

$$X_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad t = 0, ..T, \quad i = 0, ..d \tag{1}$$

2.2.1 Handelsstrategien und Arbitrage

Mit dem $\mathbb{R}^{d+1}$-wertigen stochastischen Prozess $\bar{\xi} = (\xi_t^0, \xi_t^1, .., \xi_t^d)_{t \in \{0,..T\}}$ bezeichnen wir eine *Handelsstrategie* wenn ξ bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,..T\}}$ vorhersehbar ist, das bedeutet mit ξ_t wird am Anfang der Periode $(t, t+1)$ die Anzahl der währenddessen gehaltenen Anlagen bestimmt.

Der *Wertprozess* V_t des Portfolios ξ_t hat folgende Form:

$$\begin{aligned} V_0 &= \bar{\xi}_1 \cdot \bar{X}_0 \\ V_t &= \bar{\xi}_t \cdot \bar{X}_t, \quad t = 1, ..T \end{aligned}$$

Für die Definition der *Arbitrage* benötigen wir noch folgende Definition:

Definition 2.9 (Selbstfinanzierende Handelsstrategie)**.** *Eine Handelsstrategie $\bar{\xi}$ heißt selbstfinanzierend wenn für alle $t \in \{1, ..\ T-1\}$*

$$\bar{\xi}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{\xi}_{t+1} \cdot \bar{S}_t$$

gilt.

Definition 2.10. *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ist eine Arbitragemöglichkeit wenn für ihren Wertprozess V die Bedingungen $V_0 \leq 0$, $V_T \geq 0$ P f.s. und $P[V_T > 0] > 0$ gelten.*

2.2.2 Charakterisierung arbitragefreier Märkte

Analog zum Ein-Perioden Modell gilt

Satz 2.11. *Ein Marktmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn $\mathcal{M}(P) \neq \emptyset$.*

Im mehrperiodischen Fall werden Martingalmaße folgendermaßen definiert:

Definition 2.12 (Martingalmaß)**.** *Ein Wahrscheinlichkeismaß P^* ist ein Martingalmaß wenn für den diskontierten Preisprozess X gilt*

$$E_{P^*}[X_t^i] < \infty \quad und \quad X_t^i = E_{P^*}[X_t^i|\mathcal{F}_s] \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad i = 1, ..d.$$

Vollständige Märkte werden ebenfalls analog zum Ein-Perioden Modell definiert.

3 Definition der Insurance Finance Arbitrage

In dieser Arbeit wird ein erweiterter Finanzmarkt betrachtet auf dem zusätzlich von Versicherungsunternehmen auch Versicherungsicherungsverträge erworben werden können. Im folgenden Kapitel wird dieser Versicherungs-Finanzmarkt und in weiterer Folge auch Arbitrage in diesem Modell beschrieben.

3.1 Notwendigkeit einer neuen Definition

Es ist notwendig den Markt, den Preis und vor allem Arbitrage im Zusammenhang mit Versicherungen neu zu definieren, da sich diese grundlegend von den in Kapitel 2 definierten und am regulären Finanzmarkt gehandelten Anlagen unterscheiden.

Im Gegensatz zum Finanzmarkt ist auf dem erweiterten Markt nicht jeder Marktteilnehmer gleichwertig, da Versicherungsverträge nicht von jedem beliebig gekauft und verkauft werden. Es wird zwischen den Versicherungsnehmern, den Käufern der Versicherungsverträge, und den Versicherungsunternehmen, den Verkäufern der Versicherungsverträge, unterschieden.

Weiters unterscheiden sich diese beiden Gruppen dadurch, dass sie unterschiedliche Informationen besitzen. Es wird (optional) angenommen, dass die Versicherungsunternehmen zusätzliches Wissen im Bezug auf die Entwicklung der Versicherungen haben. Diese zusätzliche Information wird im Folgenden im Fall einen Ein-Perioden Modells mit der Sigmaalgebra $\mathcal{G}$ und im Mehr-Perioden Modell mit der Filtration $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_t)_{t\in\{0,..T\}}$ bezeichnet. Die öffentlich zugängliche Information, die Angaben zum Finanzmarkt aber auch allgemein bekannte Informationen zu Versicherungen, wie etwa Sterbetafeln enthalten kann, wird mit $\mathcal{F}$ oder $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,..T\}}$ bezeichnet. Es gilt $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ für alle $t \in \{0, .. T\}$.

Es ist auch zu beachten, dass die Verpflichtungen aus einem einmal eingegangenen und durch die Prämie bezahlten Versicherungsvertrag eingehalten werden müssen und der Vertrag nicht vorzeitig wieder verkauft werden kann.

Der Grund, weshalb wir den Kauf bzw. Verkauf von Versicherungsverträgen in den Finanzmarkt integrieren und nicht als einen eigenständigen Markt betrachten ist, dass Versicherungen in starkem Zusammenhang mit dem Finanzmarkt stehen. Zum einen spielt der Zinssatz bei fast allen und insbesondere bei längerfristigen Versicherungen eine Rolle und zum Anderen gibt es auf dem Versicherungsmarkt auch einige Hybridprodukte wie etwa die fond- oder indexgebundene Lebensversicherung.

