



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

S E M I N A R A R B E I T

# Saddlepoint Approximation Methods in Financial Engineering

ausgeführt im Wintersemester 2020

unter der Anleitung von

**Dr. Stefan Gerhold**

durch

**Enes Keser**

**Matrikelnummer: 11730468**

Wien, am 26. Februar 2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>„Kumulantenerzeugende Funktionen und das Verfahren des steilsten Abstiegs“</b>	<b>5</b>
2.1	Charakteristische Funktionen und Kumulantenerzeugende Funktionen . . . . .	5
2.1.1	Verallgemeinerte Fourier Transformation und charakteristische Funktionen	6
2.1.2	Laplace Transformation und Kumulantenerzeugendenfunktion . . . . .	7
2.2	Methode des steilsten Abstiegs . . . . .	9
2.2.1	Sattelpunkt und der steilster Abstiegsfad . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Sattelpunkt-Approximationen für Dichtefunktion, Randwahrscheinlichkeiten und -erwartungen</b>	<b>11</b>
3.1	Dichtefunktionen . . . . .	11
3.2	Randwahrscheinlichkeiten . . . . .	15
3.3	Randerwartungen . . . . .	18
3.3.1	Change of Measure Approach . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Sattelpunkt-Approximation für Kreditportfolios</b>	<b>19</b>
4.1	Risikomaße . . . . .	20
4.1.1	Value-at-Risk . . . . .	20
4.1.2	Expected Shortfall . . . . .	21

# Kapitel 1

## Einleitung

Bei dieser Seminararbeit geht es um das Buch „Saddlepoint Approximation Methods in Financial Engineering“. In der Finanzmathematik geht es unter anderem auch darum, effektiv die Preise von exotischen Finanzderivaten und Risikopositionen von Portfolios riskanter Instrumente zu bewerten.

Die meisten Probleme bei der Bewertung von Finanzderivaten und der Berechnung von Risikomaßen für Kreditportfolios beinhalten die Berechnung von Randwahrscheinlichkeiten und Randerwartungen der entsprechenden zugrunde liegenden Zustandsvariablen. Es ist wünschenswert, effiziente, zuverlässige und genaue analytische Näherungsformeln für die Bewertung von Finanzderivaten und die Risikomaße zu berechnen.

Der Ansatz der Sattelpunkt-Approximation hat sich als ein vielseitiges Werkzeug in der Statistik erwiesen, das auf die Methode des steilsten Abstiegs basiert, um die Ableitungen (checken ob Herleitungen herkommt) von analytischen Näherungsformeln der Laplace Inversionsintegrale für Dichtefunktionen, Randwahrscheinlichkeiten und Randerwartungen von einer Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen zu bestimmen.

In den letzten Jahrzehnten gab es eine wachsende Literatur über die Anwendung der Sattelpunkt-Approximationsmethoden bei der Bewertung exotischer Finanzderivaten und der Berechnung von Risikomaßen und Risikobeiträgen für Kreditportfolios.

Dieses Buch besteht aus fünf Kapiteln, wobei in dieser Seminararbeit nur die Kapiteln 1,2 und 5 behandelt werden.

Die Grundlagen werden in Kap. 1 gelegt in Form der verallgemeinerten Fourier-Transformation (oder charakteristische Funktion) der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen und die inverse Fourier-Transformation, durch die die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus der charakteristischen Funktion zurückgewonnen werden kann. Die Bromwich-Integralformeln der Dichtefunktion, Randwahrscheinlichkeit und Randerwartung werden in Form der kumulierenden Funktion der zugrunde liegenden Zufallsvariablen ausgedrückt. Die Methode des steilsten Abstiegs wird angewendet, um die asymptotische Entwicklung eines Fourier- oder Laplace-Integrals zu erhalten. Als grundlegender Kern des Ansatzes der Sattelpunkt-Approximation wird eine Bromwich-Kontur in der komplexen Ebene so deformiert, sodass sie durch einen Sattelpunkt entlang des Weges des steilsten Abstiegs verläuft.

In Kap. 2 stellen wir die detaillierten Verfahren zur Herleitung verschiedener Sattelpunkt-Approximationsformeln für die Dichtefunktionen, Randwahrscheinlichkeiten und Randerwartungen von Zufallsvariablen unter Verwendung der Methode des steilsten Abstiegs vor. In diesem Kapitel werden die Formeln für die Sattelpunkt-Approximation hergeleitet, die auf die Annahme basieren, dass die Kummulantenerzeugendefunktion der zugrundeliegenden Zufallsvariablen in geschlossener Form (closed form expression) gegeben sind.

In Kap. 5 werden die Methoden der Sattelpunkt-Approximation für die Berechnung von Risikomaßen von Kreditrisikoportfolios und die Bewertung von tranchierten Collateralized Debt Obligations angewandt. Es werden zwei Klassen von Standardkorrelationsmodellen im Detail betrachtet, die CreditRisk - und Gauß-Copula-Modelle. Außerdem werden verschiedene Sattelpunkt-Approximationsformeln für die Berechnung des Value-at-Risk und des Expected Shortfall der Verluste von Kreditportfolios, zusammen mit der Berechnung der Risikobeiträge der Schuldner zu diesen beiden Risikomaßen, hergeleitet.

## Kapitel 2

# „Kumulantenerzeugende Funktionen und das Verfahren des steilsten Abstiegs“

Die Dichtefunktionen der meisten stochastischen Prozesse, die die stochastische Entwicklung der zugrunde liegenden Zustandsvariablen in finanztechnischen Modellen modellieren, lassen keine geschlossene analytische Darstellung zu, während ihre verallgemeinerte Fourier-Transformation und Laplace Transformation geschlossene Formeln haben können.

Die Preisbildung von Derivaten und die Berechnung von Risikomaßen beinhalten im Allgemeinen die Auswertung von Fourier- oder Laplace-Integralen. Zuerst diskutieren wir die grundlegenden Eigenschaften in Bezug auf die charakteristischen Funktionen und Kumulantenerzeugendenfunktionen von Zufallsvariablen.

Dann wird die Methode des steilsten Abstiegs vorgestellt und es wird gezeigt, wie man die Integrationskontur in der komplexen Ebene so deformiert, dass sie durch einen Sattelpunkt verläuft. Diese mathematischen Techniken werden verwendet, um die asymptotische Entwicklung komplexer Integrale herzuleiten.

### 2.1 Charakteristische Funktionen und Kumulantenerzeugende Funktionen

Wir erinnern uns zurück an die Definition der Fouriertransformierten  $\hat{f}(u)$  von einer Funktion  $f(x), x \in \mathbb{R}$ , wobei

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx, u \in \mathbb{R}.$$

Es stellt sich die Frage, unter welcher Voraussetzung  $\hat{f}(u)$  existiert. Wenn wir annehmen, dass  $f$  Riemann-integrierbar in jedem Intervall  $[a, b]$  ist und  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  konvergiert, dann ist  $\hat{f}(u)$  wohldefiniert für alle  $u \in \mathbb{R}$ . Der Beweis dazu ist relativ einfach. Man muss beachten, dass  $|e^{iux} f(x)| = |f(x)|$  und da jedes absolut konvergente unendliche Integral konvergent ist, folgt die Konvergenz von  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx$ .

Manchmal ist es notwendig, die Variable der Fourier-Transformation von der reellen Variablen  $u$  auf die komplexe Variable  $z$  zu erweitern. Die entsprechende erweiterte Version ist als die verallgemeinerte Fourier-Transformation bekannt.

