



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

SEMINARARBEIT

Das Wiener'sche Aktienkursmodell und die Grundzüge der Black-Scholes Theorie

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

**Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan
Gerhold**

durch

David Netolitzky
Matrikelnummer: 11811849

Wien, am 27. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Begrifflichkeiten und allgemeine Grundlagen	4
2.1	Derivate und Optionen	4
2.2	Finanzmarktstatistische Begriffe	4
3	Das Wiener'sche Aktienkursmodell	6
3.1	Das Wiener'sche Aktienkursmodell	6
3.2	Die geometrische Brown'sche Bewegung	7
4	Die Black Scholes Formel im Wiener Modell	10
4.1	Die klassische Black-Scholes Formel	10
4.2	Der faire Preis von europäischen Call-Optionen und europäischen Put-Optionen im Wiener Modell	12
4.3	Abhängigkeit der Call und Put Formeln von den Variablen	14
4.3.1	Analyse des Black-Scholes Preises von Call-Optionen	15
4.3.2	Analyse des Black-Scholes Preises von Put-Optionen	19
5	Die Greeks	23
	Literaturverzeichnis	26
	Abbildungsverzeichnis	27

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Bepreisung von Derivaten und insbesondere Optionen nach der Formel von Black-Scholes.

Bereits im Jahre 1900 hat Louis Bachelier in seiner Dissertation versucht, Optionspreisformeln zu entwickeln und war dabei sogar erfolgreich. Was sein damaliges Preismodell jedoch von modernen Modellen unterscheidet, ist, dass er Preisprozesse von Finanzinstrumenten in der Form $S(t) = c + \sigma \cdot B(t)$ mit der Brown'schen Bewegung $B(t)$ modelliert hat. Das hat den Nachteil, dass ein Objekt dieses Modells negative Preise annehmen kann. Vermutlich unabhängig von den Erkenntnissen von Louis Bachelier begannen fast 70 Jahre später Fisher Black und Myron Scholes sich intensiv mit der Bepreisung von Optionen zu beschäftigen. Wichtigen Input erhielten sie dabei auch von Robert Merton. Es gelang ihnen dadurch, eine Differentialgleichung für die faire Preisformel von Call-Optionen zu entwickeln, jedoch waren sie noch nicht in der Lage, auch die eindeutige Lösung dieser zu finden. Schließlich gelang es ihnen, durch intensive Beschäftigung mit ihrem Modell eine Preisformel herzuleiten, die ihre Differentialgleichung erfüllte. Nach weiteren Verbesserungen durch Vorschläge von Robert Merton veröffentlichten Black und Scholes ihre Arbeit 1973 unter dem Titel „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“, wobei sie vorerst zweimalig abgelehnt worden war. Für ihren revolutionären Beitrag im Finanzbereich erhielten Scholes und Merton 1997 den Wirtschafts-Nobelpreis. Fisher Black konnte diesen nicht entgegennehmen, da er 2 Jahre zuvor gestorben war. [1, S.426 ff.]

Ziel dieser Arbeit ist es, das Wiener'sche Aktienkursmodell und die Black-Scholes Formel für die Bepreisung von europäischen Derivaten vorzustellen, auf Optionen anzuwenden und die dabei erhaltenen Ergebnisse zu untersuchen. Dies erfolgt in mehreren Schritten.

In Kapitel 2 werden einige grundlegende Begriffe und Definitionen vorgestellt, die in den darauffolgenden Kapiteln häufig benötigt werden.

In Kapitel 3 dieser Arbeit wird das Wiener'sche Aktienkursmodell hergeleitet. Dieses wird als Basis der Black-Scholes Formel benötigt.

In Kapitel 4 wird die klassische Black-Scholes Formel für Underlyings im Wiener Modell postuliert und diskutiert. Anschließend wird diese angewandt, um die fairen Preisformeln für Call- und Put-Optionen zu bestimmen, welche daraufhin ausführlich analysiert werden.

In Kapitel 5 werden abschließend die Greeks von Derivaten vorgestellt, die wichtigs-

ten definiert und diese zusammenfassend für Call- und Put-Optionen angegeben. Dabei orientiert sich diese Arbeit hauptsächlich an ausgewählten Unterkapiteln des Kapitels 4 des Werkes *Quantitative Finance: Strategien Investments Analysen* von Gerhard Larcher, veröffentlicht im Jahr 2020.

2 Begrifflichkeiten und allgemeine Grundlagen

Zu Beginn dieser Arbeit, wollen wir in diesem Kapitel einige grundlegende Begriffe einführen, die im Laufe der Arbeit benötigt werden. Dabei stammen alle Begriffsdefinitionen aus den Unterkapiteln 2.1 und 2.2 der Hauptquelle [1].

2.1 Derivate und Optionen

Ein **Derivat** oder eine derivative Handelsstrategie ist ein Finanzprodukt, das sich auf ein anderes Finanzprodukt bezieht. Dabei kann ein Derivat auf unterschiedlichen Finanzprodukten basieren.

Das Finanzinstrument, auf welches sich das Derivat bezieht, wird als das **Underlying** bezeichnet.

Eine wichtige Art von Derivaten, mit denen wir uns in dieser Arbeit ausführlich beschäftigen werden, sind **Call-Optionen** und **Put-Optionen**. Diese besitzen jeweils einen **Strike** K , eine **Fälligkeit** T und ein **Underlying** S . Ein Käufer einer Call-Option kauft sich das Recht, das Underlying S zu dem Zeitpunkt T zu dem Preis K zu kaufen. Ein Käufer einer Put-Option kauft sich das Recht, das Underlying S zu dem Zeitpunkt T zu dem Preis K zu verkaufen.

2.2 Finanzmarktstatistische Begriffe

Definition 1 (stetige Rendite). *Wir betrachten die Kursfolge einer Aktie A_0, A_1, \dots, A_N auf einem Zeitintervall $[0, T]$, wobei die zeitlichen Abstände zwischen den Kurserhebungen jeweils eine Länge dt haben. Dann nennt man*

$$a_i := \ln \left(\frac{A_{i+1}}{A_i} \right)$$

die stetige Rendite zwischen den Zeitpunkten i und $i + 1$.

Definition 2 (Trend und Volatilität). *Seien a_0, \dots, a_{N-1} die stetigen Renditen eines Aktienkurses A_0, A_1, \dots, A_N auf dem Zeitintervall $[0, T]$. Dann bezeichnen wir:*

$$\mu'_A := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a_i$$

und

$$\sigma'_A := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (a_i - \mu'_A)^2}$$

als (historischen) Trend und (historische) Volatilität der Aktie A pro Zeiteinheit.

Falls die Kurserhebung des Aktienkurses A_0, A_1, \dots, A_N über Zeitintervalle äquidistanter Länge von dt Jahren geschieht, lassen sich normierte Versionen von Trend und Volatilität bilden.

Definition 3 (Trend und Volatilität per anno). Seien μ'_A und σ'_A der Trend und die Volatilität eines Aktienkurses A_0, A_1, \dots, A_N , welcher über äquidistante Zeitintervalle dt erhoben wurde. Dann bezeichnen wir:

$$\mu_A := \frac{1}{dt} \mu'_A$$

und

$$\sigma_A := \frac{1}{\sqrt{dt}} \sigma'_A$$

als den Trend und die Volatilität der Aktie A per anno.

3 Das Wiener'sche Aktienkursmodell

In diesem Kapitel werden wir im ersten Teil das Wiener'sche Aktienkursmodell herleiten und im zweiten Teil einen alternativen Zugang zu diesem Modell erläutern. Inhaltlich folgt dieses Kapitels den Unterkapiteln 4.5 und 4.17 der Hauptquelle [1].

3.1 Das Wiener'sche Aktienkursmodell

Ziel dieses Kapitels ist es, ein Aktienkursmodell aufzustellen, das annähernd den typischen Verlauf eines Aktienkurses simuliert. Um das zu erreichen, basieren wir es auf Annahmen, die sich durch empirische Beobachtung als „annähernd zutreffend“ bestätigen lassen:

- Die stetigen Renditen a_i von Aktienkursen sind bezüglich konstanten Zeitperioden dt normalverteilt mit $a_i \sim \mathcal{N}(\mu', \sigma')$, wobei μ' und σ dem Trend und der Volatilität des betrachteten Aktienkurses entsprechen.
- Die stetigen Renditen a_i von Aktienkursen sind jeweils in allen zwei disjunkten Zeitintervallen unabhängig voneinander.

