SEMINARARBEIT

Efficiency Of Racetrack Betting Markets Economic and Mathematical Insights

ausgeführt am

Institut für
Financial and Actuarial Mathematics
TU Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Alexandra Adriana Tuica
Matrikelnummer: 11777749

Wien, am 27.02.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Arbeit thematisiert die mathematischen Hintergründe der Pferderennen-Wetten. Das Hauptziel ist das Grundmodell von R. Isaacs, "Optimal Horse Race Bets"[1] unter die Lupe zu setzten, um es näher zu analysieren. Dieses Modell modelliert unter sehr günstigen Voraussetzungen ein Portfolio von Investitionen, die die Profitmaximierung erzielen. Dafür wird der Begriff *Overlay* erklärt und an einem Beispiel veranschaulicht. Dabei wird nur die Win-Wette in Betracht gezogen. Die Arbeit von R.Isaacs stellt den ersten Einblick und die Grundlage für die weiteren Arbeiten, die besprochen werden, dar. Nachdem wir uns mit dem Grundmodell vertraut gemacht haben, werden weitere Erweiterungen bzw. Verfeinerungen des Modelles behandelt. In dem zweiten Teil wird die Arbeit "Concavity Properties of Racetrack Betting Methods"[2] von J.G. Kallberg und W.T. Ziemba erleutert. Der wichtigste Aspekt ihrer Verfeinerung des Modells ist: die logarithmische Utility Funktion, die der Realität näher kommt. Drittens wird in der Arbeit "Optimal Bets in Pari-Mutuel Systems"[3] von N. Levin der stochastische Fall erklärt, wo die Wetten der anderen Teilnehmern als Zufallsvariablen modelliert werden. Dieser Aspekt spielt eine bedeutsame Rolle, da bei Pferderennen-Wetten bis in den letzten Sekunden des Rennens Wetten gesetzt werden können. Im Kontext braucht man mehrere Daten und mehr Recherchearbeit ist nötig, um das Verhalten der Teilnehmer in den letzten Minuten des Rennens vermuten zu können. Außerdem wird in dem stochastischen Modell eine lineare Utility Funktion angenommen. Obwohl sich die Ergebnisse auf einer logarithmischen Utility Funktion zumindest intuitiverweise übertragen lassen, gibt es noch keinen festen Beweis dafür. "Growth versus Security in Dynamic Investment Analysis"[4] von L.C. MacLean, W.T. Ziemba und G. Blazenko erleutert das Verhältnis zwischen der Profit- und Sicherheitsmaximierung. Dafür werden jeweils drei Maßstäbe identifiziert und näher analysiert, an denen man die Profit- bzw. die Sicherheitsmaximierung veranschaulichen kann. Anhand der Maßstäbe wird eine optimale Strategie für die Profitmaximierung, auch als Kelly Strategie bekannt, und eine optimale Sicherheitsstrategie definiert. Mithilfe der beiden Strategien, erleutert man die *fractional Kelly Strategie*, die das Gleichgewicht zwischen Profit und Sicherheit erzielt. Einschließlich wird eine Annährungsmethode der Gewinnwahrscheinlichkeiten unter die Lupe gesetzt und näher erläutert. In den vorigen Kapiteln wurde die Gewinnwahrscheinlichkeit der Pferde als bekannt vorausgesetzt. "Estimating the Probabilities of the Outcomes of a Horse Race"[5] von H.S. Stern behandelt erstens eine simple und intuitive Methode die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pferd als zweites oder als drittes das Rennen beendet. Zweitens wird eine komplexere Alternative angeboten, die die Wahrscheinlichkeiten genauer annähert.

[1] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S. 93
[2] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S. 99
[3] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S. 109
[4] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S. 127
[5] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S. 225

2 Optimal Horse Race Bets- R. Isaacs

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Maximierung des Profites, welches man durch Pferderennen-Wetten erlangen kann. Es gelten folgende *Voraussetzungen*:

- Der Wettteilnehmer kennt die Gewinnwahrscheinlichkeit[1] von jedem Pferd
- Riskoneutralität wird angenommen[2]
- Nur die Win-Wette wird betrachtet [3]

Wobei man für die *Formalisierung* der Aufgabe folgendes festlegt:

- Sei p_j die Gewinnwahrscheinlichkeit des j-ten Pferdes
- Sei x_j die eigene Wette auf das j-te Pferd
- Sei s_j die Geldsumme, die vom restlichen Publikum auf das j-te Pferd gesetzt wurde

Das *Ziel* ist: *Maximierung vom Profit*, was zu den ersten wichtigen Begriff in Pferderennen-Wetten führt, nämlich *Overlay*.
Erstens untersucht man, was ein Overlay ist, wie es entsteht und wieso es die Basisstrategie in Parimutuel-Wettsystemen darstellt. Dazu betrachtet man folgende Tabelle[4]:

Horse	Prob. of Winning	Amount Bet by Crowd	Odds	Fair Odds
A	0.4	1000	1 to 1	3 to 2
B	0.2	350	4 to 1	4 to 1
C	0.2	300	5 to 1	4 to 1
D	0.1	250	7 to 1	9 to 1
E	0.1	100	19 to 1	9 to 1

Die Pferde B und C haben beide die Gewinnwahrscheinlichkeiten 20% und somit ergeben sich in beiden Fällen die *fair Odds* von 4/1.Das Pferd C wurde überbewertet, während Pferd B objektiv eingeschätzt wurde. Nach Betrachtung stellt man fest, dass Pferd E die höchste Auszahlung verspricht. Wenn man von den Wetten profitieren will, dann platziert man nur die Wetten, die eine gleiche oder höhere Auszahlung als das Risiko, welches man eingeht, besitzen. Daraus kann man schlussfolgern, dass die Profitmaximierung nie durch das Setzen auf alle Pferde ermöglicht wird[5], da sich das Geld, das auf überbewertete Pferde

[1]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.93
[2]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.87
[3]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.87
[4]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.93, die letzten zwei Spalten wurden hinzugefügt
[5]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.95

gesetzt worden ist, sich zwischen den unterbewerteten Pferden aufteilt. Davon ausgehend, dass Profitmaximierung nur über Wetten auf Overlays ermöglicht wird, erkennt man, dass Pferd B, C und E sich als einzige Möglichkeiten zur Investition anbieten, während hingegen auf Pferd A und D kein Geld gesetzt wird. Weiters betrachte man für jedes Pferd das Verhältnis zwischen der Gewinnwahrscheinlichkeit und der vom Publikum eingesetzten Geldsumme und $1/(Q\sum_{j=1}^{n} s_j)$. Dabei beachte man, dass die Wettanbieter mittels Provision am Geldpool Einnahmen verbuchen. Der Einfachheit halber, wird angenommen, dass die Provision 10% beträgt. Somit ist $1-0,1=0.9$.