### 2.1.1 Verallgemeinerte Fourier Transformation und charakteristische Funktionen

Angenommen  $f(x)$  ist Fourier-integrierbar in einem Intervall  $(a,b)$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax} |f(x)| dx < \infty \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx} |f(x)| dx < \infty.$$

Die verallgemeinerte Fourier-Transformation von  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ist definiert als

$$\hat{f}(z) = \mathcal{F}\{f(x)\}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x) dx, z \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Die verallgemeinerte, inverse Fourier-Transformation ist für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $a < \text{Im } z < b$  gegeben durch

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(z)\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{iw-\infty}^{iw+\infty} e^{-ixz} \hat{f}(z) dz, a < w < b, \text{ wobei } x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Die *komplexe charakteristische Funktion* von einer Zufallsvariable  $X$  ist definiert als die verallgemeinerte Fourier-Transformierte der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von  $X$ , wobei

$$\phi_X(z) = E[e^{izX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} p_X(x) dx, a < w < b. \quad (2.3)$$

Hier ist  $p_X(x)$  die Dichtefunktion von  $X$ , die Fourier-integrierbar in  $(a, b)$  ist. Mit (2.2) kann man die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p_X(x)$  aus der komplexen charakteristischen Funktion  $\phi_X(z)$  wie folgt gewinnen

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{iw-\infty}^{iw+\infty} e^{-izx} \phi_X(z) dz, a < w < b. \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Laplace Transformation und Kumulantenerzeugendenfunktion

Sei  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  stückweise stetig in jedem endlichen Intervall in  $[0, \infty]$ , die  $|f(x)| \leq Me^{ax}$  für  $x \in [0, \infty]$  erfüllt, wobei  $M, a \in \mathbb{R}_+$  von  $x$  unabhängige Konstanten sind. Die *verallgemeinerte Laplace-Transformation* von  $f(x)$  ist definiert als

$$\tilde{f}(z) = \mathcal{L}\{f(x)\}(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x) dx, \quad (2.5)$$

wobei  $z \in \mathbb{C}$  und  $\operatorname{Re} z > a$ . Die *inverse Laplace-Transformation* von  $\tilde{f}(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , ist definiert als ([3])

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(z)\}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} e^{xz} \tilde{f}(z) dz, \quad (2.6)$$

welches ein Bromwich-Integral entlang einer zu der imaginären Achse parallelen, vertikalen Linie entspricht.

Manchmal kann es hilfreich sein, die *bilaterale Laplace-Transformation* zu betrachten, die wie folgt definiert ist durch

$$\tilde{\tilde{f}}(z) = \mathcal{B}\{f(x)\}(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{-zx} f(x) dx. \quad (2.7)$$

Für jede Zufallsvariable  $X$  stehen die zugehörige *Momenterzeugendefunktion*  $M_X(z) = E[e^{zX}]$ , und *Kumulantenerzeugendefunktion*  $\kappa_X(z) = \log M_X(z)$  in enger Verbindung mit der bilateral Laplace-Transformierten der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p_X(x)$ , wobei

$$M_X(-z) = e^{\kappa_X(-z)} = \int_{-\infty}^\infty e^{-zx} p_X(x) dx = \mathcal{B}\{p_X(x)\}(z). \quad (2.8)$$

Angenommen  $M_X$  existiert, dann existieren auch alle Momente von  $X$ , d.h., dass  $E[|X|^n] < \infty$  für alle positive ganze Zahlen. Die Momente von  $X$  können also berechnet werden durch

$$E[X^n] = \left. \frac{d^n}{dz^n} M_X(z) \right|_{z=0}. \quad (2.9)$$

In ähnlicher Weise wird die Ableitung  $n$ -ter Ordnung von  $\kappa_X(z)$ , ausgewertet bei  $z = 0$ , die Kumulante  $n$ -ter Ordnung von  $X$  genannt. Die ersten 4 Ordnung der Kumulante sind gegeben durch

$$\kappa_1 = \mu, \kappa_2 = \mu_2, \kappa_3 = \mu_3 \text{ und } \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \quad (2.10)$$

wobei  $\mu = E[X]$  und  $\mu_n = E[(X - \mu)^n]$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Die relevanten Formeln sind in der folgenden Proposition zusammengefasst.

**Proposition 2.1.** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p_X(x)$  und Kumulanterzeugendefunktion  $\kappa_X(z)$ . Angenommen  $\kappa_X(z)$  sei analytisch in einem offenen Streifen  $\{z \in \mathbb{C} : \alpha_- < \operatorname{Re} z < \alpha_+\}$ , wobei  $\alpha_- < 0$  und  $\alpha_+ > 0$ . Für alle  $K \in \mathbb{R}$  erhalten wir dann

$$p_X(K) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\kappa_X(z)-zK} dz, \quad \gamma \in (\alpha_-, \alpha_+) \quad (2.11a)$$

$$P[X > K] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\kappa_X(z)-zK}}{z} dz, \quad \gamma \in (0, \alpha_+) \quad (2.11b)$$

$$E[(X - K)^+] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\kappa_X(z)-zK}}{z^2} dz, \quad \gamma \in (0, \alpha_+) \quad (2.11c)$$

*Beweis.* Wir wissen, dass  $e^{\kappa_X(z)}$  die Momenterzeugendefunktion ist. Wir erhalten (2.11a) indem wir die inverse Laplace-Transformation (2.6) auf die Darstellung (2.8) anwenden.

Um (2.11b) zu zeigen, setzen wir  $\operatorname{Re} z = \gamma \in (0, \alpha_+)$ , so dass  $\int_K^\infty e^{-zx} dx$  existiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P[X > K] &= \int_K^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\kappa_X(z)-zx} dz dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\kappa_X(z)} \left( \int_K^\infty e^{-zx} dx \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\kappa_X(z)-zK}}{z} dz. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise können wir (2.11c) zeigen, wenn wir  $\gamma \in (0, \alpha_+)$  wählen:

$$\begin{aligned} E[(X - K)^+] &= \int_K^\infty (x - K) p_X(x) dx \\ &= \int_K^\infty (x - K) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\kappa_X(z)-zx} dz dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\kappa_X(z)} \left( \int_K^\infty (x - K) e^{-zx} dx \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\kappa_X(z)-zK}}{z^2} dz. \end{aligned}$$

□

Wenn wir  $F_X(K) = P[X \leq K]$  als die Verteilungsfunktion von  $X$  schreiben, sehen wir unmittelbar

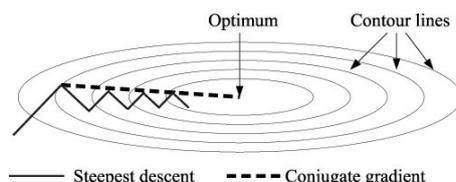
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\kappa_X(z)-zK}}{z} dz = \begin{cases} -F_X(K) & , \text{wenn } \gamma \in (\alpha_-, 0), \\ 1 - F_X(K) & , \text{wenn } \gamma \in (0, \alpha_+). \end{cases} \quad (2.11d)$$

Der bedingte Erwartungswert im Schwanzbereich  $E[X \mathbb{1}_{X \geq K}]$  hängt mit dem „expected shortfall“ aus dem Risikomanagement zusammen. Die Bromwich-Integral-Darstellung von  $E[X \mathbb{1}_{X \geq K}]$  kann gezeigt werden als

$$E[X \mathbb{1}_{X \geq K}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\kappa_X(z)-zK}}{z} dz, \quad \gamma \in (0, \alpha_+). \quad (2.11e)$$

