



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna | Austria

SEMINARARBEIT

Agent-based models and industrial organization theory

Schranzhofer Manuel

Matrikelnummer: 11732255

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

ausgeführt am Institut für **Finanz- und Versicherungsmathematik**
der Fakultät für **Mathematik und Geoinformation**
der **Technischen Universität Wien**

Wien, 7. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	2
2	Grundlagen	2
2.1	Grundlagen aus der Spieltheorie	3
2.2	Grundlagen aus der Statistik	4
2.2.1	D'Agostino's K-squared Test	4
2.2.2	Shapiro-Wilk Test	6
2.2.3	Shapiro-Francia Test	7
3	Der Algorithmus	7
3.1	Der Kundenalgorithmus	8
3.2	Der Unternehmernalgorithmus	9
4	Simulationstest	10
4.1	Hotelling Modell	10
4.1.1	analytische Bestimmung der Equilibria	11
4.1.2	Simmulationsergebnisse	14
4.2	vertikales Differenzierungsmodell	15
4.2.1	analytische Bestimmung der Equilibria	16
4.2.2	Simmulationsergebnisse	17
4.3	weitere Modelle	19

1 Vorwort

Diese Seminararbeit ist eine Ausarbeitung des Papers “Agent-based models and industrial organization theory. A price-competition algorithm for agent-based models based on Game Theory“ [SC18], welches 2018 im Journal Complex Adapt Syst Model (2018) 6:2 von Juan Manuel Sanchez-Cartas veröffentlicht worden ist. Der Artikel behandelt die Marktsimulation durch “agent-based models“ (ABM). In agent-based models wird ein System durch eine Sammlung autonomer Einheiten modelliert. Diese Einheiten, auch Agents genannt, beurteilen einzeln ihren Zustand im System und treffen anschließend eigenständig Entscheidungen basierend auf vorgegebenen Regeln [Bon02].

Die endogene Natur des Preiswettbewerbs in Märkten schränkt allgemein die Analyse von Modellen ein, kann aber in ABM dargestellt werden. Diese endogene Natur entsteht aufgrund der gegenseitigen Abhängigkeiten von Kunden und Unternehmen. So hat der Preis des Produktes eines Unternehmens auch Auswirkungen auf die Nachfrage nach den Produkten anderer Unternehmen. Aber auch wesentlich kompliziertere Abhängigkeiten können in Marktmodellen berücksichtigt werden. Besonders die Berücksichtigung von neuen digitalen Plattformen, wie die Integrierung von sozialen Netzwerken, erschwert die Analyse von Märkten. So stellt sich die Frage, ob Preiswettbewerb in agent-based models mit Hilfe von einheitlichen Regeln, die im Einklang mit Game Theory und ökonomischer Intuition stehen, implementiert werden kann.

Im Artikel wird ein agent-based Algorithmus vorgestellt, mit welchem die optimale Preisgestaltung in unterschiedlichen Marktmodellen simuliert werden kann. Dieser Algorithmus basiert auf “Game Theory“ und simuliert das optimale Verhalten von Kunden und Unternehmen ohne auf die Equilibria des theoretischen Modells zurückzugreifen oder das Maximum bzw. Minimum einer reellen Funktion zu bestimmen. Intuitiv spiegelt der Algorithmus die bestmögliche Entscheidung der Agents ohne Berücksichtigung von besonderen, theoretischen Überlegungen wider. Das Verfahren funktioniert sowohl in diskreten als auch in kontinuierlichen Umgebungen und des Weiteren können Märkte mit heterogenen Einwirkungen, asymmetrischen Informationsfluss oder unstetigen Verhalten der Agents simuliert werden.

Der Algorithmus wird in verschiedenen theoretischen Modellen getestet und es wird überprüft, ob das Verfahren die Nash-Equilibria dieser Modelle reproduzieren kann. Diese behandelten Modelle teilen die Eigenschaft, dass Unternehmen mit Preisen um Kunden konkurrieren und sind im Allgemeinen in der Literatur sehr bekannt.

Basiswissen über Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und Analysis wird vorausgesetzt. Im Speziellen werde ich nicht näher auf Hypothesentests und linearer Regression eingehen. Im Kapitel 2 werden allerdings kurz die wichtigsten Definitionen aus Game Theory behandelt und die statistischen Tests beschrieben, die anschließend benötigt werden.

2 Grundlagen

In den folgenden Kapiteln werden verschiedene Marktmodelle betrachtet und es wird darauf eingegangen, ob der von Juan Manuel Sanchez-Cartas vorgestellte Algorithmus die Nash-Equilibria der zugrundeliegenden theoretischen Modelle reproduzieren kann. Ein Nash-Equilibrium ist ein Begriff aus der Spieltheorie und definiert, was optimale Strategien überhaupt sind.

2.1 Grundlagen aus der Spieltheorie

Nehmen wir an es gibt N Teilnehmer in einem Spiel und die einzelnen Spieler wollen ihren eigenen Gewinn maximieren, indem sie eine geeignete Strategie wählen. Grundsätzlich wird hier zwischen purer Strategie und gemischter Strategie unterschieden. Eine pure Strategie bezeichnet einen Plan für einen einzelnen Spieler, der am Anfang des Spieles festgelegt wird und beschreibt, was der Spieler in jeder möglichen Situation machen wird. Eine gemischte Strategie besteht wiederum aus verschiedenen einzelnen puren Strategien, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ausgespielt werden. Folglich ist eine gemischte Strategie eine Zufallsvariable, während pure Strategien nicht vom Zufall abhängen und einen genauen Spielplan beschreiben.

Definition 1 (Payback-Funktion). Sei $1 \leq i \leq N$ und Q_i die Menge der puren Strategien des i -ten Spielers. Dann ist die Payback-Funktion des i -ten Spielers u_i eine Abbildung vom Produktraum der puren Strategien in die reellen Zahlen.

$$u_i : \prod_{i=1}^N Q_i \rightarrow \mathbb{R}$$

Die i -te Payback-Funktion u_i bildet die puren Strategien der unterschiedlichen Spieler auf den Gewinn des i -ten Spielers ab. Jeder Spieler versucht seinen eigenen Gewinn zu maximieren, was sich in der Maximierung der Payback-Funktion widerspiegelt. Zu beachten ist, dass die Strategie eines Spielers auch auf den Gewinn anderer Spieler Auswirkungen haben kann.

Definition 2 (pures Nash-Equilibrium). Sei $1 \leq i \leq N$, Q_i die Menge der puren Strategien des i -ten Spielers und u_i die Payback-Funktion des i -ten Spielers. Eine Familie von puren Strategien $q^* := (q_1^*, \dots, q_N^*) \in \prod_{i=1}^N Q_i$ ist ein pures Nash Equilibrium genau dann, wenn $\forall i \in \{1, \dots, N\}$:

$$u_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i^*, q_{i+1}^*, \dots, q_N^*) \geq u_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, \tilde{q}_i, q_{i+1}^*, \dots, q_N^*) \quad \forall \tilde{q}_i \in Q_i$$

Ein Nash-Equilibrium ist eine Familie von Strategien, die ein Gleichgewicht darstellt. Sollte ein einzelner Spieler von seiner zugeordneten Strategie abweichen, während seine Konkurrenten ihre Strategien beibehalten, kann er keinen zusätzlichen Gewinn erwarten. Die Familie dieser zugeordneten Strategien wird dann als Nash Equilibrium bezeichnet. Nicht jedes Spiel besitzt ein pures Nash-Equilibrium. Unter bestimmten Voraussetzungen kann allerdings die Existenz eines solchen puren Nash-Equilibriums nachgewiesen werden [Bar13].

Um die Existenz eines solchen Equilibriums zu zeigen, benötigen wir einen weiteren Begriff "Beste Antwortstrategie", auch best-response Strategie genannt. Es bestimmt die beste Strategie, die ein Spieler auswählen kann, wenn er die Strategien der Gegner kennt. Im Algorithmus wird die Entscheidung, um welchen Preis ein Unternehmen ein Produkt anbietet, eine Beste Antwortstrategie darstellen.

Definition 3. Sei $1 \leq i \leq N$, Q_i die Menge der puren Strategien des i -ten Spielers und $u_i(q_1, \dots, q_N)$ die Payback-Funktion des i -ten Spielers. Dann ist Funktion B_i , die auf die Besten Antwortstrategien des i -ten Spielers abbildet, gefolgt definiert.

$$B_i(q_{-i}) = \{q_i \in Q_i : u(q_{-i}, q_i) \geq u(q_{-i}, \tilde{q}_i) \forall \tilde{q}_i \in Q_i\}$$

mit $q_{-i} := (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, q_N)$

Lemma 1 (Existenz eines puren Nash-Equilibrium). *Sei $Q_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ konvex und kompakt und die Payback-Funktion des i -ten Spielers $u_i(q_1, \dots, q_N)$ stetig und konkav in q_i . Dann existiert ein pures Nash-Equilibrium.*

Beweis. Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem Fixpunktsatz von Kakutani.