Horse	$\frac{p_j}{s_j}$	$\frac{1}{0.9\sum_{j=1}^{n} s_j}$
A	0.0004	0.000556
B	0.000571	0.000556
C	0.00066	0.000556
D	0.0004	0.000556
E	0.001	0.000556

Über die zwei Overlays stellt man fest, dass jeweils $p_j/s_j \geq 1/0.9\sum_{j=1}^{n} s_j$ ist. Diese Betrachtung geht Hand in Hand mit der Initialstrategie, dass man nur Wetten platzieren sollte, die über eine gleiche oder höhere Auszahlung verfügen als das eingegange Risiko. Man erkennt, dass umso höher p_j und umso niedriger s_j sind desto profitabler die Wette auf das j-te Pferd ist[6]. Außerdem reicht es nicht, nur in Pferd B zu investieren, wenn man den maximalen Profit erzielen will. Wenn man auf Pferd B Geld setzt, sollte man auf alle Pferde, die ein höheres p_j/s_j Verhälnis haben, auch investieren[7]. In dem analysierten Fall bieten sich nur Pferd C und E als weitere Kandidaten an.
Lemma 1[8]: Es folgt, dass das positive Maximum des Profites nur dann gegeben ist, wenn

$$\max_{1\leq j\leq n} \frac{p_j}{s_j} \geq \frac{1}{Q\sum_{j=1}^{n} s_j}$$

.
Somit verschaffen wir uns einen Überblick darüber, welche Wetten man überhaupt eingehen soll. Die Höhe der Investitionen für die Overlays ist noch zu bestimmen.
Dafür sei $c := (x_1, ..., x_n)$, der Vektor der eigenen Investitionen und folgende Profitfunktion[9]:

$$F(x_1, ..., x_n) = Q\sum_{j=1}^{n}(x_j + s_j)\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j x_j}{x_j + s_j} - \sum_{j=1}^{n} x_j$$

.
Wie schon angesprochen, kann das Maximum dieser Funktion nicht erreicht werden, wenn alle Einträge $x_j \neq 0$ sind. Da es die Möglichkeit gibt, auf mindestens ein *Overlay* zu wetten, existiert ein nicht-negatives Maximum der Profitfunktion. Somit leitet man die Funktion F

[6]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.95
[7]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.95
[8]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.94
[9]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.94

komponentenweise ab:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n}(x_1,...,x_n) \overset{\text{ProduktR}}{=} Q\sum_{j=1}^{n}\frac{p_jx_j}{x_j+s_j}+Q\frac{p_i(x_i+s_i)-p_ix_i}{(x_i+s_i)^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j+s_j)-1$$ [10]

Weiters nehme man an, dass $X=(\chi_1,...,\chi_n)$ ein Maximum ist. Somit bekommt man:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n}(\chi_1,...,\chi_n)=Q\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j\chi_j}{\chi_j+s_j}+Q\frac{p_is_i}{(\chi_i+s_i)^2}\sum_{j=1}^{n}(\chi_j+s_j)-1=0$$

Man bemerkt, dass $p_is_i/(\chi_i+s_i)^2$ konstant ist und somit definiert man:

$$\frac{p_is_i}{(\chi_i+s_i)^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$ [11]

$$\Longleftrightarrow\ (\chi_i+s_i)^2=\lambda^2p_is_i \ \Longleftrightarrow\ (\chi_i+s_i)=\lambda\sqrt{p_is_i}\ \Longleftrightarrow\ \chi_i=\lambda\sqrt{p_is_i}-s_i$$

Im nächsten Schritt werden die Pferde nach ihrem $\frac{p_i}{s_i}$-Verhältnis aufsteigend geordnet[12], d.h. für das veranschaulichte Beispiel:

Horse	$\frac{p_j}{s_j}$	$\frac{1}{0.9\sum_{j=1}^{n}s_j}$
A	0.0004	0.000556
D	0.0004	0.000556
B	0.000571	0.000556
C	0.00066	0.000556
E	0.001	0.000556

Aus der bisherigen Bemerkungen kann man schlussforgern, dass man auf die ersten zwei Pferde - A und D - kein Geld setzen wird, während man auf die nächsten drei Pferde - B, C und E - wetten wird. Somit ist der Investitionsvektor der Form $\chi=(0,0,\chi_3,\chi_4,\chi_5)$
Lemma 2[13]: Das eindeutige Maximum von F ist $\chi=(\chi_1,...,\chi_n)$, wobei

$$\chi_1=...=\chi_{t-1}=0,\qquad \chi_t>0,...,\chi_n>0$$

und

$$\chi_i=\lambda_i\sqrt{p_is_i}-s_i\qquad i=t,...,n$$

sind. Dabei zu beachten ist, dass

$$\lambda_i^2=\left(Q\sum_{j=1}^{t-1}s_j\right)\Big/\left(1-Q\sum_{j=1}^{n}p_j\right)$$

Mit diesem Lemma kann man folglich die drei Investitionen χ_3, χ_4 und χ_5 berechnen. Dazu berechnet man erstens für χ_3:

[10] Produktregel
[11] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.94
[12] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.95
[13] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.95

- $\sum_{j=1}^{2} s_j = 1000 + 250 = 1250$
- $\sum_{j=3}^{5} p_j = 0.2 + 0.2 + 0.1 = 0.5$
- $\lambda_3^2 = \frac{0.9*1250}{1-0.9*0.5} = \frac{1125}{0.55} = 2045.455 \quad => \quad \lambda_3 = \sqrt{2045.455} = 45.227$

Daraus folgt, dass:

$$\chi_3 = 45.227 * \sqrt{0.2 * 350} - 350 = 28.396 \approx 28.40$$

Analog dazu gilt für χ_4:

- $\sum_{j=1}^{3} s_j = 1000 + 250 + 350 = 1600$
- $\sum_{j=4}^{5} p_j = 0.2 + 0.1 = 0.3$
- $\lambda_4^2 = \frac{0.9*1600}{1-0.9*0.3} = \frac{1440}{0.73} = 1972.603 \quad => \quad \lambda_4 = \sqrt{1972.603} = 44.414$

$$\Rightarrow \quad \chi_4 = 44.414 * \sqrt{0.2 * 300} - 300 = 44.029 \approx 44.03$$

und für χ_5:

- $\sum_{j=1}^{4} s_j = 1000 + 250 + 350 + 300 = 1900$
- $\sum_{j=5}^{5} p_j = 0.1$
- $\lambda_5^2 = \frac{0.9*1900}{1-0.9*0.1} = \frac{1710}{0.91} = 1879.121 \quad => \quad \lambda_5 = \sqrt{1879.121} = 43.349$

$$\Rightarrow \quad \chi_5 = 43.349 * \sqrt{0.1 * 100} - 100 = 37.082 \approx 37.08$$

Das dargestellte Modell weist deutliche Vorteile durch seine Einfachheit auf. Die durchgeführten Rechnungen weisen keinen hohen Schwierigkeitsgrad auf und der Lösungsweg wirkt insgesamt intuitiv und zum Großteil übersichtlich. Der Vorteil ist der klare Einblick in die Welt von Pferderennen-Wetten, den man durch das Modell gewinnt.
Der Begriff von *Overlay* lässt sich auf die Welt des Finanzwesens übertragen. Man unterscheidet hauptsächich zwischen *Risiko-Overlays*, deren Ziel darin besteht, das Risiko des Portfolios zu reduzieren und *Taktische Overlays*, die dafür gedacht sind, die Rendite des Portfolios zu erhöhen[14]. In diesem Kapitel betrachtet man ein Taktisches Overlay, da bisher nur die Profitmaximierung genauer untersucht wurde. Andererseits wird das Modell von R. Isaacs in den nächsten Kapiteln erweitert. Somit wird der Aspekt der Risikominimierung betrachtet und das Risiko-Overlay näher besprochen.
Ein taktisches Overlay erzielt eine Gewinnerhöhung indem zusätzliche Risiken eingegangen werden[15]. Bei der Overlay Strategie wird nicht direkt investiert, sondern man setzt Derivate