## 2.2 Methode des steilsten Abstiegs

In diesem Abschnitt wird die Methode des steilsten Abstiegs zur Herleitung der asymptotischen Entwicklung eines Fourier- oder Laplace-Integrals vorgestellt. Bei diesem Verfahren verformt man eine Kontur in der komplexen Ebene so, dass sie durch einen Sattelpunkt entlang des Weges des steilsten Abstiegs verläuft (Nayfeh 1981). Die Methode des steilsten Abstiegs liefert das grundlegende Werkzeug zur Herleitung verschiedener Formen der Formeln für die Sattelpunkt-Approximation. Zuerst erinnern wir uns an die Cauchy-Riemann-Gleichungen aus der Theorie komplexer Funktionen und leiten daraus zwei grundlegende Eigenschaften über stationäre Punkte und Orthogonalität der Niveaulinien des Realteils und des Imaginärteils einer komplexen Funktion (Kwok 2010)



**Satz 2.1.** Angenommen,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , wobei  $z = x + iy$ ,  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  reellwertige Funktionen sind. Innerhalb der Definitionsmenge von  $f(z)$  lauten die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (1.12a)$$

Die 1. Ableitung von  $f(z)$  ist gegeben durch

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iv_y = v_y + iv_x \quad (1.12b)$$

### 2.2.1 Sattelpunkt und der steilster Abstiegsfad

Die Eigenschaften eines Sattelpunktes und des steilsten Abstiegsfadens lassen sich aus Satz 2.1 herleiten:

**Korollar 2.1.** Der Realteil  $u(x, y)$  besitzt kein lokales Maximum oder Minimum innerhalb der Definitionsmenge von  $f(z)$ . Jeder stationäre Punkt von  $u(x, y)$  ist ein Sattelpunkt.

*Beweis.* In einem stationären Punkt von  $u(x, y)$  gilt  $u_x = u_y = 0$ . Betrachtet man die Determinante der Hesse-Matrix, erhält man:

$$H = \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} = u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = -(v_{xy})^2 - (u_{xy})^2 < 0.$$

Man beachtet, dass hier die Cauchy-Riemann-Gleichungen 1.12a verwendet wurden. Die Negativität von  $H$  impliziert, dass der stationäre Punkt von  $u(x, y)$  ein Sattelpunkt ist und nicht ein lokales Extremum sein kann.  $\square$

**Korollar 2.2.** Die Niveaulinien von  $u(x, y)$  sind überall orthogonal zu den Niveaulinien von  $v(x, y)$ .

*Beweis.* Betrachtet man die Gradienten von  $u$  und  $v$  sieht man, dass sie orthogonal zu den Niveaulinien von  $u$  bzw.  $v$  sind. Mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen 1.12a erhält man

$$\nabla u \cdot \nabla v = (u_x, u_y) \cdot (v_y, v_x) = u_x v_x + u_y v_y = 0.$$

Daraus folgt die Orthogonalität von  $\nabla u$  und  $\nabla v$  und dazu äquivalent die Orthogonalität von den Niveaulinien von  $u$  und  $v$ .  $\square$

Da die Niveaulinien von  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$  Familien von orthogonalen Trajektorien bilden, sind die Kurven des steilsten Abstiegs (und Aufstiegs) von  $\operatorname{Re} f$  die Niveaulinien von  $\operatorname{Im} f$ , und umgekehrt. Der Sattelpunkt  $z_0$  einer komplexen Funktion  $f(z)$  wird als einfach bezeichnet, wenn  $f'(z_0) = 0$  ist, aber  $f''(z_0) \neq 0$ . Abhängig von dem Weg, auf dem der Sattelpunkt angefahren wird, weist  $\operatorname{Re} f$  aufgrund der Eigenschaft eines Sattelpunktes ein Maxima oder einen Minima im Sattelpunkt auf.

Um den steilsten Abstiegs Pfad bei dem einfachen Sattelpunkt  $z_0$  zu bestimmen, wobei  $f''(z) \neq 0$ , schreibt man  $f''(z_0) = |f''(z_0)|e^{i\psi}$  und  $z - z_0 = re^{i\theta}$ . Der quadratische Potenzterm in der Taylorentwicklung von  $f(z)$  um  $z = z_0$  kann ausgedrückt werden als

$$\frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 = \frac{|f''(z_0)|}{2}r^2e^{i(2\theta+\psi)}.$$

Der Realteil  $\operatorname{Re} f$  erreicht seinen steilsten Abstieg bei  $z_0$ , wenn wir  $\theta$  so wählen, dass  $e^{i(2\theta+\psi)} = -1$  gilt oder entlang des Pfades wählen, wo  $\theta = -\frac{\psi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ .

## Kapitel 3

# Sattelpunkt-Approximationen für Dichtefunktion, Randwahrscheinlichkeiten und -erwartungen

In diesem Kapitel diskutieren wir verschiedene Formeln zur Sattelpunkt-Approximation für die Dichtefunktionen, Randwahrscheinlichkeiten und -erwartungen von stetigen Zufallsvariablen.

Die Sattelpunkt-Approximation zur Bestimmung der Dichtefunktion des Mittelwertes einer großen Anzahl von unabhängigen und identisch verteilten (i.i.d.) Zufallsvariablen wurde erstmals von Daniels [2] unter Verwendung der Methode des steilsten Abstiegs Methode hergeleitet.

Wir präsentieren den detaillierten Überblick über die neuesten innovativen Ansätze zur Erlangung der Sattelpunkt-Approximationen der Randwahrscheinlichkeiten und -erwartungen, die über den bekannten Lugannani-Rice Ansatz (1980) hinausgehen.

### 3.1 Dichtefunktionen

Die Sattelpunkt-Approximation wurde erstmals in der Statistik zur Approximation der Dichtefunktion einer Zufallsvariablen mit analytischer momenterzeugender Funktion aber nichtlösbarer Verteilungsfunktion. Daniels verwendet die Methode des steilsten Abstiegs um die Sattelpunkt-Approximation für die Dichtefunktion des Mittelwertes einer großen Anzahl von i.i.d.-Zufallsvariablen herzuleiten.

**Proposition 3.1.** (Daniels 1954) Sei  $M(z) = E[e^{zX}]$  und  $\kappa(z) = \log M(z)$  die jeweilige Momenterzeugendefunktion und die Kumulantenerzeugendefunktion einer Zufallsvariable  $X$ , die in einem offenen vertikalen Streifen  $z \in \mathbb{C} : \alpha_- < \operatorname{Re} z < \alpha_+$  analytisch sind, wobei  $\alpha_- < 0$  und  $\alpha_+ > 0$ . Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die die gleiche Momenterzeugendefunktion  $M(z)$  besitzen.

