TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

SEMINARARBEIT

The 1/e-strategy is not the optimal strategy for the best-choice problem under no information.

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Michael Leidl

Matrikelnummer: 11731665

Wien, am 03.02.2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Der im April 2020 vom deutschen Mathematiker Franz Thomas Bruss veröffentlichte Artikel "The 1/e-strategy is the unique optimal strategy for the best-choice problem under no information", beantwortet eine 36 Jahre offene Frage, welche vom selbigen Autor gestellt wurde bezüglich des Optimums der 1/e-Strategie für das Problem der besten Auswahl unter der Bedingung, dass keine Information über die Anzahl N der Kandidaten bekannt ist. Bruss glaubte gezeigt zu haben, dass die 1/e-Strategie tatsächlich optimal und sogar die einzige optimale Strategie ist. Im Dezember 2020 wies er in einem neuen Artikel aber auf einen Fehler im Beweis hin und mehr noch: Er hat gezeigt, dass die 1/e-Strategie nicht optimal ist. In seinem gescheiterten Beweisversuch fließen eine starke Verallgemeinerung der Odds-Strategie für Zählprozesse, Renyis Theorie der relativen Ränge und die Theorie über proportionale Inkremente ein. Im Rahmen der Seminararbeit wird der Fokus darauf gelegt, dass auf die einzelnen Begrifflichkeiten eingegangen wird um am Ende ein Verständnis für den Ursprung und die Herangehensweise an die Fragestellung von Bruss zu bekommen. Die Seminararbeit wird, nach ein paar biographischen Zeilen über Franz Bruss, der/die Leser/-in beim Sekretärinnenproblem abholen und dann anschließend das zeitstetige Modell von Bruss(1984) vorstellen und die damit verbundene Hoffnung auf eine von N unabhängige optimale Strategie. Danach wird die Theorie um den inkorrekten Beweis herum nähergebracht und schließlich wird erläutert, wo der Beweis seinen kleinen, aber signifikanten Fehler hat.

Kapitel 2

Autor

Franz Thomas Bruss, geboren am 27. September 1949 in Kleinblittersdorf, ist ein deutscher Mathematiker und war ordentlicher Professor für Mathematik an der Université libre de Bruxelles, zu Deutsch freie Universität Brüssel, wo er auch weiterhin in der Forschung tätig ist. Er studierte Mathematik und Wirtschaftswissenschaften an den Universitäten Saarbrücken, Cambridge und Sheffield und lehrte nach seiner Promotion an den Universitäten Namur,Glasgow (Strathclyde), Santa Barbara (UC), Tucson (UofA), Los Angeles (UCLA). Ab 1990 lehrte er in Brüssel an der niederländischen und schließlich ab 1993 an der französischen freien Universität. Dort war er Direktor des Lehrstuhls Wahrscheinlichkeitstheorie, was auch sein Spezialgebiet ist. Internationale Bekanntheit erlangte er durch seinen Beweis des 1/e-Gesetzes der besten Wahl, welchen er 1984 publizierte. Er beschäftigte sich ab dann weiterhin mit der Theorie des optimalen Stoppens und im Jahr 2000 veröffentlichte er seine Entdeckung einer optimalen Strategie, der Odds-Strategie oder Odds-Algorithmus, die zu seinem Ehren auch Bruss-Strategie genannt wird. Zusammen mit dem französischen Mathematiker Marc Yor löste er auch das Problem der letzten Ankunft (2012) sowie viele weitere Versionen des Sekretärinnenproblems. Weiters erstreckten sich seine Arbeiten über Pascal Prozesse, Verzweigungsprozesse und Grenzwertsätze (z.B. Borrel-Cantelli Lemma). Bruss ist daher zurecht Mitglied sämtlicher Kreise, wie z.B. Mitglied des Tönissteiner Kreises, des International Statistical Institute, der Alexander-von-Humboldt-Stiftung und Fellow des Institute of Mathematical Statistics. Er erlangte auch viele Auszeichnungen und Preise, wie z.B. den Jacques-Deruyts-Preis oder den ersten Preis der European Mathematical Society(EMS)[deacademic.com, 2020].

Kapitel 3

Sekretärinnenproblem

3.1 fest gewähltes N

Im klassischen Sekretärinnenproblem bzw. Heiratsproblem oder Problem der besten Wahl, im Englischen classical secretary problem(CSP), marriage problem oder best choice problem genannt, liegt folgender Sachverhalt vor: Es bewerben sich $N \in \mathbb{N}$ Kanditaten für eine Stelle, zum Beispiel fünf Sekretärinnen für eine freie Arbeitsstelle. Die Kandidaten tragen eine Rangordnung(Bester, Zweitbester,...Schlechtester), die uns zu Beginn unbekannt ist. Nun werden die Kandidaten nacheinander beobachtet, was beim Sekretärinnenproblem bedeutet, dass die BewerberInnen nacheinander das Vorstellungsgespräch für die eine freie Arbeitsstelle haben. Dabei ist jede Permutation der Reihenfolge der Kandidaten gleich wahrscheinlich mit $1/n!$. Mit jeder Beobachtung erlangen wir Kenntnis über den relativen Rang des Kandidaten, das heißt nach der j-ten Beobachtung wissen wir über die ersten j Kandidaten, wer von ihnen der Beste ist, der Zweitbeste,..., bis zum bis dato Schlechtesten. Jeder Kandidat muss nach der Beobachtung entweder angenommen oder abgelehnt werden, wobei diese Entscheidung unwiderruflich ist. Es gilt, eine Strategie zu finden bzw ein Vorgangsweise, die uns sagt, wann angenommen werden soll, sodass die Wahrscheinlichkeit, den besten Kandidaten auszuwählen, maximiert ist. Am Beispiel für $N = 3$ überzeugt man sich schnell, dass man mit der Strategie, den ersten Kandidaten immer abzulehnen und dann den Nächstbesten auszuwählen, sofern es diesen gibt, eine 50-prozentige Erfolgswahrscheinlichkeit hat.

