Seminararbeit

# ANALYTICAL VALIDATION FORMULAS FOR BEST ESTIMATE CALCULATION IN TRADITIONAL LIFE INSURANCE


**ausgeführt am**

**Institut für**

**Finanz- und Versicherungsmathematik**

**TU Wien**

**unter der Anleitung von**

**Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold**

**durch**

**Valentin Linsbichler**
**Matrikelnummer: 11810331**


Wien, am 28.02.2021

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Die Versicherungsbranche ist seit ihrer Entstehung ein Wirtschaftszweig, der notwendigerweise großes Vertrauen seiner Kunden bedingt. Oft werden Verträge über außergewöhnlich lange Zeiträume abgeschlossen und häufig hängen Schicksale einzelner Privatpersonen oder Unternehmen von der Zahlungsfähigkeit eines Versicherers ab. Wie fatal die Folgen einer unzureichenden Solvabilität eines Versicherungsunternehmen sein können, hat sich in der Vergangenheit bereits einige Male gezeigt. Aus diesem Grund wurde seit jeher eine Reihe von Anforderungen an Versicherungsunternehmen und insbesondere an deren Bilanzierung gestellt. Die lokal verabschiedeten Gesetze und Richtlinien haben sich im Verlauf der Zeit immer wieder verändert und wurden ergänzt, bis schließlich mit Beginn des Jahres 2016 innerhalb der europäischen Union die Richtlinie Solvency II eingeführt wurde.

Neben vielen anderen Regelungen und Vorschriften wird durch Solvency II unter anderem festgehalten, dass die Eigenmittel des Versicherers den Überschuss des Marktwertes der Vermögenswerte über den Marktwert der Verbindlichkeiten darstellen. Die konkrete Berechnung gestaltet sich in der Praxis jedoch als äußerst komplizierte Aufgabe, da die Verbindlichkeiten von Versicherungsunternehmen in der Regel nicht auf einem aktiven Markt gehandelt werden und somit grundsätzlich auch kein eindeutiger Marktwert für diese bestimmt werden kann. An dieser Stelle kommt das Prinzip des best estimate oder des besten Schätzwert ins Spiel. Nach wie vor wird international großer Aufwand betrieben, um einen Schätzwert zu finden, der den Marktwert der Verbindlichkeiten möglichst realitätsgetreu wiedergibt. Nachdem es sich bei den erwähnten Größen oft um Beträge in Milliardenhöhe handelt, können bereits kleine Abweichungen enorme Auswirkungen haben.

Auf die tatsächliche, meist stochastisch sehr aufwendige Ermittlung des besten Schätzwerts wird in dieser Arbeit nicht genauer eingegangen. Viel mehr ist es das Ziel des ersten Abschnittes, eine Validierungsformel für den besten Schätzwert herzuleiten, anhand derer ein bereits festgestellter Wert überprüft beziehungsweise kontrolliert werden kann. Dafür werden zunächst einige Annahmen getroffen, mit Hilfe derer im zweiten Unterkapitel des ersten Abschnitts eine entsprechende Grundgleichung bewiesen werden kann. Gegen Ende des ersten Abschnitts wird dann noch auf die getroffenen Voraussetzungen eingegangen und argumentiert, warum diese in der Praxis keine Beschränkungen darstellen.

Gemäß der Richtlinie Solvency II kann und muss der beste Schätzwert in garantierte und ermessensabhängige Leistungen aufgegliedert werden. Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit wird dann für die ermessensabhängigen Leistungen eine untere Schranke hergeleitet. Hierfür werden jedoch zunächst wieder einige Voraussetzungen aufgelistet, die für den Beweis unerlässlich sind. Die meisten dieser Annahmen rechtfertigen sich entweder durch statistische Erkenntnisse der letzten Jahre oder durch lokal gültige Gesetze und Verordnungen. Anhand eines Beispiels mit Daten eines namhaften deutschen Versicherungsunternehmens wird anschließend demonstriert, dass diese Abschätzung tatsächlich ein verwertbares Resultat bringt.

Abschließend wird im dritten und letzten Abschnitt dieser Arbeit auf die Resultate der vorherigen Kapitel eingegangen und insbesondere auf die Fragestellung, wie diese in der Praxis angewandt werden können.

Die vorliegende Seminararbeit orientiert sich dabei am gleichnamigen Artikel von Simon Hochgerner und Florian Gach, der 2019 im European Actuarial Journal veröffentlicht wurde. In dieser Arbeit wird aus Gründen der besseren Lesbarkeit das generische Maskulinum verwendet. Weibliche und andere Geschlechteridentitäten werden dabei ausdrücklich mitgemeint.

# 2 Grundgleichung der traditionellen Lebensversicherung

Wir betrachten hier und im Folgenden ein Versicherungsunternehmen, das traditionelle Lebensversicherungsprodukte vertreibt. Dabei bedeutet traditionell, dass ein wohldefinierter Gewinnbeteiligungsmechanismus existiert und die Versicherungsnehmer somit von potentiell erwirtschafteten Überschüssen profitieren. Es sei $\chi$ die Menge der im Bestand des Versicherers angeführten Verträge. Dabei handelt es sich wie in [1] beschrieben um zwei verschiedene Arten von Verträgen. Einerseits Lebensversicherungen, die sich durch die Einmalzahlung einer Versicherungssumme auszeichnen, andererseits Leibrenten, bei denen zu Lebzeiten der versicherten Person eine Reihe von Prämienzahlungen geleistet werden. Jedes Element der trivialerweise endlichen Menge $\chi$ lässt sich somit in eindeutiger Weise einem Versicherungsnehmer zuordnen.

Wir betrachten ein beliebiges Zinsmodell mit zugehörigem Numeraire $B_t$ unter diskreter Zeit $0 \dots T$, wobei T die Zeit bis zum Ablauf des Portfolios in Jahren bezeichnet und $B_0 = 1$ gelte. Insbesondere im Bereich der Lebensversicherung handelt es sich dabei meist um sehr lange Zeitspannen (z.B.: T = 60). Somit lässt sich $B_t$ auch als Rolloverinvestment betrachten und mit Hilfe der einjährigen Terminkurse $F_t$ darstellen als

$$B_t = \prod_{s=1}^{t} (1 + F_{s-1}). \tag{2.1}$$

Weiters sei $\mathbb{Q}$ das zum Zinsmodell gehörige risikoneutrale Martingal Maß. Wir setzen dabei immer voraus, dass alle auftretenden stochastischen Prozesse adaptiert sind. Für $0 \leq$ t $\leq$ s bezeichne P(t,s) den Zeitwert zum Zeitpunkt t der Auszahlung einer Einheit zum Zeitpunkt s. Somit ist

$$B_t^{-1} P(t, s) \tag{2.2}$$

ein Q-Martingal. Der beste Schätzwert (abgekürzt BE) entspricht gemäß [5, Art. 77 (2)] dem „wahrscheinlichkeitsgewichteten Durchschnitt künftiger Zahlungsströme („Cash-flows“) unter Berücksichtigung des Zeitwerts des Geldes (erwarteter Barwert künftiger Zahlungsströme)“ und kann somit angeschrieben werden als

$$BE = E_{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{t=1}^{T} B_t^{-1} \sum_{x \in \chi} cf_{x,t} \right], \tag{2.3}$$

wobei $cf_{x,t}$ die vom Vertrag x zum Zeitpunkt t generierten Cash-Flows bezeichnet. Durch Summation aller Cash-Flows über die Menge aller Veträge gelangen wir so zur Gesamtheit aller zur Zeit t stattfindenden Cash-Flows und bezeichnen diese mit

$$cf_t := \sum_{x \in \chi} cf_{x,t}.$$

## 2.1 Notation und Voraussetzungen

Bevor die Grundgleichung der traditionellen Lebensversicherungsbewertung hergeleitet werden kann, müsssen wir noch einige Annahmen treffen. Wie anschließend in Kapitel 2.3 gezeigt wird, führt jedoch keine dieser Überlegungen zu einem Verlust der Allgemeinheit. Die getroffenen Voraussetzungen dienen lediglich der Vereinfachung der Herangehensweise an die erzielten Resultate. Zuerst setzen wir voraus, dass der passive Bestand des Versicherungsunternehmens aus nur zwei Bestandteilen besteht. Dabei handelt es sich um:

1. Technische Reserven ($TR$)
2. Überschussfonds ($SF$)

Für jeden einzelnen Versicherungsvertrag der Menge $\chi$ müssen, so gesetzlich vorgeschrieben, technische Reserven der Höhe $TR_x$ gebildet werden. Auf die Berechnung der individuellen technischen Reserve für einen beliebigen Vertrag x kann an dieser Stelle leider nicht genauer eingegangen werden, da dies den Rahmen der Seminararbeit sprengen würde. Hervorzuheben ist jedoch, dass die Abbildung

$$x \mapsto TR_x$$

somit wohldefiniert ist. Die technischen Reserven TR ergeben sich nun in Hinblick auf die einzelnen $TR_x$ dadurch, dass die Summe der Buchwerte der indivduellen Verträge dem Buchwert der gesamten Reserve entspricht, also

$$BV(TR) = \sum_{x \in \chi} BV(TR_x).$$

Aus der ersten Voraussetzung ergibt sich weiters die Gleichheit

$$BV_t = BV_t(TR) + BV_t(SF),$$

wobei es sich bei $BV_t$ um den Buchwert des gesamten passiven Bestandes zum Zeitpunkt t handelt. Im Gegensatz dazu kann der Überschussfonds $SF$ nicht als Summe von vertragsabhängigen Größen dargestellt werden. Der Überschussfonds dient vor allem dem Schwankungsausgleich beziehungsweise dem Risikoausgleich der Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer und kann somit nur ganzheitlich betrachtet werden.

Die zweite Annahme, die wir in diesem Zusammenhang voraussetzen, bezieht sich auf die Struktur der Bilanz. Vorübergehend nehmen wir an, dass der Versicherer über kein Eigenkapital verfügt und somit der Buchwert der Vermögensgegenstände genau dem Buchwert der Verbindlichkeiten entspricht.

Den Nettoertrag, der sich im Jahr t aus dem Buchwert ergibt, bezeichnen wir mit $roa_{t+1}$. Weiters bezeichnen wir den unerwarteten Ertrag im Jahr t mit

$$ur_t := roa_t - F_{t-1}BV_{t-1}, \tag{2.4}$$

wobei $F_{t-1}$ der entsprechende einjährige Terminkurs ist. Durch einfache Umformungen und Einsetzen von $B_{t-1}$ ergibt sich aus Formel (2.1) die Gleichheit

$$F_{t-1} = \frac{B_t}{B_{t-1}} - 1. \tag{2.5}$$

Bei der Berechnung von $roa_t$ selbst werden abzugebende Steuern nicht berücksichtigt. Die entsprechenden steuerlichen Abgaben im Jahr t benennen wir mit $tax_t$. Zusätzlich sind auch anfallenden Aktionärsgewinne zu berücksichtigen, die wir mit $sh_t$ bezeichnen. Durch Summation über die gesamte betrachtete Zeitspanne und Bildung des Erwartungswertes ergibt sich damit unter Berücksichtigung des gewählten Zinsmodells der Gesamtwert der Steuerzahlungen

$$TAX := E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1} tax_t\right] \tag{2.6}$$

beziehungsweise analog

$$VIF := E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1} sh_t\right]. \tag{2.7}$$

Neben den entsprechenden Buchwerten sind auch die zugehörigen Marktwerte von großer Bedeutung. Diese sind in der Versicherungsbranche generell, insbesondere aber für die Verbindlichkeiten, nur sehr schwierig zu berechnen beziehungsweise abzuschätzen. Den Marktwert der Vermögensgegenstände zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $MV_t$. Die zu einem beliebigen Zeitpunkt zwischen Buchwert und Marktwert entstehende Differenz entspricht den noch nicht realisierten Gewinnen und wird im Folgenden mit

$$UG_t := MV_t - BV_t \tag{2.8}$$

bezeichnet. Die Marktwerte unterliegen permanenten Veränderungen, meist ausgelöst durch Marktbewegungen und können somit in jeder zeitlichen Veränderung von t zu t+1 variieren. Ähnliches gilt auch für Buchwerte, die zwar nicht direkt Bewegungen des Marktes unterliegen sich aber beispielsweise durch die Realisation unrealisierter Gewinne (die wiederum vom Markt beeinflusst sind) ändern können.

Schließlich werden wir für die Herleitung der Grundgleichung noch das "Monetary conservation principle" benötigen, welches besagt: All changes in the book value of assets $BV_t$ are either due to a chash-flow or due to a market value induced change in book value. [2, S. 5]

## 2.2 Die Gleichung

Wenn T der Projektionshorizont ist, dann lautet die Grundgleichung der traditionellen Lebensversicherungsbewertung:

$$BV_0 + UG_0 = BE + VIF + TAX + E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} MV_T\right] \tag{2.9}$$

Insbesondere folgt, wenn $BV_t(SF)$ durch $BV_t(TR)$ beschränkt ist,

$$E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} MV_T\right]/MV_0 \approx 0. \tag{2.10}$$

*Beweis:* Zunächst betrachten wir den Ausdruck $B_T^{-1}BV_T$, also den Buchwert zum Zeitpunkt T unter Berücksichtigung des zu Grunde liegenden Zinsmodells. Dieser lässt sich durch Hinzuaddieren beziehungsweise Subtrahieren von $B_t^{-1}BV_t$ erweitern zu

$$B_0^{-1}BV_0 - B_0^{-1}BV_0 + B_1^{-1}BV_1 - B_1^{-1}BV_1 + \ldots + B_{T-1}^{-1}BV_{T-1} - B_{T-1}^{-1}BV_{T-1} + B_T^{-1}BV_T.$$

Nun können wir jeweils zwei benachbarte Summanden zusammenfassen und erhalten somit eine Teleskopsumme. Nachdem $B_0^{-1} = 1$ gilt, folgt somit die Gleichheit

$$B_T^{-1}BV_T = BV_0 + \sum_{t=1}^{T}\left(B_t^{-1}BV_t - B_{t-1}^{-1}BV_{t-1}\right). \tag{2.11}$$

Gemäß dem Monetary conservation principle lässt sich jede Veränderung der Buchwerte zwischen $t-1$ und $t$ auf eine der vier bereits in Abschnitt 2.1 eingeführten Größen $cf_t$, $roa_t$, $tax_t$, $sh_t$, zurückführen und daher gilt

$$BV_t = BV_{t-1} - cf_t - sh_t - tax_t + roa_t. \tag{2.12}$$

Das Einsetzen von (2.12) in Gleichung (2.11) liefert

$$B_T^{-1}BV_T = BV_0 + \sum_{t=1}^{T}\left(B_t^{-1}\left(BV_{t-1} - cf_t - sh_t - tax_t + roa_t\right) - B_{t-1}^{-1}BV_{t-1}\right).$$

Im Weiteren betrachten wir vorerst nur die rechte Seite dieser Gleichung. Teilweises Ausmultiplizieren der inneren Klammer und Umstrukturieren innerhalb der einzelnen Summanden führt auf

$$BV_0 + \sum_{t=1}^{T}\left(B_t^{-1}\left(-cf_t - sh_t + tax_t\right) + B_t^{-1}roa_t - B_{t-1}^{-1}BV_{t-1} + B_t^{-1}BV_{t-1}\right).$$