In folgenden Ausführungen sollen sich alle Zeitangaben auf Jahre beziehen. Wir wählen jetzt $[0, T]$ als Zeitintervall mit beliebigem zukünftigen T und N äquidistanten Teilungspunkten $i \cdot dt$, mit $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ und $T = N \cdot dt$. Dementsprechend bezeichnen wir für beliebige $t \in [0, T]$ den betrachteten Aktienkurs im Zeitpunkt t als $S(t)$. Die stetige Rendite zwischen den Zeitpunkten $i \cdot dt$ und $(i+1) \cdot dt$ bezeichnen wir mit a_i . Nun gilt per Definition der stetigen Rendite, dass $S((i+1) \cdot dt) = S(i \cdot dt) \cdot e^{a_i}$. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} S((i+1) \cdot dt) &= S(i \cdot dt) \cdot e^{a_i} = S((i-1) \cdot dt) \cdot e^{a_{i-1} + a_i} = \dots = \\ &= S(0) \cdot e^{a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + a_i}. \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir N unabhängige standard-normalverteilte Zufallsvariablen $\omega_0, \dots, \omega_{N-1}$. Aufgrund dessen, dass die stetigen Renditen a_i normalverteilt sind, existieren die Zerlegungen: $a_i = \mu' + \sigma' \cdot \omega_i$. Mit der obigen Gleichheit ergibt sich so:

$$S((i+1) \cdot dt) = S(0) \cdot e^{(i+1) \cdot \mu' + \sigma' \cdot (\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{i-1} + \omega_i)}.$$

Für die Wahl $i + 1 = N$, also $(i + 1) \cdot dt = N \cdot dt = T$ folgt somit:

$$S(T) = S(0) \cdot e^{N \cdot \mu' + \sigma' \cdot (\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{N-2} + \omega_{N-1})}.$$

Die Zufallsvariable $\omega' := \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{N-2} + \omega_{N-1}$ ist als Summe N unabhängiger $\mathcal{N}(0, 1)$ Zufallsvariablen wieder normalverteilt mit $\omega' \sim \mathcal{N}(0, N)$. Definieren wir nun ω als $\omega' \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$, so erhalten wir schließlich wieder eine $\mathcal{N}(0, 1)$ verteilte Zufallsvariable. Also können wir unsere Formel umschreiben zu:

$$S(T) = S(0) \cdot e^{N \cdot \mu' + \sigma' \cdot \sqrt{N} \cdot \omega}.$$

Zu guter Letzt ersetzen wir noch den Trend μ' und die Volatilität σ' mit dem Trend per anno und der Volatilität per anno. Durch Einsetzen der aus Definition 3 und $N \cdot dt = T$ folgenden Beziehungen $N \cdot \mu' = T \cdot \mu$ und $\sqrt{N} \cdot \sigma' = \sqrt{T} \cdot \sigma$ erhalten wir das Wiener'sche Aktienkursmodell:

Definition 4 (Wiener'sches Aktienkursmodell). [1, S. 354]

Eine Aktie (oder ein beliebiges Finanzinstrument) entwickelt sich genau dann nach dem Wiener'schen Aktienkursmodell, wenn für zwei beliebige Zeitpunkte 0 und T für die Aktienkurse $S(0)$ und $S(T)$ zu den Zeitpunkten 0 und T gilt:

$$S(T) = S(0) \cdot e^{T \cdot \mu + \sqrt{T} \cdot \sigma \cdot \omega}. \quad (3.1)$$

Hierbei bezeichnen μ den Trend der Aktie per anno und σ die Volatilität der Aktie per anno im Zeitbereich $[0, T]$ und ω bezeichnet eine $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable.

Für beliebige Zeitintervalle $[T_1, T_2]$ sieht (3.1) ähnlich aus:

$$S(T_2) = S(T_1) \cdot e^{(T_2 - T_1) \cdot \mu + \sqrt{T_2 - T_1} \cdot \sigma \cdot \omega}$$

3.2 Die geometrische Brown'sche Bewegung

Anschließend wollen wir noch eine alternative Darstellung des Wiener'schen Aktienkursmodelles vorstellen. Dafür erinnern wir uns an folgende bekannte Definition:

Definition 5 (Wiener Prozess). [2, S. 148-156]

Wir bezeichnen einen stochastischen Prozess $\{B(t), t \geq 0\}$ als Wiener Prozess genau dann, wenn gilt:

- I. $B(0) = 0$ fast sicher.
- II. Die Pfade $t \rightarrow B(t)$ sind fast sicher stetig.
- III. $B(t)$ hat stationäre und unabhängige Inkremente $B(t) - B(s)$, $0 \leq s < t$. Dabei heißen die Inkremente stationär, wenn alle $B(t + h) - B(s + h)$ dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen, für $h \in \mathbb{R}$, sodass $t + h$ und $s + h \geq 0$.
- IV. Die Inkremente $B(t) - B(s)$ sind für alle $0 \leq s < t$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$.

Weiters betrachten wir das oben beschriebene Wiener'sche Aktienkursmodell für beliebige Zeitintervalle $[T_1, T_2]$. Mit der Wahl $[T_1, T_2] = [i \cdot dt, (i + 1) \cdot dt]$ folgt wegen $T_2 - T_1 = dt$:

$$S((i + 1) \cdot dt) = S(i \cdot dt) \cdot e^{dt \cdot \mu + \sqrt{dt} \cdot \sigma \cdot \omega}.$$

Durch die Definition $\omega_i := \sqrt{dt} \cdot \omega$ erhalten wir die Gleichung

$$S((i + 1) \cdot dt) = S(i \cdot dt) \cdot e^{dt \cdot \mu + \sigma \cdot \omega_i}$$

mit $\omega_i \sim \mathcal{N}(0, dt)$. Also für beliebige n :

$$S(n \cdot dt) = S(0) \cdot e^{n \cdot dt \cdot \mu + \sigma \cdot (\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1})}.$$

Wobei die Zufallsvariablen ω_i voneinander unabhängig und $\mathcal{N}(0, dt)$ -verteilt sind. Jetzt betrachten wir wieder ein Zeitintervall $[0, T]$, mit N infinitesimal kleinen Teilen der Länge dt . Es existieren für eine Aktie nach dem Wiener Modell wieder N voneinander unabhängige Zufallsvariablen $\omega_k \sim \mathcal{N}(0, dt)$, sodass

$$\begin{aligned} S(t) &= S(n \cdot dt) = S(0) \cdot e^{n \cdot dt \cdot \mu + \sigma \cdot (\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1})} = \\ &= S(0) \cdot e^{t \cdot \mu + \sigma \cdot (\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1})} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ mit $t = n \cdot dt$. Da mit $\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1} = B(n \cdot dt) = B(t)$ die Entwicklung des Wiener Prozesses gegeben ist, erhalten wir unsere alternative Darstellung sofort nach Einführung der folgenden Definitionen:

Definition 6 (Brown'sche Bewegung mit Drift und Varianz). [3, S. 612]

Sei $\{B(t), t \geq 0\}$ ein Wiener Prozess. Dann nennt man $X(t)$ eine Brown'sche Bewegung mit Drift Koeffizienten μ und Varianz Parameter σ^2 , wenn

$$X(t) = \sigma \cdot B(t) + \mu \cdot t.$$

Definition 7 (geometrische Brown'sche Bewegung). [4, S. 46]

Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ eine Brown'sche Bewegung mit Drift Koeffizienten μ und Varianz Parameter σ^2 . Dann nennt man

$$S(t) = S(0) \cdot e^{X(t)} = S(0) \cdot e^{\sigma \cdot B(t) + \mu \cdot t}$$

eine geometrische Brown'sche Bewegung mit Startpunkt $S(0)$.

