Seminararbeit

Profit Testing und Stochastische Reservenbildung

Autorin:
Leonie Richter
Matrikelnummer: 11710111

Betreuer:
Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

Institut für Finanz- und Versicherungsmathematik

Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Diese Seminararbeit soll dem Leser einen Einblick in das **Profit Testing** sowie in die **stochastische Reservenbildung** bieten.

Zunächst wird dabei in Kapiteln 2,3 und 4 auf das Prinzip des **Profit Testing** eingegangen. Dies ist ein Prozess, der in der Lebensversicherung die **Prüfung der Rentabilität** eines Produktes ermöglicht. Dabei werden durch eine Analyse von mit dem Produkt verbundenen Kosten sowie Cash Flows Kennzahlen für den Gewinn berechnet. Diese können dem Versicherer helfen, angemessene Prämien und Reserven zu bestimmen, oder sich einen Überblick über den erwarteten Verlauf seines Bestandes zu verschaffen.

Anschließend wird noch auf die **Reservenbildung** für Produkte aus der Lebensversicherung, für die die übliche Herangehensweise der Festlegung der Reserven anhand des Erwartungswert zukünftiger Leistungen nicht angemessen ist, eingegangen. Hier werden sogenannte **Risikomaße** vorgestellt.

Diese Arbeit orientiert sich hauptsächlich am Werk *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risk* von Dickson, Hardy und Waters [1]. Für Kapitel 5 (Stochastische Reservierung) wurden zusätzlich das Buch *Finanzmathematik in Diskreter Zeit* [3] von Bäuerle und Rieder, sowie der Artikel *On the Coherence of Expected Shortfall* von Acerbi und Tasche herangezogen. [2]

Kapitel 2

Einführung in das Profit Testing

Dieses Kapitel soll dem Leser einen Einblick in das Prinzip des **Profit Testings** bieten.

Im Rahmen eines Profit Tests werden durch eine Gegenüberstellung von Erträgen und Aufwänden Überschüsse einer Periode berechnet, mit denen anschließend eine Reihe von Gewinnkennzahlen berechnet werden. Anhand dieser Gewinnkennzahlen lässt sich anschließend die Rentabilität eines Produkts messen. Der Gewinn setzt sich dabei aus jeglichen Einnahmen des Versicherers wie Prämien, Erträgen aus zugehörigen Investments sowie freigegebenen Reserven zusammen. Den Verlust bilden Auszahlungen für Versicherungsfälle und Rückkäufe, vertragsbezogene Kosten wie Provisionen für Makler und Verwaltungskosten sowie Kosten, die im Rahmen der Reservenbildung für das Versicherungsunternehmen entstehen. In der Praxis werden dabei meistens monatsweise Berechnungen durchgeführt.

Der Prozess des Profit Testings unterscheidet sich nach der Art des Produkts. Kann man über alle produktbezogenen Bemessungsgrundlagen (wie Zinsverläufe, Sterblichkeitsraten etc.) hinreichend risikoarme Annahmen treffen, so kann ein **deterministischer** Profit Test durchgeführt werden, bei dem die Kalkulation auf diesen basiert. Auf deterministisches Profit Testing wird in Kapitel 3 genauer eingegangen. Ist dies nicht möglich, so muss ein **stochastischer** Profit Test angewendet werden. Dieser wird im 4. Kapitel erläutert.

2.1 Beispiele für die Anwendung

Profit Testing dient in erster Hinsicht der Einschätzung der Profitabilität eines Lebensversicherungsprodukts und gibt dem Versicherer damit auch einen Überblick über seine wirtschaftlichen Erfolge. Die resultierenden Aussagen über die erwartete Rentabilität können so auch bei der Entwicklung neuer Produkte von großem Nutzen sein.

Meist wird nicht ein einzelner Profit Test durchgeführt, sondern mehrere Tests mit verschiedenen Inputs. So kann das Profit Testing auch zur Festlegung der Prämien- und/oder Reservenhöhe herangezogen werden: Zunächst wird eine Prämie (oder Reserve) festgelegt und zur Berechnung der Gewinnkennzahlen verwendet. Empfindet der Versicherer die Rentabilität nicht als angemessen oder ausreichend, so wird der Input geändert und es wird erneut ein Profit Test durchgeführt. In diesem Fall bildet also das Profit Testing einen **iterativen Prozess**.

Da Profit Tests eine Analyse der zukünftigen Zahlungsströme zugrunde liegt, können diese auch im Bezug auf **Stresstests**, die unter anderem in das „Own Risk and Solvency Assessment“ (kurz ORSA) einfließen, hilfreich sein. Durch Anpassung des Inputs (der Annahmen) ergeben sich in der Berechnung unterschiedliche Cash Flows, d.h. man kann insbesondere beobachten wie empfindlich diese gegenüber (für den Versicherer) ungünstigen Entwicklungen sind.

Kapitel 3

Deterministisches Profit Testing

Wir werden nun zunächst die deterministische Variante des Profit Testings betrachten.

Dabei ist anzumerken, dass in Folge ein Prozess erläutert wird, bei dem nur jährliche Berechnungen vorgenommen werden. Zusätzlich werden wir annehmen, dass Leistungen an Versicherungsnehmer immer am Ende einer Periode (d.h. hier eines Jahres) ausgezahlt werden, während Prämien am Jahresanfang gezahlt werden.

In der Praxis ist dies natürlich oft nicht der Fall, da die Versicherungssumme meistens zeitnah zum Eintritt des Versicherungsfalls ausgezahlt wird, allerdings erfolgen wie erwähnt in der Praxis meist auch die Berechnung in monatlichen Schritten. In diesem Fall wird analog vorgegangen.

3.1 Festlegung der Prüfungsgrundlagen

Im ersten Schritt eines deterministischen Profits Tests müssen die Werte bestimmt werden, die anschließend zur Berechnung von Überschüssen und damit Gewinnkennzahlen verwendet werden.