$p_{\bar{X}}$  bezeichne die Dichtefunktion des Stichprobenmittelwertes  $\bar{X}$ , wobei  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Die Sattelpunkt-Approximation der 2. Ordnung für  $p_{\bar{X}}(x)$  ist gegeben durch

$$p_{\bar{X}}(x) \approx p_{\bar{X}}^{(2)}(x) = \frac{\sqrt{n} e^{n[\kappa(\hat{z}) - \hat{z}x]}}{\sqrt{2\pi\kappa''(\hat{z})}} \left\{ 1 + \frac{1}{8n} \left[ \lambda_4(\hat{z}) - \frac{5}{3} \lambda_3^2(\hat{z}) \right] \right\}, \quad (3.1)$$

wobei  $\lambda_3(\hat{z}) = \frac{\kappa''(\hat{z})}{\kappa(\hat{z})^{\frac{3}{2}}}$  und  $\lambda_4(\hat{z}) = \frac{\kappa^{(4)}(\hat{z})}{\kappa''(\hat{z})^2}$ ; und  $\hat{z}$  ist die eindeutige, einfache reelle Wurzel, die die Sattelpunktgleichung löst:

$$\kappa'(z) = x. \quad (3.2)$$

*Beweis.* Wir wissen, dass die Momenterzeugendefunktion des Stichprobenmittelwerts  $\bar{X}$  von  $n$  unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen wie folgt gegeben ist

$$M_{\bar{X}}(z) = E[e^{z\bar{X}}] = E[e^{\frac{z}{n} \sum_{i=1}^n X_i}] = \prod_{i=1}^n E[e^{\frac{z}{n} X_i}] = \left[ M\left(\frac{z}{n}\right) \right]^n = e^{n\kappa\left(\frac{z}{n}\right)}$$

Dementsprechend stehen  $\text{var}(\bar{X})$  und die Kumulantenerzeugendefunktion von  $X$  in Beziehung durch

$$\text{var}(\bar{X}) = \frac{d^2}{dz^2} \log M_{\bar{X}}(z) \Big|_{z=0} = \frac{d^2}{dz^2} n \kappa\left(\frac{z}{n}\right) \Big|_{z=0} = \frac{\kappa''(0)}{n}.$$

Wie wir bereits schon in Kapitel 2 gesehen haben, ist die Dichtefunktion von  $\bar{X}$  durch die inverse Laplace-Transformation von  $M_{\bar{X}}(z)$  gegeben:

$$\begin{aligned} p_{\bar{X}}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M_{\bar{X}}(z) e^{-zx} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{n\kappa\left(\frac{z}{n}\right)} e^{-zx} dz \\ &= \frac{n}{2\pi i} \int_{\frac{\gamma}{n}-i\infty}^{\frac{\gamma}{n}+i\infty} e^{n[\kappa(z)-zx]} dz, \text{ wobei } \alpha_- < \gamma < \alpha_+. \end{aligned}$$

Wenn  $n$  groß ist, können wir die Methode des steilsten Abstiegs anwenden, um eine asymptotische Erweiterung des obigen Bromwich-Integrals herzuleiten. Die Verfahren beinhalten die Bestimmung des Sattelpunktes  $\hat{z}$ , der die Sattelpunktgleichung 3.2 löst und die Deformation der Kontur zum Durchgang durch den Sattelpunkt  $\hat{z}$  führt. Unter bestimmten Voraussetzungen zeigt Daniels(1954, Theorem 6.2), dass es eine einzige einfache reelle Wurzel der Sattelpunktgleichung gibt, die innerhalb von  $(\alpha_-, \alpha_+)$  liegt.

Wir ersetzen die ursprüngliche Kontur durch den steilsten Abstiegs Pfad, der durch den reellen einfachen Sattelpunkt  $\hat{z}$  verläuft und der zur senkrechten Linie entlang  $\hat{z} + i\infty$  parallel zu der imaginären Achse entspricht.

Zur Herleitung der Formel für die Sattelpunktapproximation zweiter Ordnung der Dichtefunktion des Stichprobenmittelwertes betrachten wir die Taylor-Entwicklung des Exponenten von den Integranden  $\kappa(z) - zx$  am Punkt  $\hat{z}$ . Wir substituieren dabei:

$$w = -i\sqrt{n\kappa''(\hat{z})}(z - \hat{z}).$$

Die entsprechende Taylor-Entwicklung der 4. Ordnung von  $\kappa(z) - zx$  bei  $\hat{z}$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \kappa(z) - zx &= \kappa(\hat{z}) - \hat{z}x + \frac{\kappa''(\hat{z})}{2!} \left[ \frac{iw}{\sqrt{n\kappa''(\hat{z})}} \right]^2 \\ &+ \frac{\kappa'''(\hat{z})}{3!} \left[ \frac{iw}{\sqrt{n\kappa''(\hat{z})}} \right]^3 + \frac{\kappa^{(4)}(\hat{z})}{4!} \left[ \frac{iw}{\sqrt{n\kappa''(\hat{z})}} \right]^4 + \dots \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$p_{\bar{X}}(x) \approx \frac{\sqrt{n}}{2\pi\sqrt{\kappa''(\hat{z})}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{n[\kappa(\hat{z})-\hat{z}x]-w^2/2} \left\{ 1 - \frac{i}{\sqrt{n\kappa''(\hat{z})}^3} \kappa'''(\hat{z}) \frac{w^3}{3!} + \frac{1}{n} \left[ \frac{\kappa''''(\hat{z})}{\kappa''(\hat{z})^2} \frac{w^4}{4!} - \frac{\kappa'''(\hat{z})^2}{\kappa''(\hat{z})^3} \frac{w^6}{2!3!2} + \dots \right] \right\} dw.$$

Wenn wir in der obigen Entwicklung die Potenzierung des Termes der Ableitung der dritten Ordnung von  $\kappa(z) - zx$  berücksichtigen, wird der letzte Term, der  $w^6$  beinhaltet, in dem obigen Integral hinzugefügt, wenn wir nach einer Expansion bis zu  $O(1/n)$  suchen. Genauer gesagt verwenden wir die Potenzreihe:

$$e \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}, \text{ wobei } x = \left( \frac{iw}{\sqrt{n\kappa''(\hat{z})}} \right)^3$$

Unter Beachtung der folgenden Gleichheiten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \sqrt{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} w^3 e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \sqrt{2\pi} = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} w^4 e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 3\sqrt{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} w^6 e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 15\sqrt{2\pi},$$

erhalten wir die Sattelpunkt-Approximation der 2.Ordnung  $p_{\bar{X}}^{(2)}(x)$  für die Dichtefunktion :

$$p_{\bar{X}}^{(2)} \approx p_{\bar{X}(x)}^{(2)} \\ = \frac{\sqrt{n}e^{n[\kappa(\hat{z})-\hat{z}x]}}{2\pi\sqrt{\kappa''(\hat{z})}} \left[ \sqrt{w\pi} + \frac{3\sqrt{2\pi}}{24n} \frac{\kappa''''(\hat{z})}{\kappa''(\hat{z})^2} - \frac{15\sqrt{2\pi}}{72n} \frac{\kappa'''(\hat{z})^2}{\kappa''(\hat{z})^3} \right] \\ = \frac{\sqrt{n}e^{n[\kappa(\hat{z})-\hat{z}x]}}{\sqrt{2\pi\kappa''(\hat{z})}} \left\{ 1 + \frac{1}{8n} \left[ \lambda_4(\hat{z}) - \frac{5}{3}\lambda_3^2(\hat{z}) \right] \right\}.$$

□

Wir können die Eindeutigkeit der Lösung der Sattelpunktgleichung 3.2 folgern, indem wir feststellen, dass  $\kappa'(z)$  eine monoton nicht-fallende Funktion ist. Dies wird ersichtlich durch die Beobachtung von

$$\kappa'(z) = \frac{d}{dz} \log(E[e^{zX}]) = \frac{E[Xe^{zX}]}{E[e^{zX}]}, \\ \kappa''(z) = \frac{E[X^2e^{zX}]E[e^{zX}] - (E[Xe^{zX}])^2}{(E[e^{zX}])^2} \geq 0.$$

Die Nichtnegativität von  $\kappa''$  erhält man durch die Cauchy-Schwarz Ungleichung:  $E[W^2]E[Y^2] \geq (E[WY])^2$ , wobei  $W = X\sqrt{e^{zX}}$  und  $Y = \sqrt{e^{zX}}$ .