Demnach ist also eine alternative Darstellung des Wiener Modells auf $[0, T]$ durch

$$S(t) = S(0) \cdot e^{t \cdot \mu + \sigma \cdot B(t)}$$

gegeben als geometrische Brownsche Bewegung mit Wiener Prozess $\{B(t), t \geq 0\}$.

Die Folgende Abbildung führt vor, wie der modellierte Verlauf einer Aktie aussehen kann, wenn man dies mit dem Wiener Modell (3.1) macht. Der DAX ist dabei ein Aktienindex und stellt den Mittelwert der Entwicklung der 30 größten börsennotierten deutschen Unternehmen dar [1, S. 65].

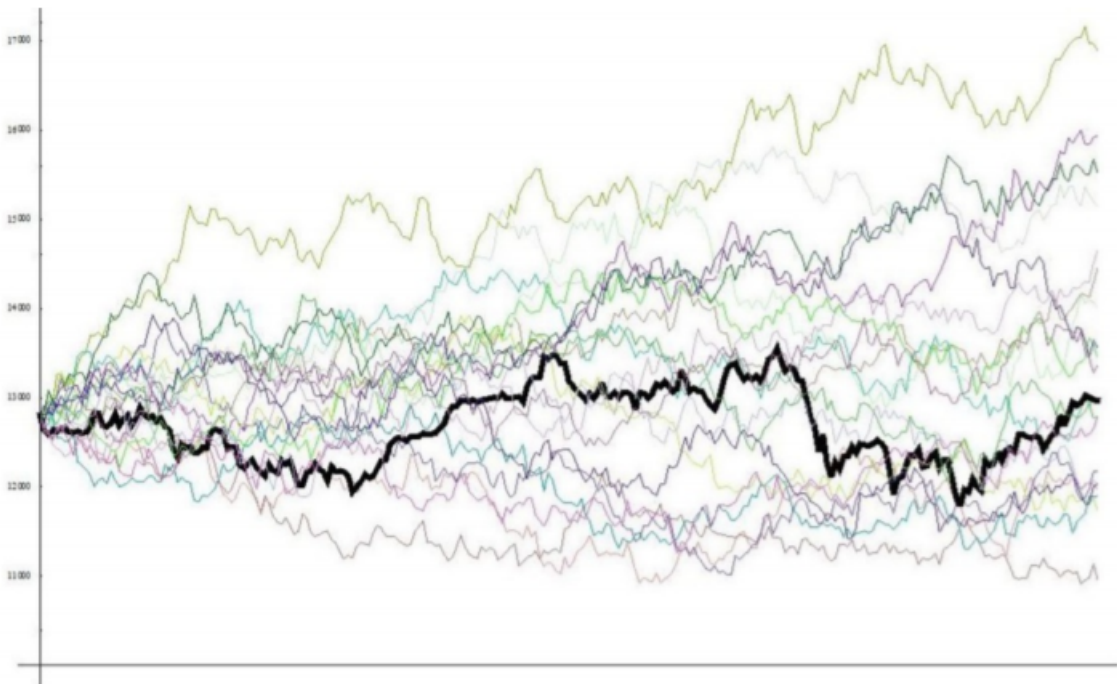


Abbildung 3.1: [1, S. 356] 20 simulierte Aktienkursfolgen mit den Parametern des DAX neben dem Original in schwarz über 1 Jahr.

4 Die Black Scholes Formel im Wiener Modell

Nun kommen wir zu dem wichtigsten Teil dieser Arbeit, der Black-Scholes Formel im Wiener Modell. Hier wollen wir die klassische Black-Scholes Formel für den fairen (arbitragefreien) Preis eines europäischen Derivats beschreiben, anwenden und die Ergebnisse untersuchen. Dabei orientiert sich der erste Abschnitt dieses Kapitels an dem Unterkapitel 4.18, der zweite Abschnitt an dem Unterkapitel 4.19, der erste Teil des dritten Abschnitts an den Unterkapiteln 4.24, 4.25, 4.26 und der zweite Teil des dritten Abschnitts an dem Unterkapitel 4.30 der Hauptquelle [1].

Wir beginnen, indem wir die klassische Black-Scholes Formel für Derivate mit Underlyings, die sich nach dem Wiener Modell entwickeln, angeben.

4.1 Die klassische Black-Scholes Formel

Satz 1 (Black-Scholes Formel). [1, S. 417]

Sei D ein europäisches Derivat mit Fälligkeit T und Payoff-Funktion Φ auf ein Underlying mit Kurs $S(t)$, der sich im Zeitbereich $[0, T]$ nach einem Wiener Modell mit Parametern μ und σ entwickelt. (Es wird vorausgesetzt, dass durch das Underlying keine weiteren Zahlungen oder Kosten anfallen.) Dann gilt für den fairen (arbitragefreien) Preis $F(0)$ von D im Zeitpunkt 0:

$$F(0) = e^{-r \cdot T} \cdot E[\Phi(\tilde{S}(T))]$$

wobei \tilde{S} die Entwicklung

$$\tilde{S}(T) = S(0) \cdot e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T + \sigma \cdot \sqrt{T} \cdot \omega}$$

mit einer standard-normalverteilten Zufallsvariablen ω besitzt. „ E “ bezeichnet dabei den Erwartungswert und r ist der risikolose Zinssatz im Zeitbereich $[0, T]$.

Für den Beweis des Satzes wird an dieser Stelle auf die verwendete Literatur verwiesen, da er den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde (siehe [1, S. 421 ff.]).

Aus der Black-Scholes Formel ergibt sich eine Formel $F(t)$ des fairen Preises für einen beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Wir ersetzen die Laufzeit T durch die Restzeit $T - t$, wählen für r den risikolosen Zinssatz im Zeitintervall $[t, T]$ und erhalten:

$$F(t) = e^{-r \cdot (T-t)} \cdot E[\Phi(\tilde{S}(T))] \text{ und } \tilde{S}(T) = S(t) \cdot e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t) + \sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot \omega}.$$

Dabei ist es sinnvoll und korrekt, F als Funktion $F(t, s, \sigma, r)$ mit Variablen $t, s = S(t), \sigma$ und r zu betrachten. Da der Strike K und der Fälligkeitszeitpunkt konstant sind, werden wir sie nicht als weitere Variablen behandeln. Eine wichtige Eigenschaft, auf die wir später zurückkommen werden, ist die zweifache stetige Differenzierbarkeit bezüglich jeder Variable innerhalb des Definitionsbereiches. Diese ist zumindest für die meisten häufig vorkommenden Payoff-Funktionen Φ gegeben.

Man sieht auch, dass der faire Preis des Derivats nicht vom Trend-Parameter μ des Underlyings abhängt. Grundsätzlich wirkt die Formel sehr vernünftig, da sie den fairen Preis als den diskontierten erwarteten Payoff des Derivats angibt. Jedoch berechnen wir den Erwartungswert in der Black-Scholes Formel nicht über das Wiener Modell $S(T) = S(0) \cdot e^{\mu \cdot T + \sigma \cdot \sqrt{T} \cdot \omega}$, sondern über eine angepasste Version: $\tilde{S}(T) = S(0) \cdot e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T + \sigma \cdot \sqrt{T} \cdot \omega}$. Das beruht auf der Tatsache, dass für einen arbitragefreien Preis die Gleichung $E[e^{-r \cdot T} \cdot S(T)] = S(0)$ bezüglich des risikoneutralen Maßes gelten muss. Durch die Berechnung

$$\begin{aligned} E[e^{-rT} \cdot S(T)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-rT} \cdot S(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu T + \sigma \sqrt{T} \omega} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-rT} \cdot S(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega - \sigma \sqrt{T})^2}{2} + \frac{\sigma^2 T}{2} + \mu T} d\omega = \\ &= e^{-rT} \cdot S(0) \cdot e^{T(\frac{\sigma^2}{2} + \mu)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega = \\ &= S(0) \cdot e^{T(\frac{\sigma^2}{2} + \mu - r)} \end{aligned}$$

folgt also, dass im Modell $\tilde{S}(T)$ die Gleichung $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ erfüllt sein muss. Hierbei ergibt sich die zweite Gleichheit durch quadratisches Ergänzen und die dritte Gleichheit ist erfüllt, da die Verschiebung $-\sigma \cdot \sqrt{T}$ im Exponenten des ersten Integrals den Wert des Integrals nicht beeinflusst und daher weggelassen werden kann. Nun kann man sich fragen, was dies für den tatsächlichen Trend bedeutet. Mit tatsächlich meinen wir hier keinen individuell geschätzten, sondern einen, für alle Marktteilnehmer gültigen Trend. Man könnte zum Beispiel überlegen, ob dieses größer als $r - \frac{\sigma^2}{2}$ sein könnte. Falls das zuträfe, würde dann laut der allgemeinen durchschnittlichen Meinung der Marktteilnehmer gelten:

$$\begin{aligned}
 E [e^{-rT} \cdot S(T)] &= E \left[e^{-rT} \cdot S(0) \cdot e^{\mu T + \sigma \sqrt{T} \omega} \right] \\
 &> E \left[e^{-rT} \cdot S(0) \cdot e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \sqrt{T} \omega} \right] \\
 &= S(0).
 \end{aligned}$$