Mit Hilfe der Besten Antwortstrategien lässt sich folgende Funktion definieren.

$$B(q) = \times_{i \in \{1, \dots, N\}} B_i(q_{-i})$$

Für jedes i ist die Menge $B_i(q_{-i})$ nicht leer, da die Payback-Funktionen stetig und die Menge der puren Strategien kompakt sind. Deshalb besitzt die Abbildung $q_i \rightarrow u_i(q_{-i}, q_i)$ ein Maximum und daher auch eine Beste Antwortstrategie. Des Weiteren ist die Menge konvex da die Paybackfunktion konkav in Q_i ist. Zusätzlich hat die Funktion B einen abgeschlossenen Graphen, da die einzelnen Payback-Funktionen stetig sind.

Somit sind alle Voraussetzungen für den Fixpunktsatz von Kakutani erfüllt und wir wissen, dass unsere Funktion B einen Fixpunkt besitzt. Dieser Fixpunkt ist zugleich auch unser Nash-Equilibrium, da die einzelnen Strategien im Vektor die besten Antwortstrategien darstellen und sie daher die Definition des Nash-Equilibriums erfüllen. □

Die Menge der puren Strategien kann in vielen Fällen als eine Teilmenge des \mathbb{R}^n dargestellt werden. Betrachtet man beispielsweise einen Markt, an dem verschiedene Unternehmen ein Produkt einmalig zu einem beliebigen Preis anbieten können, dann ist der Ausgabepreis eines bestimmten Unternehmens sowohl eine reelle Zahl, repräsentiert allerdings auch die Strategie, das Produkt zu diesem Preis anzubieten.

2.2 Grundlagen aus der Statistik

Die Normalverteilung des Fehlers, der vom Algorithmus erzeugt wird, stellt eine zentrale Rolle in der Analyse des Algorithmus dar. Hierzu werden 3 unterschiedliche Hypothesentests herangezogen, mit welchen man überprüfen kann, ob die zugrunde liegenden Daten normalverteilt sind. In den folgenden Abschnitten gehen wir davon aus, dass $X = (X_1, \dots, X_n)$ ein Vektor von unabhängigen und gleichverteilten Zufallsvariablen mit unbekannter Verteilung $F(x, \Theta)$ ist. Der kleingeschriebene Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ beschreibt eine Realisierung des Zufallsvektors X . Die Nullhypothese für einen Test auf Normalverteilung ist gegeben durch:

$$H_0 : F \in \{F_0 : \mu \in \mathbb{R} \wedge \sigma^2 \in \mathbb{R}^+ \wedge F_0 \text{ Verteilungsfunktion von } \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\}$$

2.2.1 D'Agostino's K-squared Test

Der "D'Agostino's K-squared Test" eignet sich, um Abweichungen in der Schiefe und Wölbung zur Normalverteilung festzustellen. Die Schiefe gibt die Asymmetrie einer Zufallsvariable an. Die Wölbung beschreibt hingegen, wie steilgipflig beziehungsweise flachgipflig die Dichte einer Zufallsvariable ist.

In der Abbildung 1 werden die Begriffe Wölbung und Schiefe mittels Dichten von Zufallsvariablen visualisiert. Im ersten Graphen wird dargestellt, wie der Begriff Schiefe interpretiert werden kann. Es ist ein Maß für die Asymmetrie einer Zufallsvariable. Neigt die Dichte nach rechts,

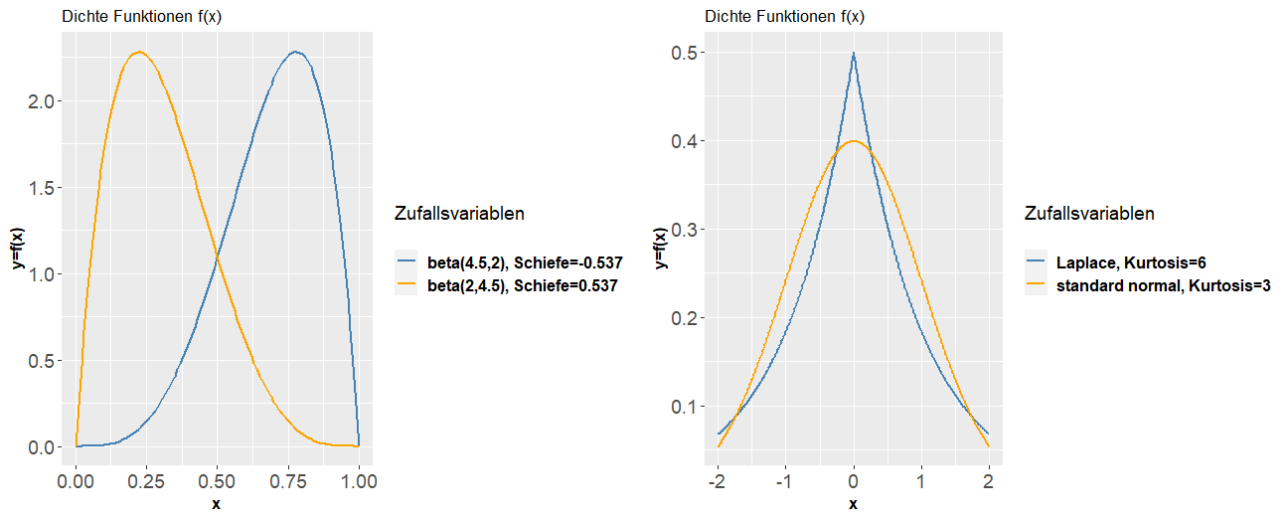


Abbildung 1: Darstellung von Schiefe und Wölbung mittels Dichten einer Zufallsvariable

wie die blaue Dichte im ersten Graphen, so besitzt die Zufallsvariable eine negative Schiefe. Neigt die Dichte hingegen nach links, wie die orange Dichte aus dem ersten Graphen, so besitzt die Zufallsvariable eine positive Schiefe. Eine normalverteilte Zufallsvariable ist symmetrisch und besitzt daher Schiefe 0. Im zweiten Graph wird der Begriff Wölbung anhand von Dichten visualisiert. Es gibt an, wie stark eine Dichte gewölbt ist. Lläuft sie um den Mittelwert steil zusammen, besitzt die Zufallsvariable eine hohe Wölbung. Eine normalverteilte Zufallsvariable besitzt eine Wölbung von 3.

Diese Kenngrößen einer Zufallsvariable sind über die ersten vier Momente definiert. Ebenso werden die empirische Schiefe und die empirische Wölbung über diese Momente bestimmt [Kus14],[DB90].

Definition 4 (Schiefe und Wölbung). Sei Y eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ beschreibe eine Stichprobe von n Beobachtungen, \bar{x} das Stichprobenmittel und s die Stichprobenstandardabweichung. Dann gelten folgende Definitionen:

- i) $\sqrt{\beta_1}$ ist die Schiefe der Zufallsvariable $Y \in \mathfrak{L}_3(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) : \Leftrightarrow \sqrt{\beta_1} := \frac{m_3}{\sigma^3} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{Y - \mathbb{E}[Y]}{\sigma_Y} \right)^3 \right]$
- ii) $\sqrt{B_1}$ ist die empirische Schiefe der Stichprobe $s : \Leftrightarrow \sqrt{B_1} := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$
- iii) β_2 ist die Wölbung der Zufallsvariable $Y \in \mathfrak{L}_4(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) : \Leftrightarrow \beta_2 := \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^4]}{\text{Var}[Y]^2}$
- iv) B_2 ist die empirische Wölbung der Stichprobe $x : \Leftrightarrow B_2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4$

Die Teststatik zu dem D'Agostino's K-squared Test wird über die empirische Schiefe und empirische Wölbung definiert und beruht auf der Diskrepanz in diesen Größen. Diese Statistik, die in Definition 5 dargestellt ist, hat unter der Nullhypothese der Normalverteilung näherungsweise eine χ^2 Verteilung mit zwei Freiheitsgraden.

Definition 5. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine Stichprobe. Die D'Agostino K^2 Statistik ist für $n \geq 20$ gefolgt definiert.

$$K^2 := Z_1^2(\sqrt{B_1}) + Z_2^2(B_2)$$

Der D'Agostino's K-squared Test kann in einen Test der Schief und der Wölbung unterteilt werden. $Z_1(\sqrt{B_1})$ als auch $Z_2(B_2)$ sind unter der Nullhypothese nahezu normalverteilt und messen die Diskrepanz in der Schiefe beziehungsweise Wölbung. Aufgrund dieser Zusammensetzung wird der Test auch "The Skewness and Kurtosis Test" genannt. Skewness und Kurtosis stehen hierbei für Schiefe und Wölbung. Die Funktionen $Z_1(\cdot)$ und $Z_2(\cdot)$ sind Normal-Approximationen, die für $n \geq 20$ gültig sind und werden unter anderem im Paper "A Suggestion for Using Powerful and Informative Tests of Normality" definiert [DB90].