Daniels (1954) zeigt, dass die Sattelpunkt-Approximation für drei Verteilungen exakt wird, nämlich für die Normal-, Gamma- und inverse Normalverteilung. Wir betrachten als Beispiel die Gamma-Verteilung mit der Dichtefunktion

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad x > 0,$$

wobei  $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ . Die Kumulantenerzeugendefunktion für die Gamma-Verteilung lautet:

$$\kappa(z) = -\alpha \log(1 - z)$$

wodurch wir die Sattelpunkt-Gleichung erhalten:

$$\kappa'(z) = \frac{\alpha}{1 - z} = x.$$

Dadurch erhalten wir den eindeutigen und einfachen Sattelpunkt:  $\hat{z} = 1 - \frac{\alpha}{x}, x > 0$ . Man beachte, dass  $\kappa''(\hat{z}) = \frac{x^2}{\alpha}$ . Wenn man  $n = 1$  setzt und 3.1 anwendet, erhält man die Sattelpunkt-Approximation für die Gamma-Verteilung, die wie folgt lautet:

$$p_{app}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2/\alpha}} \exp(-\alpha \log(1 - \hat{z}) - \hat{z}x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\alpha}}, x > 0.$$

Wenn wir die approximierende Dichtefunktion  $p_{app}(x)$  so normieren, dass sie eine integrierte Summe von Eins hat, dann wird die Sattelpunkt-Approximation exakt.

## 3.2 Randwahrscheinlichkeiten

Theoretisch könnte man, sobald die Approximation der Dichtefunktion berechnet wurde, die Approximationen für die Randwahrscheinlichkeit und -erwartung durch Integration herleiten. Die Sattelpunkt-Approximation für die Dichtefunktion ist zwar überall positiv, aber die approximierende Dichtefunktion lässt sich im Allgemeinen nicht zu 1 integrieren. Daher muss man eine Normalisierung durchführen, indem man die Sattelpunkt-Approximation durch ihre Integrationssumme dividiert. Dieses Verfahren kann jedoch zu recht komplizierte Formeln für die Sattelpunkt-Approximation der Randwahrscheinlichkeit - und -erwartung führen.

In ihrer bahnbrechenden Arbeit stellen Lugannani und Rice [4] eine effektive Sattelpunkt-Approximationsformel zur Berechnung der Randwahrscheinlichkeit in Form von  $P[X > x]$  vor. Ihre Näherungsformel funktioniert erstaunlich gut über einen weiten Bereich von  $x$ , während die früheren Versionen für  $x$  in der Nähe von  $E[\bar{X}]$  und in den Rändern schlecht funktionieren (Strawderman 2000). Analog zur Sattelpunkt-Approximation der Dichtefunktion ist die Lugannani-Rice-Formel für Randwahrscheinlichkeiten auch für  $n = 1$  genau (Daniels 1987, Ait-Sahalia und Yu 2006). Die Lugannani-Rice-Sattelpunkt-Approximation für die Randwahrscheinlichkeitsformel für  $n = 1$  wird in der folgenden Proposition vorgestellt.

**Proposition 3.2.** (Lugannani and Rice 1980) Sei  $\kappa(z)$  die Kumulantenerzeugendefunktion der Zufallsvariable  $X$ , die den Voraussetzungen der Proposition 3.1 genügt. Die Sattelpunkt-Approximationsformel für  $P[X > x]$  ist dann gegeben durch

$$P(X > x) \approx \begin{cases} 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left[ \frac{1}{\hat{z}\kappa''(\hat{z})^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\hat{w}} \right], & x \neq E[X] = \kappa'(0) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\kappa'''(0)}{\kappa''(0)^{3/2}} & x = E[X] = \kappa'(0) \end{cases} \quad (3.3)$$

wobei  $\hat{z}$  die Sattelpunktgleichung 3.2 ist.  $\hat{w}$  ist gegeben durch:

$$\hat{w} = \operatorname{sgn}(\hat{z}) \sqrt{2[\hat{z}x - \kappa(\hat{z})]}$$

Man beachte, dass wenn  $x = E[X] = \kappa'(0)$  gilt,  $\hat{z} = \hat{w} = 0$  ist.

$\Phi$  bezeichnet hier die Standardnormalverteilungsfunktion und  $\phi$  die dazugehörige Dichtefunktion.

*Beweis.* Der Beweis beginnt mit Darstellung (2.6)

Wir setzen voraus, dass der Sattelpunkt  $\hat{z}$  existiert und in  $(0, \alpha_+)$  liegt. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir dann

$$P[X > x] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{z}-i\infty}^{\hat{z}+i\infty} \frac{e^{\kappa(z)-zx}}{z} dz.$$

Wir definieren nun

$$\hat{w} = \operatorname{sgn}(\hat{z}) \sqrt{2[\hat{z}x - \kappa(\hat{z})]}.$$

Dadurch können wir die Dichtefunktion darstellen durch

$$p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{w}-i\infty}^{\hat{w}+i\infty} e^{\frac{w^2}{2} - w\hat{w}} \frac{dz}{dw} dw.$$

Daraus erhalten wir

$$P[X > x] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{w}-i\infty}^{\hat{w}+i\infty} e^{\frac{w^2}{2}-w\hat{w}} \frac{1}{z(w)} \frac{dz(w)}{dw} dw.$$

Wir wissen, dass  $z = 0$  g.d.w  $w = 0$  ist und eine Singularität am  $w = 0$  besitzt. Es kann gezeigt werden, dass zwischen  $z$  und  $w$  eine lineare Abhängigkeit besteht. (siehe [1])

Wir führen die folgende Zerlegung durch, um die Singularität bei  $w = 0$  zu isolieren, wobei

$$P[X > x] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{w}-i\infty}^{\hat{w}+i\infty} \frac{e^{\frac{w^2}{2}-w\hat{w}}}{w} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{w}-i\infty}^{\hat{w}+i\infty} e^{\frac{w^2}{2}-w\hat{w}} \left[ \frac{1}{z(w)} \frac{dz(w)}{dw} - \frac{1}{w} \right] dw.$$

Aufgrund von (2.11b) ist der Wert des ersten Integrals bekanntlich  $1 - \phi(\hat{w})$ , wobei  $\phi(\cdot)$  die Standard-Normalverteilungsfunktion ist. Außerdem wissen wir auch, dass für das zweite Integral der Integrand analytisch in dem vertikalen Streifen in der komplexen Ebene ist.