3.2 Annahmen zum Marktmodell

Um eine Definition von Arbitrage und im Folgenden auch eine Charakterisierung von arbitragefreien Prämien zu ermöglichen, nehmen wir Folgendes für das Modell des Versicherungs-Finanzmarkts an:

- Es handelt sich um ein zeitdiskretes Mehr-Perioden-Modell: $t \in \{0, .. T\}$.
- Dem Modell liegt ein arbitragefreier Finanzmarkt mit endlich vielen Anlagen zugrunde.
- Wir betrachten den Fall eines einzelnen Versicherungsunternehmens.
- Es handelt sich ausschließlich um Versicherungsverträge mit zu Vertragsbeginn eingezahlter Einmalprämie.
- Zu jedem Zeitpunkt $t \in \{0, ..T-1\}$ kann der Versicherer unendlich viele Verträge abschließen.
- Wir betrachten die Nettoprämie.
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind zum Zeitpunkt T alle Ansprüche gezahlt.

3.2.1 Die Versicherungsverträge

Im Folgenden wird die *Leistung* eines zum Zeitpunkt t von Versicherungsnehmer i abgeschlossenen Versicherungsvertrags mit $X^i_{t,T}$ bezeichnet. $X^i_{t,T}$ ist eine $\mathcal{G}_T$ messbare, nichtnegative Zufallsvariable. Die *Prämie* des Versicherungsvertrages $X_{T,t}$ wird mit p_t bezeichnet. Es handelt sich um eine Nettoeinmalprämie.

Bedingt auf die Sigmaalgebra $\mathcal{G}_{t,T} := \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{F}_T)$, welche die öffentlich zugängliche Information zum Zeitpunkt T sowie die dem Versicherer bekannte Information zum Zeitpunkt t enthält, treffen wir folgende Annahmen zu den Versicherungen. Diese werden im Folgenden benötigt um arbitragefreie Preise zu charakterisieren.

Annahme 3.1. *Für alle* $t \in \{0, ..T\}$ *gilt:*

- $X^1_{t,T}, X^2_{t,T}, ...$ *unabhängig bedingt auf* $\mathcal{G}_{t,T}$
- $E[X^i_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}] = E[X_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}] \quad \forall i \in \mathbb{N}$
- $Var[X^i_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}] = Var[X_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}] < \infty \quad \forall i \in \mathbb{N}$

3.2.2 Die Versicherungsportfoliostrategie

Da angenommen wird, dass der Versicherer unendlich viele Verträge abschließen darf, wird das Versicherungsportfolio als Grenzwert von endlichen *Allokationen* dargestellt.

Eine *Allokation zum Zeitpunkt t* wird mit $\psi_t = (\psi^i_t)_{i\geq 0}$ bezeichnet und ist eine nichtnegative, endlichdimensionale, $\mathcal{G}_t$-messbare Zufallsvariable. Unter ψ^i_t können wir uns die Größe des zum Zeitpunkt t mit Versicherungsnehmer i abgeschlossenen Versicherungsvertrages vorstellen. Endlichdimensional bedeutet in diesem Kontext, dass ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $i > m$ gilt, dass $\psi^i_t = 0$ fast sicher.

Die *Verpflichtung* des Versicherungsunternehmen zum Zeitpunkt t mit Allokation ψ_t wird mit $\sum_{i\geq 1} \psi^i_t X^i_{t,T}$ bezeichnet und entspricht der Summe der Leistungen der zu diesem Zeitpunkt abgeschlossenen Verträge. $\sum_{i\geq 1} \psi^i_t p_t$ ist der *Wert* des Versicherungsunternehmen.

Der Profit und Loss (P & L) einer *Allokation* $\psi = (\psi_t)_{t<T}$ aus Sicht des Versicherungsunternehmen

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i\geq 1} \psi^i_t (p_t - X^i_{t,T}) =: V^I_T(\psi) \tag{2}$$

ist die Differenz von der Summe aller Leistungen und der Summe aller Prämien.

Eine *Versicherungsportfoliostrategie* $\psi = (\psi^n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge von endlichen Allokationen. Für diese werden folgende Zulässigkeitsannahmen getroffen:

Annahme 3.2. *Für $\psi = (\psi^n)_{n\geq 1}$ gilt:*

(i) Es existiert ein $C > 0$, sodass

$$||\psi_t^n|| := \sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i} \leq C \tag{3}$$

für alle $0 \leq t < T$.

(ii) Es existiert ein $\gamma_t > 0 \in \mathcal{F}_t$, sodass

$$||\psi_t^n|| \to \gamma_t \quad \textit{fast sicher} \tag{4}$$

für alle $0 \leq t < T$.

(iii) Es existiert eine $\mathbb{R}$ - wertige Zufallsvariable $V = V^\phi$, sodass

$$lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n) = V \tag{5}$$

P-fast sicher.

3.2.3 Der Finanzmarkt

Das Finanzmarktteil des Marktmodells ist in Bezug auf die Filtration $\mathbb{F}$ arbitragefrei. Dadurch wird nicht zwingend angenommen, dass er das im Bezug auf $\mathbb{G}$ sein muss. Es wird jedoch angenommen, dass das Versicherungsunternehmen nur unter Verwendung der Information $\mathbb{F}$ auf dem Finanzmarkt handelt, da es sonst einen unfairen Vorteil (insider trading) gegenüber den anderen Marktteilnehmern hätte.