3.1.1 Renyis Theorie über relative Ränge

Im Zusammenhang mit diesem Problem besagt Alfred Renyis Theorie über die relativen Ränge nun folgendes:

Definition 1 (R_j)**.** *Bezeichne mit R_j, $j = 1...N$ die Zufallsvariable, die den relativen Rang der j-ten Beobachtung beschreibt(CSP). Wir sagen, die j-te Beobachtung ist ein Rekord, wenn R_j den Wert 1 annimmt.*

Satz 1. *[Rényi, 1962] Seien $R_1, R_2, ..., R_N$ die relativen Ränge des Sekretärinnenproblems(CSP). Dann gilt:*

- *Die Zufallsvariablen $R_1, R_2, ..., R_N$ sind unabhängig*
- $\mathbb{P}(R_j = i) = 1/j$ *für alle $i = 1..j$, $j = 1..N$*

  Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit, bei der j-ten Beobachtung einen Rekord zu verzeichnen, 1/j.

Es sei angemerkt, dass diese Rekordwahrscheinlichkeit unabhängig von der Vergangenheit ist. Bruss hatte die Hoffnung, dass dies auch in seinem zeitstetigen Modell für den Rekordprozess gilt, was sich aber im Nachhinein als falsch herausstellte.

Die Antwort auf die Frage, welche Strategie nun für das klassische Sekretärinnenproblem für gegebenes, fixes N die Erfolgswahrscheinlichkeit maximiert, liefert uns der Bruss-Algorithmus bzw die Odds-Strategie:

3.1.2 Odds-Strategie

Der Name der Odds-Strategie kommt von den im folgenden Satz auftretenden Werten r_j. Diese werden im Englischen Odds genannt. Die Bernoulli-Zufallsvariablen stelle man sich als N-stellige, binäre Zahl vor, die man mit einem Blatt Papier verdeckt hält und dieses langsam beiseite schiebt und so die Binärziffern nach der Reihe "beobachtet", "annimmt"oder "ablehnt".

Satz 2. *[Bruss, 2000] Es seien $X_1, X_2, ..., X_N$ unabhängige Bernoulli-ZV mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_j = 1) = p_j = 1 - q_j$. Weiters seien $r_j := \frac{p_j}{q_j}$ und $R(j) := \sum_{k=j}^{N} r_k, j = 1..N$.*

Die Bernoulli-ZV werden der Reihe nach beobachtet und die Wahrscheinlichkeit, beim letzten Erfolg zu stoppen, wird maximiert mit folgender Strategie:

Stoppe beim ersten Index k, für den gilt, dass $k \geq s$ *und* $X_k = 1$*, wobei*

$$s = \begin{cases} \sup\{j \in \{1..N\} : \ R(j) \geq 1\} & R(1) \geq 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Die Erfolgswahrscheinlichkeit V dieser Strategie beträgt

$$V = R(s) \prod_{j=s}^{N} q_j.$$

[Bruss, 2003] Falls $R(1) \geq 1$*, dann gilt* $V > 1/e$*.*

Betrachtet man ein mögliches Erfolgsszenario beim CSP, also der j-te angenommene Kandidat ist tatsächlich der beste Kandidat, so ist dies dann und nur dann der Fall, wenn der relative Rang R_j den Wert 1 hat und $\forall k : j < k \leq N.\ R_k \neq 1$. Man führt das CSP auf ein Problem des letzten Stoppens zurück.

Um die Odds-Strategie für das Sekretärinnenproblem anwenden zu können, definiert man sich die Bernoulli-Zufallsvariablen mithilfe der relativen Ränge wie folgt:

$$X_j(w) := \begin{cases} 1 & R_j(w) = 1 \\ 0 & R_j(w) \neq 1 \end{cases}$$

Aus der Unabhängigkeit der relativen Ränge folgt nach trivialer Rechnung auch die Unabhängigkeit der ZV $X_1, X_2, .., X_N$. Für diese kann nun die Odds-Strategie angewendet werden, die Erfolgswahrscheinlichkeiten der Bernoulli-ZV liefert uns Rényi Theorie mit $p_j = 1/j, 1 \leq j \leq N$. Für $N = 1$ hat man beim CSP trivialerweise immer Erfolg und für $N \geq 2$ gilt, dass auch $V > 1/e$, da