Nun betrachten wir einen einzelnen beliebigen Summanden der hier auftretenden Summe, also $1 \leq t \leq T$ beliebig. Dann folgt durch Herausheben von $B_t^{-1}$

$$B_t^{-1}\left(-cf_t - sh_t - tax_t\right) + B_t^{-1}\left(roa_t - \frac{B_t}{B_{t-1}}BV_{t-1} + BV_{t-1}\right).$$

Durch erneutes Herausheben erhalten wir

$$B_t^{-1}\left(-cf_t - sh_t - tax_t\right) + B_t^{-1}\left(roa_t - \left(\frac{B_t}{B_{t-1}} - 1\right) BV_{t-1}\right).$$

Jetzt können wir (2.5) einsetzen und erhalten

$$B_t^{-1}\left(-cf_t - sh_t - tax_t\right) + B_t^{-1}\left(roa_t - F_{t-1}BV_{t-1}\right).$$

Wenn wir in einem weiteren Schritt die Definition der unrealisierten Erträge einsetzen, erhalten wir insgesamt die Gleichung

$$B_T^{-1}BV_T = BV_0 + \sum_{t=1}^{T}\left(B_t^{-1}\left(-cf_t - sh_t - tax_t\right) + B_t^{-1}ur_t\right).$$

Ziehen wir nun auf beiden Seiten der Gleichung den Erwartungswert bezüglich dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$, erhalten wir auf Grund der Linearität des Erwartungswerts

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}BV_t\right] = BV_0 - E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1}cf_t\right] - E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1}sh_t\right] - \\ E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1}tax_t\right] + E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1}ur_t\right]. \end{aligned}$$

Durch Umschreiben der Gleichung folgt gemeinsam mit den Definitionen (2.3), (2.6) und (2.7) schließlich

$$BV_0 + E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1}ur_t\right] = BE + VIF + TAX + E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}BV_t\right]. \tag{2.13}$$

Sei nun a $\in \mathcal{A}_0$ ein beliebiger Vermögensgegenstand des Versicherers zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Maturität $T_a$. Die unerwarteten Erträge von a lassen sich darstellen als

$$\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1}ur_{a,t}. \tag{2.14}$$

Mittels (2.4) und (2.12) folgt schließlich die Gleichheit

$$\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1}ur_{a,t} = \sum_{t=1}^{T} B_t^{-1}\left(cf_a, t + BV_t\left(a\right) - (1 + F_{t-1})BV_{t-1}(a)\right).$$

Wegen (2.5) entspricht die rechte Seite dieser Gleichung

$$\sum_{t=1}^{T}\left(B_t^{-1}cf_a, t + B_t^{-1}BV_t\left(a\right) - B_{t-1}^{-1}BV_{t-1}(a)\right).$$

Teilt man die Summe nun auf, wird im hinteren Teil erneut eine Teleskopsumme sichtbar, deren Auflösung auf

$$\sum_{t=1}^{T} \left(B_t^{-1} cf_a, t\right) + B_T^{-1} BV_T(a) - BV_0(a)$$

führt. Dieser Ausdruck entspricht genau

$$\sum_{t=1}^{T} \left(B_t^{-1} cf_a, t\right) + B_T^{-1} MV_T(a) - BV_0(a) - B_T^{-1} \left(MV_T(a) - BV_T(a)\right). \tag{2.15}$$

Um nun weiter vereinfachen zu können, führen wir eine Fallunterscheidung durch. Je nachdem, wie die Maturität von $a$ sich zum Projektionshorizont T verhält, unterscheiden wir in die folgenden beiden Fälle:

- 1. Fall: $T_a \leq T$
- 2. Fall: $T_a > T$.

Sofern der Vermögensgegenstand $a$ so gewählt ist, dass der erste Fall eintritt, werden zum Zeitpunkt $T_a$ Marktwert und Buchwert von a übereinstimmen. Folglich gilt dann:

$$cf_{a,t} = BV_t(a) = MV_t(a) = 0 \forall t : T_a < t \leq T$$

Falls dies nicht der Fall sein sollte, bezeichnet $UG_{a,T}$ die zum Zeitpunkt T bestehenden unrealisierten Gewinne von $a$:

$$UG_{a,t} = MV_T(a) - BV_T(a) \tag{2.16}$$

Nachdem es sich bei (2.2) um ein Martingal bezüglich dem Maß $\mathbb{Q}$ handelt, lässt sich $MV_0(a)$ anschreiben als

$$MV_0(a) = E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t{}^{-1} cf_{a,t} + B_T^{-1} a_T\right]. \tag{2.17}$$

Wenn man nun (2.14) wieder mit (2.15) gleichsetzt und dann auf beiden Seiten der dadurch entstandenen Gleichung den Erwartungswert bezüglich dem Maß $\mathbb{Q}$ bildet, folgt nach Einsetzen von (2.17)

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1} ur_{a,t}\right] = MV_0(a) - BV_0(a) - E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}\left(MV_T(a) - BV_T(a)\right)\right].$$

Durch Einsetzen von (2.16) für t = 0 und t = T folgt schließlich

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1} ur_{a,t}\right] = UG_{a,0} - E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} UG_{a,T}\right]. \tag{2.18}$$

An dieser Stelle ist zu betonen, dass für sämtliche Vermögensgegenstände, die nicht aus $\mathcal{A}_0$ stammen und die somit Element der Menge $\mathcal{A}_t$ für beliebiges t > 0 sind, $UG_{a,t} = 0$ gilt. Diese sind erst im späteren Verlauf durch eine Reinvestmentstrategie hinzugekauft worden und es ist daher davon auszugehen, dass zum Kaufzeitpunkt t Buch- und Marktwert übereingestimmt haben. Aus diesem Grund ist es im Folgenden zulässig, über alle vorhandenen Vermögensgegenstände aufzusummieren und somit folgt aus (2.18)

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} B_t^{-1} ur_t\right] = E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{a\in\mathcal{A}_{t-1}} B_t^{-1} ur_{a,t}\right] = UG_0 - E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} UG_T\right]. \tag{2.19}$$

Dieses Resultat ist somit unabhängig von der gewählten Reinvestmentstrategie. Durch Einsetzen von (2.19) in (2.13) folgt schließlich

$$BV_0 + UG_0 - E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} UG_T\right] = BE + VIF + TAX + E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} BV_T\right].$$

Nach Umschreiben der Gleichung mit Hilfe von (2.8) und aufgrund der Linearität des Erwartungswertes folgt daraus wiederum

$$BV_0 + UG_0 = BE + VIF + TAX + E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} MV_T\right].$$

Damit wurde die Grundgleichung gezeigt. Darüber hinaus lässt sich argumentieren, dass bei einem typischen Portfolio eines Versicherungsunternehmens Marktwert und Buchwert der Vermögensgegenstände zum Zeitpunkt T sehr ähnlich sind. Wenn wir jetzt noch die durchaus realistische Annahme treffen, dass der Buchwert des Überschussfonds nach oben beschränkt ist durch eine vom Buchwert der technischen Reserven abhängigen Schranke, lässt sich argumentieren, dass

$$E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} MV_T\right] / MV_0 \approx 0 \tag{2.20}$$

gilt. Die Annahme der Beschränktheit des Buchwertes des Überschussfonds ist sehr realitätsnahe, da in der Praxis der letzten Jahre beobachtet werden kann, dass der Buchwert des Überschussfonds in etwa 2 % des Buchwertes der technischen Reserven ausmacht, also

$$BV_t(SF) \leq 0,02\ BV_t(TR).$$

Nachdem wir ein Portfolio betrachten, in dem es kein Neugeschäft gibt, werden die technischen Reserven gegen den Projektionshorizont T hin immer kleiner. Zum Zeitpunkt T verfügen sie dann schließlich über einen Marktwert, der verglichen mit dem Marktwert zu t = 0 so klein ist, dass der Quotient in (2.20) tatsächlich einen Wert nahe 0 annimmt.