Analog zur Versicherungsportfoliostrategie wird der P & L einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie ξ folgendermaßen definiert:

$$V_T^F(\phi) = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{d} \xi_t^i \Delta S_{t,T}^i \quad \text{mit} \quad \Delta S_{t,T} := S_{t+1} - S_t$$

3.3 IFA

Auf einem Versicherungs-Finanzmarkt (X, p, S), dessen Grundbausteine die Leistungen der Versicherungsverträge X, die Prämien p und die Anlagen S sind, wird die Insurance Finance Arbitrage wie folgt definiert.

Definition 3.3. *Auf (X, p, S) existiert IFA wenn es eine Versicherungsportfoliostrategie $(\phi^n)_{n\geq 1}$, die Annahme 3.2 erfüllt, und eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ξ gibt, sodass*

$$lim_{n\to\infty} V_T^I(\phi^n) + V_T^F(\xi) \in L_0^+ \backslash \{0\}$$

Es sei zu beachten, dass es eine Asymmetrie zwischen der Versicherungsportfoliostrategie und der Handelsstrategie gibt: Erstere ist ein Grenzwert und es ist somit erlaubt, dass unendlich viele Verträge abgeschlossen werden dürfen. Außerdem ist die Versicherungsportfoliostrategie nichtnegativ, da Versicherungsunternehmen die Verträge nur verkaufen dürfen. Es handelt sich bei dieser Definition um Arbitrage aus Sicht des Versicherungsunternehmens, nicht aus Sicht des Versicherungsnehmers.

4 Die QP Regel

Im folgenden Kapitel wird die QP Regel vorgestellt. Die QP Regel ist eine einfache marktkonsistente Bewertungsregel für Versicherungsverträge. Diese baut darauf auf, dass wir auf unserem Finanzmarkt ein äquivalentes risikoneutrales Maß Q haben, welches durch das sogenannte $Q \odot P$ Maß auf den größeren Versicherungs-Finanzmarkt unter dem Maß P erweitert wird und uns so eine arbitragefreie Bewertung von Versicherungsverträgen ermöglicht.

4.1 Erweiterung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf eine größere Sigmaalgebra

Zunächst zeigen wir eine Proposition zu besagter Maßerweiterung.

Proposition 4.1. *Seien $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ Sigmaalgebren auf Ω, P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{G})$, Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und es gelte $Q \approx P|_{\mathcal{F}}$.*

Dann existiert ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \odot P$ für das $Q \odot P = Q$ auf $\mathcal{F}$ gilt und das für alle $G \in \mathcal{G}$ $Q \odot P(G|\mathcal{F}) = P(G|\mathcal{F})$ erfüllt. Weiters gilt für alle $\mathcal{G}$ messbaren Funktionen, d.h. alle Zufallsvariablen $X \geq 0$:

(i) Für alle Sigmaalgebren $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$:

$$E_{Q\odot P}[X|\mathcal{H}] = E_Q[E_P[X|\mathcal{F}]|\mathcal{H}]$$

(ii) Für alle Sigmaalgebren $\mathcal{F} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$:

$$E_{Q\odot P}[X|\mathcal{H}] = E_P[X|\mathcal{H}]$$

Für den Beweis benötigen wir noch folgenden Begriff aus der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, siehe auch [2, Definition 2.4].

Definition 4.2 (Bedingte Erwartung). *Sei ξ eine integrierbare Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichtkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\mathcal{H}$ eine Subsigmaalgebra von $\mathcal{F}$. Dann ist die bedingte Erwartung von ξ gegeben $\mathcal{H}$ definiert als die Zufallsvariable $E[\xi|\mathcal{H}]$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) $E[\xi|\mathcal{H}]$ ist $\mathcal{H}$ messbar.

(ii) Für alle $H \in \mathcal{H}$:

$$\int_H E[\xi|\mathcal{H}]dP = \int_H \xi dP. \tag{6}$$

Außerdem benutzen wir folgende Sätze aus [4]:

Satz 4.3 (Satz von Radon-Nikodym). *$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sei ein sigmaendlicher Maßraum, und ν ein weiteres Maß auf $\mathcal{F}$. ν ist genau dann als unbestimmtes Integral*

$$\nu(F) = \int_F f d\mu \quad \forall F \in \mathcal{F}$$

darstellbar, wenn ν absolutstetig bezüglich μ ist, das bedeutet alle Nullmengen von ν sind auch Nullmengen von μ. Die Funktion

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

nennen wir Radon-Nikodym Dichte und sie ist μ-fast überall eindeutig bestimmt und nichtnegativ.

Satz 4.4 (Approximationssatz für messbare Funktionen). *Jede messbare Funktion f kann als punktweiser Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen f_n dargestellt werden. Ist f zusätzlich nichtnegativ, dann kann die Folge f_n monoton nichtfallend gewählt werden.*

Satz 4.5 (Satz von der monotonen Konvergenz). *Wenn $f_n \geq 0$ eine monoton nichtfallende Folge ist, so gilt*

$$\lim \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu.$$

Beweis von Proposition 4.1. Sei L die Radon-Nikodym Dichte von Q nach $P|_{\mathcal{F}}$. Das bedeutet für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt

$$Q[F] = \int_F L dP = E_P[\mathbb{1}_F L]. \tag{7}$$

Wir definieren $Q \odot P$ auf $(\Omega, \mathcal{G})$ als

$$d(Q \odot P) = LdP$$

sodass für alle $G \in \mathcal{G}$

$$Q \odot P(G) = E_{Q \odot P}[\mathbb{1}_G] = \int \mathbb{1}_G dQ \odot P = \int \mathbb{1}_G L dP = E_P[\mathbb{1}_G L]$$

gilt. Durch diese Definition gilt $Q \odot P = Q$ auf der Sigmaalgebra $\mathcal{F}$.