2.2.2 Shapiro-Wilk Test

Der "Shapiro-Wilk Test" ist ein weiterer traditioneller Test um die Normalverteilung von Daten zu untersuchen und eignet sich für Stichprobengrößen zwischen 4 und 2000. Der Test wurde von Shapiro und Wilk entwickelt und 1965 voröfentlicht [Roy82a].

Sei $X_{(i)}$ die i -te Ordnungsstatistik der Stichprobe $X = (X_1, \dots, X_n)$ und $\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ das Stichprobenmittel. Der Vektor $m = (m_1, \dots, m_n)^T$ beschreibe die Erwartungswerte und V die Kovarianzmatrix der Ordnungsstatistiken $Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)}$ zur Standardnormalverteilung. Das heißt, für Z_1, \dots, Z_n unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen, erfüllen m und V folgende Gleichungen:

$$m_i = \mathbb{E}[Z_{(i)}] (i = 1, \dots, n) \text{ und } v_{i,j} = \text{COV}[Z_{(i)}, Z_{(j)}] (i, j = 1, \dots, n)$$

Über diese Größen \bar{X}, m und V kann die Shapiro-Wilk Teststatistik definiert werden [Roy82b].

Definition 6. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine Stichprobe. Die Shapiro-Wilk Teststatistik SW ist über folgende Formel definiert:

$$SW := \frac{(\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (X - \bar{X})^2}$$

wobei die Koeffizienten $a = (a_1, \dots, a_n)$ die Gleichung $a^T = m^T V^{-1} [(m^T V^{-1})(V^{-1} m)]^{-\frac{1}{2}}$ erfüllen.

Bei einer Stichprobengröße zwischen 4 und 2000 existiert wie beim "D'Argostino's K-squared Test" eine Normalapproximation für die Teststatistik SW . Eine Normalapproximation für die Teststatistik des Shapiro-Wilk Tests ist mit folgender Transformation gegeben. Für genauere Informationen siehe [MP15] oder [Roy82a].

$$Z_n(SW) := \begin{cases} \frac{-\log(\gamma - \log(1-SW)) - \mu}{\sigma} & \text{für } 4 \leq n \leq 11 \\ \frac{\log(1-SW) - \mu}{\sigma} & \text{für } 12 \leq n \leq 2000 \end{cases}$$

wobei die Parameter γ, μ und σ gefolgt definiert sind:

$$\gamma = 0.459n - 2.273$$

$$\mu = \begin{cases} -0.001n^3 + 0.02n^2 - 0.4n + 0.544 & \text{für } 4 \leq n \leq 11 \\ 0.004\log(n)^3 - 0.084\log(n)^2 - 0.311\log(n) - 1.585 & \text{für } 12 \leq n \leq 2000 \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \exp(-0.002n^3 + 0.063n^2 - 0.779n + 1.382) & \text{für } 4 \leq n \leq 11 \\ \exp(0.003\log(n)^2 - 0.083\log(n) - 0.48) & \text{für } 12 \leq n \leq 2000 \end{cases}$$

2.2.3 Shapiro-Francia Test

Der ‘‘Shapiro-Francia Test ‘‘ ist laut einer aktuellen Studie von Mbah und Paothong einer der besten Tests, um Abweichung von der Normalverteilung festzustellen. In der Studie wurde der Shapiro-Francia Test mit acht weiteren bekannten Testverfahren verglichen, unter denen sich auch der D’Agostino’s K-squared Test und Shapiro-Wilk Test befinden. In allen Stichprobengrößen (klein(10-50),mittel(100-500) und groß(1000-5000)) konnte sich der Shapiro-Francia Test durchsetzen [MP15].

Seien, wie beim Shapiro-Wilk Test, $m = (m_1, \dots, m_n)$ der Vektor der Erwartungswerte zur Ordnungsstatistiken $Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)}$ der Standardnormalverteilung, X_i die i -te Ordnungsstatistik und \bar{X} das Stichprobenmittel. Die Shapiro-Francia Teststatistik ist gefolgt definiert.

Definition 7. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine Stichprobe. Die Shapiro-Francia Teststatistik SF ist über folgende Formel definiert:

$$SF := \frac{(\sum_{i=1}^n m_i X_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (X_{(i)} - \bar{X})^2}$$

Da die Verteilung der Teststatistik nicht bekannt ist, wird auch bei diesem Test eine Normalapproximation angewandt. Unter der Nullhypothese und einer Stichprobengröße n zwischen 5 und 5000 ist folgende Statistik annähernd normalverteilt [MP15]:

$$Z(SF) = \frac{\log(1 - SF) - \mu}{\sigma}$$

mit $\mu = -1.2725 + 1.0521(\log^2(n) - \log(n))$ und $\sigma = -0.26758(\log^2(n) + 2/\log(n)) + 1.0308$

3 Der Algorithmus

Der agent-basierte Algorithmus simuliert die Preisgestaltung in einem theoretischen Modell, in welchem Unternehmen durch Preisgestaltung um Kunden konkurrieren und versuchen den höchstmöglichen Profit zu erzielen. Das Verfahren basiert weder auf das Maximieren beziehungsweise Minimieren einer reellen Funktion, noch auf dem Lösen einer Equilibriumsfunktion. Vielmehr beruht der Algorithmus auf der Optimierung der Entscheidungen der Agents. Folglich garantiert der Algorithmus die bestmögliche Entscheidung der Marktteilnehmer.

Der Algorithmus ist modular aufgebaut und besteht aus zwei Unteralgorithmen, einen für die Kunden und den andere für die Unternehmen. Der Kundenalgorithmus reproduziert die Kaufentscheidung und erlaubt Nachfrage zu simulieren. Der Algorithmus für die Unternehmen bildet den Prozess nach, mit welchem ein Unternehmen den Preis zu einem Produkt bestimmt. Die abwechselnde Interaktion dieser Algorithmen führt zur Bestimmung der Equilibria.

3.1 Der Kundenalgorithmus

Das Modell geht davon aus, dass jeder Kunde zu jedem Zeitpunkt t eine Nutzenfunktion $\mathcal{U}(\cdot)$, auch Utility-Funktion, besitzt. Diese Funktion beschreibt den eigenen Nutzen des Kunden beim Kauf eines gegebenen Produktes und ist das Pendant zur Paypack-Funktion aus der Spieltheorie. Jeder Kunde betrachtet vorerst den Nutzen, den er aus den Angeboten der bekannten Unternehmen ziehen kann. Sollte kein Unternehmen ein passendes Produkt anbieten, $\mathcal{U}(\cdot) < 0$, verlässt der Kunde den Markt. Verkaufen Unternehmen jedoch geeignete Produkte, $\mathcal{U}(\cdot) \geq 0$, dann vergleicht der Kunde die Angebote der unterschiedlichen Unternehmen und kauft das Produkt, welches seine Utility-Funktion maximiert. Alle Kunden, welche dasselbe Produkt vom selben Unternehmen kaufen, bilden die Nachfrage, auch Demand genannt, gegenüber diesem Unternehmen.

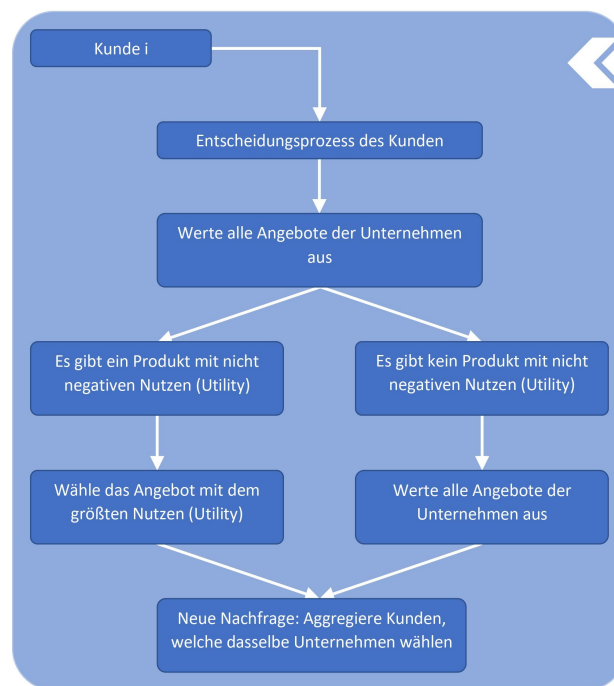


Abbildung 2: Kundenalgorithmus

Besonders sind folgende Vorteile des Algorithmus hervorzuheben:

- Der Kundenalgorithmus ist modular aufgebaut und kann unabhängig vom Preiswettbewerb genutzt werden.
- Der Algorithmus hängt von keiner Demand-Funktion ab. Die Nachfrage resultiert ausschließlich aus den Entscheidungen der Kunden.
- Die Kunden treffen Entscheidungen aufgrund ihrer Utility-Funktionen, welche diskret aber auch stetig sein können. Des Weiteren kann die Nutzenfunktion sehr flexibel definiert werden. Die Abbildung muss für unterschiedliche Kunden auch nicht ident sein. Zusätzlich kann die Utility-Funktion von mehreren Parametern abhängen. Selbst eine Abhängigkeit von der Zeitkomponente t ist denkbar. So sind auch dynamische Nutzenfunktionen zulässig.
- Der Algorithmus kann auch mit nicht perfekten Informationsfluss Zurecht kommen. Wir können beispielsweise ein Netzwerk zwischen den Kunden definieren, in welchem Informationen ausgetauscht werden. In den folgenden Kapiteln wird allerdings von perfekter Information ausgegangen.