Zu dieser Testbasis gehören in erster Linie Annahmen über Sterblichkeits- und Rückkaufswahrscheinlichkeiten, realistische Zinssätze sowie Erwartungswerte für Verluste (z.B. entstehende Kosten und Leistungen für Versicherungsfälle) und Erträge (Prämieneinnahmen und Renditen).

Die Erwartungswerte für Prämien und Reserven können dabei wie gewohnt zunächst nach dem Äquivalenzprinzip berechnet werden und anschließend wie im vorherigen Kapitel erwähnt iterativ angepasst werden, bis der Versicherer mit der resultierenden Rentabilität des Produkts zufrieden ist. Anzumerken ist, dass die für den Test verwendeten Mortalitätstafeln nicht zwangsweise mit jenen übereinstimmen müssen, die zur Prämienberechnung verwendet wurden, da diese oft Spannen zulassen. Im Rahmen des Profit Tests ist das Ziel hingehen oft eher einen Best Estimate zu erhalten, daher sollte weniger Spielraum zugelassen werden.

Da die Kalkulation im Anschluss für jede Periode einzeln durchgeführt wird lässt sich auch statt eines fixen Zinssatzes eine Zinskurve für die Berechnung der Renditen der Vermögenswerte des Versicherers verwenden.

Etwas Vorsicht ist in Hinsicht auf die Abschlusskosten geboten, denn diese müssen im Rahmen des Profit Testings genauer abgegrenzt werden. Man geht davon aus, dass bereits vor der ersten Prämienzahlung erste Kosten entstehen. Diese Kosten, auch „pre-contract expenses“ genannt, werden in der Berechnung dem Zeitpunkt des Vertragsabschlusses zugeordnet, da das „prudent capital management“ verlangt, dass Verluste frühestmöglich realisiert werden.

3.2 Nettozahlungsströme und Bezeichnungen

Wir werden in Folge die Notation aus der Hauptquelle übernehmen.

Es sei $\boldsymbol{t}$ wie üblich der **Zeitpunkt nach Vertragsbeginn**. Da wir den Prozess des Profit Testings mit jährlichen Berechnungen betrachten, gilt hier für einen Vertrag mit einer Laufzeit von n Jahren: $t \in \{0, 1, ..., n\}$. Wir gehen davon aus, dass der Versicherte zu Vertragsbeginn x Jahre alt ist.

Die Prämie, die zum Zeitpunkt $t-1$ nach Vertragsbeginn gezahlt wird bezeichnen wir mit $\boldsymbol{P_t}$ und das zum Zeitpunkt t benötigte Deckungskapital mit $\boldsymbol{{}_tV}$. Wir gehen dabei in beiden Fällen davon aus, dass der Vertrag zum jeweiligen Zeitpunkt noch in Kraft ist.

Zusätzlich führen wir noch folgende **Bezeichnungen für die Netto Cash-Flows** eines zum Zeitpunkt $t-1$ noch laufenden Vertrags ein:

- $\boldsymbol{{}_kp^{od}_{x+t-1}}$: Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger Versicherter zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und $t-1+k$ verstirbt
- $\boldsymbol{{}_kp^{ow}_{x+t-1}}$ Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte den Vertrag zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und $t-1+k$ kündigt
- $\boldsymbol{{}_kp^{oo}_{x+t-1}}$ Wahrscheinlichkeit, dass der Vertrag zum Zeitpunkt $t-1+k$ noch in Kraft ist

  Diese Wahrscheinlichkeit entspricht der Gegenwahrscheinlichkeit der Ereignisse, dass der Versicherungsnehmer entweder verstorben ist oder gekündigt hat:

  $$ {}_kp^{00}_{x+t-1} = 1 - {}_kp^{0d}_{x+t-1} - {}_kp^{0w}_{x+t-1} \tag{3.1}$$

  Dabei sei für alle Wahrscheinlichkeiten $k \in \{0, ..., n-t\}$, da nur diese Wahrscheinlichkeiten für die Laufzeit der Polizze relevant sind. Wir schreiben für $k = 1$ auch kurz p^{0d}_{x+t-1}, p^{0w}_{x+t-1} und p^{00}_{x+t-1}.

- $\boldsymbol{E_t}$: Vertragsbezogene Kosten, die zum Zeitpunkt $t-1$ entstehen

  Für den Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dies den Abschlusskosten, für $t = 1, ..., n$ den Inkasso- und Verwaltungskosten.

- $\boldsymbol{I_t}$: Kapitalertrag aus Investitionen zwischen Zeitpunkten $t-1$ und t

  Bezeichnen wir mit i_t die erwartete Rendite von Investments von Zeitpunkt $t-1$ zu Zeitpunkt t darstellt, so ergibt sich I_t zu

  $$I_t = i_t({}_{t-1}V + P_t - E_t), \tag{3.2}$$

  wobei ${}_{t-1}V + P_t - E_t$ den Ertrag eines Versicherers zum Zeitpunkt $t-1$ darstellt, der vom Versicherer investiert wird.

- $\boldsymbol{EDB_t}$: Erwartete Aufwände für Todesfallleistungen zum Zeitpunkt t

  Der erwartete Aufwand zum Zeitpunkt t ergibt sich als Produkt der Sterbewahrscheinlichkeit und der Versicherungssumme, die wir mit $\boldsymbol{S_t}$ bezeichnen (zuzüglich Kosten für die Abwicklung der Auszahlung $\boldsymbol{e_t}$):

  $$EDB_t = p^{0d}_{x+t-1}(S_t + e_t) \tag{3.3}$$

- $\boldsymbol{EEB_t}$: Erwartete Aufwände für Erlebensfallleistungen zum Zeitpunkt t