$$r_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow R(1) \geq r_2 = 1.$$

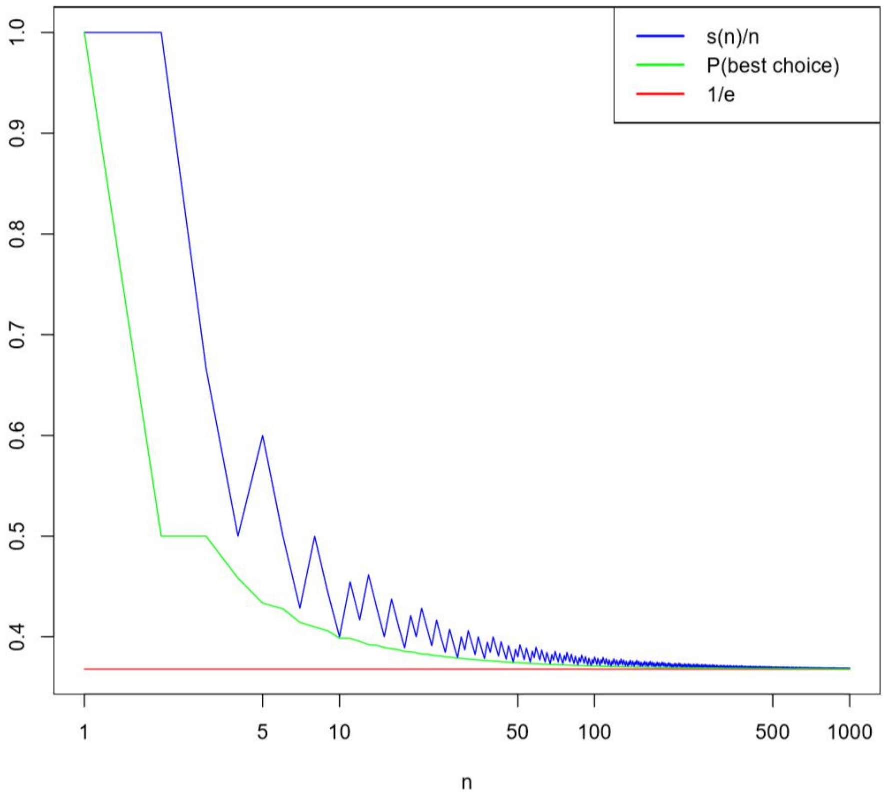

Abbildung 3.1: Erfolgswahrscheinlichkeit und Wartezeit beim CSP

Für die obige Abbildung wurde die Odds-Strategie zur Lösung des Sekretärinnenproblem für verschiedene Anzahlen an Kandidaten programmtechnisch ausgewertet. Wie bereits festgestellt, ist die Wahrscheinlichkeit, den besten Kandidaten auszuwählen(best choice), strikt größer als $1/e$. Aber auch das Verhältnis der Kandidaten, die man garantiert ablehnen soll $s(n) - 1$ zu der Gesamtanzahl der Kandidaten n, konvergiert für $n \to \infty$ gegen $1/e$.
In anderen Worten formuliert: Für festes, gegebenes N sollen die ersten $s(n) - 1 \approx n/e \approx 37\% \cdot n$ der Kandidaten abgelehnt werden und ab dann der nächste Rekord angenommen werden, was einen Erfolg $> 1/e$ garantiert. Man spricht daher zurecht vom $1/e$-Gesetz bzw. $1/e$-Law.

3.2 stochastisches N

Für die praktische Anwendung ist die Forderung des Bekanntseins der Anzahl an Kandidaten ein Hindernis, deshalb wurden in den 70er bis Anfang der 80er Jahre andere Zugänge zum CSP gesucht. [Presman and Sonin, 1996] haben den Zugang gewählt, dass man N als Zufallsvariable auffasst, dessen Verteilungsfunktion $\mathbb{P}(N \leq n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekannt sei. Sie konnten spezielle Lösungen für gewisse Klassen an Verteilungen finden, u.A. die Poisson-, Geometrische und Gleichverteilung, im Allgemeinen können aber Probleme mit sogenannten Stopping Islands auftreten. [Abdel-Hamid et al., 1982] zeigten, dass das N-unbekannte Problem mehrere Lösungen haben kann und noch schlimmer: Für ein beliebiges $\epsilon > 0$ kann eine ungünstige Verteilung gewählt werden, sodass die Erfolgswahrscheinlichkeit der optimalen Strategie kleiner als ϵ ist. Oder anders formuliert, Optimalität ist in diesem Kontext wertlos, was natürlich stark im Kontrast steht mit der $1/e$ Strategie. [Hill and Krengel, 1991] wählten den Ansatz, dass $N \leq n_0$ beschränkt ist und gerieten so zu dem Begriff Minimax-Optimalität, was bedeutet, dass man eine Strategie sucht, für die die Erfolgswahrscheinlichkeit für die ungünstigst auftretende Verteilung maximiert wird. Sie konnten zeigen, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit in der Größenordnung $1/log(n)$ sein muss, was leider auch gegen Null geht für $n \to \infty$.

Kapitel 4

zeitstetiges Modell

Der zeitstetige Ansatz(unified approach) von [Bruss, 1984] war anders. Die Idee dahinter war, dass es leichter ist zu sagen, wann die Kandidaten ankommen unter der Bedingung, dass sie kommen, als Hypothesen über die Verteilung der Anzahl der Kandidaten zu machen. Also anstatt die Kenntnis der Verteilungsfunktion von N vorauszusetzen, wird im zeitstetigen Modell ein endliches Intervall $[0, T]$ mit einer stetigen Verteilungsfunktion betrachtet und die Zeitpunkte, wann die Kandidaten kommen, sind unabhängig und identisch F-verteilte Zufallsvariablen.

Zeitstetiges Modell: *Es seien N>0 $T_1, T_2, ..T_N$ Zeitpunkte unabhängig und identisch verteilt nach einer stetigen Verteilungsfunktion F auf dem Intervall* $[0, T]$*. Die einzelnen Zeitpunkte sind mit einer Rangordnung versehen, von Bester zu Schlechtester und jede Reihenfolge dieser Ränge ist gleich wahrscheinlich. Man beobachtet nun vom Zeitpunkt Null an die relativen Ränge. Das Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt mit der besten Rangordnung zu stoppen, zu maximieren.*

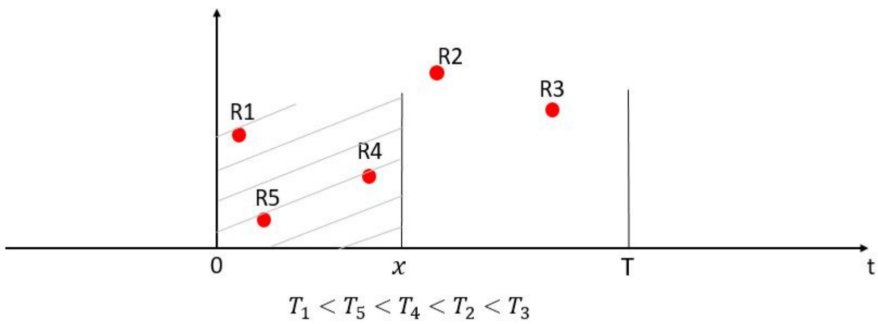

Abbildung 4.1: Veranschaulichung des zeitstetigen Modells für N=5

Wenn zu keinem Zeitpunkt gestoppt wird, gilt dies als Misserfolg. Man bemerke, dass keine Annahmen über N gemacht worden sind. Durch die Stetigkeit der Verteilungsfunktion gilt für die Punktwahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(T_j = x) = 0, x \in [0,T]$. Daraus ergibt sich, dass die Zeitpunkte fast sicher verschieden sind und aus der Maßtheorie und der Stetigkeit von F folgt, dass die Zufallsvariablen $F(T_1), F(T_2), .., F(T_N)$ fast sicher unabhängige, auf (0,1) gleichverteilte Zufallsvariablen sind. Da F monoton steigend ist, bleibt die Reihenfolge, in der die F-transformierten U(0,1) ZV beobachtet werden, ebenfalls f.s. erhalten und es reicht daher aus, sich auf den Fall für i.i.d. U(0,1)-ZV zu beschränken und diesen zu studieren.