[14]https://finanzderivate.info/risikomanagement/overlay-strategien-im-risikomanagement/
[15]https://finanzderivate.info/risikomanagement/overlay-strategien-im-risikomanagement/

gezielt ein, um im Optimalfall Überrendite zu erzielen. (Aus der Finanzmathematik wissen wir, dass Derivate Instrumente sind, der dem Besitzer ermöglichen ein bestimmtes Asset zu einem künftigen Zeitpunkt zu einem im Voraus vereinbarten Preis zu kaufen (Call-Option) oder zu verkaufen (Put-Option)[16].) Ein Beispiel vom Taktischen Overlay repräsentiert die Investition in Hedgefonds. Aufgrund der Niedringszinsphase haben Anleihen deutlich an Attraktivität verloren[17]. In so einem wirtschaftlichen Kontext gewinnen Hedgefonds - eine besondere Form von Investmentfond - an Popularität. Sie beruhen auf sehr spekulativen Anlagestrategien. Der Hedgefondmanager analysiert die Aktienkurse, bildet Anlagestrategien und ein Portfolio an Optionen[18]. Zum größten Risiko eines Hedgefonds gehört, dass der Erfolg, von der jeweiligen Anlagestrategie sowie von den Berechnungsmodellen des Hedgefondsmanagements abhängt[19].
Nun zurück zu dem Profitmaximierungsprolem. Es wird schnell klar, dass das Modell auch Nachteile aufweist. Erstens sind die Voraussetzungen extrem günstig. Der Rechenweg für die Bestimmung der Gewinnwahrscheinlichkeiten, insbesondere für die Place- und Show-Wette, ist komplex und benötigt noch viele empirische Daten, um das Verhalten der Wettteilnehmer während des Rennens besser verstehen zu können. Außerdem kann man in der Praxis keine Risikoneutralität annehmen. Insbesondere weist McGlothlin(1956) darauf hin, dass es eine klare Überbewertung der mäßig guten Pferde gibt, da sie eine attraktive Auszahlung und ausreichende Gewinnwahrscheinlichkeiten versprechen[20]. Im nächsten Kapitel werden die logarithmische Utility Funktion und ihre Eigenschaften besprochen, die das Grundmodell von R. Isaacs realistischer machen. Auf der anderen Seite muss man, die Veränderung der Parametern zu verschiedenen Zeitpunkten in Betracht ziehen. Im Kontext von Parimutuel-Wettsystemen verändert sich das Endergebnis mit jeder Entscheidung der Spieler. Es ist herausfordernd, dass sich die Auszahlung innerhalb von Sekunden ändern kann. Somit herrscht ein bestimmtes Niveau von Ungewissheit bis zur letzten Sekunde. Der Unterschied zwischen wetten unter Risiko und wetten unter Ungewissheit wird näher im letzten Kapitel erläutert. Zusätzlich ergeben sich Strategien, wie Overlay, die dem Spieler ermöglichen aus den Fehleinschätzungen der anderen Wettteilnehmer zu profitieren. In dem nächsten Kapitel wird die Attraktivität von Entscheidungen näher analysiert. Zu beachten ist noch, dass es keine Garantie gibt, dass eine optimale Wette zu einem Zeitpunkt t zu einem späteren Zeitpunkt t' noch optimal ist. Somit befindet man sich auf der sicheren Seite, wenn man möglichst spät die Wette ablegt. In den weiteren Kapiteln wird vorausgesetzt, dass man als letzter die Wette ablegt. Außerdem wird in dem Kapitel, welches die Arbeit von N. Levin erläutert, den stochastischen Fall betrachtet, welches die Wetten der anderen Wettteilnehmer als Zufallsvariablen modelliert.

[16]Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time von Hans Föllmer, Alexander Schied, S.14f
[17]https://www.financescout24.de/wissen/ratgeber/hedgefonds
[18]https://www.finanzfluss.de/geldanlage/hedgefonds/
[19]https://www.financescout24.de/wissen/ratgeber/hedgefonds
[20]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.7

3 Concavity Properties of Racetrack Betting Models – J.G. Kallberg und W.T. Ziemba

Wie schon im vorigen Kapitel angesprochen, repräsentiert die lineare Utility Funktion einen deutlichen Nachteil der Arbeit von R. Isaacs. Mit einer linearen Nutzenfunktion besteht die Tendenz, zu viel Geld zu wetten. Außerdem ist es durchaus nachvollziehbar, den Nutzen von Geld logarithmisch zu modellieren, da je weniger Geld man hat, desto mehr Nutzen es bringt, während hohe Geldmengen verhälnismäßig kaum noch Nutzen einbringen. Die Aufgabenstellung bleibt bis auf diese Verfeinerung der Utility Funktion unverändert verglichen zu dem vorigen Kapitel[1]:

- Sei q_i die Wahrscheinlichkeit, dass das $i-te$ Pferd gewinnt
- Sei W_i die Geldsumme, die von den anderen Spielern auf das $i-te$ Pferd gesetzt wurde, $W = \sum W_i$
- $1 - Q$
- Außerdem sei w_0 das Anfangsvermögen von dem betrachteten Spieler

Unter diesen Voraussetzungen finde Wetten w_i, die die langfristige Wachstumsrate des Vermögens maximieren:

$$\phi(w_1, ..., w_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i \log((\frac{Q(W + \sum_{j=1} w_j) - w_i - W_i}{w_i + W_i})w_i + w_0 - \sum_{j=1} w_j)$$[2]

Dabei gilt: $\sum_{i=1}^{n} w_i \leq w_0, w_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$
Angenommen das i-te Pferd gewinnt, dann bekommt jeder Spieler, der auf das i-te Pferd gewettet hat: erstens seine Investition zurück und einen Gewinnanteil in Wert von:

$$\frac{Q(W + \sum_i w_i) - w_i - W_i}{w_i + W_i}$$

In einem Parimutual-Wettsystem bemerkt man, dass die Investitionen die Auszahlung beeinflussen, indem sie die Quoten beeinflussen. Diese Eigenschaft erlaubt keine Konkavität, auch wenn man eine lineare Utility Funktion betrachten würde. Obwohl ϕ nicht konkav ist, ist es konkav transformierbar[3]. Dabei betrachte $x_i = w_i + W_i$ und $z_i = \log x_i <=> x_i = e^{z_i}$. Daraus folgt, dass die Nebenbedingung $w_i \geq 0$ durch die neue Nebenbedingung $x_i \geq W_i$ ersetzt wird. Da ϕ konkav transformierbar ist, sind lokale Maxima auch globale Maxima.