  Dieser Wert ergibt sich analog zum Aufwand für Todesfallleistungen zu

  $$EDB_t = p^{00}_{x+t-1}(S_t + e_t) \tag{3.4}$$

- $\boldsymbol{ESB_t}$: Erwartete Aufwände für Rückkäufe zum Zeitpunkt t

  Dieser Wert ergibt sich als Produkt der Rückkaufswahrscheinlichkeit und des Rückkaufswerts zum Zeitpunkt t, den wir als CV_t bezeichnen:

  $$ESB_t = p^{0w}_{x+t-1} CV_t \tag{3.5}$$

- $\boldsymbol{E_tV}$: Erwartete Kosten für die Reservenbildung zum Zeitpunkt t

  Die erwarteten Kosten ergeben sich aus der Wahrscheinlichkeit p_{x+t-1}, dass eine Reserve zu bilden ist (d.h. dass der Vertrag zum Zeitpunkt t noch in Kraft ist) und der benötigten Reserve zum Zeitpunkt t:

  $$E_tV = p^{00}_{x+t-1}{}_tV \tag{3.6}$$

Mit diesen Werten kann nun im nächsten Schritt des Profit Tests der Überschuss berechnet werden.

3.3 Profit Vector und Profit Signature

Die Berechnung des Überschusses pro Periode (hier also der jährliche Überschuss) erfolgt in zwei Schritten: Zunächst wird für jeden Zeitpunkt $t \in \{0, 1, ..., n\}$ das Surplus unter der Voraussetzung, dass der Vertrag zum vorherigen Zeitpunkt noch in Kraft ist, berechnet. Diese Werte bilden den sogenannten **„Profit Vector"**. Anschließend werden die Einträge dieses Vektors mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert, dass der Vertrag zum Zeitpunkt $t-1$ noch in Kraft ist. So erhält man für jeden Zeitpunkt t den erwarteten Überschuss für einen Vertrag unabhängig davon, ob der Vertrag zum vorherigen Zeitpunkt noch am Laufen ist - diese Werte bilden die **„Profit Signature"**.

3.3.1 Berechnung des Profit Vectors

Die einzelnen Komponenten des Profit Vectors

$$Pr := \begin{pmatrix} Pr_0 \\ Pr_1 \\ \vdots \\ Pr_n \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

ergeben sich wie folgt:
Zum Zeitpunkt $t = 0$ gibt es natürlich noch keinen wirklichen Überschuss, hier beschreibt Pr_0 den Wert der Cash Flows vor Vertragsbeginn, also die Abschlusskosten E_0 und, falls notwendig, die Kosten ${}_0V$ für anfängliche Reserven. Es gilt also

$$Pr_0 = -E_0 - {}_0V. \tag{3.8}$$

Für $t = 1, ..., n$ ergibt sich der Überschuss Pr_t aus erwarteten neuen Erträgen bzw. alten Beständen abzüglich erwarteten Ausgaben (Leistungen und vertragsbezogene Kosten):

$$Pr_t = {}_{t-1}V + P_t - E_t + I_t - EDB_t - ESB_t - EEB_t - E_tV. \tag{3.9}$$

3.3.2 Profit Signature

Die Profit Signature,

$$\varPi := \begin{pmatrix} \varPi_0 \\ \varPi_1 \\ \vdots \\ \varPi_n \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

erhält man nun, wie bereits erwähnt, durch Multiplikation mit den Wahrscheinlichkeit, dass der Vertrag zum vorhergehenden Zeitpunkt noch in Kraft ist:
Für $t = 0$, den Zeitpunkt des Vertragsabschlusses, entspricht $\varPi_0$ der ersten Komponente Pr_0 des Profit Vectors.

Für $t = 1, ..., n$ gilt

$$\Pi_t = {}_{t-1}p_x^{00} Pr_t. \tag{3.11}$$

Damit haben wir für jeden Beobachtungszeitpunkt den erwarteten Überschuss berechnet.

3.4 Gewinnkennzahlen

Im letzten Schritt können nun mit den Resultaten für das Surplus eine Reihe von Gewinnkennzahlen berechnet werden, die Aussagen über die Rentabilität des Produkts liefern. Wir gehen in Folge auf einige Beispiele für solche Kennzahlen ein.

3.4.1 Nettobarwert

Eine der bekanntesten Kennzahlen ist der Nettobarwert (engl. **„net present value“**, kurv **NPV**). Zur Berechnung des NPVs werden die Überschüsse pro Periode mit einem zugehörigen Diskontierungsfaktor multipliziert und aufsummiert. Der Abzinsungsfaktor bezeichnet man dabei als **„hurdle rate“**, den zugehörige Zinssatz nennt man **Risiko-Diskontsatz** (engl. „risk discount rate“, daher kurz **RDR**). Dieser repräsentiert die Mindestanforderungen an die Kapitalrendite, die meist von den Shareholdern festgelegt wird.
Geht man dabei von einem konstanten Zinssatz über die Laufzeit des Vertrags aus, so ergibt sich der Nettobarwert des Vertrags zu

$$NPV = \sum_{k=0}^{n} \Pi_k v_r^k, \tag{3.12}$$

wobei v_r die hurdle rate bezeichnet. Ist dieser Wert positiv, so erzielt man einen Gewinn, dessen Nettowert ungefähr im Bereich des NPV liegen wird - empfindet der Versicherer den Gewinn als hinreichend, so wird er das Produkt als rentabel betrachten.

Man kann den Nettobarwert natürlich analog auch für $t < n$ berechnen:

$$\mathrm{NPV(t)} = \sum_{k=0}^{t} \Pi_k v_r^k \tag{3.13}$$

Dieser Wert ist normalerweise kurz nach Beginn der Laufzeit aufgrund der Abschlusskosten negativ.

3.4.2 Internal Rate of Return

Der **interne Zinsfuß** (engl. **„internal rate of return “**, kurz **IRR**) hängt eng mit dem Nettobarwert zusammen. Dies ist jener Zinssatz i_j, für dessen zugehörigen Diskontierungsfaktor

$$v_j := \frac{1}{1 + i_j} \tag{3.14}$$

gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \Pi_k v_j^k = 0. \tag{3.15}$$

Dies ist also jener Zins, unter dessen Verwendung sich bei Berechnung des Nettobarwerts ein Wert von Null ergibt.