4.0.1 fest gewähltes N

Es sei $N = n, n \in \mathbb{N}/\{0\}$ fest gewählt. Nun definieren wir eine Klasse von Strategien.

Definition 2 (x-Strategie)**.** *Sei $x \in [0,T]$. Dann heißt eine Strategie x-Strategie, wenn im Zeitraum $[0,x]$ nur beobachtet wird und danach der erste Rekord, sofern dieser eintritt, angenommen wird.*

[Bruss, 1984] Für die Berechnung der Erfolgswahrscheinlichkeit der x-Strategie unter i.i.d. U(0,1)-ZV betrachte die ersten k+1 Ränge, $1 \leq k \leq n-1$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der k+1 Ranghöchste im Intervall $[0,x]$ liegt, beträgt aufgrund der Gleichverteilung x und die Wahrscheinlichkeit, dass die restlichen k-höchsten im Intervall $(x,1]$ liegen, beträgt $(1-x)^k$. Die x-Strategie hat nur Erfolg, wenn unter den k höchsten Rängen im Intervall $(x,1]$ der Beste zeitlich gesehen an vorderster Stelle steht, und das passiert mit Wahrscheinlichkeit $1/k$. Aufsummieren über alle Fälle ergibt:

$$p_n(x) := \mathbb{P}(x - Strategie\ hat\ Erfolg \mid N = n) = x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-x)^k}{k} + \frac{(1-x)^n}{n}$$

Mithilfe der Taylorreihe des Logarithmus und ein wenig fundamentaler Analysis ergibt sich, dass $p_n(x)$ ein eindeutiges Maximum an einer Stelle x_n hat, und dass

$$p_n(x) \downarrow p(x) := -x \cdot log(x) \qquad n \to \infty.$$

$p(x)$ hat ebenso ein eindeutiges Maximum an der Stelle $1/e$ und es gilt:

$$x_n \downarrow 1/e \qquad\qquad n \to \infty.$$

Wir bezeichnen mit $p_{n,optimal}$ die optimale Erfolgswahrscheinlichkeit, die man aus der Odds-Strategie erhält. Mit der Tatsache, dass $p(1/e) = 1/e$, ergibt sich folgende Ungleichungskette:

$$1/e < p_n(1/e) < p_n(x_n) \leq p_n, optimal \tag{4.1}$$

4.0.2 Die $1/e$-Strategie

Aus der Ungleichungskette erkennt man schön die asymptotische Optimalität der $1/e$-Strategie, da wir ja aus der Abbildung 3.1 wissen, dass auch $p_{n,optimal}$ gegen 1/e strebt.
Es ergibt sich nun tatsächlich ein 1/e-Gesetz für das zeitstetige Modell, unabhängig von der Verteilungsfunktion von N:

Satz 3. *[Bruss, 1984]*

- *Die 1/e-Strategie hat Erfolgswahrscheinlichkeit* $\geq 1/e$*, unabhängig davon, wie die Verteilungsfunktion von N aussieht.*
- *Sie hat als einzige x-Strategie diese Eigenschaft.*

Der erste Punkt ist schnell eingesehen, dazu betrachte

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1/e)\mathbb{P}(N=n) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p(1/e)\mathbb{P}(N=n) = 1/e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) = 1/e.$$

Die $1/e$-Strategie ist also in der Klasse der x-Strategien in diesem Sinne optimal und im Vergleich zu den anderen Ansätzen, wo man von der Kenntnis der Verteilungsfunktion von N ausgeht, erhält man mit dem zeitstetigen Modell eine untere Schranke für die Erfolgswahrscheinlichkeit. Jetzt stellen sich in natürlicher Weise viele weitere Fragen, nämlich, ob die $1/e$-Strategie bereits die optimale Strategie unter allen denkbaren Strategien ist. Und würde das dann bedeuten, dass die $1/e$-Strategie auch optimal ist, wenn wir nun keine Information über N haben? Bemerke, dass die $1/e$-Strategie unabhängig von der bis zum Zeitpunkt $1/e$ gesammelten Information ist. Denkbar wäre auch, dass der Zeitpunkt, ab dem der nächste Rekord angenommen werden soll, eine von der Vergangenheit abhängige Zufallsvariable ist. Schließlich ist ja bekannt, dass für fest gewähltes $N = n$ die x_n-Strategie besser ist und auch für praktische Anwendungen ist $N \leq n_u$ beschränkt(z.B. können nicht mehr Sekretärinnen als auf der Erde lebende Menschen zum Vorstellungsgespräch kommen) und es stellt sich heraus, dass dann schon die x_{n_u}-Strategie besser ist als die $1/e$-Strategie, wenn auch nur marginal. Die Hoffnung auf Optimalität unter der Forderung, keine Information über N zu haben, stirbt bekanntlich zuletzt. Je länger man sich Gedanken über die Fragestellung macht, ob die $1/e$-Strategie optimal ist wenn keine Information über N bekannt ist, desto mehr fragt man sich, was mit Optimalität im Kontext keiner Information überhaupt gemeint ist und ob die Fragestellung an sich überhaupt wohlgestellt ist. In Fachkreisen, einschließlich Bruss selbst, zweifelte man immer wieder an der Korrektheit der Fragestellung. Kann man "keine Information" vielleicht in dem Sinne interpretieren, dass alle denkbaren Werte aus einem unbekannten Intervall $\{1, 2, ..., n\}$, die N annehmen kann, gleich wahrscheinlich auftreten? Nein, denn das würde schon implizieren, dass N sehr wahrscheinlich große Werte hat und das ist bereits Information. Auch die Simulation des zeitstetigen Modells lässt keine Rückschlüsse auf eine Antwort zurück, ein Simulationsprogramm muss im Endeffekt auch mit Information über N gefüttert werden. Die Fragestellung wirkt deswegen irgendwie unangreifbar. Für einen aufklärenden Zugang über die Definition von Optimalität und "keiner Information" wird auf das aktuelle Paper [Bruss and Rogers, 2020] verwiesen.