[1]Efficiency Of Racetrack Betting Markets by Donald B. Hausch, S. 99
[2]Efficiency Of Racetrack Betting Markets by Donald B. Hausch, S. 99
[3]Efficiency Of Racetrack Betting Markets by Donald B. Hausch, S. 99

Ein weiterer Nachteil von dem Modell von R. Isaacs besteht darin, dass es nur die Win-Wette analysiert, während die Place- und Schow-Wetten nicht näher betrachtet werden. Ein Portfolio wie ϕ lässt sich für die beiden Wetten deutlich aufwändiger aufstellen, da die Berechnung von den Gewinnwahrscheinlichkeiten bei Place- und Show-Wette deutlich schwieriger zu berechnen ist. Die angesprochenen Wahrscheinlichkeiten werden unter folgenden Voraussetungen berechnet[4]:

- $q_i = W_i/W$
- Bei der Place-Wette beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das i-te Pferd als erstes und das j-te Pferd als zweites das Rennen beenden: $\frac{q_i q_j}{(1-q_i)}$
- Bei der Show-Wette beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die i-te, j-te und k-te Pferde in der genauen Reihenfolge das Rennen beenden: $\frac{q_i q_j q_k}{(1-q_i)(1-q_i-q_j)}$

Somit bekommt man das Modell[5]:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \sum_{k=1, k\neq i,j}^{n} q_{ijk} \log(A + B + C)$$

wobei:

$$A = \frac{Q(P + \sum_{l=1}^{n} p_l) - (p_i + p_j + P_i + P_j)}{2} \times \left[\frac{p_i}{p_i + P_i} + \frac{p_j}{p_j + P_j}\right]$$

$$B = \frac{Q(S + \sum_{l=1}^{n} s_l) - (s_i + s_j + s_k + S_i + S_j + S_k)}{3} \times \left[\frac{s_i}{s_i + S_i} + \frac{s_j}{s_j + S_j} + \frac{s_k}{s_k + S_k}\right]$$

$$C = w_0 - \sum_{l=1, l\neq i,j,k}^{n} s_l - \sum_{l=1, l\neq i,j}^{n} p_l$$

Unter den Bedingungen, dass[6]:

$$\sum_{l=1}^{n} (p_l + s_l) \leq w_0,$$

$$p_l \geq 0, s_l \geq 0$$

Man betrachtet auch für das Place- und Show-Modell die Konkavität und die daraus resultierenden Eigenschaften. Es ist schon auf dem ersten Blick erkennbar, dass die Methoden die Wahrscheinlichkeiten für die Place- und Show-Wette deutlich aufwendiger sind. Außerdem wurde von Harville gezeigt, dass ein Pferd mit einer hohen Wahrscheinlichkeit als Erstplazierter das Rennen zu beenden, im Fall der Place-Wette überbewertet ist[7]. Dieses

[4] Efficiency Of Racetrack Betting Markets by Donald B. Hausch, S. 102
[5] Efficiency Of Racetrack Betting Markets by Donald B. Hausch, S. 102
[6] Efficiency Of Racetrack Betting Markets by Donald B. Hausch, S. 103
[7] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S. 229

Phänomen wird im letzten Kapitel an dem Beispiel von Silky Sullivan näher erläutert. Folgende Aussagen zur Existenz und Eindeutigkiet einer Lösung wurden von J.G. Kallberg und W.T. Ziemba in ihrer Arbeit bewiesen:

Theorem[8]*:*

- Wenn p_i bzw s_i klein in Verhältnis zu den ensprechenden Wetten der restlichen Spieler sind und man sie somit ignoriert, dann ist ψ konkav für die logarithmische und lineare Utility Funktion
- ψ ist nicht allgemein konkav
- Wenn eine lineare Utility Funktion angenommen wird und eine Entscheidung schon gemacht wurde, dann ist ψ konkav und es gibt eine eindeutige Lösung.

Der Beweis wird an dieser Stelle nicht durchgeführt, wichtig ist aber zu bemerken, dass man im allgemeinen Fall nicht weiß, ob $\psi(p, s)$ pseudokonkav ist, auch nicht im Fall einer linearen Utility Funktion[9].
Hausch, Ziemba und Rubinstein (1981) präsentieren Ergebnisse bezüglich des dargestellten Modells und Approximationen, um das Modell in der Praxis vollkommen einsetzbar zu machen[10]. Insgesamt ist zu betrachten, dass *Longshot-Pferde* überbewertet werden, während *Favourites* unterbewertet sind.
In der Schlussfolgerung dieses Kapitels werden wir noch im wirtschaftlichen Kontext die *Rational Choise Theory* erläutern. Da handelt es insbesondere darum, ob Individuen tatsächlich objektive und rationale Entscheidungen treffen. Die Rational Choise Theory besagt, dass Individuen rationale Berechnungen benutzen, um rationale Entscheidugen zu treffen[11]. Die Theory basiert auf dem Prinzip, dass rationale Akteure unter Rationalitätsannahmen ihr Eigeninteresse verfolgen. Außerdem besagt das Prinzip der *unsichtbaren Hand*, dass: "Wenn alle Akteure an ihrem eigenen Wohl orientiert seien, führe eine angenommene (...) Selbstregulierung des Wirtschaftslebens zu einer optimalen Produktionsmenge und -qualität und zu einer gerechten Verteilung[12]. Im Kontext von Pferderennen-Wetten kann das Prinzip wenig bis gar nicht veranschaulicht werden. Im Parimutuel-Wettsystem ist es nicht möglich, dass jeder Wettteilnehmer die optimale Wette ablegt, um somit eine "gerechte Verteilung" des Geld-Pools zu erreichen. Wobei hier beachtet werden muss, dass die Maßstäbe für eine "gerechte Verteilung" nicht klar definiert sind. Außerdem ist das System nicht darauf ausgelegt, dass jeder Teilnehmer gewinnt. Angenommen jeder Wettteilnehmer würde gewinnen, müsste er seine Investition und einen Gewinnanteil kriegen. Da aber jeder Spieler seine Investition zurückbekommt, gibt es keinen Gewinnanteil, den man zwischen den Gewinnern aufteilen kann.Außerdem würde der Wettanbieter Pleite gehen, da er die Provision aus dem Gewinnanteil nicht abziehen kann.

[8] Efficiency Of Racetrack Betting Markets by Donald B. Hausch, S. 103
[9] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.109
[10] Efficiency Of Racetrack Betting Markets by Donald B. Hausch, S. 106
[11] https://www.investopedia.com/terms/r/rational-choice-theory.asp
[12] https://de.wikipedia.org/wiki/Unsichtbare$_Hand$

4 Optimal Bets In Pari-Mutuel Systems - Nissan Levin

Ein Parimutuel-System entspricht einem System, wo alle Teilnehmer im selben Topf einzahlen und nach einem Ereignis das gesammelte Geld zwischen den Gewinnern aufteilt. Diese Arbeit verfeinert das Basismodell von Isaacs, indem sie genauer einen *merit Order*, d.h. einen Maßstab mit dem man die Attraktivität einer Entscheidung bestimmen kann, formuliert. Außerdem werden zwei Spezialfälle besprochen, nämlich ein *deserted Ereignis* und ein *Faires Spiel.* Einer der wichtigsten Aspekte dieser Arbeit besteht in die Einführung des *stochastischen Falles.* R. Isaacs, J.G. Kallberg und W.T. Ziemba haben die Geldsummen, die durch die Wetten der Teilnehmer an der Wette enstanden sind, als bekannt und konstant vorausgesetzt. Offensichtlich verändert sich diese Geldsumme bis in die letzte Sekunde des Rennens. Um der Realität näher zu kommen, betrachte man den Fall, dass die Wetten des Publikums durch Zufallsvariablen mit bekannten Verteilungen modelliert werden. In dem stochastischen Fall sind zwei Ergebnisse wichtig: Als erstes ist der erwartete Gewinn höher als der erwartete Gewinn, den man im deterministischen Fall berechnet hat. Zweitens entspricht der *merit Order* im stochstischen Fall nicht dem *merit Order* im deterministischen Fall[1].
Der *merit Order*

Die Vorasusetzungen[2] in diesem Modell sind:

- Die Ereignisse sind voneinander unanbhängig
- Die Geldsumme, die auf jedes Pferd gesetzt wurde, die Gewinnwahrscheinlichkeit von jedem Pferd, die Provision die abgezogen wird, der *Carryover* von den vorigen Wetten und das eigene Vermögen sind bekannt.
- Jedes Gewinnticket berechtigt den Wettteilnehmer zu einem Geldanteil
- Man kann keine Geldsumme ausleihen, d.h. das echte bekannte Vermögen ist die höchste Geldananzahl, die zur Vefügung steht.