Ist der IRR größer als der RDR und damit $v_r > v_j$, so erziehlt man einen Gewinn, denn damit gilt

$$NPV = \sum_{k=0}^{n} \Pi_k v_r^k > \sum_{k=0}^{n} \Pi_k v_j^k = 0, \tag{3.16}$$

der Nettobarwert des Überschusses ist also positiv.
Die Gleichung (2.15) lässt sich jedoch manchmal nicht oder nicht eindeutig lösen. Man kann aber anhand des Nettobarwerts Aussagen über den IRR treffen: ist der NPV positiv und gilt für die Barwerte $\{NPV(t), t = 0, ..., n\}$, dass sich das Vorzeichen nur einmal wechselt, so gibt es eine eindeutig reellwertige Lösung. Der interne Zinsfuß ist dann größer als der Risiko-Diskontsatz.

Ist der Nettobarwert allerdings negativ, so muss der IRR, falls er existiert, kleiner sein als der RDR.

3.4.3 Amorationsdauer

Die **Amorationsdauer** (engl. **„discounted payback period"**, kurz **DPP**), auch als Break-Even Periode bekannt, ist der erste Zeitpunkt, zu dem der Nettobarwert nichtnegativ ist:

$$DPP := min\{t : NPV(t) > 0\} \tag{3.17}$$

Die DPP gibt dem Versicherer also Auskunft darüber, ab welchem Zeitpunkt er Gewinn macht.

3.4.4 Net Profit Margin

Die **Net Profit Margin**, kurz NPM oder auf Deutsch **Netto-Gewinnspanne**, beschreibt den Anteil des Nettobarwerts des Überschusses am erwarteten Nettobarwert der Prämien, diskontiert mit dem Risiko-Diskontsatz (RDR).

Für einen Vertrag mit Laufzeit n und Prämie P ergibt sich die Gewinnspanne als

$$NPM = 100 * \frac{NPV}{P \sum_{k=0}^{n-1} {}_t p_x^{00} v_r^k} \%. \tag{3.18}$$

Je größer dieser Wert ist, desto rentabler ist das Produkt.

3.5 Beispiel

Das folgende Beispiel wurde aus der Hauptquelle übernommen.

Wir betrachten eine Ablebensversicherung mit einer Laufzeit von $n = 10$ Jahren. Wir führen jährliche Berechnungen durch, dass heißt wir berechnen die einzelnen Überschüsse zu den Zeitpunkten $t \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Der Versicherte x sei zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses ($t = 0$) 60 Jahre alt. Wir verwenden die folgende Testbasis:

- Die Versicherungssumme S, die am Ende des Todesjahres ausgezahlt wird, sei 100.000€.
- Es werden jährlich Prämien in der Höhe $P = 1.500$ € gezahlt.
- Die Sterbewahrscheinlichkeit zwischen Zeitpunkt t und $t + 1$ sei

$$p_{60+t}^{0d} = 0,01 + 0,001t, \qquad t = 0, ..., 9. \tag{3.19}$$

- Wir schließen Rückkäufe aus, es gilt also

$$p_{60+t}^{0w} = 0, \qquad t = 0, ..., 9. \tag{3.20}$$

  und damit für die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$p_{60+t}^{00} = 1 - (0,01 + 0,001t) = 0,99 - 0,001t, \qquad t = 0, ..., 9. \tag{3.21}$$

- Die Abschlusskosten seien 400€ sowie 20% der ersten Prämie, d.h.

$$E_0 = 400 + 0,2P = 700 \tag{3.22}$$

- Die Verwaltungskosten e_t seien $3,5\%$ der Prämie, d.h.

$$e_t = 0,035P = 52,50. \tag{3.23}$$

  .

- Der jährliche Zinnssatz für Verzinsung der Vermögenswerte des Versicherers sei $5,5\%$, es gilt also

$$I_t = 0,055 * ({}_{t-1}V + P - E_t) \qquad t = 1, 2, ..., 10 \tag{3.24}$$

Da eine Leistung nur im Todesfall ausbezahlt wird gibt es keine Erlebensfallleistungen; es gilt also für $t = 1, ..., 10$:

$$EEB_t = 0. \tag{3.25}$$

Wir gehen zusätzlich davon aus, dass es keine Rückkäufe gibt, also gilt auch

$$EDB_t = 0 \tag{3.26}$$

für $t = 1, ..., 10$.

Für EDB_t ergibt sich:

$$EDB_t = p^{0d}_{60+t} S = (0,01 + 0,001(t-1))100.000, \quad t = 1, ..., 10. \tag{3.27}$$

Wir nehmen an, dass für die Prämienberechnung ein Zinssatz von 4% und die Mortalitätsrate

$$q_{60+t} = 0,011 + 0,001t, \quad t = 0, ..., 9 \tag{3.28}$$

verwendet wurden. Wie bereits erwähnt muss diese Mortalitätsrate nicht mit der Sterblichkeitswahrscheinlichkeit aus der Testbasis übereinstimmen.

Die Reserven erhält man durch Anwendung des Äquivalenzprinzips. Die Kosten für die Reservenbildung E_tV ergeben sich dann zu

$$E_tV = (1 - p^{0d}_{60+t-1}) * {}_tV = p^{00}_{60+t-1} * {}_tV, \qquad t = 0, ..., 10, \tag{3.29}$$

wobei wir p^{00}_{60-1} (für $t = 0$) auf 0 setzen.