Um die zweite Eigenschaft $Q \odot P(G|\mathcal{F}) = P(G|\mathcal{F})$ zu beweisen, betrachten wir die Definition der bedingten Erwartung 4.2 für $Q \odot P(G|\mathcal{F}) = E_{Q \odot P}[\mathbb{1}_G|\mathcal{F}]$ für beliebiges $G \in \mathcal{G}$: $P(G|\mathcal{F})$ ist klarerweise $\mathcal{F}$ messbar. Für den zweiten Teil gilt für alle $F \in \mathcal{F}$ aufgrund der Definition der bedingten Erwartung von $E_P[\mathbb{1}_G L|\mathcal{F}]$

$$\int_F \mathbb{1}_G d(Q \odot P) = \int_F \mathbb{1}_G L dP = \int_F E_P[\mathbb{1}_G L|\mathcal{F}] dP. \tag{8}$$

Da L $\mathcal{F}$ messbar ist gilt

$$(8) = \int_F LP(G|\mathcal{F}) dP = \int_F P(G|\mathcal{F}) d(Q \odot P) \tag{9}$$

und somit $Q \odot P(G|\mathcal{F}) = P(G|\mathcal{F})$.

Um die Eindeutigkeit des konstruierten Maßes zu beweisen nehmen wir an, dass es eine weiteres Maß R gibt, für das gilt $R = Q$ auf $\mathcal{F}$ und für alle $G \in \mathcal{G}$ gilt $R(G|\mathcal{F}) = P(G|\mathcal{F})$. Dann gilt mit der Definition der bedingten Erwartung 4.2 für alle $G \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} R(G) = E_R[\mathbb{1}_G] &= \int \mathbb{1}_G dR = \int E_R[\mathbb{1}_G|\mathcal{F}] dR = \int R(G|\mathcal{F}) dR \\ &= \int P(G|\mathcal{F}) dR = \int P(G|\mathcal{F}) dQ = \int LP(G|\mathcal{F}) dP = \int \mathbb{1}_G L dP \\ &= \int \mathbb{1}_G dQ \odot P = Q \odot P(G) \end{aligned}$$

und somit ist $Q \odot P = R$ und die Eindeutigkeit ist bewiesen.

Um Eigenschaft (i) zu beweisen, zeigen wir die Aussage zunächst für die Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_G$, $G \in \mathcal{G}$. Wir betrachten wieder die Definition der bedingten Erwartung und stellen fest dass $E_Q[E_P[\mathbb{1}_G|\mathcal{F}]|\mathcal{H}]$ per Definition $\mathcal{H}$ messbar ist. Für beliebige $H \in \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ gilt auch $H \in \mathcal{F}$. Somit gilt analog zu (8) und (9)

$$\int_H \mathbb{1}_G d(Q \odot P) = \int_H E_P[\mathbb{1}_G|\mathcal{F}] L dP \tag{10}$$

Da $E_P[\mathbb{1}_G|\mathcal{F}]$ und H $\mathcal{F}$ messbar sind und mithilfe der Definition der bedingten Erwartung gilt

$$(10) = \int_H E_P[\mathbb{1}_G|\mathcal{F}]dQ = \int_H E_Q[E_P[\mathbb{1}_G|\mathcal{F}]|\mathcal{H}]dQ. \tag{11}$$

Da Q und $Q \odot P$ auf $\mathcal{F}$ äquivalent sind, haben wir

$$(11) \int_H E_Q[E_P[\mathbb{1}_G|\mathcal{F}]|\mathcal{H}]dQ \odot P$$

und somit folgt die Aussage für $\mathbb{1}_G$. Da der bedingte Erwartungswert bzw. das Integral linear ist, gilt die Aussage auch für Treppenfunktionen. Nach dem Aproximationssatz 4.4 lässt sich die Zufallsvariable $X \geq 0$ durch eine monoton nichtfallende Funktion von Treppenfunktionen darstellen, womit die Aussage mit dem Satz der monotonen Konvergenz 4.5 auch für $X \geq 0$ folgt.

Für Eigenschaft (ii) beweisen wir Aussage auch zuerst für Indikatorfunktionen. Analog zu (8) und (9) gilt für $H \in \mathcal{H}, \mathcal{F} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\int_H \mathbb{1}_G d(Q \odot P) &= \int_H \mathbb{1}_G L dP = \int_H E_P[\mathbb{1}_G L|\mathcal{H}]dP = \int_H L E_P[\mathbb{1}_G|\mathcal{H}]dP \\ &= \int_H E_P[\mathbb{1}_G|\mathcal{H}]d(Q \odot P)\end{aligned}$$

L darf aus dem Erwartungswert herausgezogen werden da da L $\mathcal{F}$ messbar und somit $\mathcal{H}$ messbar ist. Wie in (i) folgt Die Aussage für Treppenfunktionen und mit 4.4 und 4.5 auch für beliebiges $X \geq 0$. □

4.2 Die Ein-Perioden QP Regel

Setzen wir in Proposition 4.1 (i) $\mathcal{H} := \{\emptyset, \Omega\}$ so folgt die Ein-Perioden QP Regel:

$$E_{Q \odot P}[X] = E_Q[E_P[X|\mathcal{F}]] \tag{12}$$

In unserem Marktmodell können wir diese Regel zur arbitragefreie Bewertung von Versicherungsverträgen anwenden. Mit der Notation und den Annahmen aus Kapitel 3 gibt es auf dem arbitragefreien Finanzmarkt mit der Sigmaalgebra $\mathcal{F}$ ein äquivalentes risikoneutrales Maß Q: Mit diesem und der QP-Regel können wir alle Versicherungsverträge X auch arbitragefrei bewerten.