Die *Formalisierung*[3] der Aufgabe:

- Im Spiel befinden sich n Pferde
- Die Geldsumme, die auf das i-te Pferd gesetzt wurde ist b_i, $b = \sum_{i=1}^{n} b_i$

[1] Efficiency Of Racetrack Betting Markets by Donald B. Hausch, S. 110
[2] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.111
[3] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S. 110, S.111

- Sei p_i die Gewinnwahrscheinlichkeit des i-ten Pferdes
- Sei Q die abgezogene Provision
- Sei c das Carryover, von vorigen Spielen
- Sei m_i die eigene Wette auf das i-te Pferd und sei $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ und $M = (m_1, ..., m_n)$
- Die gesamte Summe die auf das i-te Pferd gesetzt worden ist, beträgt $a_i = b_i + m_i$, $a = b + m$ und sei $A = (a_1, ..., a_n)$
- Weiters sei der Geldanteil $s_i = \frac{(Qa+c)}{a_i}$ per Ticket, wenn das i-te Pferd gewinnt.
- Sei w das aktuelle Vermögen (vernachlässigbar im linearen Fall)
- Das Vermögen $w_i = m_i s_i + w - m$ nach dem das i-te Ereignis stattgefunden hat.
- Sei $U(.)$ die Utility-Funktion definiert durch das Vermögen

Man betrachte folgende Maximierungsaufgabe der Profitfunktion[4]:

$$\max_{A,a} R = \sum_{i=1}^{n} p_i U[w_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i U[m_i s_i + w - m]$$

wobei $s_i = (Qa + c)/a_i$ und $a = m + b \quad <=> \quad -m = b - a$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i U[m_i((Qa + c)/a_i) + w - a + b]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i U[(a_i - b_i)/a_i](Qa + c) + w - a + b$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i U[1 - b_i/a_i](Qa + c) + w - a + b$$

und folgende Nebenbedingungen[5]:

- $$(NB1) : \sum_{i=1}^{n} a_i = a$$
- $$(NB2) : a_i \geq b_i$$

[4]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S. 110, S.111
[5]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S. 110, S.111

- $$(NB3) : a \leq w + b$$

Wenn man das Maximum der Profitfunktion unter Nebenbedingungen sucht, kann man auf die Methode der Lagrange-Multiplikatoren zurückgreifen. Zuerst stellt man die Nebenbedingungen so um, dass auf einer Seite der Gleichung eine Null ist.

- $$(NB1) : a - \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$
- $$(NB2) : a_i - b_i \geq 0$$
- $$(NB3) : w + b - a \leq 0$$

Nun wird jeder Ausdruck auf der rechten Seite mit einem Parameter multipliziert und auf die Zielfunktion addiert. Das ergibt die Hilfsfunktion:

$$L[A, a, \alpha, \alpha_i, \theta] = R + \alpha * (a - \sum_{i=1}^{n} a_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i * (a_i - b_i) + \theta * (w + b - a)$$

Nächstens bestimmt man die Extremstellen dieser Funktion, indem man nach jeder Variable partiell ableitet. Das ergibt ein Gleichungssystem mit fünf Gleichungen.

- $\frac{\partial L(A,a,\alpha,\alpha_1,\theta)}{\partial A} = (\frac{\partial L(A,a,\alpha,\alpha_1,\theta)}{\partial a_i})_{1 \leq i \leq n} = p_i * b_i * \frac{(Q*a+c)}{a_i^2} / * \frac{\partial U}{\partial x}[w_i] - \alpha + \alpha_i = 0$
- $\frac{\partial L(A,a,\alpha,\alpha_1,\theta)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} p_i * \frac{(Q-1-Q*b_i)}{a_i} * \frac{\partial U}{\partial x}[w_i] + \alpha - \theta = 0$
- $\frac{\partial L(A,a,\alpha,\alpha_1,\theta)}{\partial \alpha} = 0$
- $\frac{\partial L(A,a,\alpha,\alpha_1,\theta)}{\partial \alpha_i} = 0$
- $\frac{\partial L(A,a,\alpha,\alpha_1,\theta)}{\partial \theta} = 0$

Wenn für verschiedene i und j gilt, dass $\frac{p_i}{b_i} \geq \frac{p_j}{b_j}$ und $a_j > b_j$, dann $a_i > b_i$. In anderen Worten, wenn man auf ein Pferd gewettet hat, dann muss man auch auf alle Pferde mit einem höheren $\frac{p_i}{b_i}$-Verhältnis wetten. Alle Pferde werden nach diesem Verhälnis aufsteigend geordnet. Diese Ordnung wird *merit Order*[6] genannt.

[6] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.112

Der *Deserted* Ereignis und das *Faire* Spiel
Die *merit Order* repräsentiert einen Maßstab für die Attraktivität eines Pferdes und eignet sich für die Entscheidung eines Portfolios an Wetten, die dem Spieler ein möglichst hohen Gewinn erbringen soll. Das Verhältnis p_i/b_i ist nur für $b_i > 0$ definiert, d.h. angenommen auf jedes Pferd wird Geld gesetzt. Nichtsdestotrotz besteht die Möglichkeit, dass $b_i = 0$, d.h. auf das i-te Pferd wurde kein Geld gesetzt. Es ist intuitiv, ein Pferd, worauf kein Geld gesetzt worden ist, auf den ersten Platz in die *merit Order* zu stellen, da betrachte man den limes $\lim_{b_i \to 0} p_i/b_i = +\infty$ für $p_i > 0$. So einen Fall nennt man ein *deserted Ereignis* und allgemein gilt, dass es sich auslohnt auf ein solches Ereignis zu wetten[7]. Bei Pferderennen-Wetten stellt dieser Fall die Seltenheit dar. Bei anderen Wetten, wo es eine extrem hohe Anzahl an mögliche Ereignisse gibt, kann das öfters vorkommen. Ein dazu passendes Beispiel ist Lotto (6/49). Da sich der Großteil der Teilnehmer hauptsächlich gefühlsmäßig für verschiedene Zahlen entscheiden, würde eventuell niemand auf Ereignisse der Art "1, 2, 3, 4, 5, 6" wetten. Man betrachte eine letzte Besonderheit des deterministischen Wettmodells. Ein *faires* Spiel wird durch die Eigenschaft charakterisiert, dass $Q = 1$, also bedient sich der Wettanbieter von keiner Provision und hat somit keinen Gewinn[8]. Ein besonderer Fall stellt die Situation dar, wenn der *Carryover* so hoch ist, dass es sich auslohnt auf alle Ereignisse zu wetten, also r = n, wenn man das optimale Portfolio[9] betrachtet:

- $a_i > b_i$ oder $m_i > 0$ wenn $1 \leq i \leq r$
- $a_i = b_i$ oder $m_i = 0$ wenn $r < i \leq n$

wobei b_i die Wette des restlichen Publikums auf das i-te Pferd ist, m_i stellt die eigene Wette auf das i-te Pferd dar und $a_i = b_i + m_i$ repräsentiert das gesamte Geld aus dem Pool des i-ten Pferdes. Die optimale Lösung schließt sich aus dem *merit Order* und der Idee, dass falls man auf das i-te Pferd gewettet hat, man auch auf alle Pferde mit einem höherem *merit Order* Geld setzen, aus. Also ist r der kleinste Index, wofür man auf das Pferd mit dem Index wetten muss.

Der Stochastische Fall
Bis jetzt haben wir die Einzahlungen der restlichen Mitspieler als gegebenen Konstanten b_i betrachtet. Um das Basismodell weiters zu verfeinern, geht man davon aus, dass die Einzahlungen Zufallsvariablen B_i mit bekannten Verteilungsfunktionen sind. Das stochastische Modell bereitet mehrere mathematische Schwierigkeiten und wird somit nur für den Fall der linearen Utility Funktion[10] angewendet.
Die Nebenbedingungen bleiben gleich wie im deterministischen Fall[11]:

- $$(NB1) : a - \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

[7] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.116
[8] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.117
[9] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.113
[10] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.119
[11] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.119

- $$(NB2) : a_i - b_i \geq 0$$
- $$(NB3) : w + b - a \leq 0$$

die Zielfunktion ändert sich aber zu:

$$RS = Q \sum_{i=1} p_i m_i \mathbb{E}[(B_i - \tilde{B_i} + \tilde{B} + m + \tilde{c})/(B_i + m_i)] - m + w$$ [12]

wobei $\tilde{B_i} := \mathbb{E}[B_i]$, $\tilde{B} := \sum_{i=1}^{n} \tilde{B_i}$ und $\tilde{c} := c/Q$. Man bemerkt, dass der deterministische Fall dem Fall $B_i = \tilde{B_i}$ entspricht, da der Erwartungswert einer Konstante gleich der Konstante ist:

$$RD = Q \sum_{i=1} p_i m_i (\tilde{B} + m + \tilde{c})/(B_i \tilde{+} m_i) - m + w$$

.

Analog zu dem deterministischen Fall kann man mit Hilfe der Lagrange Multiplikatoren die optimale Lösung unter den gegebenen Nebenbedingungen berechnen. Interessanter wird das Verhältnis zwischen den zwei Modellen. Falls es eine optimale Lösung für die Profitmaximierung in dem deterministischen Fall gibt, dann ist die optimale Lösung in dem stochastischen Fall größer oder gleich der Lösung im deterministischen Fall. Kurz gesagt: für alle $M = (m_1, ..., m_n)$ gilt $RS \geq RD$[13]. Um die Aussage zu beweisen, reicht es, wenn man beweist, dass:

$$\mathbb{E}[(B_i - \tilde{B_i} + \tilde{B} + m + \tilde{c})/(B_i + m_i)] \geq (\tilde{B} + m + \tilde{c})/(B_i \tilde{+} m_i)$$

Diese Aussage ist äquivalent zu der Aussage, dass:

$$\mathbb{E}][1/(B_i + m_i)]\mathbb{E}[B_i + m_i] \geq 1$$

Diese Aussage lässt sich durch die Schwarz'sche Ungleichung ($\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] \geq \mathbb{E}^2[XY]$) und das Einsetzten von passenden Zufallsvariablen $X := 1/\sqrt{B_i + m_i}$ und $Y := \sqrt{B_i + m_i}$ beweisen. Der Autor behauptet der Unterschied zwischen den beiden Fällen sei ungefähr 20%[14].

Nun, dass man weiß, dass allgemein im stochastischen Fall ein besseres Ergebniss zu erwarten ist, kann man den Begriff von *merit Order* auf den stochastischen Fall übertragen, um nachträglich ein Maßstab zu haben, an dem sich die eigenen Investitionsentscheidungen orientieren können. Das Verhätnis p_i/b_i bestimmt die Ordnung und lässt sich 1:1 auf den stochastischen Fall übertragen. Außerdem lässt sich auch das Lemma, dass das optimale Portfolio beschreibt, umschreiben als:

[12]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.119
[13]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.120
[14]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.122

Lemma 2[15]*:* Falls $p_i\mathbb{E}][1/B_i] > p_j\mathbb{E}[1/B_j]$ und $m_j > 0$, dann $m_i > 0$.
Obwohl das intuitiv klingt, wurde die Aussage für logarithmische Utility Funktion nicht bewiesen. In dem Sinne bräuchte man mehr Recherchearbeit, um auf eindeutige Ergebnisse zu kommen[16].
Obwohl allgemein $RS \geq RD$ gilt, gibt es ein Szenario, wo die Lösung aus dem stochastischen und dem deterministischen Modell sehr nahe an einander liegen[17]. Wenn man voraussetzt, dass nur runde Beträge gesetzt werden können, dass die Wette des Publikums B_i relativ hoch ist und $\sigma[B_i]/\mathbb{E}[B_i]$ klein ist, dann sind die zwei Ergebnisse fast gleich. Nun in unserem Fall ist es praktisch, da dies der Fall bei Pferderennen ist. Obwohl es keinen großen Unterschied zwischen den Modellen gibt, bräuchte man deutlich mehr empirische Daten bezüglich dem Verhalten der Mitspieler in den letzten 2 Minuten oder in der letzten Minute des Rennens, damit man ein besseres Gefühl für die Zufallsvariablen B_i insbesondere in der kritischsten Zeit des Rennens gewinnt.
Es sei angemerkt, dass in den vorigen Kapiteln die bearbeiteten Modelle so ausgelegt sind, dass ein Wettteilnehmer Entscheidungen “nur“ unter Risiko getroffen hat. Das stochastische Modell fügt den Aspekt der Ungewissheit hinzu. Bei einer Entscheidung unter Risiko sind die Auswirkungen einer Entscheidung nicht vollkommen einsehbar, da man zwischen den subjektiven und objektiven Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Pferdes unterscheiden muss. Trotzdem stehen genug Informationen, wie konstante Odds, die sich durch konstante Wetten des restlichen Publikums ergeben, zur Verfügung[18]. Diese Informationen ermöglichen, einem Wettteilnehmer sich Erwartungen bezüglich der Ausgangssituation, zu bilden. Andererseits ist Wetten unter Ungewissheit durch den Mangel an Informationen charkterisiert. Das stochastische Modell erzielt eine nachvollziehbare Modellierung der Ungewissheit.