Die einzelnen Berechnung werden hier nicht angeführt, da diese nun nur noch durch einsetzen erfolgen. Insgesamt ergeben sich folgende Werte:

t	${}_{t-1}V$	P_t	E_t	I_t	EDB_t	E_tV
0	-	-	700,00	-	-	0,00
1	0,00	1.500	52,50	79,61	1.000	405,95
2	410,05	1.500	52,50	102,17	1.100	732,73
3	740,88	1.500	52,50	120,36	1.200	977,04
4	988,90	1.500	52,50	134,00	1.300	1.135,15
5	1.150,10	1.500	52,50	142,87	1.400	1.202,86
6	1.219,94	1.500	52,50	146,71	1.500	1.175,47
7	1.193,37	1.500	52,50	145,25	1.600	1.047,70
8	1.064,74	1.500	52,50	138,17	1.700	813,69
9	827,76	1.500	52,50	125,14	1.800	466,89
10	475,45	1.500	52,50	105,76	1.900	0,00

Damit lassen sich nun die Einträge des Profit Vectors und der Profit Signature berechnen:

t	Pr_t	Π_t	t	Pr_t	Π_t
0	-700	-700	6	138,68	130,56
1	121,16	121,16	7	138,41	128,35
2	126,99	125,72	8	136,72	124,75
3	131,70	128,95	9	133,52	119,76
4	135,26	130,84	10	128,71	113,37
5	137,61	131,39			

Nun kommen wir zur Berechnung der Kennzahlen für die Rentabilität. Gehen wir von einer risk discount rate (RDR) von 10% aus, so ergeben sich für $t = 0, ..., 10$ die folgenden Barwerte:

t	$NPV(t)$	t	$NPV(t)$
0	-700,00	6	-144,43
1	-589,85	7	-78,56
2	-485,95	8	-20,37
3	-389,07	9	30,42
4	-299,70	10	74,13
5	-218,12		

Damit ist also der Nettobarwert am Ende der Laufzeit positiv - der Versicherer macht Gewinn. Zusätzlich wissen wir nun, dass es für den internen Zinsfuß eine eindeutige Lösung gibt, die größer als 10% ist. Der IRR kann nun manuell oder mithilfe mathematischer Software berechnet werden; man erhält einen Zinssatz von $12,4\%$.
Aus der obigen Tabelle lässt sich auch die Amorationsdauer (DPP) direkt ablesen: Ab dem Zeitpunkt $t = 9$ ist der Nettobarwert positiv, also profitiert der Versicherer ab diesem Zeitpunkt, es gilt $DPP = 9$. Die Netto-Gewinnspanne ist

$$NPM = 100 * \frac{74,13}{1.500 \sum_{k=0}^{9} {}_tp_x^{00} \left(\frac{1}{1+0,1}\right)^k} \% = 0,77\%. \tag{3.30}$$

3.6 Festlegung von Reserven anhand von Profit Tests

Das Halten von Kapital bringt sowohl einen Steueraufwand als auch Transaktionsgebühren mit sich und kann damit die Profitabilität eines Versicherers (negativ) beeinflussen. Daher wollen Versicherer ihre Eigenkapitalausstattung meist auf das Nötige reduzieren.

Hier kann das Profit Testing verwendet werden, um die geringsten nötigen Reserve zu berechnen, die jährlich benötigt wird, um Defizite zu vermeiden.

Eine Möglichkeit ist dabei die sogenante **„Zeroization of Reserves“** (Nullstellung der Reserven); die dabei bestimmten Reserven bezeichnet man als „zeroized reserves“.

Dabei wird die Reserve ${}_tV^Z$, die zum Zeitpunkt $t = 0, ..., n$ benötigt wird, rekursiv berechnet: Man geht davon aus, dass zum Zeitpunkt n keine Reserve mehr benötigt wird, da in Zukunft keine Leistungen mehr erfoglen. Für $t = 0, ..., n-1$ ergibt sich die Reserve dann rekursiv als

$$ {}_{t-1}V^Z = max\{(EDB_t + ESB_t + EEB_t + E_tV^Z)/(1+i) - (P_t - E_t), 0\}. \quad (3.31) $$

Die Formel lässt sich wie folgt herleiten:

$$ EDB_t + ESB_t + EEB_t \quad (3.32) $$

beschreibt den Betrag, der benötigt wird, um für Leistungen für erwartete Versicherungsfälle zum Zeipunkt t aufzukommen. Hinzu kommen noch die Kosten E_tV^Z für die Reservenbildung; anschließend wird aufgezinst.

$P_t - E_t$ ist der Betrag, den der Versicherer zum Zeitpunkt $t-1$ erhält (Prämien abzüglich vertragsbezogener Kosten).

3.7 Versicherungsprodukte, die mehrere Zustände berücksichtigen

Für den Fall, dass es in einem Vertrag mehrere mögliche Zustände gibt, muss der Prozess des Profit Testings etwas angepasst werden.

Dazu sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, S ein Zustandsraum mit endlich vielen Elementen. $(X_t)_{t\geq 0}$ sei ein stochastischer Prozess, der den Zustand eines Versicherten beschreibt, wobei X_0 den Zustand bei Vertragsbeginn beschreibt.

Die Barwerte ${}_tV^s, s \in S$ hängen nun von den jeweiligen Zuständen ab.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Versicherter zum Zeitpunkt $t-1$, $t = 1, ..., n$, im Zustand $s \in S$ befindet bezeichnen wir mit

$$ {}_{t-1}p_x^{0s} := \mathbb{P}\left[X_{t-1} = s | X_0 = 0\right]. \quad (3.33) $$

Wir berechnen nun den Profit Vector Pr_t^s für jeden Zustand $s \in S$ separat. Bei Versicherungsbeginn ist der Versicherungsnehmer zunächst immer im aktiven bzw. lebenden (je nach Zustandsraum) Zustand, daher beginnt für die anderen Zustände die Berechnung erst bei $t = 2$.

In der Profit Signature werden diese Ergebnisse anschließend vereint:

$$ \Pi_t = \sum_{s\in S} {}_{t-1}p_x^{0s} Pr_t^s. \quad (3.34) $$

Kapitel 4

Stochastisches Profit Testing

Dieses Kapital beschäftigt sich mit der stochastischen Variante des Profit Testings. Manche Versicherungsprodukte enthalten Risiken wie beispielsweise Investmentrisiken, die nicht als deterministisch angesehen werden können. Die Ungewissheit der zukünftigen Entwicklungen solcher Faktoren muss angemessen berücksichtigt werden. Dies gilt besonders für Produkte die Risiken beinhalten, bei denen ein Ausgleich im Kollektiv nicht möglich ist. Solche Risiken nennt man auch **nicht-diversifzierbar**.