Also, dass der erwartete diskontierte Wert des Underlyings den momentanen Wert $S(0)$ übertreffen wird. Aufgrund des zu günstigen Preises würde sich aufgrund hoher Nachfrage jedoch der Preis sofort wieder $E[e^{-r \cdot T} \cdot S(T)]$ annähern, also nicht mehr bei $S(0)$ liegen. Dies widerspricht also der freien Dynamik der Märkte. Damit ist gemeint, dass die Märkte zumindest in der Theorie immer in Richtung des Gleichgewichts streben. Analog lässt sich argumentieren, dass der tatsächliche durchschnittlich gemeinsame Trend μ auch nicht kleiner als $r - \frac{\sigma^2}{2}$ sein kann, also gleich $r - \frac{\sigma^2}{2}$ ist.

Also ist im Black-Scholes Modell der faire Preis eines Derivats gegeben durch den diskontierten Erwartungswert des Payoffs der Aktie im Wiener Modell, mit dem allgemein durchschnittlich akzeptierten Trend $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$. Es ist nur notwendig einen Parameter zu schätzen, nämlich die Volatilität σ des Underlyings S .

Eine weitere Annahme, auf der die oben genannte Formel basiert, ist, dass die Volatilität während des gesamten Zeitbereichs $[0, T]$ konstant bleibt. Die im Zeitpunkt $t = 0$ geschätzte Volatilität wird also für das gesamte Zeitintervall herangezogen.

4.2 Der faire Preis von europäischen Call-Optionen und europäischen Put-Optionen im Wiener Modell

Als konkrete Anwendung der im letzten Punkt beschriebenen Bepreisungsgleichung, wollen wir uns mit den wohl einfachsten Optionen beschäftigen, den sogenannten plain-vanilla Optionen. Die Rede ist von Put- und Call-Optionen. Wir beginnen mit der Call-Option:

Der Payoff $\Phi(x)$ ist hierbei gegeben durch $\Phi(x) = \max(x - K, 0)$, wobei K den Strike der Option benennen soll. Wenn wir mit $C(t)$ den fairen Preis einer Call-Option im Zeitbereich $[0, T]$ bezeichnen, dann gilt nach Black-Scholes:

$$C(t) = e^{-r \cdot (T-t)} \cdot E[\Phi(\tilde{S}(T))], \text{ mit } \tilde{S}(T) = S(t) \cdot e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t) + \sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot \omega}.$$

Für den Erwartungswert gilt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 E[\Phi(\tilde{S}(T))] &= E \left[\Phi \left(S(t) \cdot e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t) + \sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot \omega} \right) \right] = \\
 &= E \left[\max \left(S(t) \cdot e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t) + \sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot \omega} - K, 0 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Da ω standard-normalverteilt ist mit Verteilungsfunktion $\mathcal{N}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$, ist dieser Erwartungswert gegeben durch:

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \max \left(S(t) \cdot e^{(r-\frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t) + \sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot \omega} - K, 0 \right) \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega.$$

Die zu Integrierende Funktion nimmt den Wert 0 an für $\omega \leq L := \frac{\ln \frac{K}{S(t)} - (r-\frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}$. Also reicht es aus, von L bis ∞ zu integrieren und wir können die Maximumsfunktion weglassen:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_L^{\infty} \left(S(t) \cdot e^{(r-\frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t) + \sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot \omega} - K \right) \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega.$$

Durch Ausmultiplizieren und Aufteilen der zu integrierenden Funktion erhalten wir:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_L^{\infty} S(t) \cdot e^{(r-\frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t) + \sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot \omega - \frac{\omega^2}{2}} d\omega - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_L^{\infty} K \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega.$$

Indem wir im Exponenten der ersten zu integrierenden Funktion quadratisch ergänzen und ein paar Umformungen durchführen, kommen wir zu

$$= S(t) \cdot e^{r \cdot (T-t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-L} e^{-\frac{(\omega - \sigma \cdot \sqrt{T-t})^2}{2}} d\omega - K \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-L} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega.$$

Der Term $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-L} e^{-\frac{(\omega - \sigma \cdot \sqrt{T-t})^2}{2}} d\omega$ stellt hier genau die Verteilungsfunktion einer $\mathcal{N}(\sigma \cdot \sqrt{T-t}, 1)$ -Zufallsvariable an der Stelle $-L$ dar und der Term $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-L} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$ die Standard-Normalverteilungsfunktion. Demnach erhalten wir:

$$C(t) = S(t) \cdot \mathcal{N}(\sigma \cdot \sqrt{T-t} - L) - e^{-r \cdot (T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(-L)$$

wobei $-L = \frac{\ln \frac{K}{S(t)} + (r-\frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}$ ist.

Da zwischen Call- und Put-Optionen die sogenannte Put-Call-Parität besteht, erhalten wir den fairen Preis für eine Put-Option im Wiener Modell recht einfach aus dieser. Sie ist modellunabhängig und besagt:

Satz 2 (Put-Call-Parität). [1, S. 226 F.]

Sei $[0, T]$ ein Zeitintervall und für $t \in [0, T]$, sei $C(t)$ der Preis einer Call-Option mit Underlying S (das so gehandelt werden kann, dass während des Zeitintervall, $[0, T]$ keine Zahlungen und keine Kosten durch das Underlying anfallen) mit Fälligkeit T

und Strike K , und $P(t)$ der Preis einer Put-Option mit Underlying S , Fälligkeit T und Strike K . Dann gilt:

$$C(t) + K \cdot e^{-r \cdot (T-t)} = P(t) + S(t)$$

Dabei bezeichnet $S(t)$ den Kurs des Underlyings zur Zeit t und r ist der risikolose Zinssatz im Zeitbereich $[t, T]$

Wenn wir jetzt also eine Put-Option auf demselben Underlying S mit gleicher Fälligkeit T und gleichem Strike K betrachten, dann folgt durch Umformen und Einsetzen:

$$\begin{aligned} P(t) &= C(t) + K \cdot e^{-r \cdot (T-t)} - S(t) \\ &= S(t) \cdot \mathcal{N}(\sigma \cdot \sqrt{T-t} - L) - e^{-r \cdot (T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(-L) + K \cdot e^{-r \cdot (T-t)} - S(t) \\ &= S(t) \cdot (\mathcal{N}(\sigma \cdot \sqrt{T-t} - L) - 1) + e^{-r \cdot (T-t)} \cdot K \cdot (1 - \mathcal{N}(-L)) \\ &= e^{-r \cdot (T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(L) - S(t) \cdot \mathcal{N}(L - \sigma \cdot \sqrt{T-t}) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus $1 - \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(-x)$.