Betrachten wir nun eine Beispiel.

Beispiel 4.6. Betrachten wir ein Ein-Perioden Modell, bei dem es auf Finanzseite die drei Zustände g (gut), m (mittel) und s (schlecht) gibt. Auf Versicherungsseite gibt es die Zustände z (Zahlung) und $\bar{z}$ (keine Zahlung). Somit haben wir den Zustandsraum

$$\Omega := \{(g,z),(g,\bar{z}),(m,z),(m,\bar{z}),(s,z),(s,\bar{z})\}.$$

Mit

$$g := \{(g,z),(g,\bar{z})\}, m := \{(m,z),(m,\bar{z})\}, s := \{(s,z),(s,\bar{z})\}$$

definieren wir die Sigmaalgebren $\mathcal{F} := \sigma\{g,m,s\}$ und $\mathcal{G} := \mathcal{P}(\Omega)$.

In unserem Modell gibt es eine einzelne risikobehaftete Anlage S für die $S_0 = 1 = S_1(m)$, $S_1(g) = 1.5$ und $S_1(b) = 0.5$ gilt.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß P hat die Form

$$P = (0.1h, 0.9h, 0.2k, 0.8k, 0.4l, 0.6l)$$

$$\text{mit } h + k + l = 1, h, k, l \in [0,1]$$

Vollständiger Markt: Betrachten wir zunächst einen vollständigen Markt, siehe Kapitel 2.1.4, mit $k = 0$ und $h, l, \in (0,1)$. Das einzige äquivalente risikoneutrale Maß Q hat die Form

$$Q[g] = Q[s] = 0.5.$$

Es folgt

$$P[.|g] = (0.1, 0.9, 0, 0, 0, 0),$$
$$P[.|s] = (0, 0, 0, 0, 0.4, 0.6)$$

und mit der QP Regel (12) folgt für alle Ereignisse $G \in \mathcal{G}$

$$Q \odot P[G] = \mathbb{1}_{\{g\}} Q[g] P[G|g] + \mathbb{1}_{\{s\}} Q[s] P[G|s]$$

und somit dass $Q \odot P = (0.05, 0.95, 0, 0, 0.2, 0.3)$.

Unvollständiger Markt: Betrachten wir einen unvollständigen Markt, also $h, k, l \in (0,1)$: Das äquivalente risikoneutrale Maß Q ist nicht mehr eindeutig bestimmt. Für alle $t \in (0, 0.5)$ existiert das risikoneutrale Maß Q^t mit

$$Q[g] = t, Q[m] = 1 - 2t, Q[s] = t.$$

Es gilt

$$P[.|g] = (0.1, 0.9, 0, 0, 0, 0),$$

$$P[.|m] = (0, 0, 0.2, 0.8, 0, 0),$$
$$P[.|s] = (0, 0, 0, 0, 0.4, 0.6)$$

und mit der QP Regel (12) folgt für alle Ereignisse $G \in \mathcal{G}$

$$Q^t \odot P[G] = \mathbb{1}_{\{g\}} Q^t[g] P[G|g] + \mathbb{1}_{\{m\}} Q^t[m] P[G|m] + \mathbb{1}_{\{s\}} Q^t[s] P[G|s]$$

und somit dass $Q^t \odot P = (0.1t, 0.9t, 0.2(1-2t), 0.8(1-2t), 0.4t, 0.6t)$.

4.3 Die Mehr-Perioden QP Regel

Betrachten wir nun ein mehrperiodisches Marktmodell, d.h. zu allen Zeitpunkten $t \in \{0, .. \, T-1\}$, $T \in \mathbb{N}$ können Versicherungsverträge erworben werden und Anlagen ge- bzw. verkauft werden. Die öffentlch zugänglichen Informationen zu den Zeitpunkten $t \in \{0, ..T\}$ werden mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,..T\}}$ bezeichnet. Die Filtration $(\mathcal{G}_t)_{t \in \{0,..T\}}$ ist diese um die den Versicherungsunternehmen vorenthaltenen Informationen erweitert. Auf der größten Sigmaalgebra $\mathcal{G}_T$ ist das Maß P gegeben.

Wenden wir hier 4.1(i) mit $\mathcal{H} = \mathcal{F}_t$ für einen zum Zeitpunkt t abgeschlossenen Versicherungsvertrag $X_{t,T}$ an, erhalten wir

$$E_{Q \odot P}[X_{t,T} | \mathcal{F}_t] = E_Q[E_P[X_{t,T} | \mathcal{F}_T] | \mathcal{F}_t]$$

wobei Q ein risikoneutrales Maß auf dem Finanzmarkt $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ ist.

4.4 Marktkonsistenz

Eine *Bewertungsregel* $\Pi = (\Pi_t)_{t \in \{0,..T\}}$ ist eine Familie von Funktionen

$$\Pi_t : \mathcal{L}_0(\mathcal{G}_T) \to \mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t).$$

Das bedeutet eine Bewertungsregel kann für alle $t \in \{0, .. \, T\}$ eine $\mathcal{G}_T$ messbare Zufallsvariable auf einen am Finanzmarkt zum Zeitpunkt t messbaren Wert abbilden.