4.1 (Nicht-)Diversifizierbare Risiken

Zunächst werden wir kurz darauf eingehen, wann ein Risiko als diversifizierbar angesehen werden kann. Einigen Lesern wird der folgende Abschnitt bereits bekannt vorkommen: das Thema wird im Rahmen der Vorlesung Personenversicherungsmathematik im Zusammenhang mit dem stochastischen Zins bereits behandelt; wir möchten es uns aber im Rahmen dieser Arbeit und des Profit Testings nocheinmal in Erinnerung holen.

Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus N Lebensversicherungspolizzen und Zufallsvariablen $X_i, i = 1, ..., N$, die für die Polizze relevante Zustände beschreiben (beispielsweise könnte jede Zufallsvariable ein Indikator sein, der angibt, ob der Versicherungsnehmer noch am Leben ist).
Unter der Annahme, dass diese Zufallsvariablen identisch verteilt sind mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, ergibt sich für den Erwartungswerts des Mittelwert der Zufallsvariablen $\bar{X} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$:

$$\mathbb{E}\left[\bar{X}\right] = \mu. \tag{4.1}$$

Sei für $i \neq j, i, j = 1, ..., N$ ρ der Korrelationskoeffizient

$$\rho = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sigma^2} \Longleftrightarrow Cov(X_i, X_j) = \rho\sigma^2 \tag{4.2}$$

der Aufgrund der identischen Verteilung der Zufallsvariablen für zwei Paare je gleich ist. Dann ergibt sich mit

$$\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{V}\left[X_i\right] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{N} Cov(X_i, X_j) \tag{4.3}$$

zunächst

$$\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = N\sigma^2 + N(N-1)\rho\sigma^2 \tag{4.4}$$

und daher

$$\mathbb{V}\left[\bar{X}\right] = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{N-1}{N}\rho\sigma^2. \tag{4.5}$$

Gehen wir davon aus, dass die Zufallsvariablen auch unabhängig sind, so ist $\rho = 0$ und damit

$$\mathbb{V}\left[\bar{X}\right] = \frac{\sigma^2}{N}. \tag{4.6}$$

Der zentrale Grenzwertsatz besagt nun, dass die Verteilung von $\bar{X}$ für große N ungefähr einer Normalverteilung mit den obigen Werten für Erwartungswert und Varianz entspricht, und damit ist

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \tag{4.7}$$

ungefähr standardnormalverteilt. Für die Wahrscheinlichkeit, dass $\bar{X}$ mindestens um einen Wert $k > 0$ von μ abweicht ergibt sich aufgrund der Gleichheit

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X} - \mu| \geq k\right) = \mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{k\sqrt{N}}{\sigma}\right) \tag{4.8}$$

insgesamt

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{k\sqrt{N}}{\sigma}\right) = \lim_{N\to\infty} 2\varPhi\left(-\frac{k\sqrt{N}}{\sigma}\right) = 0. \tag{4.9}$$

Wir können also das Risiko bezogen auf den Mittelwert reduzieren. Dies funktioniert aber nur, wenn die Zufallsvariablen tatsächlich unabhängig sind, da sonst Gleichung (2.18) nicht mehr gilt:

$$\mathbb{V}\left[\bar{X}\right] = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{N-1}{N}\rho\sigma^2 \tag{4.10}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt(N)}{\sqrt{\sigma^2 + (N-1)\rho\sigma^2}} \tag{4.11}$$

und damit

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{k\sqrt{N}}{\sqrt{\sigma^2 + (N-1)\rho\sigma^2}}\right) = \tag{4.12}$$

$$= \quad \lim_{N\to\infty} 2\varPhi\left(-\frac{k\sqrt{N}}{\sqrt{\sigma^2 + (N-1)\rho\sigma^2}}\right) = \tag{4.13}$$

$$= \quad 2\varPhi\left(-\frac{k}{\sigma\sqrt{\rho}}\right). \tag{4.14}$$

Insgesamt kann man ein Risiko innerhalb eines Portfolios gemesssen an Zufallsvariablen X_i also als diversifizierbar betrachten, wenn gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt{\mathbb{V}[\sum_{i=1}^{N} X_i]}}{N} = 0 \tag{4.15}$$

$$\iff \quad \lim_{N\to\infty} \mathbb{V}\left[\bar{X}\right] = 0, \tag{4.16}$$

also wenn das Risiko im Bezug auf seine Erwartung eliminiert werden kann, indem man die Anzahl der Polizzen erhöht.

4.2 Vorgehensweise bei stochastischen Profit Tests

Es stellt sich die Frage, wie bei Versicherungsprodukten mit nicht-diversifizierbaren Risiken, bei denen ein deterministischer Profit Test zu verfälschten Ergebnissen führen könnte, die Unsicherheit angemessen berücksichtigt werden kann.

Eine Möglichkeit ist, ein Reihe möglicher Werte für die unbekannte Größe bzw. unbekannten Größen zu erzeugen und anschließend mit jedem der Werte einen einzelnen deterministischen Profit Test durchzuführen. So erhält man eine Stichprobe möglicher Ausgänge des Vertrags, mit deren Hilfe die Wahrscheinlichkeitsverteilung einzelner Maße für den Gewinn bestimmt werden kann.

Die Werte können dabei beispielsweise mithilfe einer **Monte Carlo Simulation** erzeugt werden.

Insgesamt basiert der stochastische Profit Test also grundsätzlich auf einer Reihe von deterministischen Profit Tests, die für eine Reihe erzeugter Zufallszahlen durchgeführt werden.