3.2 Der Unternehmeralgorithmus

Der Unternehmeralgorithmus reproduziert die beste Antwortstrategie der Unternehmen auf die derzeitige Marktsituation. Die Approximation der Nash-Equilibria hängt zusätzlich von der Wahl des Startpreises und des Iterationsparameters ϵ ab, der am Anfang der Simulation definiert werden müssen. Des Weiteren können nur äquidistant verteilte Werte angenommen werden, was die Konvergenz gegen das genaue Equilibrium einschränkt.

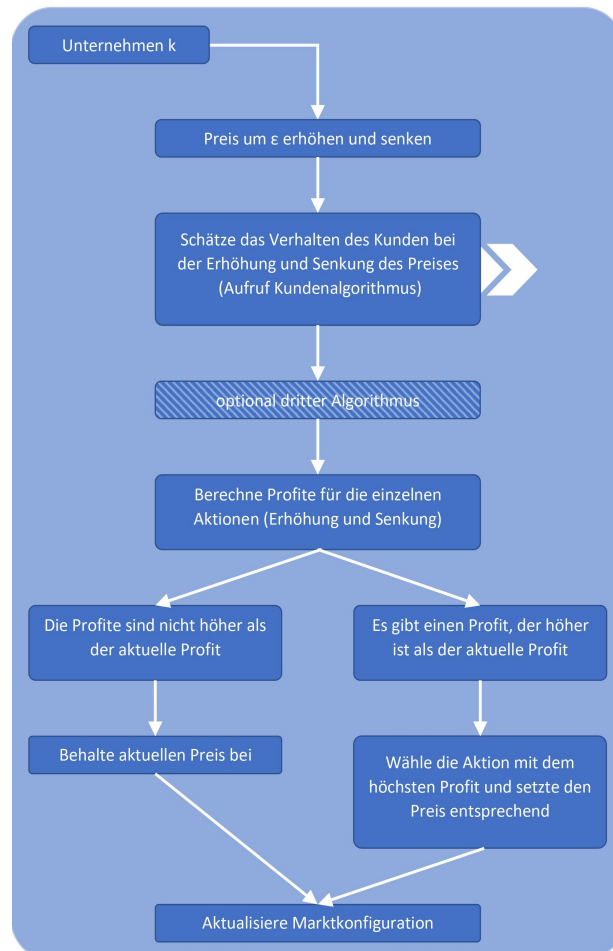


Abbildung 3: Unternehmeralgorithmus

Der Unternehmeralgorithmus besteht seinerseits aus weiteren vier Subalgorithmen.

1. Der erste Algorithmus prüft die Preisänderung eines Produktes durch ein Unternehmen. Der Preis kann um einen fixen Betrag ϵ erhöht oder gesenkt werden. Der Iterationsparameter $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, sowie ein beliebiger Startpreis $p_0 \in \mathbb{R}$ müssen am Anfang der Simulation definiert werden.
2. Im zweiten Algorithmus wird simuliert, wie sich die Preisänderung auf die Nachfrage auswirkt. Um den Einfluss auf den Demand zu approximieren, wird die Änderung in den Utility-Funktionen der Kunden geschätzt. Allerdings werden Preisänderungen anderer Unternehmen nicht berücksichtigt, die durchaus Auswirkungen auf die Entscheidungen der Kunden haben können.
3. Der dritte Algorithmus ist optional. Er ist designt, um externe Effekte, wie direkte oder indirekte Netzwerkeffekte, zu berücksichtigen. Er betrachtet die Fälle, bei welchem die Änderung des Preises, die Entscheidung von anderen Kunden beeinflusst, die ihrerseits

andere Kunden beeinflussen. In bestimmten Fällen können so neue Kunden angezogen werden, die zur selben Zeit weitere Kunden anziehen, die wiederum neue Kunden anziehen,... . Der Algorithmus simuliert diese Rückkoppelung bis der Effekt verschwindet. Ein Ende der Rückkoppelung ist aufgrund der endlichen Anzahl von Kunden garantiert.

4. Die Unternehmen vergleichen die drei Optionen Preissteigerung, Preissenkung und keine Preisänderung und wählen die profitabelste Variante.

4 Simulationstest

Um zu zeigen, dass der Algorithmus die besten Preise in theoretischen Modellen reproduzieren kann, wird er in mehreren ökonomischen Systemen angewandt. Es werden unterschiedliche, bekannte, theoretische Modelle analysiert, in denen Unternehmen über Preiswettbewerb um Kunden konkurrieren. Für den Algorithmus werden ausschließlich die Utility-Funktionen, die dem theoretischen Modell zugrunde liegen, benötigt. Wir werden allerdings auch die Systeme analytisch lösen, um die Resultate aus der Simulation vergleichen zu können.

In der Simulation wird eine Welt von 314 Kunden erzeugt. Bei Märkten mit zweiseitigen Plattformen werden 628 Kunden modelliert, die aliquot auf die beiden Gruppen aufgeteilt werden. Die Ergebnisse aus der Simulation werden anschließend mit den theoretischen Equilibria verglichen. Des Weiteren betrachten wir ausschließlich Iterationsparameter ϵ von 0.1 und 0.05.

Der Algorithmus wird in einem Modell getestet, in welchem wir annehmen, dass der Algorithmus den Preis zwar annähern kann, allerdings einen normalverteilten Fehler macht.

$$Y_i = p_i + err_i \tag{1}$$

Im Modell (1) beschreibt Y_i den vom Algorithmus bestimmten Preis und p_i den theoretisch besten Preis aus dem i -ten Versuch, der analytisch bestimmt wird. Wir nehmen an, dass die Fehlerterme err_i Realisierungen von Zufallsvariablen sind, die identisch und unabhängig normalverteilt sind.

$$err_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Den Erwartungswert der Fehlerterme μ werden wir als Simulationsfehler bezeichnen, der angibt, um wie viel der theoretische Wert im Schnitt über- beziehungsweise unterschätzt wird. Zusätzlich können wir mit den D'Agostino's K-squared Test, Shapiro-Wilk Test und Shapiro-Francia Test überprüfen, ob unsere Annahme der Normalverteilung der Fehlerterme plausibel ist. Hierzu werden wir die statistischen Tests mit einem Signifikanzlevel von 5% durchführen.

4.1 Hotelling Modell

Dieses Modell geht davon aus, dass eine große Anzahl von Kunden entlang einer Strecke gleichverteilt ist. An den Endpunkten befinden sich zwei Unternehmen, die über Preiswettbewerb um Kunden konkurrieren. Jeder Kunde muss sich von seiner Position zu einem Unternehmen bewegen, um mit diesem zu interagieren. Dieser Prozess stellt einen Mehraufwand dar, der auch unter den Kunden unterschiedlich zum Tragen kommt. In der Wirtschaft wird diese Heterogenität horizontale Produktdifferenzierung (engl. horizontal differentiation) genannt und beschreibt Präferenzen, die sich nicht durch abweichender Qualität der Produkte beschreiben

lassen. So ziehen beispielsweise bestimmte Personen eine Coca-Cola einer Pepsi vor, obwohl die Getränke qualitativ gleich hochwertig sind.

Im klassischen Modell wird davon ausgegangen, dass die Kunden gleichmäßig auf dem Intervall $(0, 1)$ verteilt sind. x_i beschreibt die Position des i -ten Kunden und der Nutzen durch den Kauf des Produktes vom Unternehmen $j \in \{1, 2\}$ wird gefolgt modelliert:

$$U_{i,j} = c^u + q_j - t * |l_j - x_i| - p_j$$

Die Utility-Funktion $U_{i,j}$ ist für alle Kunden ident mit der Ausnahme, dass sich der Parameter x_i unterscheidet. Für die Reise zu den Unternehmen, deren Standorte l_j sich auf den Endpunkten des Intervalls $[0, 1]$ befindet, zahlen die Kunden Transportkosten t . Über diesen Parameter kann die Differenzierung zwischen dem optimalen Produkt für den Kunden i und dem vom Unternehmen j angebotenen Produkt dargestellt werden. Der Term $t * |l_j - x_i|$ beschreibt die subjektive Wertminderung durch die Abweichung vom optimalen Produkt und spiegelt eine horizontale Produktdifferenzierung wider. Dieser Term beschreibt auch die absoluten Transportkosten, die der Kunde i entrichten muss, um zum Unternehmen j zu gelangen. Der exogene Parameter q_j beschreibt die Qualität vom Produkt des j Unternehmens und p_j dessen Preis. Um zu garantieren, dass jeder Kunde mindestens ein Produkt erwirbt, kann im theoretischen Modell ein universeller Reservationswert c^u eingeführt werden. Um sicherzustellen, dass c^u ausreichend groß ist, muss in einem Modell mit n Kunden und zwei Unternehmen folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$c^u \geq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \min_{j \in \{1, 2\}} t * |l_j - x_i| + p_j - q_j$$