Man kann die Methode des steilsten Abstiegs anwenden, wobei der Hauptbeitrag des Integrals aus dem Verhalten des Integranden in der unmittelbaren Nähe des Sattelpunkts stammt (siehe Abschn. 2.2.1). Wir setzen die Werte der Terme innerhalb der Klammer im Integranden des zweiten Integrals am Sattelpunkt  $z = \hat{z}$  (äquivalent:  $w = \hat{w}$ ) fest und verwenden

$$\left. \frac{dz}{dw} \right|_{w=\hat{w}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa''(\hat{z})}}$$

woraus wir

$$\frac{1}{z(w)} \frac{dz(w)}{dw} - \frac{1}{w} \approx \frac{1}{\hat{z}} \frac{dz(\hat{w})}{dw} - \frac{1}{\hat{w}} = \frac{1}{\hat{z}} \frac{1}{\kappa''(\hat{z})^{1/2}} - \frac{1}{\hat{w}}$$

erhalten. [wobei:  $\hat{z} \neq 0$ , was äquivalent zu  $\hat{w} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq E[X] = \kappa'(0)$ ]

Unter Verwendung einer ähnlichen Herleitungssprozedur wie für die Dichtefunktion

$$\begin{aligned} p(x) &\approx \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{w}-i\infty}^{\hat{w}+i\infty} e^{\frac{w^2}{2}-w\hat{w}} \frac{1}{\sqrt{\kappa''(\hat{z})}} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\hat{w}^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\kappa''(\hat{z})}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \frac{\phi(\hat{w})}{\sqrt{\kappa''(\hat{z})}} = \frac{e^{\kappa(\hat{z})-\hat{z}x}}{\sqrt{2\pi\kappa''(\hat{z})}} \end{aligned}$$

erhalten wir das Ergebnis der 1.Aussage von (3.3).

Wenn  $\hat{z} = 0$  ist (so ist es auch  $\hat{w}$ ), haben wir  $x = E[X] = \kappa'(0)$ .

Es ist für uns notwendig den asymptotischen Grenzwert der Sattelpunkt-Approximation für  $\hat{w} \rightarrow 0$  und  $\hat{z} \rightarrow 0$  zu betrachten. Wir starten mit der Taylor-Entwicklung von der Kumulanterzeugendenfunktion  $\kappa(z)$  bei  $\hat{z}$  als Potenzen von  $\hat{z}$  ausgewertet bei  $z = \hat{z}$ :

$$\kappa(0) = \kappa(\hat{z}) - \kappa'(\hat{z})\hat{z} + \frac{\kappa''(\hat{z})}{2}\hat{z}^2 - \frac{\kappa'''(\hat{z})}{6}\hat{z}^3 + \dots$$

Durch die Beobachtung, dass  $\kappa(\hat{z}) = x$  und  $\kappa(0) = 0$  ist, erhalten wir die Potenzreihe der höchsten Potenz in  $\hat{z}$  wie folgt:

$$\hat{w}^2 = 2[\hat{z}x - \kappa(\hat{z})] = \kappa''(\hat{z})\hat{z}^2 - \frac{\kappa'''(\hat{z})}{3}\hat{z}^3 + \dots$$

und

$$\hat{w} = \kappa''(\hat{z})^{1/2}\hat{z} \left[ 1 - \frac{\kappa'''(\hat{z})}{3\kappa''(\hat{z})}\hat{z} + \dots \right]^{1/2} = \kappa''(\hat{z})^{1/2}\hat{z} \left[ 1 - \frac{\kappa'''(\hat{z})}{6\kappa''(\hat{z})}\hat{z} + \dots \right].$$

Als nächstes betrachten wir

$$\frac{1}{\kappa''(\hat{z})^{1/2}\hat{z}} - \frac{1}{\hat{w}} = \frac{1}{\kappa''(\hat{z})^{1/2}\hat{z}} \left[ 1 - \frac{1}{1 - \frac{\kappa'''(\hat{z})}{6\kappa''(\hat{z})}\hat{z}} + \dots \right] = -\frac{\kappa'''(\hat{z})}{6\kappa''(\hat{z})^{3/2}} + O(\hat{z}).$$

Somit erhalten wir für  $\hat{w} \rightarrow 0$  und  $\hat{z} \rightarrow 0$

$$\lim_{\substack{\hat{w} \rightarrow 0 \\ \hat{z} \rightarrow 0}} 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left[ \frac{1}{\hat{z}\kappa''(\hat{z})^{1/2}} - \frac{1}{\hat{w}} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\kappa'''(0)}{\kappa''(0)^{3/2}}.$$

□

**Erweiterung auf n i.i.d.-Zufallsvariablen:** Die obige Proposition basiert auf  $n = 1$ . Für den allgemeinen Fall der Bestimmung der Randwahrscheinlichkeit des Mittelwerts  $\bar{X}$  von n i.i.d.-Zufallsvariablen und der Approximation höherer Ordnung, kann man ähnliche Berechnungen durchführen, um zu den folgenden Lugannani-Rice-Formeln höherer Ordnung zu gelangen. Dabei macht man die folgende Fallunterscheidung:

i. Für den Fall, dass  $\hat{z}$  weit entfernt von 0 ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} P[\bar{X} > \bar{x}] &= 1 - \Phi(\hat{w}) + \frac{\phi(\hat{w})}{\sqrt{n}} \left\{ \frac{1}{\hat{z}\kappa''(\hat{z})^{1/2}} - \frac{1}{\hat{w}} \right. \\ &\quad + \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{\hat{w}^3} - \frac{1}{\hat{z}^3\kappa''(\hat{z})^{3/2}} - \frac{\lambda_3}{2\hat{z}^2\kappa''(\hat{z})} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\hat{z}\kappa''(\hat{z})^{1/2}} \left( \frac{\lambda_4(\hat{z})}{8} - \frac{5\lambda_3^2(\hat{z})}{24} \right) \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.4a)$$

wobei  $\hat{w} = \text{sgn}(\hat{z})\sqrt{2n[\hat{z}\bar{x} - \kappa(\hat{z})]}$ .

ii. Wenn  $\hat{z}$  sich in der Nähe von 0 bewegt, so tut es auch  $\hat{w}$ . Dann wird eine Sattelpunkt-Approximationsformal mit höherer Ordnung benötigt. Durch eine ähnliche Taylor-Erweiterung von  $\kappa(z) - zx$  (wie im Beweis von Proposition 3.1) und Einsetzen in das Laplace-Inverse von  $P[\bar{X} > \bar{x}]$ , erhalten wir (siehe Formel 2.2 in Lieberman 1994 und detaillierte Herleitung in García-Céspedes 2014)

$$\begin{aligned} P[\bar{X} > \bar{x}] &= e^{n[\kappa(\hat{z}) - \hat{z}x] + \frac{\hat{z}^2}{2}} \left\{ (1 - \Phi(\hat{z})) \left[ 1 - \frac{\lambda_3(\hat{z})}{6\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \left( \frac{\lambda_4(\hat{z})\hat{z}^3}{24} + \frac{\lambda_3^2\hat{z}^6}{72} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \phi(\hat{z}) \left[ \frac{\lambda_3(\hat{z})}{6\sqrt{6}\sqrt{n}}(\hat{z}^2 - 1) - \frac{\lambda_4(\hat{z})}{24n}(\hat{z}^3 - \hat{z}) - \frac{\lambda_3^2\hat{z}}{72n}(\hat{z}^5 - \hat{z}^3 + 3\hat{z}) \right] \right\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned} \quad (3.5b)$$

### 3.3 Randerwartungen

Bei vielen Bewertungsproblemen in der Finanzmathematik, wie z. B. die Bewertung europäischer Optionen und Berechnungen des erwarteten Ausfalls (Expected Shortfall) in Kreditportfolios, ist die Bestimmung der Randerwartung von großer Bedeutung. In der Optionsbewertung und in Versicherungen visualisieren wir  $E[(X - K)^+]$  als die Auszahlung einer Kaufoption bzw. einer Stop-Loss-Prämie.