Ein gutes Beispiel einer Form von Lebensversicherung, bei der ein stochastischer Profit Test durchgeführt werden müsste, ist die **fondsgebundene Lebensversicherung**. Hier kann das Investmentrisiko nicht als deterministisch angesehen werden; man simuliert also mögliche Ausgänge. Häufig wird dabei angenommen, dass die Portfoliorenditen unabhängig lognormalverteilt sind. In diesem Fall kann man zunächst Zahlen für die Normalverteilung simulieren und anschließend potenzieren. Die simulierten Werte ersetzten die Annahme von konstanten Renditen im deterministischen Fall.

Kapitel 5

Stochastische Reservierung

Wir betrachten nun zuletzt die Reservenbildung für Lebensversicherungsprodukte, bei denen ein nicht-diversifizierbares Risiko eine große Rolle spielt.

Die übliche Ermittlung des Versicherungswert als erwarteter Wert zukünftiger Leistungen ist für diese Produkte nicht angemessen. Daher ist es notwendig für die Berechnung der benötigten Reserven für einen solchen Versicherungsvertrag eine Methodik zu verwenden, die alle Aspekte ausreichend berücksichtigt: ein sogenanntes **Risikomaß**.

5.1 Definiton: Risikomaße

Für die Definition eines Risikomaßes betrachten wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Weiters sei $\mathcal{L}^1$ der Raum aller Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$, für die $\mathbb{E}[X] < \infty$ gilt.

$X \in \mathcal{L}^1$ sei eine Zufallsvariable die eine Finanzposition darstellt. Für $\omega \in \Omega$ beschreibt also $X(\omega)$ den Nettobarwert einer Finanzposition am Ende einer Periode (vorausgesetzt, dass das Ereignis ω eintritt).

Wir nennen eine Funktion $\boldsymbol{\rho} : \mathcal{L}^1 - > \mathbb{R}$ **monetäres Risikomaß**, wenn sie für $X, Y \in \mathcal{L}^1$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$1.) \quad X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y) \quad (Monotonie) \tag{5.1}$$

$$2.) \quad \rho(X + m) = \rho(X) - m \quad \forall m \in \mathbb{R} \quad (Translationsinvarianz) \tag{5.2}$$

$\rho(X)$ kann als das Kapital angesehen werden, dass zu X hinzugefügt werden muss, um keine Verluste zu machen.

Da ρ das Risiko von X quantifiziert, ergibt die Forderung der Monotonie Sinn, denn höhere Werte einer Finanzposition werden mit einem geringeren Risiko verbunden. Wir betrachten nun noch einige mögliche Eigenschaften von Risikomaßen:

- **Verteilungsinvarianz:**
  Ein monetäres Risikomaß nennt man **verteilungsinvariant**, wenn für zwei Zufallsvariablen X, Y mit gleicher Verteilung stets $\rho(X) = \rho(Y)$ gilt.

- **Konvexität:**
  Ein Risikomaß ist konvex, wenn für $X, Y \in \mathbb{L}^1$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt

  $$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y). \tag{5.3}$$

  Es ist anzumerken, dass Konvexität des Risikomaßes gewährleistet, das Diversifikation das Risiko nicht erhöht - kann ein Investor zwischen zwei Anlagen mit Auszahlungen X, Y wählen, so kann er diversifizieren, indem er den Anteil λ in die Erste und den Rest in die Zweite investiert.

- **Kohärente Risikomaße:**
  Ein Risikomaß heißt kohärent, wenn es konvex ist und zusätzlich für alle $\lambda \geq 0$ gilt:

  $$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \tag{5.4}$$

Wir betrachten nun einige Beispiele für Risikomaße, die häufig zur Berechnung von Reserven bei Produkten, die nicht-diversifizierbare Risiken beinhalten, herangezogen werden.

5.2 Beispiele für Risikomaße

5.2.1 Value at Risk

Der **Value at Risk (VaR)**, auch Quantil-Reserve genannt, mit Parameter $\alpha \in (0,1)$ stellt den Wert dar, den der Verlust mit einer Wahrscheinlichkeit von α nicht überschreitet.

Dafür sei X eine Finanzposition.

Wir erinnern uns: x heißt α-Quantil von X, wenn gilt:

$$\mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha \wedge \mathbb{P}(X < x) \leq \alpha \tag{5.5}$$

Die Menge aller α-Quantile von X ist ein Intervall mit Untergrenze

$$a_X(\alpha) := inf\{x : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = sup\{x : \mathbb{P}(X < x) < \alpha\} \tag{5.6}$$

und Obergrenze

$$b_X(\alpha) := inf\{x : \mathbb{P}(X \leq x) > \alpha\} = sup\{x : \mathbb{P}(X < x) \leq \alpha\}. \tag{5.7}$$

Der Value at Risk wird dann definiert durch

$$VaR_\alpha(X) := inf\{m : \mathbb{P}[X + m < 0] \leq \alpha\} = -b_X(\alpha). \tag{5.8}$$

Der Value at Risk ist ein verteilungsinvariantes, monetäres Risikomaß:

- **Monotonie:**
Für zwei Zufallsvariablen X, Y mit $X \leq Y$ gilt $\mathbb{P}[X < x] \geq \mathbb{P}[Y < x]$. Sei nun $m_Y := VaR_\alpha(Y)$. Es gilt klarerweise
$$\mathbb{P}[X + m_Y < 0] \leq \alpha \;\; \vee \;\; \mathbb{P}[X + m_Y < 0] > \alpha \tag{5.9}$$
Im Fall $\mathbb{P}[X + m_Y < 0] \leq \alpha$ gilt $VaR_\alpha(X) = m_Y$, denn sonst würde gelten:
$$\exists m < m_Y : \mathbb{P}[Y + m < 0] \leq \mathbb{P}[X + m < 0] \leq \alpha, \tag{5.10}$$
was ein Widerspruch zu $VaR_\alpha(Y) = m_Y$ wäre.
Im Fall $\mathbb{P}[X + m_Y < 0] > \alpha$ gilt mit $m_X := VaR_\alpha(X)$:
$$m_X > m_Y, \tag{5.11}$$
denn sonst würde gelten:
$$\mathbb{P}[Y + m_X < 0] \leq \mathbb{P}[X + m_X < 0] \leq \alpha, \tag{5.12}$$
was wieder ein Widerspruch zu $m_Y = VaR_\alpha(Y)$ wäre.