Kapitel 5

Hauptsatz des Artikels

Bruss hat im April 2020 einen Artikel “*The $1/e$-strategy is the unique optimal strategy for the best choice problem under no information*“ auf dem Dokumentenserver arXiv hochgeladen, welches er, noch bevor es von einer wissenschaftlichen Zeitschrift veröffentlicht wurde, aufgrund eines Beweisfehlers widerrufen hat. Das Paper hätte die 36 Jahre offene Frage nach der Optimalität der $1/e$-Strategie beantwortet. Die revidierte Version [Bruss, 2020] hat er im November ebendort hochgeladen, wo er auf den Fehler in seinem Beweis hinweist. Einen Monat später hat Leonard Rogers das Preprint [Bruss and Rogers, 2020], auch auf arXiv, hochgeladen. In diesem wird nach 37 Jahren die offene Frage negativ beantwortet. Bruss und Rogers haben bewiesen, dass die $1/e$-Strategie nicht optimal ist, was aus mathematischer Sicht ein wenig frustrierend ist, immerhin wurde der Zugang über das zeitstetige Modell extra dafür gewählt, damit mit beliebigen N umgegangen werden kann. Der Hauptsatz des Artikels im April wäre sein Titel “*The $1/e$-strategy is the unique optimal strategy for the best choice problem under no information*“ gewesen, richtigerweise muss es aber heißen:

- **Die 1/e-Strategie ist nicht die optimale Strategie im zeitstetigen Modell unter der Bedingung, dass keine Information über N bekannt ist.**

Bemerkung: Klarerweise bedeutet das nicht, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit der $1/e$-Strategie nicht gut ist. Für i.i.d. $U(0,1)$-Zufallsvariablen ist sie weiterhin zum empfehlen, und für F-verteilte i.i.d. ZV ist die e_F^{-1}-Strategie gut, wobei mit

$$e_F^{-1} := \inf\left\{x \in (0,T) : F(x) = e^{-1}\right\}$$

die verallgemeinerte Inverse gemeint ist.

Kapitel 6

Beweisidee

Im Rahmen der Seminararbeit wird nun näher auf die Theorie rund um den Beweis und den Beweisfehler [Bruss, 2020] eingegangen. Die Beweisidee ist, mit einer verallgemeinerten Variante der Odds-Strategie, die den optimalen Stoppzeitpunkt für spezielle Zählprozesse liefert, die Optimalität der $1/e$-Strategie zu zeigen. Dafür werden noch einige Definitionen benötigt.

Definition 3. *Ein stochastischer Prozess* $\left(N_t\right)_{t\geq 0}$ *heißt Zählprozess* $:\Longleftrightarrow$ $\exists$*Folge positiver ZV* $\left(Y_t\right)_{t\in\mathbb{N}}$, $S_n := Y_1 + Y_2 + ... + Y_n, n \in \mathbb{N}$ *sodass gilt:*

$$N_t = \begin{cases} 0 & t < Y_1 \\ \max\{n \in \mathbb{N} :\ S_n \leq t\} & \textit{sonst} \end{cases}$$

Die Folge $\left(Y_t\right)_{t\in\mathbb{N}}$ ist die Folge der Zwischenankunftszeiten, die Zufallsvariablen S_n entsprechen daher den Ankunftszeiten in geordneter Reihenfolge, d.h. S_1 ist die erste Ankunftszeit, S_2 die zweite usw. Der Name Zählprozess kommt also aus der Tatsache, dass die Zufallsvariaben N_t des Prozesses $\left(N_t\right)_{t\geq 0}$ abzählen, wie viele Ankünfte im Intervall $[0, t]$ vorliegen. Das zeitstetige Modell induziert auf natürliche Weise einen Zählprozess $\left(N_t\right)_{t\in[0,1]}$ und einen Rekordprozess $\left(R_t\right)_{t\in[0,1]}$ auf $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} N_t &:= \#\text{ Ankünfte in } [0, t] \\ R_t &:= \#\text{ Rekorde in } [0, t] \qquad\qquad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Für den Fall $N = \infty$ haben wir in $\left(4.1\right)$ die asymptotische Optimalität der $1/e$-Strategie gegeben. Es reicht, sich auf den Fall $N < \infty$ zu beschränken. Es lassen sich dadurch die endlich vielen ZV $T_1, .., T_N$ aus dem zeitstetigen

Modell aufsteigend sortieren und diese sortierten ZV entsprechen dann genau den Ankunftszeiten S_n. Für den induzierten Zählprozess gilt $N_1 = N$.

6.0.1 Proportionale Inkremente

Bruss und Yor haben 2012 gezeigt, dass der der eingeschränkte Zählprozess $\big(N_t\big)_{t\in[\mathcal{T},1]}$ proportionale Inkremente hat, wobei $\mathcal{T}$ die erste Ankunftszeit, als Zufallsvariable aufgefasst, ist. Es gilt [Bruss and Yor, 2012]:

$$\forall t \in [0,1] : N_t > 0. \quad \mathbb{E}\big[N_{t+\Delta t} - N_t \big| \mathcal{F}_t\big] = \frac{\Delta t}{t} N_t \;\; f.s.$$