Wir bezeichnen jene Bewertungsregeln als *marktkonsistent*, die für beliebige $H \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}_T)$ und $H' \in \mathcal{L}_0(\mathcal{G}_T)$ und für alle $t \in \{0, .. \, T\}$

$$\Pi_t(H + H') = E_Q[H | \mathcal{F}_t] + \Pi_t(H')$$

für ein $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{F})$ erfüllen.

Die QP Regel erfüllt diese Bedingung und ist somit eine marktkonsistente Bewertungsregel.

5 Arbitragefreie Bewertung von Versicherungsverträgen

Im folgenden Kapitel wird ein fundamentales Theorem zur arbitragefreien Bewertung von Versicherungsverträgen gezeigt. In diesem wird eine obere Schranke für die Prämie p_t bestimmt, sodass keine IFA existiert.

Bemerkung: Im zweiten Teil des folgenden Theorems werden wir $p_t^\downarrow$ an Stelle von p_t benutzen. Da p_t mit $\mathcal{G}_t$ messbar ist, würde das Wissen von p_t potenziell Arbitrage für den Versicherungsnehmer ermöglichen. Daher definieren wir

$$p_t^\downarrow := \text{ess sup}\{q|q \text{ ist } \mathcal{F}_t \text{ messbar } q \leq p_t\}$$

5.1 Theorem zur IFA

Theorem 5.1. *Sei (X, p, S) ein Versicherungs-Finanzmarkt auf dem Annahme 3.1 gilt.*

(i) Angenommen es existiert ein $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{F})$, sodass für alle $t < T$ gilt

$$p_t \leq E_{Q\odot P}[X_{t,T}|\mathcal{F}_t] \quad P\text{-fast sicher}, \tag{13}$$

dann existiert keine IFA.

(ii) Angenommen es gibt ein $t < T$, sodass

$$P[\bigcap_{Q\in\mathcal{M}(\mathbb{F})} \{p_t^\downarrow > E_{Q\odot P}[X_{t,T}|\mathcal{F}_t]\}] > 0,$$

dann existiert IFA.

Zum Beweis diese Theorems brauchen wir einige Sätze aus der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Die folgenden Sätze sind aus dem Skript [4] übernommen.

Satz 5.2 (Satz von der domierten Konvergenz)**.** *Falls $|f_n| \leq g$ mit $\int g d\mu$ und $f_n \to f$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Satz 5.3 (Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit)**.** *Für die bedingte Erwartung und X eine integrierbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und Subsigmaalgebra $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ gilt*

$$E[X] = E[E[X|\mathcal{H}]].$$

Lemma 5.4 (Lemma von Fatou). *Es gilt*

1. *Wenn $f_n \geq g$ mit $\int g d\mu > -\infty$, dann*

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \tag{14}$$

2. *Wenn $f_n \leq g$ mit $\int g d\mu < \infty$, dann*

$$\int \limsup f_n d\mu \geq \limsup \int f_n d\mu. \tag{15}$$

Die folgende Proposition wird für den Beweis der ersten Aussage von Theorem 5.1 benötigt.

Proposition 5.5. *Unter Annahme 3.1 gilt für eine Allokation ψ, die Annahme 3.2 erfüllt, und alle $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{F})$*

$$E_{Q\odot P}\left[\lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i} p_t\right] = E_{Q\odot P}[\gamma_t p_t] \quad \forall t < T \tag{16}$$

und

$$E_{Q\odot P}\left[\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i} X_{t,T}^i\right] = \sum_{t<T} E_{Q\odot P}[\gamma_t X_{t,T}] \tag{17}$$

Beweis. Um die Behauptung (16) für beliebige $t < T$ zu zeigen nutzen wir den Satz der dominierten Konvergenz 5.2 und die Tatsache, dass nach (3) $\sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i} \leq C$ gilt, womit der Limes und die Summe vertauscht werden dürfen:

$$E_{Q\odot P}\left[\lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i} p_t\right] = E_{Q\odot P}\left[\sum_{i\geq 1} \lim_{n\to\infty} \psi_t^{n,i} p_t\right] \tag{18}$$

Und mit (4) folgt die Aussage

$$(18) = E_{Q\odot P}\left[\sum_{i\geq 1} ||\psi_t^n|| p_t\right] = E_{Q\odot P}[\gamma_t p_t]$$

Zum Beweis von (17) sei zunächst angemerkt, dass per Definition des P & L einer Versicherungsportfoliostrategie

$$E_{Q\odot P}\left[\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i} X_{t,T}^i\right] = E_{Q\odot P}\left[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)\right]$$

gilt. Sei L_T die Radon-Nikodym Dichte von Q nach $P|_{\mathcal{F}_T}$. Dann gilt analog zu dem Beweis von Proposition 4.1

$$\begin{aligned} E_{Q\odot P}\Big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)\Big] &= \int \lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n) dQ \odot P \\ &= \int L_T \lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n) dP = E_P\Big[L_T \lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)\Big] \end{aligned} \tag{19}$$

und nach dem Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit 5.3

$$(19) = E_P\Big[L_T E_P\big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)|\mathcal{G}_{t,T}\big]\Big].$$