4.1.1 analytische Bestimmung der Equilibria

Zuerst berechnen wir das theoretische Nash-Equilibrium. Die Existenz einer solchen Ruhelage ist vorab nicht garantiert. Unsere Überlegungen werden allerdings zu einem Equilibrium führen. Dazu adaptieren wir das Modell dahingehend, dass die Kunden nur die beiden Möglichkeiten haben, bei Unternehmen 1 oder Unternehmen 2 zu kaufen. Es ist nicht möglich nichts zu erwerben, was wir unter geeignete Wahl von c^u garantieren können. Des Weiteren ist dem Kunden vor dem Kauf sowohl die Qualität als auch der Preis eines Produktes bekannt. Ebenfalls kennt er die Transportkosten, die er gegebenenfalls bei einen Kauf aufbringen muss und folglich auch den Nutzen den er aus den Kauf zieht. Somit hat der Kunde i folgende puren Strategien, die er anwenden kann:

Strategie	$U_{i,1} > U_{i,2}$	$U_{i,1} < U_{i,2}$	$U_{i,1} = U_{i,2}$
a	Kauf bei Unternehmen 1	Kauf bei Unternehmen 1	Kauf Unternehmen 1
b	Kauf bei Unternehmen 1	Kauf bei Unternehmen 1	Kauf Unternehmen 2
c	Kauf bei Unternehmen 1	Kauf bei Unternehmen 2	Kauf Unternehmen 1
d	Kauf bei Unternehmen 1	Kauf bei Unternehmen 2	Kauf Unternehmen 2
e	Kauf bei Unternehmen 2	Kauf bei Unternehmen 1	Kauf Unternehmen 1
f	Kauf bei Unternehmen 2	Kauf bei Unternehmen 1	Kauf Unternehmen 2
g	Kauf bei Unternehmen 2	Kauf bei Unternehmen 2	Kauf Unternehmen 1
h	Kauf bei Unternehmen 2	Kauf bei Unternehmen 2	Kauf Unternehmen 2

Tabelle 1: Strategien für Kunde i

Die Strategien c und d bringen in jedem Szenario einen höheren Nutzen als die übrigen Strategien und dominieren daher die anderen Strategien. Der Kunde sollte auf jeden Fall eine dieser beiden Strategien anwenden. Des Weiteren haben diese Strategien in allen Szenarien den gleichen

Gewinn. Insgesamt können deshalb alle Strategien auf die dominierende Strategien c reduziert werden. Die Gültigkeit des Verfahrens der dominanten Strategien wird im Kapitel 3 von Barron E.N. behandelt und kann dort nachgelesen werden [Bar13]. Zusätzlich können wir das Modell erweitern und zulassen, dass Kunden nichts kaufen. Da wir allerdings c^u so gewählt haben, dass für alle Kunden der Nutzen aus mindestens einem Produkt nicht negativ ist, können wir in diesem Modell erneut die Strategien auf die dominierende Strategie reduzieren.

Unter der Annahme $t > 0$ können wir einen Punkt \bar{x} bestimmen, welcher die Kunden der Unternehmen 1 und 2 trennt. Alle Kunden links des Punktes erwerben das Produkt von Unternehmen 1, während alle Kunden rechts davon bei Unternehmen 2 kaufen. Dazu müssen wir folgende Gleichung auf \bar{x} umstellen:

$$\begin{aligned}
c^u + q_1 - t * |l_1 - \bar{x}| - p_1 &= c^u + q_2 - t * |l_2 - \bar{x}| - p_2 && \Leftrightarrow \\
t * (|l_2 - \bar{x}| - |l_1 - \bar{x}|) &= (q_2 - p_2) - (q_1 - p_2) && \Leftrightarrow \\
t * ((l_2 - \bar{x}) - (\bar{x} - l_1)) &= (q_2 - q_1) + (p_1 - p_2) && \Leftrightarrow \\
t * (l_2 + l_1 - 2\bar{x}) &= (q_2 - q_1) + (p_1 - p_2) && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{l_2 + l_1}{2} + \frac{(q_1 - q_2) + (p_2 - p_1)}{2t}$$

Allgemein ist nicht garantiert, dass dieser Punkt \bar{x} im Intervall (l_1, l_2) liegt. Die Produkte könnten sich qualitativ derart unterscheiden, dass sich der Punkt für gewisse Preise außerhalb des Intervalls befindet. Sollte der Punkt jedoch außerhalb des Intervalls liegen, so dominiert ein Unternehmen den Markt, während das andere Unternehmen selbst keine Marktanteile besitzt. Unter der Annahme, dass $|q_1 - q_2| < t(l_2 - l_1)$, kann dieser Fall nicht eintreten. Die Unternehmen können durch aktive Preisgestaltung einzeln sicherstellen, dass der Punkt \bar{x} im Intervall (l_1, l_2) liegt. Genauer kann unter dieser Annahme das Unternehmen 1 auch mit Unternehmen 2 konkurrieren, selbst wenn dieses seine Produkte verschenkt.

Sei nun $\bar{x} \in (l_1, l_2)$. Für Kunde i mit $x_i \in (l_1, \bar{x})$ gilt dann $U_{i,1} > U_{i,2}$, weshalb er bei Unternehmen 1 ein Produkt erwirbt. Analog kaufen Kunden mit $x_i \in (\bar{x}, l_2)$ bei Unternehmen 2 ein. Wir nehmen zusätzlich an, dass den Unternehmen, die genau Position der Kunden nicht bekannt ist. Da die Kunden im Intervall (l_1, l_2) allerdings gleichverteilt sind, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit erwartet werden, dass $n * (\bar{x} - l_1) / (l_2 - l_1)$ Kunden bei Unternehmen 1 einkaufen und $n * (l_2 - \bar{x}) / (l_2 - l_1)$ bei Unternehmen 2 einkaufen. Für eine große Anzahl an Kunden wird eine zufällige Realisierung auch diese Annäherung approximieren. Folglich erhalten wir für die einzelnen Unternehmen die Utility-Funktionen:

$$\begin{aligned}
U_1(p_1, p_2) &= \frac{p_1 * n * (\bar{x} - l_1)}{(l_2 - l_1)} \\
U_2(p_1, p_2) &= \frac{p_2 * n * (l_2 - \bar{x})}{(l_2 - l_1)}
\end{aligned}$$

Da unsere Utility-Funktionen stetig differenzierbar in p_1 und p_2 sind, werden wir nun folgendes Gleichungssystem lösen, um ein Nash-Equilibrium $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ zu bestimmen. Die Existenz einer Lösung ist vorab nicht trivial. Aufgrund unserer Berechnungen werden wir allerdings ein eindeutiges Equilibrium $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ bestimmen können.

$$\begin{aligned}\frac{dU_1}{dp_1}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) &= 0 \wedge \frac{dU_1}{dp_1^2}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) < 0 \\ \frac{dU_2}{dp_2}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) &= 0 \wedge \frac{dU_2}{dp_2^2}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) < 0\end{aligned}$$

Lösen wir die Gleichungen, so können wir die Besten Antwortstrategien der Unternehmen in Abhängigkeit des Preises vom Konkurrenten bestimmen. Auch die Ungleichungen des obigen Systems sind aufgrund der Konkavität unserer Utility-Funktionen U_i im Parameter p_i erfüllt. Da in einem Nash-Equilibrium, die einzelnen Strategien die Besten Antwortstrategien zu den anderen Nash-Strategien darstellen, können wir diese Abhängigkeit verwenden.

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1(p_2) &= \frac{t(l_2 - l_1)}{2} + \frac{q_1 - q_2 + p_2}{2} \\ \tilde{p}_2(p_1) &= \frac{t(l_2 - l_1)}{2} + \frac{q_2 - q_1 + p_1}{2}\end{aligned}$$

Durch unsere obige Annahme, dass $|q_1 - q_2| < t * (l_2 - l_1)$, können wir sicher stellen, dass die beste Antwortstrategie zu einem nicht negativen Preis auch nicht negativ ist. Ohne dieser Annahme erwarten wir in diesem Schritt allgemein unerwünschte und nicht nachvollziehbare Lösungen. Theoretisch könnte sowohl $(\bar{x} - l_1)$ als auch $\tilde{p}_1(p_2)$ negativ sein, wodurch die Utility-Funktion U_1 wiederum positiv wird. Dies spiegelt allerdings keineswegs die Realität wider, da in diesen Fällen Unternehmen 2 den Markt dominieren und Unternehmen 1 keinen Marktanteile mehr besitzen würde. Aufgrund unserer Einschränkung wissen wir allerdings, dass $\tilde{p}_1(p_2)$ nicht negativ ist. Daraus folgt, dass $U_1(\tilde{p}_1(p_2), p_2) \geq 0$, zumal $U_1(0, p_2) = 0$ und $\tilde{p}_1(p_2)$ die Utility-Funktion maximiert. Des Weiteren sehen wir, dass aus $\tilde{p}_1(p_2) \neq 0$ auch $l_1 < \bar{x}$ folgt. Somit ist obiges Szenario ausgeschlossen. Analoges kann für Unternehmen zwei gezeigt werden.