[15] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.121
[16] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.122
[17] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.122
[18] http://www.wirtschaftslexikon24.com/e/stochastischer-fall/stochastischer-fall.html

5 Growth Versus Security In Dynamic Investment Analysis L. C. MacLean, W. T. Ziemba and G. Blazenko

Im ersten Kapitel hat man die Stragie des *Overlays* bei Pferderennen-Wetten näher erklärt und am Ende hat man den Begriff *taktischen Overlay* im wirtschaftlichen Kontext erläutert. Ein taktisches Overlay hat als Ziel, eine möglichst hohe Rendite zu erzielen. In diesem Kapitel wird das *Risiko-Overlay*[1] näher erklärt. Dieses *Overlay* erzielt die Absicherung verschiedener Risiken, wie Währungsrisiko oder Kreditrisiko. In dem Sinne wird auch das Währungsoverlay als Beispiel veranschaulicht. Die Motivation hinter diesen Begriffserklärungen steht im festen Zusammenhang zu dem Hauptthema, welches von L.C. MacLean, W. T. Ziemba und G. Blazenko bearbeitet wird, nämlich das Verhältnis zwischen der Risikominderung und der Profitmaximierung. Dieses Kapitel behandelt die "optimale dynamische Entscheidung in diskreter Zeit für einen Investor"[2]. In diesem Kontext wird die Strategie des *fractional Kelly criterion* unter die Lupe genommen. Diese Strategie zeigt sich als besonders attraktiv, da sie auf der einen Seite die asymptotische Wachstumsrate des Vermögens eines Investors und auf der anderen Seite die Sicherheitsmaximierung erzielt. Für die Sicherheitsmaximierung bietet die *fractional Kelly* Strategie die Möglichkeit an, eine untere Schranke für das Vermögen zu setzen und dem Konfidenzintervall, ein bestimmtes Ziel zu erreichen, zu berechnen[3]. Im Folgenden werden drei Wachstums- und Sicherheitsmaßnahmen veranschaulicht.

Problemaufstellung[4]:

- y_0 ist der Anfangsvermögen des Investors
- n risikobehaftete Investitionsmöglichkeiten innerhalb der Perioden $1, 2, ..., t, ...$
- Die Rendite verfolgt einen stochastischen Prozess definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega, B, \mathbb{P}$ mit dem entsprechenden Produktraum.
- Außerdem sei $\omega^{t-1} \in \Omega^{t-1}$ die Historie der Ereignisse
- Am Anfang der Periode t wird das Vermögen durch die Zufallsvariable $Y_{t-1}(\omega^{t-1})$
- Die Investition in der t-ten Periode auf das i-te Ereignis ist $X_{it}(\omega^{t-1})$, wobei

$$X_{it}(\omega^{t-1}) = p_{it}(\omega^{t-1})Y_{t-1}(\omega^{t-1})$$

[1] https://finanzderivate.info/risikomanagement/overlay-strategien-im-risikomanagement/
[2] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.127
[3] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.127
[4] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.128

- Dabei enspricht $p_t(\omega^{t-1}) = p_{0t}(\omega^{t-1}), ..., p_{nt}(\omega^{t-1})$ dem Investitionsstrategievektor für die Periode t
- Letztens sei $K_{it}(\omega_t)$ die Rendite per investierte Einheit in die risikobehafteten Investitionsmöglichkeiten, angenommen das Ereignis ω_t hat stattgefunden.

Man betrachte nur vorteilhafte Investitionsumfelder, d.h. $\mathbb{E}[K_i(w)] > 0$ und die Rendite wird von der Zufallsvariable $R_{it}(w_i) = 1 + K_{it}(w_i)$ dargestellt. Unser Ziel ist das angesammelte Vermögen am Ende einer Periode t zu modellieren, dafür braucht man offensichtlich die Rendite $R_{it}(w_i)$ und die Investitionsentscheidungen. Somit bekommt man für das Vermögen am Ende der Periode:

$$Y_t(p, w^t) = y_0 \prod_{s=1}^{t} (\sum_{i=0}^{n} R_{is}(w_s) p_{is}(w^{s-1}))$$ [5]

Nun kann man die Maßstäbe[6] für die Profit- und Sicherheitsmaximierung betrachten.

Profitmaximierung	Sicherheitsmaximierung
Wie viel Geld man nach t Perioden erwartet:	WS, dass man ein bestimmtes Vermögen am Ende der Periode t hat:
$\mu(y_0, p) = E[Y_t(p)]$	$\gamma(y_0, p) = P[Y_t(p) \leq b_t]$
Wie schnell der Investor Vermögen ansammelt:	WS, dass das Vermögen oberhalb einer bestimmten Untergrenze bleibt
$\phi(y_0, p) = E[\ln Y_t(p)^{1/t}]$	$\alpha(y_0, p) = P[Y_t(p) \leq b_t, t = 1, ...]$
Wie lange dauert es im Schnitt, dass ein Investor ein bestimmtes Vermögenslevel erreicht:	WS, dass ein bestimmtes Ziel U erzielt wird, bevor das Vermögen unter einem Niveau L fällt
$\eta(y_0, p) = E_{\tau\{Y(p) \leq U\}}$	$\beta(y_0, p) = P[\tau_{\{Y(p) \leq U\}} < \tau_{\{Y(p) \leq L\}}]$

Die Paar von Maßstäben wurden zur Veranschaulichung farblich hervorgehoben. Das Paar (μ_t, γ_t) bestimmt das angesammelte Vermögen eines Investors zu einem bestimmten Zeitpunkt t. Zweitens stellt (ϕ, α) das Verhalten des Wachstums dar und schließlich entspricht das Paar (η, β) dem End- oder Stoppzustand. Die optimale Wachstumsstrategie ist als *Kelly Strategie*[7] bekannt und maximiert die langfristige exponentielle Wachstumsrate: $\phi(y_0, p)$ und minimiert die erwartete Zeit, hohe Erträge zu erzielen: $\eta(y_0, p)$. Der deutliche Nachteil einer solchen Strategie steckt offensichtlich in der Sicherheit. Dafür betrachte man die optimale Sicherheitsstrategie[8] $p_0 = (1, 0, ..., 0)$, wo man das ganze Vermögen auf das risikolose Asset setzt. Da man jetzt optimale Strategien für beide die Profit- und die Sicherheitmaximierung hat, ist sie intuitiv zu kombinieren, um eine Strategie zu erzielen, die das Gleichgewicht zwischen Profit und Sicherheit darstellt. Formell bildet man die konvexe

[5] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.128
[6] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.128f
[7] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.129
[8] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.129