In diesem Abschnitt wird, für die Herleitung der Randerwartung, die „Change of Measure Approach“ (Wechsel des Maßes) vorgestellt. Dabei wird die Randerwartung in die Randwahrscheinlichkeit umgewandelt, indem man das Maß ändert.

#### 3.3.1 Change of Measure Approach

Damit diese Methode funktioniert, muss die Zufallsvariable beschränkt sein. Wir nehmen an, dass  $X$  nach unten durch  $-L$ , wobei  $L > 0$ , beschränkt ist. Unter Verwendung der Methode des Maßwechsels wird die Randerwartung  $E[(X - K)^+]$  durch die Randwahrscheinlichkeit ausgedrückt. Um dies zu erreichen, definieren wir  $Y = X + L$  und  $\mu_X = E[X]$ , sodass  $Y$  nichtnegativ ist und  $\mu_Y = \mu_X + L$  gilt. Wir erhalten

$$E[(X - K)^+] = E[(Y - L - K)\mathbb{1}_{(Y > L+K)}] = E[Y\mathbb{1}_{(Y > L+K)}] - (L + K)P[Y > L + K].$$

Um den 1. Ausdruck durch die Randwahrscheinlichkeit ausdrücken, definieren wir ein neues Maß durch

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{Y}{\mu_Y}.$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass die oben definierte Radon-Nikodym-Ableitung nicht-negativ ist und sich zu Eins integriert. Als Ergebnis erhalten wir

$$E[Y\mathbb{1}_{(Y > L+K)}] = \mu_Y E_Q[\mathbb{1}_{(Y > L+K)}] = \mu_Y Q[Y > L + K].$$

Kombiniert man die obigen Resultate, erhält man

$$E[(X - K)^+] = \mu_Y Q[X > K] - (L + K)P[X > K]. \quad (3.6)$$

Die Kumulantenerzeugendefunktion von  $X$  unter dem ursprünglichen Maß  $P$  ist durch  $\kappa(z) = \log(E[e^{zX}])$  gegeben. Wir erinnern uns zurück, dass  $\kappa' = \frac{E[Xe^{zX}]}{E[e^{zX}]}$ .

Die Kumulantenerzeugendefunktion von  $X$  ist unter dem Maß  $Q$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \kappa_Q(z) &= \log \left[ \frac{E[(X + L)e^{zX}]}{\mu_Y} \right] \\ &= \log \left( \frac{E[Xe^{zX}] + LE[e^{zX}]}{E[e^{zX}]} \right) + \log E[e^{zX}] - \ln \mu_Y \\ &= \log(\kappa'(z) + L) + \kappa(z) - \ln \mu_Y. \end{aligned}$$

Da wir nur die Kumulantenerzeugendefunktion unter beiden Maßen haben, können wir die Sattelpunkt-Approximation von  $E[(X - K)^+]$  erhalten, indem wir einfach die Approximationsformel anwenden, die im vorherigen Abschnitt für Randwahrscheinlichkeiten diskutiert wurde. Bei diesem Ansatz gibt es zwei Sattelpunkt-Gleichungen zu lösen und die technische Bedingung der Beschränktheit der zugrunde liegenden Zufallsvariable ist erforderlich.

## Kapitel 4

# Sattelpunkt-Approximation für Kreditportfolios

Wir betrachten ein Portfolio von Krediten oder Anleihen, bei denen die Kreditnehmer oder Anleiheemittenten die in den Kreditverträgen oder Anleiheverträgen zugesagten Cashflows nicht erfüllen können. Diese Zahlungsausfälle führen zu Kreditverlusten für den Inhaber des Portfolios dieser Kreditinstrumente. In diesem Kapitel konzentrieren wir uns auf das Kreditrisiko, das sich aus der Möglichkeit des Ausfalls von Kreditinstrumenten in einem Kreditportfolio ergibt. Die Kreditrisikomodelle zur Analyse des Ausfallverhaltens eines Kreditschuldners sind meist durch das Auftreten des Ausfalls durch eine Bernoulli-Zufallsvariable oder den Zeitpunkt des Ausfalls durch eine positive Zufallsvariable charakterisiert.

Wir betrachten den gesamten Zufallsverlust  $L$  aus Ausfällen von  $n$  Kreditschuldnern in einem Kreditportfolio über den Zeithorizont  $T$ . Bezeichnen wir  $D_i$  als den Ausfallindikator für den  $i$ -ten Schuldner,  $i = 1, 2, \dots, n$ , wobei  $D_i$  eine Bernoulli-Zufallsvariable ist, die wie folgt definiert ist

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{,wenn der } i\text{-te Schuldner innerhalb des Zeithorizonts } T \text{ nicht zahlt} \\ 0 & \text{,sonst} \end{cases}$$

Der Ausfall des  $i$ -ten Schuldners wird auch durch den zufälligen Zeitpunkt des Ausfalls  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  charakterisiert. Für einen festen Zeithorizont  $T$  gilt, dass  $D_i = \mathbb{1}_{(\tau_i \leq T)}$ . Sei  $p_i$  die marginale Ausfallwahrscheinlichkeit des  $i$ -ten Schuldners, dann ist  $p_i = P[D_i = 1]$ . Sei  $w_i$  das effektive Ausfallrisiko des  $i$ -ten Schuldners. Unter der Annahme der Unabhängigkeit zwischen zufälligen Verlusten bei Ausfall und Ausfallereignissen, ist der zufällige Ausfallverlust des Portfolios mit  $n$  Kreditschuldnern innerhalb des Zeithorizonts  $T$  gegeben durch

$$L = \sum_{i=1}^n w_i D_i. \tag{4.1}$$

Da der Ansatz der Sattelpunkt-Approximation genaue Schätzungen für Randwahrscheinlichkeiten und -erwartungen liefert, ist es ein geeignetes Werkzeug zur Berechnung von Kreditportfolioverlusten.

## 4.1 Risikomaße

Wir präsentieren die Definitionen und Eigenschaften von *Value-at-Risk* (VaR) und *Expected Shortfall* (ES) eines Kreditportfolios, insbesondere die wünschenswerte Eigenschaft der Subadditivität die mit Diversifikation verbunden ist. Es ist wünschenswert, dass ein Risikomaß eine Reihe von sogenannten kohärenten Eigenschaften, wie Subadditivität, erfüllt. Es wird beobachtet, dass der VaR kein kohärentes Risikomaß ist, da es die Subadditivität nicht erfüllt. Auf der anderen Seite wird ES als das wünschenswertere Risikomaß angesehen, da es kohärent ist. Die praktische Bewertung eines Kreditportfolios mit Expected-Shortfall kann jedoch verschiedene technische Herausforderungen mit sich bringen, da die Verlustverteilung eines Kreditportfolios jenseits einer kritischen Schwelle nicht leicht zu quantifizieren ist. Wir präsentieren eine interessante Beziehung zwischen VaR und ES und die Sattelpunkt-Approximationsformel zur Berechnung von ES.