## 2.3 Rechtfertigung der Annahmen

Zu argumentieren bleibt, dass die in Kapitel 2.1 getroffenen Annahmen die allgemeine Gültigkeit beziehungsweise Anwendbarkeit in der Praxis nicht einschränken. Zu Beginn wurde vorausgesetzt, dass der passive Bestand des Versicherers nur aus technischen

Reserven und Überschussfonds besteht. Diese Voraussetzung muss in der Praxis zwar nicht zwangsweise erfüllt sein, allerdings ist einfach ersichtlich, dass die Gleichung (2.9) auch dann gilt, wenn die Voraussetzung nicht erfüllt ist. Sollten die entsprechenden Cash-Flows von weiteren Bestandteilen abhängen, können diese einfach zu $BV_0$ und $UG_0$ hinzuaddiert werden. Der Beweis ändert sich dadurch nicht und die allgemeine Gültigkeit der Gleichung bleibt erhalten.

Die zweite Voraussetzung besagt, dass in der Bilanz des Versicherers kein Eigenkapital auftaucht. Nachdem diese Annahme ziemlich realitätsfern ist, bleibt zu argumentieren, dass die gezeigte Gleichheit durch Weglassen dieser Voraussetzung dennoch erhalten bleibt. In der Regel verfügen Versicherungsunternehmen über positives Eigenkapital. Dieses muss in (2.9) nun zur linken Seite der Gleichung addiert werden. Gleichzeitig ist zu beachten, dass der Marktwert der Vermögensgegenstände zu t = T nicht mehr nahe 0 sein wird. Das liegt daran, dass auch nach Ablauf von T Jahren Eigenmittel verbleiben. Die Gleichung (2.9) bleibt somit also weiterhin gültig, allerdings gilt die Abschätzung (2.20) dann im Allgemeinen nicht mehr.

# 3 Die untere Schranke der ermessensabhängigen Leistungen

Der beste Schätzwert lässt sich aus Sicht vom Zeitpunkt t = 0 aufteilen in garantierte und ermessensabhängige Leistungen. Bei letzteren handelt es sich einen Posten, der gemäß Solvency II explizit berechnet und ausgewiesen werden muss. Das Ziel des zweiten Teils dieser Seminararbeit ist die Herleitung einer unteren Schranke für die ermessensabhängigen Leistungen. Die garantierten Leistungen sind allerdings, obwohl der Name dies vermuten lässt, keinesfalls eine im Vorfeld eindeutig bestimmbare Größe oder gar eine Konstante. Hierbei sind lediglich die künftigen Zahlungsströme garantiert. Die Erwartungswerte von Zufallsvariablen wie Todeszeitpunkten, Zinssatzbewegungen etcetera beeinflussen die garantierten Leistungen durchaus.

## 3.1 Notation und Voraussetzungen

Die bereits erwähnten garantierten Leistungen werden im Folgenden abgekürzt mit $GB$ und die ermessensabgängigen Leistungen mit $FDB$. Wie bereits oben angedeutet, gilt die Gleichheit

$$BE = GB + FDB. \tag{3.1}$$

Wie bereits zu Beginn der Arbeit erwähnt, werden ausschließlich traditionelle Lebensversicherungsunternehmen betrachtet. Nachdem diese per Definition über einen wohldefinierten Gewinnbeteiligungsmechanismus verfügen, existiert ein ebenfalls wohldefinierter, jährlicher buchhalterischer Zahlungsstrom, der an die Menge aller Versicherungsnehmer fließt. Dieser Zahlungsstrom wird hier und im Folgenden mit $ph_t^*$ bezeichnet. Zu betonen gilt es an dieser Stelle, dass es sich bei $ph_t^*$ um keinen realen Zahlungsstrom handelt, sondern dieser lediglich eine Veränderung der Buchwerte hervorruft. Es kommt also nicht zwangsweise zu einer tatsächlichen Auszahlung an die Versicherungsnehmer, sondern in der Regel nur zu einer Erhöhung des Buchwertes der Verbindlichkeiten des Versicherers. Neben $ph_t^*$ gibt es auch noch die Bruttogewinnbeteiligungsrate gph. Diese gibt im Gegensatz zu $ph_t^*$ an, mit welcher Rate, also mit welchem relativen Anteil die Versicherungsnehmer von Überschüssen des Unternehmens $gs^*$ profitieren, sofern diese nicht negativ sind. Den Erwartungswert der abgezinsten, aufsummierten Buchhaltungszahlungsströme $ph_t^*$ bezeichnen wir mit

$$PH^* := E_{\mathbb{Q}}\left[\sum B_t^{-1} ph_t^*\right].$$

Für die Herleitung der unteren Schranke der ermessensabhängigen Leistungen muss zunächst noch eine Reihe von Voraussetzungen angenommen werden. Zuerst nehmen wir an, dass die Bruttogewinnbeteiligungsrate konstant ist. Diese Annahme ist durchaus realistisch, da dies in Ländern wie Österreich oder Deutschland gesetzlich geregelt ist und die Rate hier (Stand Jänner 2021) bei 25 % liegt. Falls diesbezüglich keine lokalen Bestimmungen existieren, kann die gph auch als eine mittlere Rate des, bei traditionellen Lebensversicherern jedenfalls wohldefinierten, Gewinnbeteiligungsmechanismus und der zugehörige Nettobeteiligungsrate (nph) angenommen werden. Zusätzlich dazu nehmen wir an, dass $ph_t^*$ sich negativ korreliert zu eventuellen Zinssatzbewegungen verhält, also dass gilt:

$$Corr\left[Bt^{-1}, ph_t^*\right] < 0$$

Konkret beschreibt diese Ungleichung die Reaktion des Versicherers bei ansteigenden Zinsen. Die negative Korrelation kann als direkte Folgerung der sogenannten Going-concern-Prämisse interpretiert werden. Um weiterhin wettbewerbstauglich zu bleiben, erhöhen Versicherer unter den gegeben Umständen im Normalfall $ph_t^*$. Um in einem ersten Beweisschritt ein Zwischenresultat herzuleiten, betrachten wir vorerst den Fall, dass die Menge $\chi$ Mächtigkeit 1 hat und somit aus nur einem einzelnen Versicherungsvertrag besteht. Diese offensichtlich sehr realitätsferne Voraussetzung wird nach der ersten Beweishälfte wieder verworfen und der nun betrachtete Spezialfall wird auf den allgemeinen Fall erweitert. Aus diesem Grund bedarf diese Annahme keine Rechtfertigung.