Wir fassen also zusammen:

Satz 3 (Black-Scholes-Preis von Call-Optionen und Put-Optionen). [1, S. 424 F.]
Wir betrachten Optionen auf einem Underlying S im Wiener Modell, mit Parametern μ und σ im Zeitintervall $[0, T]$. Von diesem wird angenommen, dass es im gesamten betrachteten Zeitbereich keine weiteren Kosten verursacht. Dann sind die fairen Preise $C(t)$, $P(t)$ einer Call-Option, respektive einer Put-Option zur Zeit $t \in [0, T]$ gegeben durch:

$$C(t) = S(t) \cdot \mathcal{N}(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(d_2) \quad (4.1)$$

und

$$P(t) = e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(-d_2) - S(t) \cdot \mathcal{N}(-d_1) \quad (4.2)$$

mit $d_1 = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}$ und $d_2 = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}$, wobei \mathcal{N} die Verteilungsfunktion einer standard-normalverteilten Zufallsvariable bezeichnet.

4.3 Abhängigkeit der Call und Put Formeln von den Variablen

Die Erkenntnisse des folgenden Kapitels spielen eine große Rolle für professionelle Optionshändler. In ihrem Tätigkeitsbereich ist es außerordentlich wichtig ein gutes Einschätzungsvermögen des zukünftigen Verhaltens von Optionspreisen, beziehungsweise von Optionsstrategiepreisen zu besitzen. Diese Fähigkeit lässt sich vor

allen durch aktive Teilnahme am Optionsmarkt in Form von Handeln und Analysieren der realen Preisentwicklungen erwerben. Um auch einen Teil in Richtung eines Verständnisses von Optionspreis-Entwicklungen zu leisten, wollen wir nun betrachten, wie sich Veränderungen der einzelnen Variablen auf die im letzten Kapitel entwickelten Preisformeln auswirken. Dabei beginnen wir mit der fairen Preisformel für Call-Optionen und gehen jeweils der Reihe nach die Einflüsse der Variablen t , σ , S und r durch.

4.3.1 Analyse des Black-Scholes Preises von Call-Optionen

In folgenden Ausführungen betrachten wir stets den fairen Call-Preis nach Black-Scholes in einer Variable x , wobei wir alle übrigen Variablen als konstant betrachten. Also schreiben wir auch entsprechend $C'(x)$ für die partielle Ableitung von C nach x .

Entwicklung des fairen Call-Preises im Laufe der Zeit t

Wenn man den fairen Call-Preis nach Black-Scholes mit festem S , σ und positivem festen r in Abhängigkeit von t grafisch betrachtet, fällt schnell eine Gemeinsamkeit auf.

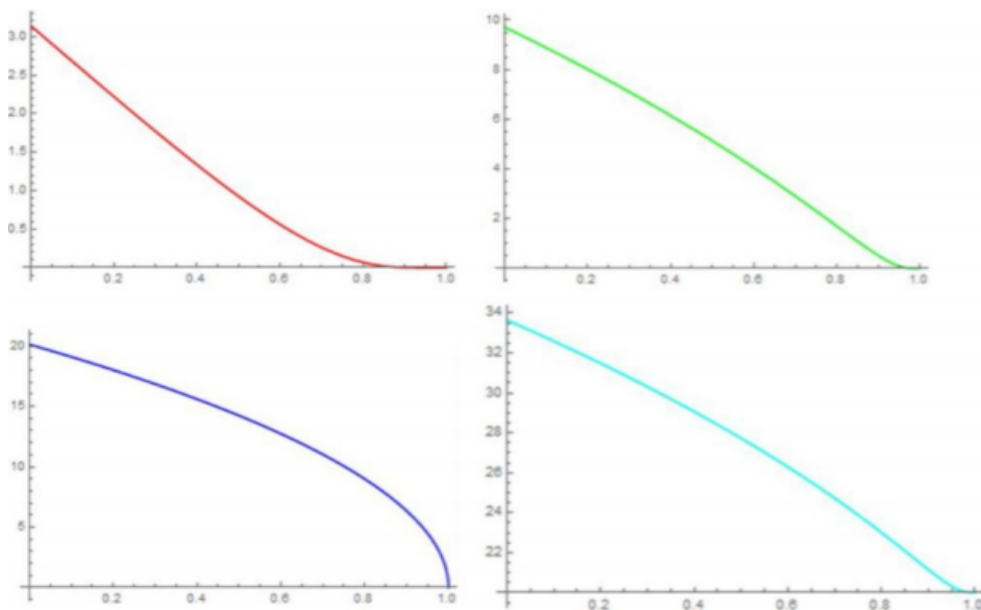


Abbildung 4.1: [1, S. 448] Call-Preis in Abhängigkeit der Zeit für feste $K = 100$, Zinssatz $r = 0.01$ und $S = 60$ (rot), 80 (grün), 100 (blau) und 120 (türkis)

Man sieht in Abbildung 4.1, dass $C(t)$ für wachsendes t monoton fällt. Das lässt sich auch rechnerisch schnell nachprüfen. Es gilt mit der Kettenregel und (4.1):

$$\begin{aligned} C'(t) &= \frac{d}{dt} (S \cdot \mathcal{N}(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2)) = \\ &= S \cdot \phi(d_1) \cdot d_1' - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \phi(d_2) \cdot d_2' - K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Hier bezeichnen ϕ und \mathcal{N} wieder die Dichte, respektive die Verteilungsfunktion der Standard-normalverteilung. Weiters gilt:

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} - \frac{\sigma^2 \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} - \sigma \cdot \sqrt{T-t} = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T-t}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Also gilt mit der Bezeichnung $d_i' = \frac{d}{dt} d_i$:

$$d_2' = d_1' + \sigma \frac{1}{2\sqrt{T-t}}.$$

Auch gilt deswegen:

$$\begin{aligned} \phi(d_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} = \phi(d_1) \cdot e^{d_1\sigma\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}} = \\ &= \phi(d_1) \cdot e^{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}} = \phi(d_1) \frac{S}{K} e^{r(T-t)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Mit diesen Erkenntnissen können wir (4.3) umformen:

$$\begin{aligned} C'(t) &= S\phi(d_1) \cdot d_1' - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \phi(d_1) \cdot \frac{S}{K} \cdot e^{r(T-t)} \cdot d_2' - K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2) = \\ &= S\phi(d_1) \cdot d_1' - S\phi(d_1) \cdot d_2' - K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2) = \\ &= -S\phi(d_1) \cdot \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2). \end{aligned}$$

Durch Ableiten haben wir somit erhalten:

$$C'(t) = - \left(S \cdot \phi(d_1) \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{T-t}} + K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2) \right). \quad (4.6)$$

Für einen positiven Zinssatz ist also $C'(t)$ negativ, da in diesem Fall alle vorkommenden Werte in der Klammer nicht negativ sind. Also ist der Call-Preis streng monoton fallend in t . Falls der Zinssatz r jedoch echt kleiner Null ist, lässt sich keine allgemeine Aussage machen.

Abhängigkeit des fairen Call-Preises von der Volatilität

Jetzt wollen wir betrachten, wie sich eine Veränderung der Volatilität auf den fairen Preis einer Call-Option auswirkt. Dabei gehen wir wie im letzten Punkt und betrachten den Tatbestand zuerst grafisch.