Kombination zwischen der *Kelly Strategie* und der Sicherheitsstrategie. Damit erhält man die $Fractional\ Kelly\ Strategie\ mit\ \lambda Tradeoff Index$:

$$p(\lambda) = \lambda p' + (1 - \lambda)p_0$$ [9]

wobei $0 \leq \lambda \leq 1$. Außerdem ist ein *Tradeoff* zwischen Wachstum und Sicherheit effektiv, wenn der Verlust an Leistung in einer Dimension durch den Gewinn in der anderen Dimension kompensiert wird[10]. Als letztes sei angemerkt, dass es für $p(\lambda)$ eine *fractional Kelly* Strategie gibt, die für jedes Profil ein effektives *Tradeoff* zwischen Wachstum und Sicherheit durch die Anpassung des Tradeoff Indizes λ verspricht. Dieses Theorem wurde das *Tradeoff Theorem*[11] genannt. Wie am Anfang von dem Kapitel schon angekündigt, wird noch das Beispiel eines Währungs-Overlay näher erläutert. Ein Währungs-overlay[12] entspricht einem Risiko-Overlay, erzielt also die Absicherung von einem Risiko, im konkreten Fall das Wechselkursschwankungsrisiko. Auf dem internationalen Markt werden Vermögen und Wertpapiere auf verschiedenste Währungen gehandelt. Die Investitionsentscheidungen eines Fondmanager dürfen nicht von einem Währungswechselkurs profitieren bzw. darunter leiden müssen. Ëin Währungs-Overlay maximiert die Performance des Portfolios, indem es den Spezialisten hilft, die Währungsperformance zu messen, um Strategien zur Risikominimierung und Gewinnmaximierung zu bestimmen[13]. Wie das genau geregelt wird, wird normalerweise an die Präferenzen des Investors angepasst. ”Der Anleger kann entscheiden, wie viel Prozent des Portfolios in ausländische Vermögenswerte investiert werden sollen, wie viel Währungsrisiko einzugehen ist und ob er sich auf die Risikominimierung oder die Gewinnmaximierung konzentrieren möchte[14]. Immerwieder kommt die Frage auf über Wechselwirkung zwischen Profitmaximierung und Sicherheit. Es ist wichtig einen effektiven *Tradeoff* zwischen Profit und Sicherheit zu verfolgen.

[9] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.131
[10] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.135
[11] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.139
[12] https://www.netinbag.com/de/finance/what-is-currency-overlay.html
[13] https://www.netinbag.com/de/finance/what-is-currency-overlay.html
[14] https://www.netinbag.com/de/finance/what-is-currency-overlay.html

6 Estimating the Probabilities of the Outcomes of a Horse Race – H.S. Stern

In den vorigen Kapiteln ist die Gewinnwahrscheinlichkeit eines Pferdes ein Rennen zu gewinnen als bekannt vorausgesetzt. In diesem Kapitel wird eine einfache Methode besprochen, eine Approximation der Gewinnwahrscheinlichkeiten zu berechnen. Diese Methode ist bekannt als die *Harville Formeln* und stellt sich als eine intuitive Weise die Gewinnwahrscheinlichkeiten fur die Win-, Place- und Show-Wette zu berechnen, heraus. Sei W_i die Geldsumme, die auf das Pferd, welches die Win-Wette gewinnen sollte, gesetzt worden ist. Außerdem stellt $O_i = ((1-Q)W - W_i)/W_i$, wobei W die gesamte Geldsumme aus dem Win-Pool ist, die Win-Quote dar. Dann ist:

$$q_i = \frac{W_i}{\sum_{j=1}^{n} W_j} = \frac{\frac{1}{O_i+1}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{O_j+1}}$$ [1]

eine Approximation für die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einer Win-Wette. Die Wahrscheinlichkeiten für die Place- und Show-Wette können Analog zu der Win-Wette-Wahrscheinlichkeit berechnet werden. Man betrachtet die Place Wette als Win-Wette mit $n-1$ Pferden bzw. die Show-Wette als Win-Wette mit $n-2$ Pferden. Diese Wahrscheinlichkeiten können so berechnet werden, indem man den Win-Pool betrachtet und die Wette auf das i-te bzw. j-te Pferd ignoriert. Somit ergeben sich mit der bedingten Wahrscheinlichkeit und dem Satz von Bayes die *Harville Formeln*[2]:

$$p(ij) = q_i \frac{q_j}{1-q_i} p(ijk) = q_i \frac{q_j}{1-q_i} \frac{q_k}{1-q_i-q_j}$$

Dieses Modell ist einfach und intuitiv, stellt aber nicht die beste Approximation dar. Die Unabhängigkeit der Restlaufzeiten reicht nicht, um die *Harville Formeln* herzuleiten. Obwohl es keine allgemeine Bedingungen, die zu die Formeln führt, gibt es Wahrscheinlichkeitsmodelle, die zu die Formeln führen. Dabei modelliert die Zufallsvariable T_i die Restlaufzeit des i-ten Pferdes. Falls T_i exponentiell verteilt mit $1/\lambda_i$ ist und die Restlaufzeiten unabhängig von einander sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das i-te Pferd als erstes das Rennen beendet: $q_i = \lambda_i / \sum_j \lambda_j$, was der *Harville Formel* entspricht. Obwohl die exponentielle Verteilung zum Gewollten führt, wirkt sie wenig realistisch, da sie für Laufzeiten nahe an Null noch positive Wahrscheinlichkeiten verspricht. Es wurde empirisch gezeigt, dass die Formeln von Harville für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Pferd als zweites bzw als drittes das Rennen beendet, nicht geeignet sind. Harville hat selbst anhand der Daten aus 335 Rennen bewiesen, dass Pferde, die eine hohe Wahrscheinlichkeit, als Zweitplatzierte das

[1]Efficiency Of Racetrack Betting Markets by Donald B. Hausch, S. 227
[2]Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.227

Rennen zu beenden, aufzeigen, deutlich seltener als erwartet als Zweitplatzierte tatsächlich das Rennen beenden[3]. Ein Grund wieso das passieren kann, wird an dem Beispiel vom *Silky Sullivan* veranschaulicht[4]. Silky war ein amerikanisches Pferd, welches dafür bekannt ist, das Rennen langsam anzufangen, in den letzten Minuten -fast undenkbar- alle andere Pferde einzuholen und das Rennen zu gewinnen. Das bekannteste Rennen von dem Pferd ist das Santa Anita Rennen, welches am 25. Februar 1958 stattgefunden hat. Da hat der Silky Sullivan es geschafft über 500m einzuholen und das Rennen zu gewinnen[5]. Andererseits, falls sich Silky mal nicht zum ersten Platz durchkämpft hat, ist es auf die untere Plätze gelandet. Wenn Silky Sullivan nicht als erster das Rennen beendet hat, besteht eine höhere Wahrscheinlichkeit, dass ein anderes Pferd das Rennen als zweites beendet, obwohl es eine kleinere Wahrscheinlichkeit hat, das Rennen als erstes zu gewinnen. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pferd gewinnt, unterbewertet, während die Wahrscheinlichkeit, dass das selbe Pferd als zweites das Rennen beendet, überbewertet ist. Als nächstes werden alternative Formeln mit alternativen Verteilungen hergeleitet. Man betrachtet die Zufallsvariablen $T_1, ..., T_n$, die Gamma-verteilt sind. Mit bekanntem Formparameter $r > 1$, inverser Skalenparameter und der Dichtefunktion der Gamma-Verteilung, kann man die Wahrscheinlichkeiten für verschiedenen Reihenfolgen berechnen. Diese Berechnungen sind deutlich komplexer wie die *Harville Formeln*. Das Gamma-Modell scheint das Harville-Modell zu verbessern und bessere Approximationen für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pferd als zweites oder drittes das Rennen beendet, zu versprechen[6]. Diese Allternative zu den *Harville Formeln* wird für eine hohe Anzahl an Pferden, die beim Rennen teilnehmen, sehr komplex.

[3] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.229

[4] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.229

[5] https://www.punters.com.au/news/silky-sullivan-the-greatest-swooper-of-them-all-$_1$34653/

[6] Efficiency Of Racetrack Betting Markets, S.232