## 3.2 Die Schranke

Der Beweis zur Herleitung der gewünschten unteren Schranke der ermessensabhängigen Leistungen beginnt zunächst mit der Herleitung einer unteren Schranke für $PH^*$.

$$\begin{aligned} PH^* &= E_{\mathbb{Q}}\left[\sum B_t^{-1} ph_t^*\right] \\ &= gph \cdot E_{\mathbb{Q}}\left[\sum B_t^{-1} gs_+^*(t)\right] \\ &\geq gph \cdot E_{\mathbb{Q}}\left[B_t^{-1} gs^*(t)\right] \\ &= gph \cdot (VIF + PH^* + TAX) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dabei gilt die erste Gleichheit per Definition von $PH^*$. Die zweite Gleichheit gilt einerseits wegen der Definitionen von $ph_t^*$, gph und $gs^*$, andererseits aufgrund der Linearität des Erwartungswertes. Das Plus im Index von $gs_+^*$ steht dabei für die Auswahlfunktion, die ausschließlich den Positivteil ihrer Argumente wiedergibt, also

$$gs_+^*(t) := \max(gs^*(t), 0).$$

Unter Anbetracht dieser Tatsache ist die Ungleichung in (3.2) trivial. Die letzte Gleichheit folgt durch Aufteilen von $gs_+^*$ in seine einzelnen Bestandteile

$$gs_+^* = sh_t + ph_t^* + tax_t$$

und aus den Definitionen von VIF, TAX und $PH^*$. Insgesamt folgt somit:

$$PH^* \geq gph \cdot (VIF + PH^* + TAX) \tag{3.3}$$

Zusätzlich ist es möglich, für $PH^*$ eine obere Schranke herzuleiten.

$$\begin{aligned} PH^* &= E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t \leq T} B_t^{-1} ph_t^*\right] \\ &\leq \sum_{t \leq T} E_{\mathbb{Q}}\left[B_t^{-1}\right] \cdot E_{\mathbb{Q}}\left[ph_t^*\right] \\ &\leq \max_{1 \leq t \leq T} P(0,t) \cdot E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t \leq T} ph_t^*\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die erste Zeile entspricht hierbei wieder der Definition von $PH^*$. Die Abschätzung in der zweiten Zeile folgt der Annahme, dass die Bruttogewinnbeteiligung und die Zinsbewegungen negativ korreliert sind und der letzte Schritt gilt abermals wegen der Linearität des Erwartungswertes sowie auch aufgrund der Definition von $P(0,t)$. Mit Ende des Jahres 2017 betrug $\max_{1 \leq t \leq T} P(0,t)$ ungefähr den Wert 1.005. Im Folgenden werden wir daher $\max_{1 \leq t \leq T} P(0,t)$ mit 1 abschätzen. Dadurch besteht die Gefahr, dass die untere Schranke minimal schlechter approximiert als eventuell mit exakten $\max_{1 \leq t \leq T} P(0,t)$. Die Auswirkungen sind jedoch minimal und vernachlässigbar.

In einem dritten Schritt können wir nun bereits beginnen, eine erste untere Schranke für die ermessensabhängigen Leistungen herzuleiten. Dafür betrachten wir:

$$FDB := E_{\mathbb{Q}}\left[B_M^{-1} \cdot \sum_{t \leq M} ph_t^*\right]$$

Aus der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie ist bekannt, dass ein solcher Erwartungswert eines Produkts aus zwei Faktoren unter zu Hilfenahme der Kovarianz wie folgt ausgelöst werden kann:

$$E_{\mathbb{Q}}\left[B_M^{-1} \cdot E_{\mathbb{Q}} \sum_{t \leq M} ph_t^*\right] = E_{\mathbb{Q}}\left[B_M^{-1}\right] \cdot E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t \leq M} ph_t^*\right] + Cov\left[B_M^{-1}, \sum_{t \leq M} ph_t^*\right] \tag{3.5}$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{SD\left[X\right] \cdot SD\left[Y\right]}$$

zwischen Korrelation und Kovarianz kann die rechte Seite in (3.5) weiter umgeschrieben werden zu

$$E_{\mathbb{Q}}\left[B_M^{-1}\right]\cdot E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t\leq M} ph_t^*\right] + Corr\left[B_M^{-1},\sum_{t\leq M} ph_t^*\right]\cdot SD\left[B_M^{-1}\right]\cdot SD\left[\sum_{t\leq M} ph_t^*\right].$$

Nachdem wir nun bereits wissen, dass $B_M^{-1}$ und $\sum_{t\leq M} ph_t^*$ negativ korreliert sind und die Korrelation zwischen zwei Ausdrücken unabhängig von den Ausdrücken selbst nach unten immer durch $-1$ beschränkt ist, folgt

$$FDB \geq P(0.M)\cdot E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t\leq M} ph_t^*\right] - 1\cdot SD\left[B_M^{-1}\right]\cdot SD\left[\sum_{t\leq M} ph_t^*\right], \tag{3.6}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $E_{\mathbb{Q}}\left[B_M^{-1}\right]$ genau $P(0,M)$ entspricht.

Für den weiteren Verlauf bezeichne $A_0$ den Marktwert zum Zeitpunkt t $= 0$ und $A_T$ den Erwartungswert des abgezinsten Marktwert des Zeitpunktes $t = T$, also

$$A_0 := MV_0 = BV_0 + UG_0 \tag{3.7}$$
$$A_T := E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} MV_T\right] \tag{3.8}$$

Für eine bessere Übersicht definieren wir

$$\eta := P(0,M)\cdot\left(1 - \frac{SD\left[B_M^{-1}\right]}{P(0,M)}\cdot\frac{SD\left[\sum_{t\leq M} ph_t^*\right]}{E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t\leq M} ph_t^*\right]}\right)\cdot\frac{gph}{1-gph} \tag{3.9}$$

und die darin vorkommenden Terme als

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= \frac{SD\left[B_M^{-1}\right]}{P(0,M)}\\ \sigma_2 &:= \frac{SD\left[\sum_{t\leq M} ph_t^*\right]}{E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t\leq M} ph_t^*\right]}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Um auf die gesuchte untere Schranke zu kommen, betrachten wir nun erneut Formel (3.3), wenden die im ersten Teil der vorliegenden Seminararbeit hergeleitete Grundgleichung der traditionellen Lebensversicherung darauf an und erhalten somit

$$\begin{aligned}PH^* &\geq gph\cdot(VIF + PH^* * TAX)\\ &= gph\cdot\left(BV_0 + UG_0 - E_{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} MV_T\right] - BE + PH^*\right).\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Definitionen (3.7) und (3.8) und unter Verwendung von (3.1) erhalten wir dann

$$PH^* \geq gph\cdot(A_0 - A_T - GB - FDB + PH^*). \tag{3.11}$$

Jetzt multiplizieren wir auf der rechten Seite von (3.11) die Klammer aus, subtrahieren $gph \cdot PH^*$ auf beiden Seiten, heben im Anschluss auf der linken Seite $PH^*$ und auf der rechten Seite $gph$ heraus und dividieren schließlich beide Seiten durch $1 - gph$. Dadurch erhalten wir

$$PH^* \geq \frac{gph}{1 - gph} \cdot (A_0 - A_T - GB - FDB). \tag{3.12}$$

Zu guter Letzt nehmen wir die bereits gezeigte Ungleichung (3.6) und setzen die übrigen bisher gezeigten Resultate ein. Wegen Ungleichung (3.4) gilt

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t \leq M} ph_t^*\right] \geq PH^*$$

und da wegen den Definitionen in (3.10)

$$SD\left[B_M^{-1}\right] = \sigma_1 \cdot P(0, M)$$
$$SD\left[\sum_{t \leq M} ph_t^*\right] = \sigma_2 \cdot E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t \leq M} ph_t^*\right]$$

gilt, können wir die rechte Seite von (3.6) weiter nach unten abschätzen durch

$$P(0, M) \cdot PH^* - \sigma_1 \cdot P(0, M) \cdot \sigma_2 \cdot PH^*.$$

Im Anschluss können wir $P(0, M) \cdot PH^*$ herausheben und wir erhalten

$$FDB \geq P(0, M) \cdot (1 - \sigma_1 \cdot \sigma_2) \cdot PH^*,$$

wobei $PH^*$ gemäß (3.12) weiter abgeschätzt werden kann. Somit folgt

$$FDB \geq P(0, M) \cdot (1 - \sigma_1 \cdot \sigma_2) \cdot \frac{gph}{1 - gph} \cdot (A_0 - A_T - GB - FDB).$$