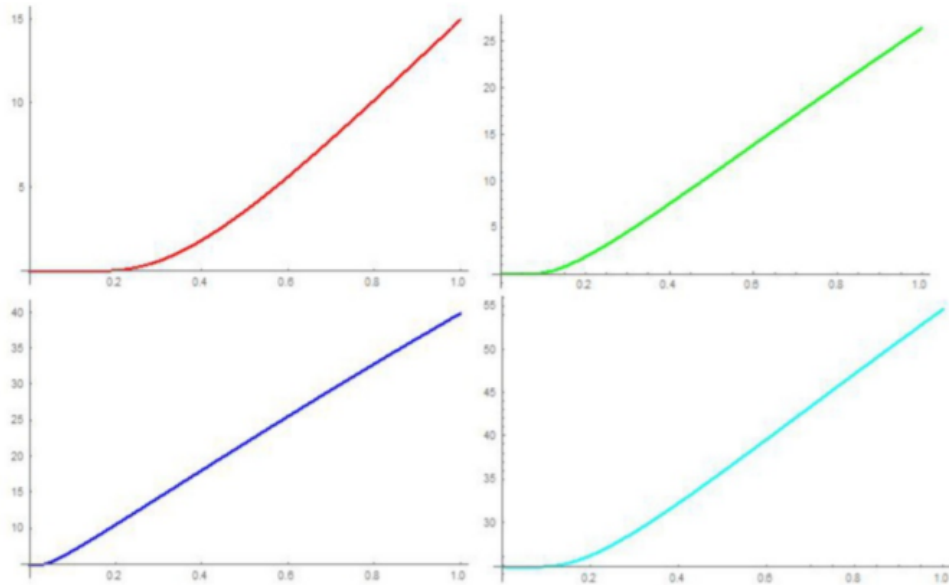


Abbildung 4.2: [1, S. 455] Call-Preis in Abhängigkeit der Volatilität für feste $K = 100$, Zinssatz $r = 0.05$ und $S = 60$ (rot), 80 (grün), 100 (blau) und 120 (türkis)

Es lässt sich in Abbildung 4.2 beobachten, dass C in σ monoton wächst. Auch das lässt sich rechnerisch schnell nachprüfen. Wegen (4.4) gilt mit der Bezeichnung $d_i' = \frac{d}{d\sigma} d_i$:

$$d_2' = d_1' - \sqrt{T-t}. \quad (4.7)$$

Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} C'(\sigma) &= \frac{d}{d\sigma} (S \cdot \mathcal{N}(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2)) = \\ &= S \cdot \phi(d_1) \cdot d_1' - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \phi(d_2) \cdot d_2'. \end{aligned}$$

Mithilfe von (4.5), (4.7) und durch Ausrechnen lässt sich das umformen zu:

$$\begin{aligned} C'(\sigma) &= S \cdot \phi(d_1) \cdot d_1' - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \phi(d_1) \cdot \frac{S}{K} \cdot e^{r(T-t)} \cdot (d_1' - \sqrt{T-t}) = \\ &= \sqrt{T-t} \cdot S \cdot \phi(d_1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wie wir beobachten können, sind alle auftretenden Faktoren positiv, also der Preis einer Call-Option unter allen Umständen monoton wachsend mit der Volatilität.

Abhängigkeit des fairen Call-Preises von dem Kurs des Underlyings

Um die Abhängigkeit der Preisformel bezüglich des risikolosen Zinssatzes zu überprüfen, betrachten wir wieder deren Ableitung, jedoch diesmal nach S . Wir bezeichnen d_i' mit $\frac{d}{dS}d_i$. Somit liefert uns (4.4) wieder:

$$d_2' = d_1'.$$

Durch diese Gleichheit und mit Hilfe der Kettenregel und der Produktregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} C'(S) &= \frac{d}{dS} (S \cdot \mathcal{N}(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(d_2)) = \\ &= \mathcal{N}(d_1) + S \cdot \phi(d_1) \cdot d_1' - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \phi(d_2) \cdot d_1'. \end{aligned}$$

Nun können wir (4.5) für $\phi(d_2)$ einsetzen, wodurch sich die zwei letzten Terme aufheben:

$$\begin{aligned} C'(S) &= \mathcal{N}(d_1) + S \cdot \phi(d_1) \cdot d_1' - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \phi(d_1) \cdot e^{r(T-t)} \cdot \frac{S}{K} \cdot d_1' = \\ &= \mathcal{N}(d_1). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Da die Verteilungsfunktion der Standard-normalverteilung \mathcal{N} stets positive Werte annimmt, ist C immer monoton wachsend mit dem Kurs des Underlyings.

Abhängigkeit des fairen Call-Preises von dem risikolosen Zinssatz

Zu guter Letzt wollen wir noch die Abhängigkeit des fairen Call-Preises von dem risikolosen Zinssatz untersuchen. Dafür leiten wir diese wieder für feste S , t und σ nach r ab. Hierfür bezeichnen wir wieder d_i' mit $\frac{d}{dr}d_i$. Somit liefert uns (4.4):

$$d_2' = d_1'. \quad (4.10)$$

Wir wenden nun wieder die Kettenregel an und gelangen über (4.1), (4.5) und (4.10) zu:

$$\begin{aligned} C'(r) &= \frac{d}{dr} (S \cdot \mathcal{N}(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(d_2)) = \\ &= S \cdot \phi(d_1) \cdot d_1' - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \phi(d_2) \cdot d_2' + (T-t) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(d_2) = \\ &= S \cdot \phi(d_1) \cdot d_1' - \phi(d_1) \cdot e^{r(T-t)} \cdot e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \frac{S}{K} \cdot d_1' + \\ &\quad + (T-t) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(d_2) = \\ &= (T-t) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(d_2). \end{aligned}$$

Diese Ableitung ist stets positiv, also ist C streng monoton wachsend in r . Grafisch sehen wir natürlich auch genau das in Abbildung 4.3.

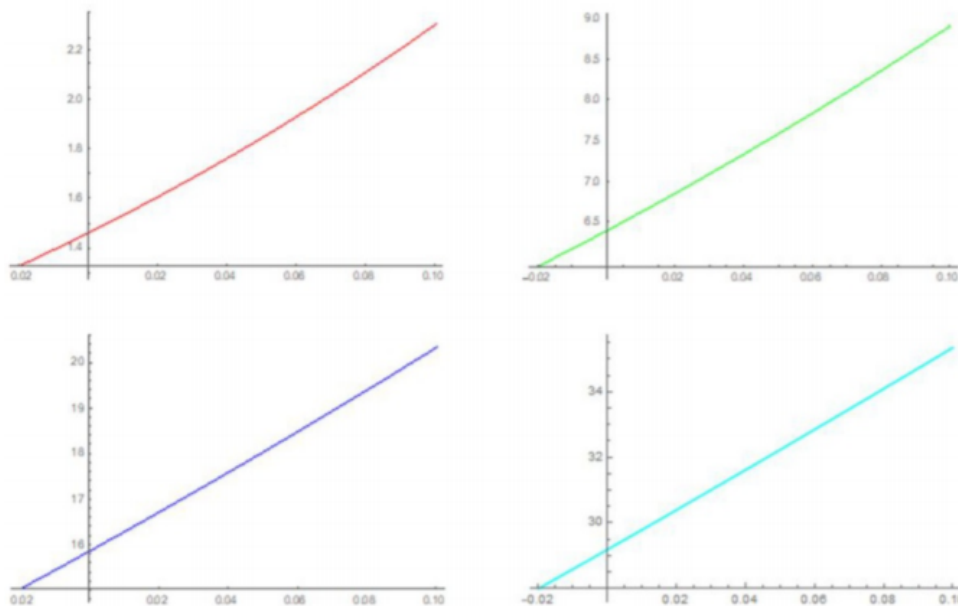


Abbildung 4.3: [1, S. 458] Call-Preis in Abhängigkeit des risikolosen Zinssatzes für feste $K = 100$, Zinssatz $\sigma = 0.4$ und $S = 60$ (rot), 80 (grün), 100 (blau) und 120 (türkis).

4.3.2 Analyse des Black-Scholes Preises von Put-Optionen

Von jetzt an betrachten wir stets den fairen Put-preis nach Black-Scholes. Wieder untersuchen wir stets die Abhängigkeit dessen bezüglich einer Variable $x \in \{t, \sigma, r, S\}$. Also nehmen wir wie oben jeweils alle übrigen Variablen als konstant an und schreiben $P'(x)$ für die partielle Ableitung von P nach x . Wir beginnen auch hier mit der Analyse des Verhaltens bezüglich einer Änderung der Zeit t

Entwicklung des fairen Put-preises im Laufe der Zeit

Wie man in Abbildung 4.4 sieht, lässt sich hier bei einem positiven Zinssatz keine allgemeine Aussage bezüglich der Monotonie von $P(t)$ machen.