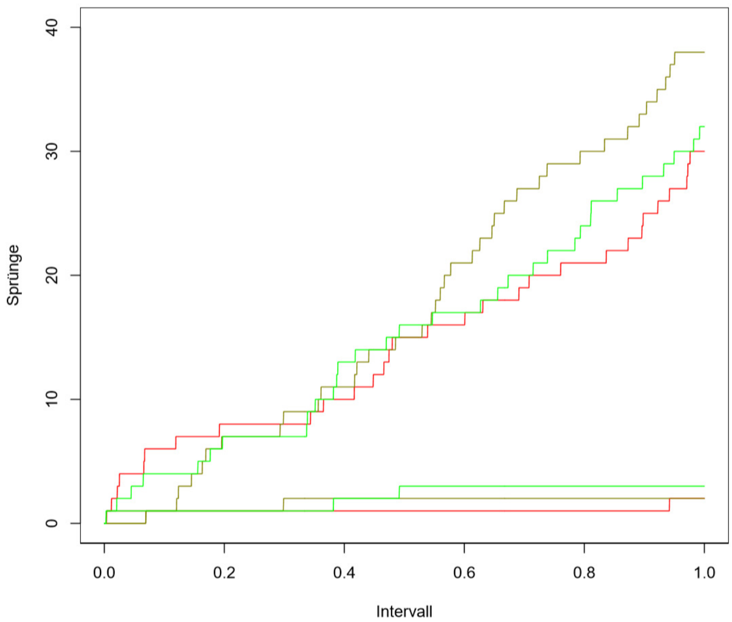

Abbildung 6.1: Simulierte Pfade des Zähl- und Rekordprozesses

Zur Veranschaulichung wurden Pfade der verschiedenen Prozesse simuliert. Wenn man sich ein wenig mit simulierten Pfaden spielt und die Rekordprozesspfade für verschiedene $N = N_1$ betrachtet, fällt einem auf, dass die Anzahl der Sprünge, die der Rekordprozess ab dem Zeitpunkt $1/e \approx 0.37$ macht, nur noch $0, 1$ oder 2 Sprünge beträgt, sehr selten mehr. Alles deutet darauf hin, dass die Anzahl der Sprünge unabhängig von der Vergangenheit ist. Und ein Sprung des Rekordprozesses im Intervall $[s,t], 0 \leq s < t \leq 1$ ist nichts anderes als die Differenz $R_t - R_s$. Intuitiv wäre der beste Zeitpunkt, ab dem man den nächsten Rekord annehmen sollte, jener Zeitpunkt, bei dem man im Schnitt noch einen Sprung des Rekordprozesses erwartet bedingt auf die bis dahin gesammelte Information. Es wird also ein Zeitpunkt τ gesucht, für den gilt:

$$\mathbb{E}(R_1 - R_\tau | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(R_1 - R_\tau) = 1$$

Wobei ja vermutet wird, dass die Sprünge des Rekordprozesses unabhängig von der Vergangenheit sind und daher die bedingte Erwartung wegfällt. Der Hauptfehler im Beweis von Bruss war, dass er genau diese Unabhängigkeit unkorrekt bewiesen hat und er so die verallgemeinerte Odds-Strategie anwenden konnte. Es sei angemerkt, dass der Zählprozess klarerweise keine von der Vergangenheit unabhängigen Inkremente hat.

Aus der Eigenschaft, dass der beschränkte Zählprozess proportionale Inkremente hat, lässt sich zeigen, dass der Prozess $\left(N_t/t\right)_{t\in[\tau,1]}$ ein Martingal ist[Bruss and Yor, 2012].

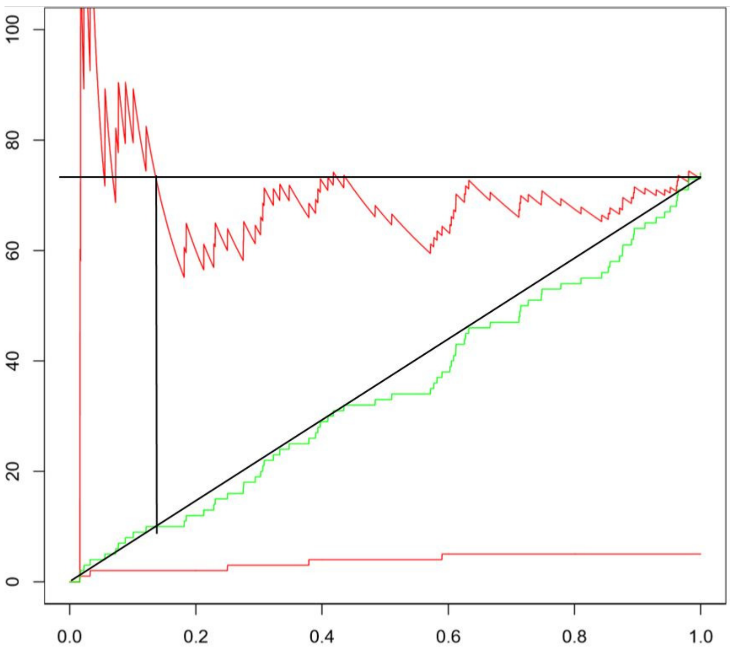

Abbildung 6.2: Simulierter Pfad von N_t, R_t und N_t/t

Alle drei Prozesse haben dieselbe erste Sprungstelle. Man kann die proportionale Inkrementeigenschaft auch als lineare Extrapolation interpretieren, also es wird erwartet, dass der Prozess linear weiterverläuft. Intuitiv ist dadurch wieder klar: Wenn dann diese erwartete lineare Funktion $k * t$ durch t dividiert, dann ist der erwartete Verlauf eine Konstante, was im Prinzip genau die Martingaleigenschaft ist.

6.0.2 Zufällige Maße

Unter einem zufälligen Maß versteht man eine Zufallsvariable, deren Werte Maße sind.

Definition 4 (Zufälliges Maß)**.** *Sei M die Menge aller lokal endlichen Maße(Borelmaße) μ auf dem Messraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ und sei $\mathcal{M}$ die kleinste σ-Algebra, für die alle Abbildungen $\mu \mapsto \mu(B)$ messbar sind, wobei $B \subset \mathbb{R}^d$ messbar und beschränkt ist.*

Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to M$ vom Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in den Messraum $(M, \mathcal{M})$ heißt zufälliges Maß.