Folgende Menge N ist über den Schnitt der Besten Antwortstrategien definiert und beschreibt die Menge der Nash-Equilibria. Da N das obige Gleichungssystem löst, erfüllen die Elemente der Menge auch die Definition des Nash-Equilibriums.

$$N := \{(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) : \tilde{p}_1 = \tilde{p}_1(\tilde{p}_2) \wedge \tilde{p}_2 = p_2(\tilde{p}_1)\}$$

Schließlich erhalten wir unter unseren Annahmen folgende Darstellung des Nash-Equilibriums.

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1 &= t * (l_2 - l_1) + \frac{q_1 - q_2}{3} \\ \tilde{p}_2 &= t * (l_2 - l_1) + \frac{q_2 - q_1}{3}\end{aligned}$$

Dieses Nash-Equilibrium ist auch eindeutig, da die rationalen Preise für die Unternehmen beschränkt sind. Es wird logischerweise kein Produkt unter einem Wert von 0 verkauft. Zusätzlich ist der Preis auch nach oben beschränkt, zumal es für beide Unternehmen einen Preis p_j^{max} gibt, der das Supremum der Preise angibt, bei denen zumindest ein Produkt verkauft werden kann. Dieser Höchstpreis erfüllt, dass zumindest die Utility-Funktion eines Kunden nicht negativ ist und somit folgende Ungleichung.

$$p_j^{max} < c^u + q_j - t * \min_{i \in K} \{|l_j - x_i|\} \leq c^u + q_j$$

Somit können wir die Preise für das Nash-Equilibrium auf das Kompaktum $[0, p_1^{max}] \times [0, p_2^{max}]$ einschränken. Zusätzlich gilt $\frac{dU_1(p_1, p_2)}{dp_1^2} = -\frac{1}{t(l_2 - l_1)} < 0$, womit die Gleichung $\frac{dU_1(p_1, p_2)}{dp_1} = 0$ für alle p_2 ein eindeutiges Maximum beschreibt (vgl. Korollar 7.2.4 [Kal14]). Folglich ist die beste Antwortstrategie für Unternehmen 1 eindeutig bestimmt durch $\tilde{p}_1(p_2)$. Die Utility-Funktion ist nämlich außerhalb, sowie am Rand des Kompaktums, nicht positiv und innerhalb des Kompaktums nimmt nur $\tilde{p}_1(p_2)$ ein positives Maximum an. Analog kann die Eindeutigkeit der Besten Antwortstrategie für Unternehmen 2 nachgewiesen werden. Da der Schnitt aus den besten Preisen eine eindeutige Lösung hat, ist auch unser Nash-Equilibrium eindeutig.

Lemma 2. *In einem Hotelling Modell mit $t > 0$ und $|q_2 - q_1| < t(l_2 - l_1)$ existiert ein eindeutiges Nash-Equilibrium:*

$$\tilde{p}_1 = t * (l_2 - l_1) + \frac{q_1 - q_2}{3}$$

$$\tilde{p}_2 = t * (l_2 - l_1) + \frac{q_2 - q_1}{3}$$

4.1.2 Simulationsergebnisse

Wir werden eine Simulation zu unterschiedlichen Transportkosten t und symmetrischer Qualität ($q_1 = q_2$) durchführen. Zusätzlich normieren wir den Versuchsaufbau und nehmen an, dass $l_1 = 0$ und $l_2 = 1$. In Abbildung 4 sehen wir eine Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse und dem theoretischen Nash-Equilibrium zu unterschiedlichen Transportkosten t . Im Allgemeinen unterscheiden sich die Simulationsergebnisse in Abhängigkeit vom Iterationsparameter ϵ . Wir werden daher für die Iterationsparameter einzeln bewerten, ob der Algorithmus die theoretischen Preise reproduzieren kann.

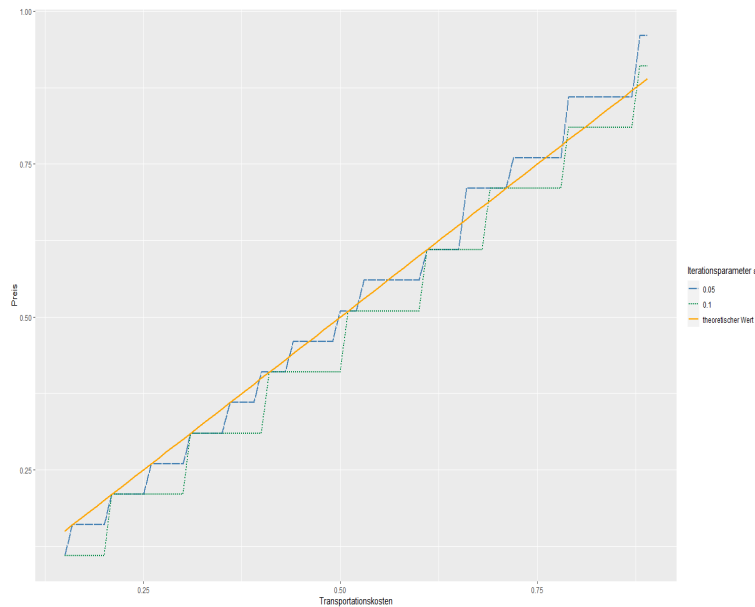


Abbildung 4: Simulierter und theoretischer Preis für Hotelling Modell

Um zu testen, ob die simulierten Werte die theoretischen Preise reproduzieren können, werden wir das Modell (1) heranziehen. Dieses entspricht in diesem konkreten Fall einem linearen Regressionsmodell. Da für beide Iterationsparameter die empirische Korrelation zwischen Transportkosten und simulierten Preis bei über 0,99 liegt, ist es auch naheliegend, dass das Modell anwendbar ist.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + err_i, i = 1, \dots, n \wedge err_i \text{ iid } \mathcal{U}(0, \sigma^2)$$

Den Regressanden Y_i setzen wir mit den einzelnen Simulationsergebnissen gleich. Die dem Simulationsmodellen zugrunde liegenden Transportkosten benennen wir analog zum Modell mit t_i . Schließlich wählen wir als Regressions estimator $\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 t_i$ den theoretisch besten Preis in Abhängigkeit der Transportkosten. Dies ist ebenfalls eine affin-lineare Funktion. Unter diesen Annahmen müssten die Differenzen aus simulierten und theoretischen Preis normalverteilt sein. Um die Normalverteilung zu überprüfen, werden die drei Tests D’Agostino’s K-squared Test, Shapiro-Wilk Test und Shapiro-Francia Test angewandt.

ϵ	D’Agostino’s K-squared Test	Shapiro-Wilk Test	Shapiro-Francia Test
0.1	0.04937	0.05119	0.12153
0.05	0.01207	0.00064	0.001633

Tabelle 2: p-Wert zu den Normalverteilungstests für Hotelling Modell

In der Tabelle 2 können die p-Werte zu den Tests abgelesen werden. Zuerst betrachten wir die Auswertung für die Simulation mit Iterationsparameter ϵ gleich 0.1. Zu einem Konfidenzlevel von 95% kann nur der D’Agostino’s K-squared Test die Nullhypothese der Normalverteilung widerlegen. Es ist daher vernünftig anzunehmen, dass der Fehler normalverteilt ist. Folglich ist der Durchschnitt (-0.038) der Differenzen eine gute Representation des Simulationsfehlers. Da unser Algorithmus in 0.1 Inkrementen den Preis annähert, ist die geringere Abweichung von -0.038 vernachlässigbar.

Intervall	D’Agostino’s K-squared Test	Shapiro-Wilk Test	Shapiro-Francia Test
[0.15, 0.59]	0.61688	0.07807	0.12139
[0.6, 0.89]	0.63937	0.70415	0.87573

Tabelle 3: p-Wert zu den Normalverteilungstests für $\epsilon = 0.05$ und unterteilten Intervall

Bei einem Iterationsparameter von 0.05 können alle Tests die Nullhypothese zu einem Konfidenzlevel von 95% widerlegen. Teilen wir die Transportkosten auf zwei Intervalle [0.15, 0.59] und [0.6, 0.89] auf und wiederholen die Tests so erhalten wir folgende Ergebnisse.

Betrachtet man die zwei Intervalle einzeln, so kann kein Test die Nullhypothese der Normalverteilung auf einem Konfidenzlevel von 95% widerlegen. Betrachten wir erneut den Mittelwert der Differenzen als Estimator für den Simulationsfehler. Im Intervall [0.15, 0.59] wird der theoretische Preis im Mittel um 0.012 unterschätzt, während der Algorithmus im Intervall [0.6, 0.89] im Schnitt ein um 0.017 zu hohes Ergebnis simuliert. Beide Fehler können allerdings vernachlässigt werden, zumal der Algorithmus den theoretischen Wert in 0.05 Inkrementen approximiert.