Hierbei handelt es sich wegen (3.9) genau um

$$FDB \geq \eta \cdot (A_0 - A_T - GB - FDB)$$

Schließlich folgt durch Ausmultiplizieren, Äquivalenzumformungen und Herausheben die Ungleichung

$$FDB \geq \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot (A_0 - A_T - GB).$$

Somit wurde der Spezialfall, in dem wir nur einen Versicherungsvertrag betrachtet haben, bewiesen. Für den allgemein gültigen Fall verwerfen wir nun diese Annahme und betrachten einen Versicherer, der eine beliebige, endliche Anzahl an Verträgen hält. Stattdessen wollen wir im Folgenden annehmen, dass Vermögensgegenstände nicht an einzelne, individuelle Verträge gebunden sind. Diese Annahme beschreibt lediglich die Tatsache, dass Vermögenswerte gleichmäßig unter allen Versicherungsnehmern geteilt werden. In Österreich ist dieses Verhalten laut Lebensversicherungs-Gewinnbeteiligungsverordnung sogar gesetzlich verpflichtend einzuhalten. Entsprechend definieren wir dafür die im Spezialfall aufgetretenen Variablen für die jeweiligen $x \in \chi$:

1. $\eta_x$ analog zu (3.9)
2. $D_x := \frac{\eta_x}{1+\eta_x}$
3. $A_0^x := A_0 \cdot \frac{BV(TR^x)}{BV(TR)}$
4. $GB^x$ beschreibt den Wert der garantierten Leistungen des Vertrages x zu t = 0
5. $GB = \sum_{x\in\chi} GB^x$
6. $FDB = \sum_{x\in\chi} FDB_x$.

Schließlich definieren wir noch Gewichte $\omega_x$ als

$$\omega_x := \frac{A_o^x - GB^x}{A_0 - GB}$$

und einen entsprechenden, gewichteten Faktor D als

$$D := \sum_{x\in\chi} \omega_x D_x.$$

Für den allgemeinen Fall können wir nun die gesamten ermessensabhängigen Leistungen aufteilen auf die ermessensabhängigen Leistungen der einzelnen Verträge und dann auf jeden einzelnen Vertrag die bereits gezeigte untere Schranke für einzelne Verträge anwenden. Es gilt

$$FDB = \sum_{x\in\chi} FDB_x \geq \sum_{x\in\chi} D_x(A_0^x - A_{M_x}^x - GB^x).$$

Durch Addieren und Subtrahieren von $D \cdot (A_0^x - A_T^x - GB^x)$ folgt

$$FDB \geq \sum_{x\in\chi}(D - D - (-D_x)) \cdot (A_0^x - A_T^x - GB^x).$$

Diese Ungleichung lässt sich wie folgt weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
FDB &\geq \sum_{x\in\chi} D \cdot (A_0^x - A_{M_x}^x - GB^x) - \sum_{x\in\chi}(D - D_x) \cdot (A_0^x - A_{M_x}^x - GB^x) \\
&= D \cdot \sum_{x\in\chi}(A_0^x - A_{M_x}^x - GB^x) - \sum_{x\in\chi}(D - D_x) \cdot (A_0^x - GB^x) + \sum_{x\in\chi}(D - D_x) \cdot A_{M_x}^x \\
&= D \cdot \sum_{x\in\chi}(A_0^x - GB^x) - D \cdot \sum_{x\in\chi} A_{M_x} - \sum_{x\in\chi}(D - D_x) \cdot (A_0^x - GB^x) \\
&+ \sum_{x\in\chi} D \cdot A_{M_x}^x - \sum_{x\in\chi} D_x \cdot A_{M_x} \\
&= D(A_0 - GB) - \sum_{x\in\chi}(D - D_x) \cdot (A_0^x - GB^x) - \sum_{x\in\chi} D_x \cdot A_{M_x}
\end{aligned}$$

In einem kleinen Exkurs betrachten wir jetzt nur den Term $\sum_{x\in\chi}(D-D_x)\cdot(A_0^x-GB^x)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\chi}(D-D_x)\cdot(A_0^x-GB^x) &= \sum_{x\in\chi}\left(\sum_{x\in\chi}\omega_x D_x - D_x\right)\cdot(A_0^x-GB^x)\\
&= \sum_{x\in\chi}\left(\sum_{x\in\chi}\frac{A_0^x-GB^x}{A_0-GB}D_x - D_x\right)\cdot(A_0^x-GB^x)\\
&= \frac{1}{A_0-GB}\left(\sum_{x\in\chi}\sum_{x\in\chi}\left(\left(A_0^x-GB^x\right)D_x\right)\cdot(A_0^x-GB^x)\right)-\sum_{x\in\chi}D_x\cdot(A_0^x-GB^x)\\
&= \frac{1}{A_0-GB}(A_0-GB)\left(\sum_{x\in\chi}\sum_{x\in\chi}D_x\right)\cdot(A_0-GB)-\sum_{x\in\chi}D_x\cdot(A_0^x-GB^x)\\
&= \left(\sum_{x\in\chi}D_x\right)\cdot(A_0-GB)-\sum_{x\in\chi}D_x\cdot(A_0^x-GB^x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit

$$FDB \geq D(A_0-GB)-\sum_{x\in\chi}D_x A_{M_x}^x.$$

Die Variable $A_{M_x}$ bezeichnet dabei jenen Bruchteil von $A_0$, der auch nach dem Zeitpunkt $t=M_x$ im Model verbleibt. Der Term $\sum_{x\in\chi}A_{M_x}$ weist hierbei also den Cross-Financing Anteil aus. Sofern für ein $x\in\chi$ bis inklusive zum Zeitpunkt $M_x$ alle Werte durch Cash-Flows berücksichtigt wurden, gilt $A_{M_x}=0$. Der exakte Wert von $\sum_{x\in\chi}A_{M_x}$ ist in der Praxis a priori zwar unbekannt, jedoch kann in der Regel leicht eine obere Schranke hierfür gefunden werden. Die Herleitung dieser Konstante würde jedoch den Rahmen der Seminararbeit sprengen, weshalb an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden soll.

Wenn nun also vorausgesetzt wird, dass $F>0$ existiert, sodass $\sum_{x\in\chi}A_{M_x}\leq F$, dann folgt schlussendlich die gesuchte, allgemein gültige untere Schranke für die ermessensabhängigen Leistungen

$$FDB \geq D(A_0-GB)-F. \tag{3.13}$$

## 3.3 Beispiel

Die im letzten Abschnitt bereits theoretisch bewiesene Ungleichung soll im Folgenden nun anhand eines konkreten Beispiels aus der Praxis veranschaulicht werden. Hierfür wurden Daten der Allianz Lebensversicherungs AG aus Deutschland herangezogen. Alle Daten sind öffentlich einsehbar im Geschäftsbericht des Jahres 2017 sowie im Bericht über die Solvabilitäts- und Finanzlage 2017. Hervorzuheben ist an dieser Stelle, dass die Gesetzeslage in dieser Hinsicht in Deutschland sehr ähnlich zu der in Österreich gültigen ist. Alle bisher genannten Annahmen über lokale Bestimmungen sind im betrachteten Beispiel erfüllt.

Aus den entsprechenden Berichten des Jahres 2017 [3] und [4] geht hervor, dass der Buchwert der Verbindlichkeiten zu Beginn des betrachteten Zeitraums $BV_0$ rund 192,3 Milliarden Euro betrug. Die unrealisierten Gewinne beziehungsweise sogenannten stillen Reserven $UG_0$ betrugen 43,2 Milliarden Euro. Im Überschussfonds steckten rund 10,4 Milliarden Euro und der beste Schätzwert belief sich auf rund 202,7 Milliarden Euro, wobei dieser als Summe der beiden Komponenten $GB = 154,1$ Mrd. € und $FDB = 48,6$ Mrd. € anzugeben war.