Für alle $G \in \mathcal{G}_{t,T}$ haben wir durch die Definition der bedingten Erwartung 4.2

$$\int_G E_P\big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)|\mathcal{G}_{t,T}\big] dP = \int_G \lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n) dP. \tag{20}$$

Da die Folge mit Bedingung (5) konvergiert, gilt

$$(20) = \int \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_G V_T^I(\psi^n) dP. \tag{21}$$

Wegen des Lemmas von Fatou 5.4 haben wir

$$(21) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_G V_T^I(\psi^n) dP \tag{22}$$

und wegen des Satzes der vollständigen Wahrscheinlichkeit 5.3

$$(22) = \liminf_{n\to\infty} \int_G E_P\big[V_T^I(\psi^n)|\mathcal{G}_{t,T}\big] dP. \tag{23}$$

Weiters gilt durch die Definition von $V_T^I(\psi^n)$, die Linearität der bedingten Erwartung und der Tatsache, dass für nur endlich viele i $\psi_t^{n,i} \neq 0$ gilt,

$$E_P\big[V_T^I(\psi^n)|\mathcal{G}_{t,T}\big] = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i} E_P\big[X_{t,T}^i|\mathcal{G}_{t,T}\big]. \tag{24}$$

Wegen Annahme 3.1(ii) ist

$$(24) = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i} E_P\big[X_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}\big] \tag{25}$$

und wegen der Definition von $||\psi_t^n||$ in 3

$$(25) = \sum_{t=0}^{T-1} E_P\big[X_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}\big]||\psi_t^n||.$$

Setzen wir dieses Ergebnis nun in (23) ein, folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \int_G E_P\big[V_T^I(\psi^n)|\mathcal{G}_{t,T}\big]dP = \liminf_{n\to\infty} \int_G \sum_{t=0}^{T-1} E_P\big[X_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}\big]dP. \tag{26}$$

Durch die Tatsache, dass die Summe endlich ist und die Annahme (3), wonach alle $||\psi_t^n||$ durch ein $C \in \mathbb{R}$ beschränkt sind, folgt mit dem Satz der dominierten Konvergenz 5.2

$$(26) = \int_G \sum_{t=0}^{T-1} \liminf_{n\to\infty} E_P\big[X_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}\big]dP \tag{27}$$

und mit Annahme (4)

$$(27) = \int_G E_P\left[\sum_{t=0}^{T-1} \gamma_t X_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}\right]dP.$$

Insgesamt folgt nun für alle $G \in \mathcal{G}_{t,T}$

$$\int_G E_P\big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)|\mathcal{G}_{t,T}\big]dP \le \int_G E_P\left[\sum_{t=0}^{T-1} \gamma_t X_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}\right]dP.$$

Das ist nach Definition der bedingten Erwartung 4.2 äquivalent zu

$$E_P\big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)|\mathcal{G}_{t,T}\big] \le E_P\left[\sum_{t=0}^{T-1} \gamma_t X_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}\right].$$

Da nach dem Satz von Radon-Nikodym 4.3 $L \ge 0$ ist, gilt

$$E_P\Big[L_T E_P\big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)|\mathcal{G}_{t,T}\big]\Big] \le E_P\left[L_T E_P\left[\sum_{t=0}^{T-1} \gamma_t X_{t,T}|\mathcal{G}_{t,T}\right]\right].$$

Mit der Definition des $Q \odot P$ Maßes und dem Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit 5.3 folgt

$$E_{Q\odot P}\Big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)\Big] \le \sum_{t=0}^{T-1} E_{Q\odot P}[\gamma_t X_{t,T}].$$

Um (17) zu beweisen, müssen wir noch die Ungleichung in die andere Richtung zeigen: Der Beweis verläuft analog zu dem soeben geführten, nur, dass wir hier den Limes Superior statt dem Limes Inferior bilden. Für eine beliebiges $G \in \mathcal{G}_{t,T}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_G E_P\big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)|\mathcal{G}_{t,T}\big]dP &= \int_G \lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)dP \\
&= \int \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_G V_T^I(\psi^n)dP \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \int_G V_T^I(\psi^n)dP \\
&= \limsup_{n\to\infty} \int_G E_P\big[V_T^I(\psi^n)|\mathcal{G}_{t,T}\big]dP.
\end{aligned}$$

Somit gilt wie oben gezeigt

$$E_{Q\odot P}\Big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)\Big] \geq \sum_{t=0}^{T-1} E_{Q\odot P}[\gamma_t X_{t,T}].$$

$\square$

Beweis des Theorems 5.1. zum der Beweis der ersten Behauptung (i) führen wir einen Widerspruchsbeweis: Angenommen (13) gilt und es existiert IFA, d.h. es existiert eine Versicherungsportfoliostrategie $(\psi^n)_{n\geq 1}$ und eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $(\xi_t)_{t\leq T}$, sodass

$$lim_{n\to\infty} V_T^I(\phi^n) + V_T^F(\xi) \in L_0^+\backslash\{0\}$$

gilt. Nach Proposition 4.1 gilt für alle auf $\mathbb{F}$ risikoneutralen Maße Q

$$E_{Q\odot P}[V_T^F(\xi)] = E_Q[V_T^F(\xi)] = 0.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
E_{Q\odot P}\Big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n) + V_T^F(\xi)\Big] &= E_{Q\odot P}\Big[\lim_{n\to\infty} V_T^I(\psi^n)\Big] \\
&= E_{Q\odot P}\Big[\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{i\geq 1} \psi_t^{n,i}(p_t - X_{t,T}^i)\Big]. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Mit den beiden Gleichungen (16) und (17) von Proposition 5.5 folgt

$$(28) = \sum_{t=0}^{T-1} E_{Q\odot P}[\gamma_t(p_t - X_{t,T})] \qquad (29)$$

und mit dem Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit 5.3

$$(29) = \sum_{t=0}^{T-1} E_{Q\odot P}\Big[\gamma_t\Big(p_t - E_{Q\odot P}[X_{t,T}|\mathcal{F}_t]\Big)\Big].$$