Die Ergebnisse aus den selbst durchgeführten Simulationen spiegeln auch die Beobachtungen von Sanchez-Cartas wider (vgl. [SC18]).

4.2 vertikales Differenzierungsmodell

Im vertikalen Differenzierungsmodell ist die Utility-Funktion des Kunden i beim Kauf des Produktes j gefolgt definiert.

$$U_{i,j} = \theta_i * q_j - p_j$$

Alle Kunden zahlen denselben Preis p_j für das Produkt j , dessen Qualität durch q_j beschrieben wird. Der Parameter θ_i beschreibt den Geschmack von Qualität. Im Gegensatz zum Hotelling Modell kann so vertikale Produktdifferenzierung modelliert werden. Diese Produktdifferenzierung spiegelt unterschiedliche Präferenzen in Abhängigkeit der Qualität wider. Zu demselben Preis bevorzugen beispielsweise so gut wie alle Kunden einen Ferrari über einen Fiat. Der Parameter θ ist gleichverteilt über die Population der Kunden und nimmt Werte zwischen $\underline{\theta}$ und $\bar{\theta} := \underline{\theta} + 1$ an. Des Weiteren treffen wir zwei zusätzliche Annahmen. Annahme 1 garantiert, dass in unserem Modell mit zwei Unternehmen auch beide aktiv sind und keines ein Monopol einnimmt.

Annahme 1: $\bar{\theta} \geq 2\underline{\theta}$

Annahme 2: $(\bar{\theta} - 2\underline{\theta})(q_1 - q_2) \leq 3\underline{\theta}q_1$

4.2.1 analytische Bestimmung der Equilibria

Unter unseren Annahmen erhalten wir folgendes Nash-Equilibrium für die Preise. Beachte, dass die Qualität als bekannter Parameter gegeben ist.

Lemma 3. *In einem zweiseitigen vertikalem Differenzierungsmodell, in welchem die Qualität des ersten Produktes geringer ist als die Qualität des zweiten Produktes ($q_1 < q_2$) und obige Annahmen 1 und 2 zutreffen, ist das Nash-Equilibrium der besten Preise gegeben durch:*

$$\tilde{p}_1 = \frac{1}{3} ((\bar{\theta} - 2\underline{\theta})(q_2 - q_1))$$

$$\tilde{p}_2 = \frac{1}{3} ((2\bar{\theta} - \underline{\theta})(q_2 - q_1))$$

Beweis. Der Beweis des obigen Lemmas beruht auf dem Kapitel “5.3 Vertical product differentiation” aus dem Buch “Industrial Organization: Markets and Strategies“ von Belleflamme Paul und Peitz Martin [BP15].

Wie beim Hotelling Modell können wir eine Realisierung $\hat{\theta}$ der Zufallsvariable θ finden, die die Kunden des Unternehmen 1 und Unternehmen 2 trennt.

$$\hat{\theta} * q_1 - p_1 = \hat{\theta} * q_2 - p_2 \iff \hat{\theta} = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}$$

Mit Hilfe dieses Ausdruckes können wir den Umsatz der Unternehmen bestimmen, indem wir die Anzahl ihrer Kunden mit ihrem Produktpreis multiplizieren.

$$U_1(p_1, p_2) = p_1 * n * \left(\frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} - \underline{\theta} \right)$$

$$U_2(p_1, p_2) = p_2 * n * \left(\bar{\theta} - \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} \right)$$

Wie beim Hotelling Modell bestimmen wir als nächstes die Besten Antwortstrategien für die einzelnen Unternehmen, indem wir die zweimal stetig differenzierbaren und konkaven Funktionen ableiten und gleich 0 setzen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_1} U_1(\tilde{p}_1, p_2) = 0 &\iff \tilde{p}_1 = \frac{p_2 - (q_2 - q_1)\bar{\theta}}{2} \Rightarrow \tilde{p}_1(p_2) = \frac{p_2 - (q_2 - q_1)\bar{\theta}}{2} \\ \frac{\partial}{\partial p_2} U_2(p_1, \tilde{p}_2) = 0 &\iff \tilde{p}_2 = \frac{p_1 + (q_2 - q_1)\bar{\theta}}{2} \Rightarrow \tilde{p}_2(p_1) = \frac{p_1 + (q_2 - q_1)\bar{\theta}}{2} \end{aligned}$$

Als nächstes bestimmen wir den Schnitt der besten Antwortstrategien N , die zugleich die Menge der Nash-Equilibria ist.

$$N := \{(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) : \tilde{p}_1 = \tilde{p}_1(\tilde{p}_2) \wedge \tilde{p}_2 = \tilde{p}_2(\tilde{p}_1)\} = \left\{ \left(\frac{\bar{\theta} - 2\theta}{3}(q_2 - q_1), \frac{2\bar{\theta} - \theta}{3}(q_2 - q_1) \right) \right\}$$

Wir erhalten das eindeutige Nash-Equilibrium, welches den optimalen Preis darstellt. Des Weiteren sehen wir, dass es aufgrund unserer Annahme 1 auch keine negativen Preise gibt.

□

4.2.2 Simulationsergebnisse

Beim vertikalen Differenzierungsmodell betrachten wir den Preis des zweiten Produktes unter Variation der Qualität des ersten Produktes. Die Qualität des zweiten Produktes ist im Versuchsaufbau hingegen konstant gleich 1 gewählt. In der Abbildung 5 sind die Ergebnisse aus dem Versuch dargestellt. Mittels der orangenen Linie wird das theoretische Nash-Equilibrium visualisiert, während die beiden anderen Linien die Ergebnisse des Algorithmus mit Iterationsparameter 0.05 und 0.1 wiedergibt.

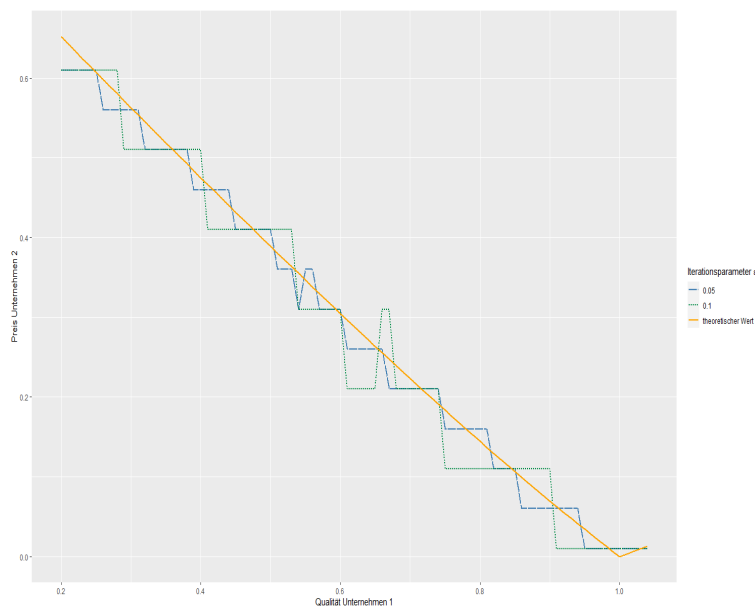


Abbildung 5: Simulierter und theoretischer Preis für vertikales Differenzierungsmodell

Um zu quantifizieren, wie gut der Algorithmus das Nash-Equilibrium reproduzieren kann, betrachten wir die Ergebnisse wieder in unserem Testmodell (1). Wie beim Hotelling Modell, stellt das Modell ein lineares Regressionmodell dar, weshalb wir die empirische Korrelation als Kenngröße heranziehen können. Diese liegt bei beiden Iterationsparametern bei rund -0.99, weshalb die Annahme einer linearen Abhängigkeit naheliegen ist.

ϵ	D'Agostino's K-squared Test	Shapiro-Wilk Test	Shapiro-Francia Test
0.1	0.6403904	0.9740844	0.9971427
0.05	0.147126	0.2940835	0.5320537

Tabelle 4: p-Wert zu den Normalverteilungstests für Hotelling Modell

Auch mittels der drei statistischen Tests können wir die Hypothese der Normalverteilung auf einen Signifikanzlevel von 5% nicht widerlegen. In Tabelle 4 sind die p-Werte aus den einzelnen statistischen Tests dargestellt, auf dessen Grundlage wir auf einem Konfidenzlevel von 95% verifizieren können, dass die Fehlerterme normalverteilt sind. Der Simulationsfehler liegt bei dem Iterationsparameter 0.1 bei -0.013 , was deutlich unter dem Iterationsparameter liegt. Auch bei einem Iterationsparameter von 0.05 wird der theoretische Wert im Schnitt nur um 0.008 unterschätzt. Da diese Werte deutlich kleiner als der Iterationsparameter sind, können wir sie vernachlässigen, zumal der Algorithmus die Werte nur in äquidistante Inkrementen approximieren kann. Die Ergebnisse aus der eigenen Simulation spiegelt auch die Beobachtungen von Sanchez-Cartas wider (vgl. [SC18]).