Um den Faktor $\eta$ zu berechnen, nehmen wir eine Maturität von $M = 15$ an. Diese Annahme ist durchaus realistisch, da laut EIOPA Insurance Stress Report des Jahres 2016 die Verteilung der Verbindlichkeitsdauer in Deutschland zwischen 14 und 22 Jahren lag. Ähnliche Resultate werden beispielsweise auch für $M = 10$ oder $M = 20$ erzielt. Weiters sei $gph = 0,80$. Diese Wahl begründet sich dadurch, dass die deutsche Mindestzuführungsverordnung $nph = 0,90$ vorsieht. Wenn man von nun also von einer Nettobeteiligungsrate von 90% ausgeht, erhält man für die zugehörige Bruttobeteiligungsrate daher in etwa 80%.

Außerdem ist, wie bereits in Kapitel 2.2 erwähnt, davon auszugehen, dass der Überschussfonds durch die technischen Reserven beschränkt sind, also

$$SF_t \leq \theta TR_t, \qquad \theta > 0. \tag{3.14}$$

Hiermit wird sichergestellt, dass noch nicht ausgeschüttete Gewinne beziehungsweise stille Reserven nicht auf eine unbeschränkte Dauer vor Versicherungsnehmern versteckt werden können. Der Überschussfonds soll schließlich dazu dienen, die Profitbeteiligung der Versicherungsnehmer über längere Zeit stabil zu halten. Aus diesem Grund können wir außerdem annehmen, dass die Varianz von $ph_t^*$ verhältnismäßig klein ist. Konkret sei

$$SD\left[\sum ph_t^*\right] \cong 5\% E\left[\sum ph_t^*\right].$$

Aus statistischen Daten der Jahre 2014-2017 geht weiters hervor, dass die Abschätzung

$$\frac{SD\left[B_{15}^{-1}\right]}{P(0,15)} \cong 4\%$$

gilt. Laut EIOPA Website betrug der Diskontfaktor $P(0,15)$ mit Stichtag 31.12.2017 gerundet den Wert 0,849. Mit diesen Daten ist es nun möglich $\eta$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned}\eta &= P(0,15) \cdot \left(1 - \frac{SD\left[B_{15}^{-1}\right]}{P(0,15)} \cdot \frac{SD\left[\sum_{t\leq 15} ph_t^*\right]}{E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t\leq 15} ph_t^*\right]}\right) \cdot \frac{gph}{1-gph} \\ &= 0,839 \cdot (1 - 0,04 \cdot 0,05) \cdot \frac{0,8}{1-0,8} \\ &= 0,839 \cdot 0,998 \cdot 4 \\ &= 3,349288\end{aligned}$$

Mit Hilfe von $\eta$ können wir nun ein Zwischenergebnis berechnen. Die in den nachfolgenden Rechnungen absoluten Zahlen sind jeweils in Milliarden Euro angegeben.

$$\begin{aligned}LB_1 &:= \frac{\eta}{1+\eta} \cdot (A_0 - GB) \\ &= \frac{3,349288}{4,349288} \cdot (192,3 + 43,2 - 154,1) \\ &= 0,770077309 \cdot 81,4 \\ &= 62,68429295\end{aligned}$$

Das erste Zwischenresultat der unteren Schranke beträgt also 62 684 292 500 €. Bevor wir nun aber die untere Schranke tatsächlich berechnen, ist noch zu beachten, dass laut [5, Art. 91] der Überschussfonds hierbei nicht angerechnet wird, sofern diese Richtlinie bereits in nationales Recht umgesetzt wurde. In Deutschland fand diese Umsetzung 2016 statt, womit wir anstelle von $LB_1$ ab hier

$$LB_2 := LB_1 - SF_0 = 62,68429295 - 10,4 = 52,28429295$$

zum weiteren Vorgehen nutzen werden. Um nun die untere Schranke gemäß (3.13) berechnen zu können, müssen wir schlussendlich nur noch einen passenden Wert für $F$ finden.

Mit $F$ bezeichnen wir, wie bereits beschrieben, eine obere Schranke des Cross-Financing Terms $\sum_{x\in\chi} D_x A_{M_x}$. Dafür gilt es zuerst $A_0$ aufzuteilen und den einzelnen Versicherungsverträgen zuzuweisen. Am besten gelingt dies, indem wir alle Veträge $x(t)$, die die Maturität $M = t$ haben, zusammenfassen und dann mit $A_0^{x(t)}$ die Verbindlichkeiten, die zu der Menge der Verträge $x(t)$ gehören, definieren. Das Bestimmen des Abganges aus dem betrachteten Portfolio birgt noch einige Schwierigkeiten, da diesbezüglich wenig öffentlich zugängliche Daten existieren. Aus dem Geschäftsbericht der Allianz AG Lebensversicherung geht jedoch hervor, dass die Anzahl der bestehenden Polizzen, ohne Bezugnahme auf neu abgeschlossene, im Jahr 2017 von anfangs 10,5 Millionen auf rund 10 Millionen gesunken ist. Dies entspricht einer Reduktion von in etwa 5 %. Unter der Annahme, dass der Abgang aus dem Portfolio sich im Verlauf der Zeit mehr oder weniger gleichmäßig verhält, erhalten wir damit einen ungefähren Reduktionsfaktor von $(1-0,05)^t$ innerhalb von t Jahren. Somit können wir annehmen, dass der Abgang geometrisch ist und der Wert der verbleibenden Reserven sich grob gesagt alle 10 Jahre halbiert. Selbstverständlich müssen sich die tatsächlichen Verbindlichkeiten nicht exakt in dem selben Ausmaß verändern wie die Anzahl der Polizzen, jedoch geben diese ein ungefähres Bild der Größenordnung, in der sich der Bestand verändert. Als Projektionshorizont wählen wir in diesem Beispiel $T = 60$ Jahre. Es gilt

$$A_0^{x(t)} := \left(2^{-\frac{t-1}{10}} - 2^{-\frac{t}{10}}\right) A_0 \tag{3.15}$$

für $1 \leq t \leq T-1$ und

$$A_0^{x(T)} := 2^{-\frac{T-1}{10}} A_0.$$

Nachdem wir $A_0^{x(t)}$ so gewählt haben, dass diese aufsummiert über den gesamten betrachteten Zeitraum $A_0$ ergeben, folgt

$$\begin{aligned}
A_0 - \sum_{t=1}^{s} A_0^{x(t)} &= \sum_{t=1}^{60} A_0^{x(t)} - \sum_{t=1}^{s} A_0^{x(t)} \\
&= \sum_{t=s+1}^{60} A_0^{x(t)} \\
&= \sum_{t=s+1}^{59} \left(2^{-\frac{t-1}{10}} - 2^{-\frac{t}{10}}\right) A_0 + 2^{-\frac{59}{10}} A_0 \\
&= A_0 \cdot \left( \sum_{t=s+1}^{59} \left(2^{-\frac{t-1}{10}} - 2^{-\frac{t}{10}}\right) + 2^{-\frac{59}{10}} \right)
\end{aligned}$$

Nun können wir die verbleibende Teleskopsumme auflösen und erhalten

$$\begin{aligned}
A_0 - \sum_{t=1}^{s} A_0^{x(t)} &= A_0 \cdot 2^{-\frac{s}{10}} - 2^{-\frac{59}{10}} + 2^{-\frac{59}{10}} \\
&= A_0 \cdot 2^{-\frac{s}{10}}
\end{aligned}$$

für alle $s < T$, womit gezeigt ist, dass die Wahl in (3.15) zum gewünschten Ergebnis führt.