### 4.1.1 Value-at-Risk

Bei einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  und einem gewählten Konfidenzniveau  $\alpha$  ist der VaR eines Kreditportfolios als das  $\alpha$ -Quantil der Portfolioverlust-Zufallsvariablen  $L$  definiert, wobei

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{l \geq 0 : P[L \leq l] \geq \alpha\} \quad (4.2)$$

Mit anderen Worten:  $\text{VaR}_\alpha$  ist der maximale Verlust, der mit einer gegebenen hohen Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  nicht überschritten wird. Beachten Sie, dass VaR ein Risikomaß ist, das auf dem Raum begrenzter reeller Zufallsvariablen definiert ist, da Portfolio-Ausfallverluste beschränkt sind. Bezeichne  $F_L(l)$  die kumulative Verteilungsfunktion von  $L$ . Man kann  $\text{VaR}_\alpha$  intuitiv, wie folgt, interpretieren

$$F_L(\text{VaR}_\alpha(L)) = \alpha. \quad (4.3)$$

Da VaR ein Quantil ist, erfüllt er die folgenden Eigenschaften:

i. *Monotonie*

$$\text{Für } L \leq Y \text{ gilt: } \text{VaR}(L) \leq \text{VaR}(Y)$$

Eine kleinere Verlustvariable hat auch einen niedrigeren VaR.

ii. *Positive Homogenität*

$$\text{VaR}(\lambda L) = \lambda \text{VaR}(L), \quad \lambda \geq 0.$$

Die Multiplikation der Verlustvariable mit einem positiven Skalar  $\lambda$  ändert den VaR um denselbenskalaren Multiplikator.

iii. *Translationsinvarianz*

$$\text{VaR}(L + x) = \text{VaR}(L) + x$$

Die Verschiebung der Verlustvariable  $L$  um einen festen Betrag  $x$  verschiebt entsprechend das Quantil um den gleichen Betrag.

Eine wünschenswerte Eigenschaft für ein Risikomaß  $\gamma$  ist die *Subadditivität*. Für ein Paar von Verlustvariablen  $L$  und  $Y$  bedeutet Subadditivität:

$$\gamma(L + Y) \leq \gamma(L) + \gamma(Y). \quad (4.4)$$

Artzner et al. (1999) definiert ein Risikomaß als kohärent, wenn es Subadditivität, Monotonie, positive Homogenität und Translationsinvarianz erfüllt. Leider ist der VaR nicht kohärent, da er nicht die Subadditivität erfüllt. Das Versagen der Subadditivität schwächt die Zweckmäßigkeit, den VaR als Risikomaß zu verwenden.

Eine häufige Anwendung des  $\text{VaR}_\alpha$  ist die Bestimmung des ökonomischen Kapitals  $\text{EC}_\alpha$  auf dem Konfidenzniveau  $\alpha$  über einen bestimmten Zeithorizont. Während Kreditreserven gebildet werden, um erwartete Verluste (EL) aufzufangen, setzen wir:

$$\text{EC}_\alpha = \text{VaR}_\alpha - \text{EL}, \quad (4.5)$$

wobei das ökonomische Kapital  $\text{EC}_\alpha$  darauf ausgelegt ist, unerwartete Verluste abzusorbieren.

### 4.1.2 Expected Shortfall

Expected Shortfall (ES) ist der erwartete Wertverlust am Rand der Verteilung des Verlustes  $L$  eines Kreditportfolios oberhalb einer kritischen Verlustschwelle, die durch ein gewisses Konfidenzniveau  $\alpha$  und den entsprechenden Schwellenwert  $\text{VaR}_\alpha$  definiert ist. Für eine stetige Verteilung des Verlustes „ $L$ “ ist der ES für ein gegebenes Konfidenzniveau  $\alpha$  definiert durch:

$$ES_\alpha(L) = E[L|L \geq \text{VaR}_\alpha] = \frac{1}{1-\alpha} E[L \mathbb{1}_{L \geq \text{VaR}_\alpha}] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\text{VaR}_\alpha}^{\infty} l f_L(l) dl \quad (4.6a)$$

wobei  $f_L(l)$  die Dichtefunktion von  $L$  ist. Es wird in Artzner et al. (1999) gezeigt, dass der ES ein kohärentes Risikomaß ist, wenn  $L$  eine stetige Verteilung besitzt. Die Beziehung zwischen  $ES(L)$  und  $\text{VaR}(L)$  sieht folgendermaßen aus:

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(L) du. \quad (4.6b)$$

Die Beziehung zwischen den beiden Integralen in 4.6a und 4.6b sieht man, wenn man  $u = F_L(\text{VaR}_u)$  und  $l$  als  $\text{VaR}_u(L)$  schreibt, sodass  $u = \alpha$ , wenn  $l = \text{VaR}_\alpha$  und  $u = 1$ , wenn  $l$  gegen  $\infty$  geht. Man sieht auch unmittelbar, dass  $\text{VaR}_u(L) du = l f_L(l) dl$ .

Wir erinnern uns an die Bromwich-Integraldarstellung 2.11e von  $E[L \mathbb{1}_{\{L \geq \text{VaR}_\alpha\}}]$

$$E[L \mathbb{1}_{\{L \geq \text{VaR}_\alpha\}}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \kappa'_L(z) \frac{e^{\kappa_L(z)-zt}}{z} dz, \quad \gamma \in (0, \alpha_+). \quad (4.7)$$

wobei  $t$  den  $\text{VaR}_\alpha$  bezeichnet.

Martin (2006) drückt die Singularität im Integranden in 4.7 als die Summe aus einer integrierbaren Singularität und einem regulären Teil in der Nähe der Singularität  $z = 0$  aus:

$$\kappa'_L(z) \frac{e^{\kappa_L(z)-zt}}{z} = \left[ \frac{\mu_L}{z} + \frac{\kappa'_L(z) - \mu_L}{z} \right] e^{\kappa_L(z)-zt}.$$

Das Integral des 1. Ausdrucks ergibt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mu_L \frac{e^{\kappa_L(z)-zt}}{z} dz = \mu_L P[L > t].$$

Für den zweiten Term transformieren wir die Bromwich-Kontur, sodass sie durch den Sattelpunkt  $\hat{z}$  geht, wobei  $\kappa'_L = t$ . Wir approximieren die Integration des zweiten Terms wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{z}-i\infty}^{\hat{z}+i\infty} \frac{\kappa'_L(z) - \mu_L}{z} e^{\kappa_L(z)-zt} dz &\approx \frac{t - \mu_L}{\hat{z}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{z}-i\infty}^{\hat{z}+i\infty} e^{\kappa_L(z)-zt} dz \\ &= \frac{t - \mu_L}{\hat{z}} f_L(t). \end{aligned}$$

Durch Zusammenfügen der Ergebnisse erhält Martin [5] die folgende Sattelpunkt-Approximationsformel für ES:

$$E[L \mathbb{1}_{\{L \geq \text{VaR}_\alpha\}}] \approx \mu_L P[L > t] + \frac{t - \mu_L}{\hat{z}} f_L(t), \quad t = \text{VaR}_\alpha.$$

# Literatur

- [1] J Ait-Sahalia Yu. “Saddlepoint approximations for continuous-time Markov processes, pp. 507–55”. In: (2006).
- [2] H.E. Daniels. Saddlepoint approximations in statistics vol. 25 pp. 631–650. Annals of Mathematical Statistics, 1954.
- [3] Y.K KWOK. Applied complex variables for scientists and engineers, 2.Auflage. Cambridge University Press, 2010.
- [4] S. Lugannani Rice. Saddlepoint approximation for the dist. of the sum of ind. r.v. Advances in Applied Probability, 1980.
- [5] R. Martin. “The saddlepoint method and portfolio optionalities ,pp. 93–95”. In: (2006).