Neben dem optimalen Preis kann auch die Nachfrage vom Algorithmus approximiert werden. Diese Nachfrage wird vom Kundenalgorithmus simuliert und spielt auch eine wesentliche Rolle in der Bestimmung des optimalen Preises. In Abbildung 6 wird die simulierte Nachfrage für das obige Experiment dargestellt.

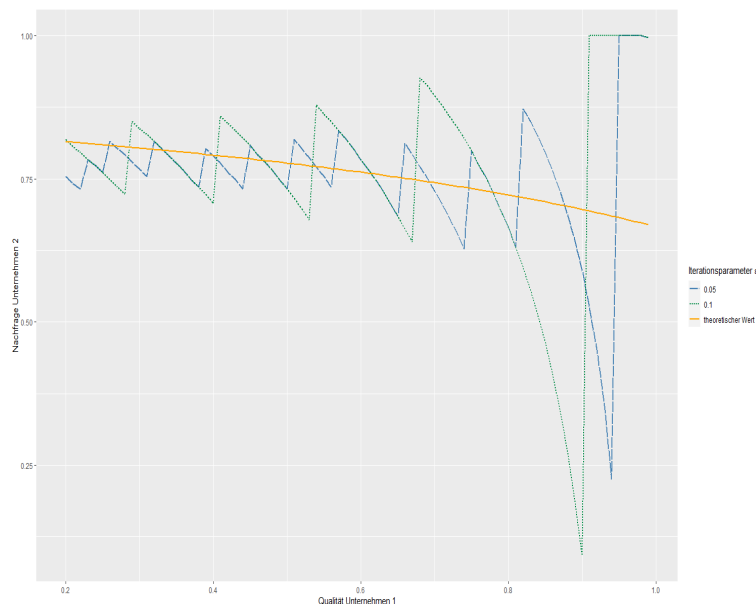


Abbildung 6: Simulierte und theoretische Nachfrage für vertikales Differenzierungsmodell

Man sieht, dass bei einem großen Unterschied in Qualität die Nachfrage relativ gut approximiert wird, während bei geringer Differenz in Qualität die Approximation schlechter wird. Sanchez-Cartas geht davon aus, dass dieser Effekt vom Iterationsparameter abhängt. Durch die

Iterationssprünge werden die Nutzenfunktionen der Kunden bei ähnlicher Qualität stark beeinflusst. Dieser Effekt hat weniger Auswirkungen auf den simulierten Preis als auf die simulierte Nachfrage [SC18].

4.3 weitere Modelle

Im Paper von Sancez Cartas werden auch weitere Modelle betrachtet, unter anderem auch Modelle zu zweiseitigen Märkten. In diesen gibt es verschiedene Arten von Kunden. Als Beispiel können wir eine Ausstellungsveranstaltung heranziehen, welche sowohl von Besuchern als auch Ausstellern genutzt werden soll. Besucher bevorzugen natürlich eine Ausstellung, in welcher möglichst viel ausgestellt wird und Aussteller präferieren eine Veranstaltung, welche stark besucht wird. Diese gegenseitige Abhängigkeit zeichnet einen zweiseitigen Markt aus.

Im Paper werden in diesem Zusammenhang eine Verallgemeinerung des Hotelling Modell und des vertikalen Differenzierungsmodell betrachtet. Auch in diesen Modellen kann der Algorithmus grundsätzlich die Equilibria reproduzieren. Allerdings kommt es im Zusammenhang mit dem verallgemeinerten Differenzierungsmodell, auch Gabszewicz und Wauthy’s Modell genannt, zu Problemen. Die Nutzenfunktionen der unterschiedlichen Kunden können in diesem Modell gefolgt dargestellt werden.

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= \theta_i x_j^e - p_j \\ U_{i',j} &= \gamma_{i'} \nu_j^e - \pi_j \end{aligned}$$

In dieser Darstellung werden die Besucher mit dem Index i und die Aussteller mit i' beschrieben. Der Index j steht für die einzelne Ausstellungsveranstaltung. x_j^e stellt die Anzahl der Aussteller bei einer konkreten Ausstellungsveranstaltung j dar und ν_j die Anzahl der Besucher. Die Parameter θ_i beschreibt, wie sehr ein zusätzlicher Aussteller vom Kunden geschätzt wird. Analog beschreibt der Parameter $\gamma_{i'}$, wie sehr ein zusätzlicher Besucher geschätzt wird. Mit p_j und π_j werden die Eintrittspreise beziehungsweise Mietpreise für die einzelnen Veranstaltungen berücksichtigt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass der Markt normiert ist und dass $\theta_i, x_j^e, \gamma_{i'}, \nu_j^e \in [0, 1]$. Des Weiteren betrachten wir den Fall, dass ausschließlich zwei Ausstellungsveranstaltungen konkurrieren und die Werte $\theta_i, \gamma_{i'}$ gleichverteilt sind.

In diesem Modell gibt es drei verschiedene Equilibria die nicht von einem exogenen Parameter abhängen. Es gibt zwei Equilibria, in welchem eine Ausstellungsveranstaltung eine Monopolstellung einnimmt und ein Equilibrium, in welchem beide Plattformen profitieren. Diese Equilibria existieren allerdings nur unter der Annahme von passiven Glauben (engl. *passiv beliefs*). Dieser eingeschränkte Informationsfluss impliziert, dass Änderungen des Preises auf einer Seite nicht unmittelbar das Verhalten auf der anderen Seite beeinflussen. Das bedeutet, dass eine Änderung des Eintrittspreises nicht unmittelbar Auswirkungen auf das Verhalten der Aussteller hat. Für mehr Details zu diesem Konzept verweise ich auf den Artikel “Two-sided markets and price competition with multi-homing” [GW04].

In einem standardisierten Gabszewicz und Wauthy Modell existieren folgende drei Equilibria, die in der Tabelle 5 dargestellt sind. Bei den beiden letzten hat die Plattform 1 eine Monopolstellung eingenommen. Ein Beweis der Existenz dieser Equilibria ist im Artikel “Two-sided markets and price competition with multi-homing“ gegeben [GW04].

Equilibrium	Preis	Nachfrage	Profit
Duopolistische Equilibrium	$p_1 = \pi_1 = 2/49$	$x_1 = \nu_1 = 2/7$	$\Gamma_1 = 0.0233$
	$p_2 = \pi_2 = 8/49$	$x_2 = \nu_2 = 4/7$	$\Gamma_2 = 0.1866$
Monopol-Eck Equilibrium	$p_1 = 0, \pi_1 = 1/2$	$x_1 = 1, \nu_1 = 1/2$	$\Gamma = 1/4$
Monopol Equilibrium	$p_1 = \pi_1 = 1/2$	$x_1 = \nu_1 = 1/2$	$\Gamma = 1/4$

Tabelle 5: Equilibria in einem standardisierten Gabszewicz und Wauthy Modell

Bei der Interpretation der Simulationsergebnisse ist zu beachten, dass nur das Monopol Equilibrium stabil ist [SC18]. Aufgrund dieser Instabilität kann der Algorithmus kaum das Duopolistische Equilibrium reproduzieren, in welchem beide Veranstalter profitieren. Zusätzlich kommt es wie beim vertikalen Differenzierungsmodell zu negativen Effekten in der Nachfrage. Nähere Details findet man im Paper [SC18].

Literatur

- [Bar13] E.N. Barron. *Game Theory: An Introduction, 2nd Edition*. Wiley, 2013.
- [Bon02] Eric Bonabeau. Agent-based modeling: Methods and techniques for simulating human systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(suppl 3):7280–7287, 2002.
- [BP15] Paul Belleflamme and Martin Peitz. *Industrial Organization: Markets and Strategies (2nd Edition)*. 07 2015.
- [DB90] Ralph B. D’Agostino and Albert Belanger. A suggestion for using powerful and informative tests of normality. *The American Statistician*, 44(4):316–321, 1990.
- [GW04] Jean Gabszewicz and Xavier Wauthy. Two-sided markets and price competition with multi-homing. LIDAM Discussion Papers CORE 2004030, Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE), 2004.
- [Kal14] Michael Kaltenbäck. *Fundament Analysis*. Heldermann Verlag, 2014.
- [Kus14] N. Kusolitsch. *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie. Eine Einführung*. Springer Spektrum, 2014.
- [MP15] Alfred K. Mbah and Arnut Paothong. Shapiro–francia test compared to other normality test using expected p-value. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(15):3002–3016, 2015.
- [Roy82a] J. P. Royston. Algorithm as 181: The w test for normality. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 31(2):176–180, 1982.
- [Roy82b] J. P. Royston. An extension of shapiro and wilk’s w test for normality to large samples. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 31(2):115–124, 1982.
- [SC18] J.M. Sanchez-Cartas. Agent-based models and industrial organization theory. a price-competition algorithm for agent-based models based on game theory. *Complex Adapt Syst Model* 6, 2, 2018.