Um $F$ endgültig zu bestimmen, betrachten wir schließlich den Term $A_t^{x(t)}$, welcher offensichtlicherweise ein Bruchteil des Terms $A_0^{x(t)}$ sein muss. Zu beachten ist jedoch, dass dieser weder für alle Verträge gleich sein muss, noch über die Zeit hinweg konstant sein muss. Nachdem wir in (3.14) angenommen haben, dass der Überschussfonds nach oben beschränkt sind, muss $A_t^{x(t)}$ nun also mit fortschreitender Zeit sinken. Für unser Beispiel nehmen wir also an, dass der Cross-Financing Faktor mit dem der entsprechenden Bruchteil von $A_0^{x(t)}$ bestimmt wird, eine monoton fallende Funktion der Zeit ist, also

$$A_t^{x(t)} = C(t) \cdot A_0^{x(t)}$$

mit

$$C(t) = C_0 \frac{T-t}{T}.$$

Somit fehlt nur noch eine geeignete Wahl für $C_0$. Als Ansatz bietet sich dafür an, das Verhältnis von $SF_0$ zu $A_0$ anzusehen.

$$\frac{SF_0}{A_0} = \frac{10,4}{192,3 + 43,2} = 0,0441$$

Natürlich muss aber nicht der gesamte Cross-Financing Anteil in Form des Überschussfonds gehandhabt werden. Eine beispielhafte Wahl für $C_0$ könnte also 0,03 sein. Zu guter Letzt können wir nun alle Resultate einsetzen und so $F$ bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} F &= \sum_{x \in \chi} D_x A_t^{x(t)} \\ &= \sum_{t=1}^{60} \frac{\eta_{x(t)}}{1+\eta_{x(t)}} \cdot C_0 \cdot \frac{T}{T-t} \cdot A_0^{x(t)} \\ &= 0,03 \cdot \sum_{t=1}^{60} \frac{\eta_{x(t)}}{1+\eta_{x(t)}} \cdot \frac{60}{60-t} \cdot A_0^{x(t)}, \end{aligned}$$

wobei

$$\eta_{x(t)} = P(0,t) \left( 1 - \frac{SD\left[B_t^{-1}\right]}{P(0,t)} \cdot 0,05 \right) \cdot \frac{0,8}{1-0,8}.$$

Die Werte für $A_0^{x(t)}$ können nun für jedes t mit Hilfe der Formel aus (3.15) bestimmt werden und die noch benötigten Werte für die Diskontraten $P(0,t)$ sowie auch für $SD\left[B_t^{-1}\right]$ können für das Jahr 2017 auf der Homepage der EIOPA gefunden und dann eingesetzt werden. Insgesamt erhalten wir für $F$ ungefähr 4,1.

Die untere Schranke für die ermessensabhängigen Leistungen ergibt sich schließlich aus der Differenz zwischen dem bereits berechneten Zwischenergebnis und dem nun ebenfalls bekannten Wert von $F$.

$$LB = LB_2 - F = 52,28429295 - 4,1 = 48,18429295$$

Die untere Schranke, mit der wir ermessensabhängige Leistungen in der Höhe von rund 48,6 Milliarden € abschätzen sollten, beträgt also 48,18429295 Milliarden € und erfüllt daher das Hauptkriterium für untere Schranken, kleiner als der ursprüngliche Wert zu sein und ist außerdem verhältnismäßig sehr nahe am abzuschätzenden Wert. Man sieht also, dass die zuerst nur theoretisch hergeleitete Formel auch anhand eines praktischen Beispiels funktioniert.

# 4 Interpretation

Die Berechnung des besten Schätzwertes erweist sich nach wie vor als eine von mehreren Schwierigkeiten in der Versicherungsmathematik. Das ist insbesondere deshalb so, weil es hierzu keine geschlossene Formel beziehungsweise einheitliche Berechnungsmethode gibt. Als Grundlage für die Berechnung können aufgrund der Komplexität des Problems zum jetzigen Zeitpunkt meist nur stochastische Modellierungen wie zum Beispiel Monte Carlo Simulationen herangezogen werden.

Der zweite Teil dieses Kapitels liefert zwar eine geschlossene Formel, allerdings kann auch diese in der Praxis nicht zur Berechnung des besten Schätzwertes genutzt werden. Das liegt vor allem daran, dass die darin auftauchenden Unbekannten, insbesondere $TAX$ und $VIF$, a priori ebenfalls unbekannt sind und mindestens genauso aufwendig zu berechnen sind wie der beste Schätzwert selbst. Das bedeutet natürlich keinesfalls, dass die Gleichung keinen praktischen Nutzen aufweist. Es bietet sich eine ausgezeichnete, neue Möglichkeit um die bereits mittels eines Asset-Liability-Modells bestimmten beste Schätzwerte zu überprüfen beziehungsweise die Ergebnisse zu validieren und zu verifizieren. In gewisser Weise kann die Gleichung somit als Kriterium angesehen werden, um verhältnismäßig einfach zu kontrollieren, ob alle aufgetretenen Cash-Flows auch tatsächlich miteinberechnet wurden.

Insbesondere die Bestimmung der ermessensabhängigen Leistungen stellt für Versicherungsunternehmen zweifelsohne eine große Herausforderung dar. Eine Möglichkeit, diese direkt und eindeutig zu berechnen, gibt es bis heute nicht. Nichtsdestotrotz wurde in der zugrunde liegenden Arbeit erstmals eine untere Schranke hergeleitet. Die Besonderheit der bewiesenen Schranke ist, dass diese unabhängig vom betrachteten wirtschaftlichen Modell und sämtlichen Managementregeln ist. Zur tatsächlichen Berechnung einer unteren Schranke ist die in dieser Arbeit beschriebene Vorgehensweise, wie auch anhand des beschriebenen Beispiels demonstriert, sehr effizient. Zur konkreten Bestimmung der ermessensabhängigen Leistungen kann eine untere Schranke aber klarerweise nur bedingt hilfreich sein, da die tatsächlichen Leistungen auch deutlich höher ausfallen könnten. Eine Möglichkeit die Bestimmung von $FDB$ künftig zu erleichtern, wäre vermutlich die zusätzliche Herleitung einer obereren Schranke, sodass insgesamt ein potenzielles Intervall für $FDB$ berechnet werden kann. Die nun bewiesene untere Schranke kann allerdings auch heute schon für andere Zwecke herangezogen werden. Mögliche Anwendungen sind beispielsweise das Kontrollieren eines vorab mittels numerischem Asset-Liability-Modell berechneten $FDBs$ oder auch die Verwendung als Optimierungsziel beziehungsweise als Zielwert für ermessensabhängige Leistungen.

# Literaturverzeichnis


[1] Hans U. Gerber. *Life insurance mathematics.* Springer Science & Business Media (Berlin Heidelberg), 1997.

[2] Florian Gach, Simon Hochgerner. Analytical validation formulas for best estimate calculation in traditional life insurance. *Eur. Actuar. J.*, 2019.

[3] Allianz Lebensversicherungs AG, Geschäftsbericht 2017: *https://www.allianzdeutschland.de/wp-content/uploads/2018/09/allianz-versicherungs-ag-geschaeftsbericht-2017.pdf*

[4] Allianz Lebensversicherungs AG, Bericht über Solvabilität und Finanzlage 2017: *https://www.allianzdeutschland.de/wp-content/uploads/2018/09/avlag-berichte-ueber-solvabilitaet-und-finanzlage-2017.pdf*

[5] Richtlinie 2009/138/EG des europäischen Parlaments und des Rates vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvency II)