Betrachtet man nun für eine beliebige Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ die folgende Abbildung

$$X(A) : \Omega \to [0, \infty], \omega \mapsto X_\omega(A),$$

dann ist $X(A)$ eine nichtnegative Zufallsvariable und wird das zufällige Maß der Menge A genannt. Im Kontext des zeitstetigen Modells des Sekretärinnenproblems induziert der Rekordprozess $R := \big(R_t\big)_{t\in[0,1]}$ ein zufälliges Zählmaß μ_R durch die Definition auf dem Mengensystem der linkshalboffenen Intervalle

$$\mu_{R(\omega)}((a, b]) := R_b(\omega) - R_a(\omega) \qquad \forall (a, b] \subset [0, 1].$$

Da $X(A)$ bzw. $\mu_R(A)$ nichtnegative Zufallsvariablen sind, kann der Erwartungswert in Abhängigkeit von A betrachtet werden, jedem $A \in \mathcal{B}^d$ kann ein Zahlenwert aus $[0, \infty]$ zugeordnet werden. Das lässt Anlass zur folgenden Definition:

Definition 5 (Intensitätsmaß)**.** *Sei X ein zufälliges Maß. Dann heißt die Abbildung*

$$\begin{aligned} EX :& \mathcal{B}^d \to \mathbb{R} \\ & A \mapsto \mathbb{E}\big[X(A)\big] \end{aligned}$$

das Intensitätsmaß von X.

Das Intensitätsmaß einer Menge ist der Erwartungswert des zufälligen Maßes der Menge. Das bedeutet, die Anzahl der Sprünge des Rekordprozesses, die wir im Schnitt in einem Intervall erwarten, ist nichts anderes als das Intensitätsmaß des Intervalles.

6.0.3 Verallgemeinerte Variante der Odds-Strategie

Der folgende Satz([Bruss, 2020]) stellt eine starke Verallgemeinerung der Odds-Strategie für spezielle Zählprozesse dar, nämlich jenen Prozessen mit von der natürlichen Filtration unabhängigen Inkrementen. Er liefert uns einen optimalen Stoppzeitpunkt für das Problem der letzten Ankunft(last arrival problem). Beim Problem der letzten Ankunft geht es darum, die Wahrscheinlichkeit des Stoppens beim letzten Erfolg einer Familie von Bernoulli-Zufallsvariablen respektive, als zeitstetiges Analogon, die Wahrscheinlichkeit des Stoppens an der letzten Sprungstelle eines Zählprozesses zu maximieren.

Satz 4. *Sei* $\left(C_t\right)_{0\leq t\leq 1}$ *ein Zählprozess und sei* $\mathcal{T} : \Omega \to [0,1]$ *eine Zufallsvariable, sodass der eingeschränkte Prozess* $\left(C_t\right)_{\mathcal{T}\leq t\leq 1}$ *unabhängige Inkremente hat bezüglich eines vorhersehbaren, nicht zufälligen Intensitätsmaßes mit der Dichte* $\left(\eta(t)\right)_{\mathcal{T}\leq t\leq 1}$. *Weiters sei* $\eta(t)$ *auf* $[0,1]$ *Riemann integrierbar und* $\mathbb{E}\left[C_1\right] < \infty$.

Dann ist die Strategie, an der ersten Sprungzeit $\tau \in [0,1]$, *die* $\tau \geq \mathcal{T}$ *und*

$$\mathbb{E}\left[C_1 - C_\tau\right] = \int_\tau^1 \eta(t)dt \leq 1$$

erfüllt, zu stoppen, die optimale Strategie, um an der letzten Sprungzeit des Zählprozesses $\left(C_t\right)_{0\leq t\leq 1}$ *zu stoppen.*

Genau wie beim CSP überlegt man sich schnell, dass beim zeitstetigen Modell ebenfalls die Äquivalenz zwischen dem Stoppen beim besten Kandidaten und dem Stoppen bei der letzten Sprungzeit des Rekordprozesses gegeben ist. Der Zählprozess $\left(C_t\right)_{0\leq t\leq 1}$ aus dem Satz ist also der Rekordprozess $\left(R_t\right)_{0\leq t\leq 1}$. Für die Zufallsvariable $\mathcal{T}$ wir die erste Sprungzeit gewählt. Es bleibt zu zeigen, dass der eingeschränkte Prozess unabhängige Inkremente hat, dazu wurde versucht, eine von der Filtration unabhängige Dichte zu berechnen. Dazu betrachte

$$E\mu_R((t, t+\Delta t] \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left[R_{t+\Delta t} - R_t \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{6.1}$$

Und genau hier tritt der Beweisfehler aufgrund eines Laufindexfehlers auf.

Falsch ist:

$$(6.1) = \frac{\Delta t}{t} N_t \cdot \frac{1}{N_t} = \frac{\Delta t}{t} \qquad \Rightarrow \mu(t) = \frac{1}{t}$$

richtig wäre:

$$(6.1) = \frac{\Delta t}{t} N_t \cdot \frac{1}{N_t + 1}$$

Für die Rechtfertigung der Gleichheit benötigt man natürlich tiefergreifende, maßtheoretische Argumente,aber im Endeffekt ist der Ausdruck $\frac{\Delta t}{t} N_t$ die proportionale Inkrementseigenschaft und der Ausdruck $\frac{1}{N_t+1}$ kommt aus Renyis Theorie über relative Ränge. Bemerke dass für den Fall $N = \infty$ der Ausdruck $\frac{N_t}{N_t+1}$ gegen 1 strebt und folglich die Dichte wieder unabhängig ist.

Die $1/e$-Strategie hätte sich dann mithilfe des Satzes durch eine Fallunterscheidung ergeben:

Fall 1: $\mathcal{T} \leq 1/e$. $\Rightarrow$

$$\int_\tau^1 \mu(t)dt = \int_\tau^1 \frac{1}{t} dt = \log 1 - log(\tau) = -log(\tau) = \overset{!}{\leq} 1$$
$$\Longleftrightarrow \log(\tau) = \overset{!}{\geq} -1$$

Der erste Zeitpunkt, der das erfüllt, ist $1/e$, ebenso alle Zeitpunkte nach $1/e$, da der Logarithmus streng monoton wachstend ist. Das heißt die erste Sprungzeit τ nach $1/e$ erfüllt die Ungleichung und ist auch größer als die erste Sprungzeit $\mathcal{T}$ des Rekordprozesses.
Fall 2: $\mathcal{T} > 1/e$. Wie schon im Fall 1 erfüllen alle Zeitpunkte $\tau > 1/e$ die Ungleichung und laut Satz soll die erste Sprungzeit $\tau \geq \mathcal{T}$ gewählt werden. Nun ist $\mathcal{T}$ selbst eine Sprungzeit und daher die erste Sprungzeit, die die Ungleichung erfüllt. Insbesondere ist sie die erste Sprungzeit nach $1/e$. Insgesamt erhält man also, dass man immer die erste Sprungzeit nach $1/e$ wählen soll, was genau die $1/e$-Strategie ist. Die Eindeutigkeit des Zeitpunktes $1/e$ ergibt sich aus der strengen Monotonie der Logarithmusfunktion. Es sei angemerkt, dass der (inkorrekte)Beweis tatsächlich keine Information über N vorausgesetzt hätte.