- **Translationsinvarianz:** sei $a \in R$:
$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X + a) &= inf\{m : \mathbb{P}[X + a + m < 0] \leq \alpha\} = && (5.13)\\ &= inf\{\tilde{m} - a : \mathbb{P}[X + a + \tilde{m} - a < 0] \leq \alpha\} = && (5.14)\\ &= inf\{\tilde{m} - a : \mathbb{P}[X + \tilde{m} < 0] \leq \alpha\} = && (5.15)\\ &= VaR_\alpha(X) - a. && (5.16) \end{aligned}$$

- **Verteilungsinvarianz:**
Offensichtlich gilt für zwei Zufallsvariablen X, Y, die dieselbe Verteilung besitzen $VaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(Y)$.

Der Value at Risk ist allerdings nicht immer konvex, d.h. er bestraft manchmal Diversifikation. Ist der VaR jedoch konvex, so ist er auch kohärent, denn es gilt für $\lambda > 0$ (der Fall $\lambda = 0$ ist trivial):
$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\lambda X) &= inf\{m : \mathbb{P}[\lambda X + m < 0] \leq \alpha\} = && (5.17)\\ &= inf\{\lambda\tilde{m} : \mathbb{P}[\lambda X + \lambda\tilde{m} < 0] \leq \alpha\} = && (5.18)\\ &= inf\{\lambda\tilde{m} : \mathbb{P}[X + \tilde{m} < 0] \leq \alpha\} = && (5.19)\\ &= \lambda inf\{\tilde{m} : \mathbb{P}[X + \tilde{m} < 0] \leq \alpha\} = && (5.20)\\ &= \lambda VaR_\alpha(X). && (5.21) \end{aligned}$$
Für $\alpha \in (0, 1/2]$ ist der VaR für die Klasse der Normalverteilungen konvex, also auch kohärent (dies sieht man durch einfaches Nachrechnen).

Außerdem nimmt der Value at Risk nur reelle Werte an, da Quantile von Zufallsvariablen stets endlich sind. Der Value at Risk beschreibt den Worst-Case für den Verlust. Allerdings wird bei dieser Art der Reservenberechnung nicht beachtet was passiert, falls dieser Fall tatsächlich eintritt, d.h. die Verteilung des Verlustes oberhalb des Quantils wird vernachlässigt. Hier helfen uns die nächsten Risikomaße.

5.2.2 Conditional Value at Risk, Expected Shortfall und Average Value at Risk

Der **Conditional Value at Risk (CVaR)** ist eine Weiterentwicklung des VaR. Er entspricht dem durchschnittlichen Verlust im Fall einer Überschreitung des Value at Risk.

Dabei ist für $X \in \mathcal{L}^1$ und $\alpha \in (0,1)$ der CVaR von X zum Level α definiert als

$$CVaR_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha} inf_{s\in\mathbb{R}}\{\mathbb{E}\left[(X-s)^-\right] - s\alpha\}. \tag{5.22}$$

Die **Expected Shortfall (ES)** zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für eine Finanzposition $X \in \mathcal{L}^1$ wird definiert als

$$ES_\alpha(X) := -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{X<q}\right] - q(\alpha - \mathbb{P}\left[X<q\right])\right), \tag{5.23}$$

wobei q ein α Quantil von X ist.

(*Anmerkung*: $\mathbb{1}_{X<q}$ bezeichnet wie gewohnt die Indikatorfunktion.)

Hat X eine stetige Verteilungsfunktion F_X, so gilt wegen $\mathbb{P}\left[X<q\right] = \alpha$:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{X<q}\right]\right) = -\mathbb{E}\left[X|X<q\right]. \tag{5.24}$$

Der Definitionen des Expected Shortfall und des Conditional Value at Risk sind äquivalent. Um das zu erkennen betrachtet man:

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} inf_{s\in\mathbb{R}}\{\mathbb{E}\left[(X-s)^-\right] - s\alpha\} = \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X-q)^-\right] - q, \tag{5.25}$$

wobei q ein α-Quantil von X ist. Die Äquivalenz ergibt sich nun durch einfache Umformungen.

Eine weitere äquivalente Definition bietet der **Average Value at Risk**, der für ein Niveau $\alpha \in (0,1]$ und eine Finanzposition $X \in \mathcal{L}^1$ definiert ist als

$$AVaR_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_\lambda(X)d\lambda \tag{5.26}$$

Die Monotonie, die Translationsinvarianz sowie die Verteilungsinvarianz des AVaR (und somit auch des CVaR und des ES) folgen direkt aus den jeweiligen Eigenschaften des VaR. Der Average Value at Risk hat zudem den Vorteil, dass er ein kohärentes Risikomaß ist.

Der AVaR, der ES sowie der CVaR geben als Auskunft darüber, was passiert, wenn der Value at Risk überschritten wird. Somit bieten diese Risikomaße eine gute Ergänzung zum Value at Risk.

Die obigen Risikomaße werden häufig zur Bestimmung angemessener Reserven für Lebensversicherungsprodukte mit nicht-diversifizierbaren Risiken herangezogen.

Literaturverzeichnis

[1] David C.M. Dickson, Mary R. Hardy and Howard R. Waters: *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press, 2009. Third Edition (2020).

[2] Carlo Acerbi, Dirk Tasche. *On the Coherence of Expected Shortfall*. Journal of Banking Finance 26.7 (2002): 1487-503.

[3] Nicole Bäuerle, Ulrich Rieder. *Finanzmathematik in Diskreter Zeit*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017. 155-70. Springer-Lehrbuch Masterclass.