Betrachten wir nun das Q, für das wir angenommen haben, dass die Gleichung (13) aus dem Theorem erfüllt ist. Dann gilt

$$p_t \leq E_{Q\odot P}[X_{t,T}|\mathcal{F}_t]$$

P - fast sicher und somit ist

$$(28) \leq \sum_{t=0}^{T-1} E_{Q\odot P}\Big[\gamma_t\Big(E_{Q\odot P}[X_{t,T}|\mathcal{F}_t] - E_{Q\odot P}[X_{t,T}|\mathcal{F}_t]\Big)\Big] = 0,$$

was ein Widerspruch zu der Annahme, dass IFA existiert, ist.
Der Beweis von (ii) ist in [1, Theorem 3.6] nachzulesen □

Mithilfe dieses Theorems ist nun auch gänzlich formal bewiesen, dass das Bewerten von Versicherungsverträgen mit der QP Regel zu einem arbitragefreien 'Preis' also einer arbitragefreien Prämie führt. Es sei zu beachten, dass wir hier nur eine obere Schranke für die Prämie definiert haben und diese lediglich ausschließt, dass das Versicherungsunternehmen eine Arbitragemöglichkeit hat. Die Arbitragefreiheit des Versicherungsnehmers wird in dieser Arbeit nicht weitergehend behandelt.

5.2 Beispiel

Nutzen wir nun das Theorem 5.1 um das Beispiel 4.6 fortzusetzen und die arbitragefreien Prämien dazu zu berechnen.

Beispiel 5.6. Angenommen

(i) der Versicherungsnehmer erhält die Leistung 1, wenn der Versicherungsfall eintritt, also $X = \mathbb{1}_z$ wobei $z := \{(g, z), (m, z), (s, z)\}$.

(ii) der Versicherungsnehmer erhält die Call Option $Y = X(S - K)^+$ mit Strike $K = 0.7$, wenn der Versicherungsfall eintritt.

Vollständiger Markt: $k = 0$ und $h, l \in (0, 1)$

(i) Dann gilt

$$E_{Q\odot P}[X] = 1 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.2 = 0.25$$

und somit muss die Prämie p

$$p \leq 0.25$$

erfüllen.

(ii) Für den Versicherungsvertrag Y gilt

$$E_{Q\odot P}[Y] = (1.5 - 0.7) \cdot 0.05 + 0 \cdot 0.2 = 0.04$$

und somit

$$p \leq 0.04,$$

Unvollständiger Markt: $h, k, l \in (0, 1)$

(i) Die Prämie muss wegen

$$E_{Q^t \odot P}[X] = 0.1t + 0.2(1 - 2t) + 0.4t = 0.2 + 0.1t$$

für ein beliebiges $t \in (0, 0.5)$

$$p \leq 0.2 + 0.1t$$

erfüllen und somit muss insgesamt $p < 0.25$ gelten.

(ii) Für $Y = X(S - 0.7)^+$ gilt

$$\begin{aligned} E_{Q\odot P}[Y] &= 0.1t(1.5 - 0.7) + 0.2(1 - 2t)(1 - 0.7) \\ &= 0.06 - 0.04t \in (0.04, 0.06) \end{aligned}$$

und somit

$$p < 0.06.$$

6 Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Marktmodell definiert, auf dem der Handel mit Versicherungsverträgen und insbesondere, wie auch in Beispiel 4.6 illustriert, Hybridprodukten, d.h. Versicherungen, die direkt vom Finanzmarkt abhängen, möglich ist. Auf diesem wurde dann eine einfache Bewertungsregel dieser Produkte sowie eine generell obere Schranke für die Nettoeinmalprämie eines Versicherungsvertrags definiert und bewiesen.

Das hier beschriebene Modell kann durch dessen wenig einschränkende Definitionen noch in viele Richtungen erweitert werden. Wie auch in [1] beschrieben, können wir damit unter anderem Versicherungsverträge bewerten, die von einer oder mehreren Restlebenszeiten abhängen. Diese können auch die Option einer Stornierung oder die Kosten einer Versicherung, dass an Stelle der Netto- die Bruttoprämie betrachtet wird, mit einbeziehen.

Literatur

[1] Artzner P, Eisele K., und Schmidt T. (2020). *No arbitrage in insurance and the QP-rule*. Verfügbar: https://arxiv.org/pdf/2005.11022.pdf. (letzter Zugriff: 25.02.2021)

[2] Brzezniak Z. und Zastawniak T(1999). *Basic Stochastic Processes*. London: Springer-Verlag.

[3] Föllmer H. und Schied A.(2004). *Stochastic Finance*. Berlin: Walter de Gruyter.

[4] Grill K. (2018). *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*. Verfügbar: https://institute.tuwien.ac.at/fileadmin/t/mathstoch/upload/mw1.pdf. (letzter Zugriff: 25.02.2021)