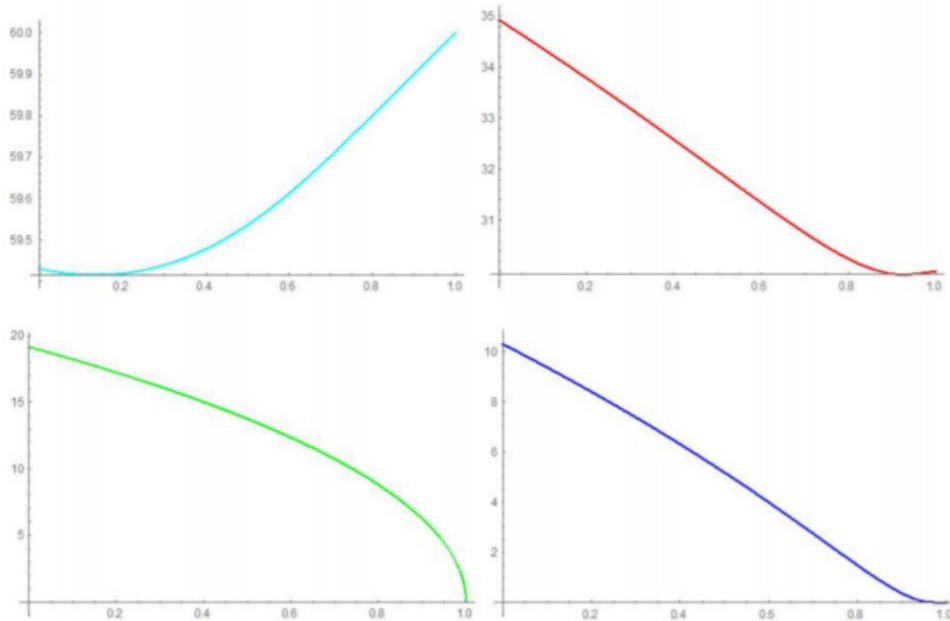


Abbildung 4.4: [1, S. 477] Put-Preise in Abhängigkeit der Zeit für feste $K = 100$, Zinssatz $r = 0.01$ und $S = 40$ (türkis), 70 (rot), 100 (grün) und 130 (blau).

Bei negativen Zinsen hingegen sieht man einen Zusammenhang, wenn man die Ableitung betrachtet. Wir berechnen also die Ableitung von $P(t)$ nach der Zeit t also $P'(t)$. Aus der Put-Call-Parität und (4.6) erhalten wir:

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{d}{dt} (C(t) + K \cdot e^{-r(T-t)} - S) = \\ &= C'(t) + K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} = \\ &= - \left(S \cdot \phi(d_1) \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{T-t}} + K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2) \right) + K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Durch Herausheben und aufgrund der Eigenschaften der Normalverteilung können wir dies schließlich umformen zu:

$$\begin{aligned} P'(t) &= -S \cdot \phi(d_1) \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{T-t}} + K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot (1 - \mathcal{N}(d_2)) = \\ &= -S \cdot \phi(d_1) \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{T-t}} + K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(-d_2). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Wir können feststellen, dass $P'(t)$ stets negative Werte annimmt, falls der risikolose Zinssatz r negativ ist. In diesem Fall fällt der Put-Preis also stets im Laufe der Zeit. Für einen positiven Zinssatz lässt sich hier keine allgemeine Aussage machen.

Abhängigkeit des fairen Put-Preises von der Volatilität

Wir wollen nun die Preisformel für Put-Optionen in Abhängigkeit von der Volatilität σ diskutieren. Durch eine grafische Betrachtung erkennen wir in Abbildung 4.5 bezüglich eines positiven Zinssatzes wieder ein monotones Wachstum.

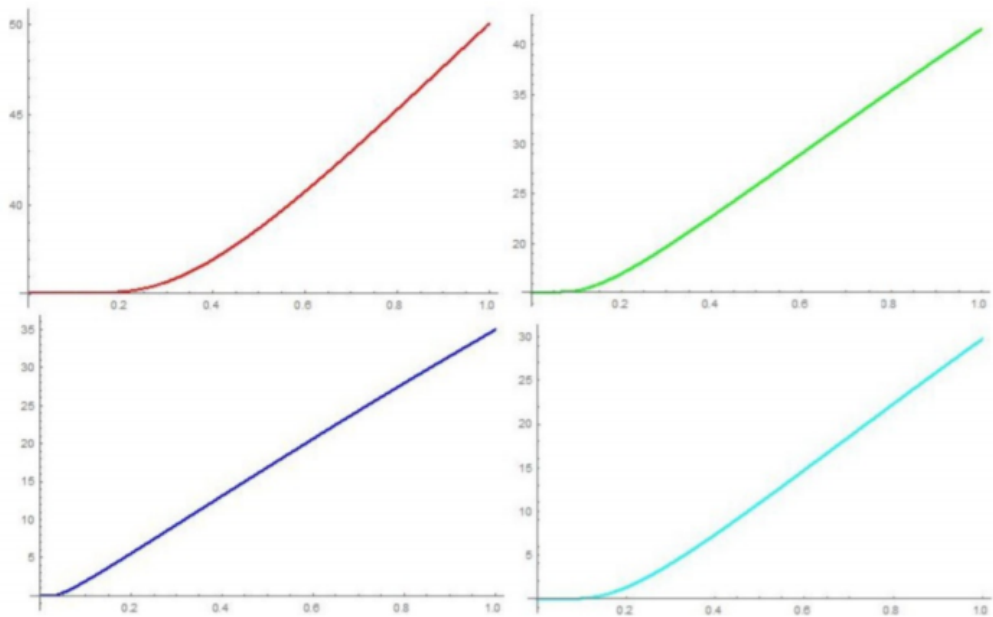


Abbildung 4.5: [1, S. 480] Put-Preis in Abhängigkeit der Volatilität für feste $K = 100$, Zinssatz $r = 0.05$ und $S = 60$ (rot), 80 (grün), 100 (blau) und 120 (türkis).

Wenn wir die Ableitung von $P(\sigma)$ bezüglich σ berechnen gilt aufgrund der Put-Call Parität und (4.8):

$$\begin{aligned} P'(\sigma) &= \frac{d}{d\sigma} (C(t) + K \cdot e^{-r(T-t)} - S) = \\ &= C'(\sigma) = \\ &= \sqrt{T-t} \cdot S \cdot \phi(d_1). \end{aligned}$$

Also ist $P'(\sigma)$ wie auch $C'(\sigma)$ stets positiv und $P(\sigma)$ somit monoton wachsend in σ .

Abhängigkeit des fairen Put-Preises von dem Kurs des Underlyings

Wir berechnen die Ableitung der Preisformel nach Black-Scholes bezüglich S . Mit Hilfe von (4.9) erhalten wir diese sofort aus der Put-Call Parität. Mit diesen gilt

nämlich:

$$\begin{aligned}
 P'(S) &= \frac{d}{dS} (C(S) + K \cdot e^{-r(T-t)} + S) = \\
 &= C'(S) - 1 = \\
 &= \mathcal{N}(d_1) - 1.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Da die Verteilungsfunktion N der Standard-normalverteilung stets kleiner gleich 1 ist, ist $P'(S)$ somit stets kleiner gleich 0 und somit stets monoton fallend.

Abhängigkeit des fairen Put-Preises von dem risikolosen Zinssatz

Schließlich wollen wir noch die Abhängigkeit des Put-Preises von dem risikolosen Zinssatz berechnen. Auch hier wenden wir die Put-Call Parität an und erhalten mit Hilfe der Eigenschaften der Normalverteilung der weiter oben hergeleiteten Tatsache $C'(r) = (T - t) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(d_2)$:

$$\begin{aligned}
 P'(r) &= \frac{d}{dr} (C(r) + K \cdot e^{-r(T-t)} - S) = \\
 &= C'(r) - (T - t) \cdot K \cdot e^{-r(T-t)} = \\
 &= (T - t) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(d_2) - (T - t) \cdot K \cdot e^{-r(T-t)} = \\
 &= (T - t) \cdot K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot (\mathcal{N}(d_2) - 1) = \\
 &= (T - t) \cdot K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(-d_2)
 \end{aligned}$$

Anders als der Call-Preis ist also $P'(r)$ immer negativ und damit fällt der faire Preis einer Put-Option stets monoton in r .