Kapitel 7

Problem der letzten Ankunft

Zum Abschluss noch ein positives Resultat bezüglich des optimalen Stoppens. Beim Problem der letzten Ankunft geht es darum, die Wahrscheinlichkeit des Stoppens beim letzten Erfolg einer Familie von Bernoulli-Zufallsvariablen bzw. die Wahrscheinlichkeit des Stoppens an der letzten Sprungstelle eines Zählprozesses zu maximieren.
Für den Zählprozess $\left(N_t\right)_{t\in[0,1]}$ des zeitstetigen Modells ist eine optimale Strategie im Bezug auf das Problem der letzten Ankunft gefunden und bewiesen worden[Bruss and Yor, 2012]. Die Strategie ist: Wähle den ersten Zeitpunkt τ, der (klarerweise) eine Sprungzeit des Zählprozesses ist und $N_t \leq \frac{\tau}{1-\tau}$ erfüllt. Anders formuliert: Stoppe beim ersten Sprung, der unter der Funktion $x/1-x$ liegt. Diese Strategie ist offensichtlich abhängig von der Vergangenheit.

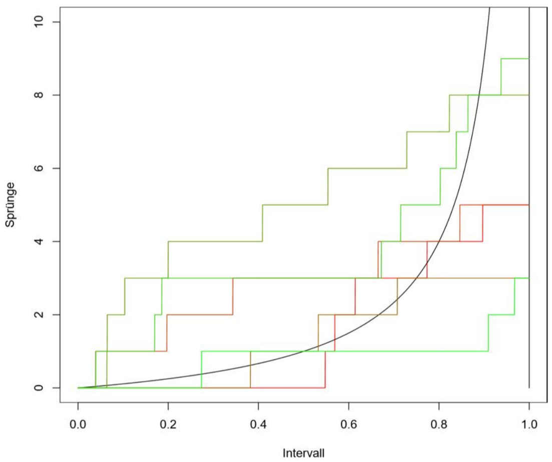

Abbildung 7.1: Simulierte Pfade des Zählprozesses N_t

Kapitel 8

Conclusio

Obleich der Beweis der offenen Frage nach Optimalität der $1/e$-Strategie nicht aufgegangen ist, und sogar noch schlimmer, sich das Gegenteil im Preprint [Bruss and Rogers, 2020] herausstellt, hat die Forschung rund um das Problem doch seine Früchte getragen, und damit sind nicht nur bewiesene Resultate wie das Problem der letzten Ankunft gemeint. Auch das Studieren eines misslungenen Beweises und all der Theorie, die dieser umfasst, trägt maßgeblich zum Verständnis bei. Weiters ist es interessant, dass selbst Experten auf diesem Gebiet der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie Fehler bei der scheinbar leichten Aufgabe, der Berechnung eines Intensitätsmaßes, machen, was für die Schwierigkeit dieser historisch gesehen jungen Teildisziplin der Mathematik spricht. Es ist auch erstaunlich, wie dreist eine wirklich gute und begründbare Intuition auf die falsche Fährte führen kann. In der Hinsicht ist die Mathematik gnadenlos.

Die Frage, welche Strategie denn nun eine(oder sogar die) optimale Strategie für das zeitstetige Problem der besten Auswahl ist, bleibt offen. Auch die Frage nach der bloßen Existenz einer optimalen Strategie bleibt offen. Falls sie existiert, wird in diese vermutlich die Information der beobachteten Vergangenheit einfließen, da es die $1/e$-Strategie, welche wahrscheinlich die beste unter den von der Vergangenheit unabhängigen Strategien ist, nicht ist.

> "Wer in der Zukunft lesen will, muss in der Vergangenheit blättern. ". - André Malraux

Literaturverzeichnis

[Abdel-Hamid et al., 1982] Abdel-Hamid, A., Bather, A., and Trustrum, G. (1982). The secretary problem with an unknown number of candidates. *J. Appl. Probability*, 19(3):619–630.

[Bruss, 1984] Bruss, F. T. (1984). a unified approach to a class of best choice problems with an unknown number of options. *Annals of Probability*, 12(3):882–889.

[Bruss, 2000] Bruss, F. T. (2000). Sum the odds to one and stop. *Annals of Probability*, 28(3):1384–1391.

[Bruss, 2003] Bruss, F. T. (2003). a note on bounds for the odds theorem of optimal stopping. *Annals of Probability*, 31(4):1859–1862.

[Bruss, 2020] Bruss, F. T. (2020). On the 1/e-strategy for the best-choice problem under no information. arXiv:2004.13749v2.

[Bruss and Rogers, 2020] Bruss, F. T. and Rogers, L. C. G. (2020). Answer to an open question concerning the 1/e-strategy for best choice under no information. arXiv:2012.13288.

[Bruss and Yor, 2012] Bruss, F. T. and Yor, M. (2012). Stochastic processes with proportional increments and the last-arrival problem. *Proc. and Their Applic.*, 122(9):3239–3261.

[deacademic.com, 2020] deacademic.com (2020). Franz thomas bruss. https://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/464602(abgerufen am: 02. Feber 2020 09:00).

[Hill and Krengel, 1991] Hill, T. P. and Krengel, U. (1991). minimax-optimal stop rules and distributions in secretary problems. *The Annals of Probability*, 19(1):342–353.

[Presman and Sonin, 1996] Presman, E. and Sonin, I. (1996). The best choice problem for a random number of objects. *Theory of Prob. and Applic.*, 17(4):657–668.

[Rényi, 1962] Rényi, A. (1962). Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations. *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, Série Mathématique*, 8(2):7–13.