5 Die Greeks

Abschließend werden in diesem Kapitel die Greeks von Derivaten vorgestellt und einige wichtige Greeks von Call-Optionen und Put-Optionen zusammenfassend angegeben. Inhaltlich folgt dieser Abschnitt den Unterkapiteln 4.36 und 4.37 der Hauptquelle [1].

Um eine umfassendere Kenntnis der Operationshandelsstrategien, sowie deren Chancen und Risiken zu erreichen, ist ein genaueres Verstehen der Abhängigkeiten fairer Preise von Derivaten unumgänglich. Wie im letzten Kapitel beschrieben, sind dafür die ersten, aber auch höheren, Ableitungen der Preisformeln nach den jeweiligen Parametern wichtige Hilfsmittel für die Analyse der Abhängigkeiten. Jedoch sind diese Abhängigkeit nicht ausschließlich für die Analyse der Preisformeln relevant, da sie zum Beispiel auch im Hedging eine Rolle spielen. Da den Ableitungen der Preisformeln eine derart große Relevanz zugeschrieben wird, werden sie jeweils mit einem spezifischen Zeichen, nämlich einem griechischen Buchstaben, benannt. Auf Grund dieser Tatsache, werden sie gemeinsam als die Greeks von Derivaten bezeichnet. Wir wollen nun einige der wichtigsten Greeks vorstellen, da es sehr viele Greeks gibt und kurz ihre jeweilige Relevanz erklären.

Dabei betrachten wir ein beliebiges Derivat oder einer derivaten Handelsstrategie D mit Fälligkeit T , einem Underlying S mit Kurs $s = S(t)$ mit Volatilität σ , risikolosem Zinssatz r , einer Restlaufzeit $\tau = T - t$ und einer Formel für den fairen Preis $F(\tau, s, \sigma, r)$. Für dieses definieren wir:

- $\Delta_D(\tau, s, \sigma, r) := \frac{\partial F(\tau, s, \sigma, r)}{\partial s}$. Das Delta des Derivats bezeichnet also die Ableitung des fairen Preises bezüglich des Kurses S des Underlyings. Es spielt im Risikomanagement eine große Rolle, da dort das Wissen über den Einfluss von Änderungen im Kurs des Underlyings einer eingegangenen derivaten Handelsstrategie sehr wichtig ist. Auch im Bereich des Hedging spielt das Delta eine wichtige Rolle, worauf wir in dieser Arbeit jedoch nicht weiter eingehen wollen.
- $\theta_D(\tau, s, \sigma, r) := \frac{\partial F(\tau, s, \sigma, r)}{\partial \tau}$. Das Theta des Derivats bezeichnet also die Ableitung des fairen Preises bezüglich der Restlaufzeit τ . Dieses hat besondere Bedeutung bei der Frage danach, zu welchen Zeitpunkten entsprechende Derivat-Positionen ausgeübt werden sollen.
- $\Upsilon_D(\tau, s, \sigma, r) := \frac{\partial F(\tau, s, \sigma, r)}{\partial \sigma}$. Das Vega des Derivats bezeichnet also die Ableitung des fairen Preises bezüglich der Volatilität σ . Dieses ist insofern wichtig, da sich

ein Wachstum oder ein Abfall der Volatilität stark auf den Preis eines Derivats auswirken kann.

- $\rho_D(\tau, s, \sigma, r) := \frac{\partial F(\tau, s, \sigma, r)}{\partial r}$. Das Rho des Derivats bezeichnet also die Ableitung des fairen Preises bezüglich des risikolosen Zinssatzes r .
- $\Gamma_D(\tau, s, \sigma, r) := \frac{\partial^2 F(\tau, s, \sigma, r)}{\partial s^2}$. Das Gamma des Derivats bezeichnet also die zweifache Ableitung des fairen Preises bezüglich des Kurses des Underlyings, beziehungsweise die Ableitung des Deltas eines Derivats bezüglich des Kurses des Underlyings. Es spielt als Ableitung des wahrscheinlich wichtigsten Greeks Delta wie dieses im Hedging eine Rolle.

Schließlich wollen wir noch die eben definierten Greeks für Call- und Put-Optionen auflisten. Im letzten Kapitel haben wir bereits die Formeln des Δ, ρ, θ , und Υ für Call- und Put-Optionen hergeleitet. Es muss jedoch beachtet werden, dass wir bis jetzt nicht das θ berechnet haben, da wir in dem letzten Kapitel die Preisformeln nach t und nicht nach $\tau = T - t$ abgeleitet haben. Mit der Kettenregel folgt jedoch sofort, dass das Theta der Call- und Put-Optionen jeweils den Ausdrücken aus (4.6) und (4.11) mit geändertem Vorzeichen entspricht. Also fehlt letztlich das Gamma für beide Optionsarten. Wir werden diese also nun noch berechnen. Wir fangen mit dem Gamma einer Call Option an. Mit der Kettenregel und (4.9) gilt hierbei:

$$\begin{aligned} \Gamma_C(\tau, s, \sigma, r) &= \frac{\partial \Delta_C(\tau, s, \sigma, r)}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{N}(d_1)}{\partial s} = \phi(d_1) \cdot \frac{\partial d_1(\tau, s, \sigma, r)}{\partial s} = \\ &= \phi(d_1) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\ln \frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}} \right) = \\ &= \phi(d_1) \cdot \frac{1}{s \cdot \sigma \cdot \sqrt{T - t}}. \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis erhalten wir auch sofort das Gamma der Put-Option, da mit (4.12) gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma_P(\tau, s, \sigma, r) &= \frac{\partial \Delta_P(\tau, s, \sigma, r)}{\partial s} = \frac{\partial (\mathcal{N}(d_1) - 1)}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{N}(d_1)}{\partial s} = \\ &= \phi(d_1) \cdot \frac{1}{s \cdot \sigma \cdot \sqrt{T - t}} = \Gamma_C(\tau, s, \sigma, r). \end{aligned}$$

Also fassen wir diese Ergebnisse zusammen und erhalten:

5 Die Greeks

	Call-Option	Put-Option
fairer Preis	$S \cdot \mathcal{N}(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(d_2)$	$e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(-d_2) - S \cdot \mathcal{N}(-d_1)$
Delta	$\mathcal{N}(d_1)$	$\mathcal{N}(d_1) - 1$
Theta	$S \cdot \phi(d_1) \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{T-t}} +$ $+ K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2)$	$S \cdot \phi(d_1) \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{T-t}} -$ $- K \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(-d_2)$
Rho	$(T-t) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \mathcal{N}(d_2)$	$(T-t) \cdot K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(-d_2)$
Vega	$\sqrt{T-t} \cdot S \cdot \phi(d_1)$	$\sqrt{T-t} \cdot S \cdot \phi(d_1)$
Gamma	$\phi(d_1) \cdot \frac{1}{s \cdot \sigma \cdot \sqrt{T-t}}$	$\phi(d_1) \cdot \frac{1}{s \cdot \sigma \cdot \sqrt{T-t}}$

Dabei bezeichnen \mathcal{N} und ϕ wie auch oben schon die Verteilungsfunktion respektive die Dichte der Standard-Normalverteilung und auch hier gilt:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} \quad \text{und} \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}$$

Literaturverzeichnis

- [1] Gerhard Larcher. *Quantitative Finance: Strategien, Investments, Analysen*. Springer-Gabler, Wiesbaden, 2020.
- [2] Zdzislaw Brzezniak and Tomasz Zastawniak. *Basic Stochastic Processes: A Course Through Exercises*. Springer, London, 1999.
- [3] Sheldon M. Ross. *Introduction to Probability Models: Eleventh Edition*. Elsevier, Oxford, 2014.
- [4] Ngai Hang Chan and Hoi Ying Wong. *Simulation Techniques in Financial Risk Management: second edition*. Wiley, Hoboken, 2015.

Abbildungsverzeichnis

3.1	Simulation des Wiener Modells	9
4.1	Call-Preis in Abhängigkeit der Zeit	15
4.2	Call-Preis in Abhängigkeit der Volatilität	17
4.3	Call-Preis in Abhängigkeit des risikolosen Zinssatzes	19
4.4	Put-Preis in Abhängigkeit der Zeit	20
4.5	Put-Preis in Abhängigkeit der Volatilität	21