TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna | Austria

Seminararbeit

Finanz- und Versicherungsmathematik

Die Überschusstheorie von sozialen Schichten und die Größenverteilung von persönlichem Reichtum

Claudia Kebsak

Matrikelnummer: 11810851

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

"In Gesellschaften, in denen Überschuss existiert, ist eine Gleichverteilung des Reichtums fast nicht existent". Das ist die Hauptaussage, welche die Überschusstheorie für soziale Schichten zu erklären versucht. Dafür wird das Modell der Überschusstheorie aufgestellt, getestet und anschließend ausgewertet.

In dieser Arbeit wird analysiert, welche Funktionen wir verwenden können, um die Größenverteilung von persönlichem Reichtum zu modellieren und approximieren. Eingeleitet wird das Thema damit, dass man Dichtefunktionen an die Größenverteilung anpassen möchte. Es werden unter anderem die Gammadichtefunktionen und die logarithmische Normalverteilung verglichen. Man versucht verschiedenste Gesellschaften modellieren zu können und untersucht die Auswirkung von der Entwicklung der Technologie auf die Form der Verteilung von persönlichem Reichtum. Alle Gesellschaften, beginnend bei den Jägern und Sammlern bis in die 1960er Jahre, werden verglichen und modelliert. Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen die Aussage: "die Reichen werden reicher und die Armen werden ärmer" zutrifft und wie sie sich auf das aufgestellte Modell auswirkt. Dabei wird die Konzentration des Reichtums innerhalb einer Gesellschaft analysiert und der Entwicklung der Technologie gegenübergestellt.
Die behandelte Überschusstheorie impliziert einen Ungleichheitsprozess, der mithilfe der aufgestellten Definitionen und Propositionen programmiert wird. Anschließend wird untersucht, ob der implizierte Ungleichheitsprozess auch den Anforderungen einer Ungleichheits-Theorie entspricht und ob er auch realistische Verteilungen generiert.

Diese Arbeit bezieht sich, wenn nicht anders angegeben, auf das Paper "The Surplus Theory of Social Stratification and the Size Distribution of Personal Wealth" von John Angle. [1]

2 Dichtefunktionen an die Größenverteilung von persönlichem Reichtum anpassen

Die Größenverteilung des persönlichen Reichtums ist eine Häufigkeitsverteilung: die Anzahl der Leute, die zwischen x und y Einheiten an Vermögen besitzen. Eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann an die Häufigkeitsfunktion angepasst werden und erschafft eine überzeugende Zusammenfassung der Informationen aus der Häufigkeitsverteilung. Da Dichtefunktionen eine bekannte Beziehung zu stochastischen Prozessen aufweisen, kann das Anpassen der Dichtefunktionen möglicherweise Anhaltspunkte an den Ursprung des sozialen Prozesses geben, der verantwortlich für das Hervorrufen der Ungleichheit des Reichtums ist.

Salem und Mount passten beispielsweise eine zwei Parameter Gammadichtefunktion an die Größenverteilung des Einkommens pro Haushalt, in den U.S.A., in den 1960ern an. Sie erreichten damit sehr gute Annäherungen.

Definition 2.1. (Gammadichtefunktion)
$P_x(x) = (\beta^\alpha \Gamma(\alpha))^{-1} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$
mit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x > 0$

Alpha ist der Formparameter der Gammadichtefunktion und Beta hängt von der Einheit ab, in der x gemessen wird. In dem oben genannten Beispiel, ist α ein Wert zwischen $2,0$ und $2,5$, um die Verteilung der Haushaltseinkommen in den U.S.A. zu approximieren. Setzt man $\beta = 1$, wenn x in Dollar gemessen wird, dann folgt, dass $\beta = 2$, wenn x in halben Dollar gemessen wird. Folgender Zusammenhang zwischen α, β und dem Durchschnitt der Verteilung $\bar{x}$, gilt: $\alpha\beta = \bar{x}$
Der vielleicht erstaunlichste Fakt über die Größenverteilungen des persönlichen Reichtums ist die positive Krümmung, die die Funktion langsam an Null annähert. Also werden die Leute mit sehr großem Reichtum immer weniger. Pareto war sehr überrascht, dass dieses Phänomen in allen Gesellschaften, auch weiter in der Zeit zurück, vorkam und leitete daraus eine allgemeine Aussage ab, die heute als allgemeines Pareto Gesetz bekannt ist. Davis formulierte eine beschränktere Aussage:

"In all places and times the distribution of income in a stable economy, when the origin of measurement is at a sufficiently high income level [incomes of poorer people are discarded] will be given approximately by the empirical formula $Y = aX^{-\nu}$, where Y is the number of people having income X or greater and ν is approximately 1.5."[2, Seite 23]

Laut Davis ist die Verteilung von Einkommen in einer stabilen Wirtschaft unabhängig von Ort und Zeit, wenn wir ein ausreichend hohes Einkommenslevel haben. Wir können die Verteilung folglich mit $Y = aX^{-\nu}$ approximieren. Hier bezeichnet Y die Anzahl der Leute, die ein Einkommen in der Höhe von X oder höher haben und ν

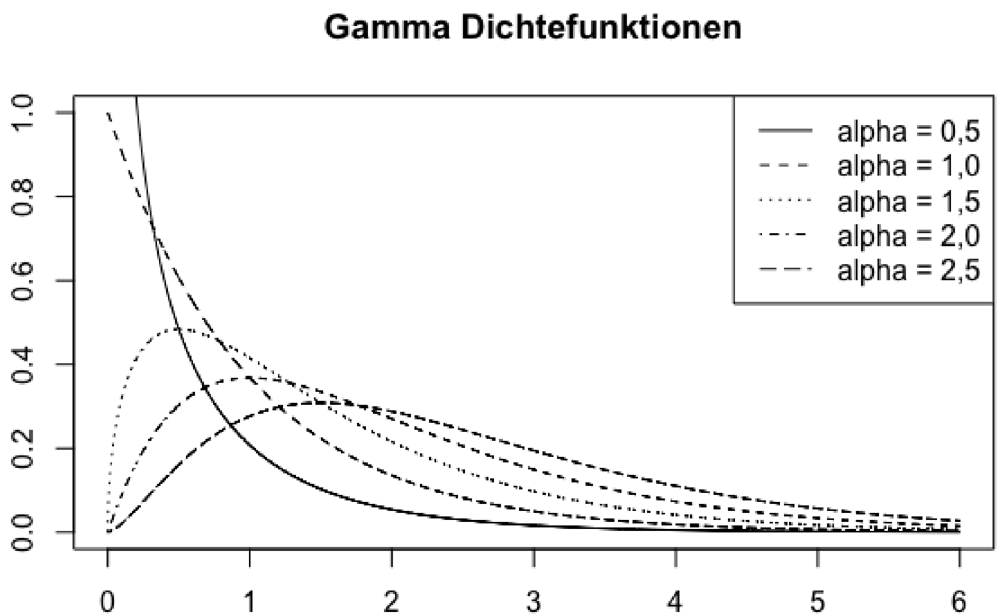

Abbildung 1: Gamma Dichtefunktionen mit $\beta = 1,0$

beträgt approximiert $1,5$.
Davis hat ebenfalls darauf hingewiesen, dass $\nu = 1,5$ ein Gleichgewichtswert ist. Sollte eine Größenverteilung von Reichtum in einer Gesellschaft mit einer Pareto Funktion angepasst werden, kann mit einem stark abweichenden Wert für ν vielleicht eine Revolution folgen.
Wenige Wirtschaftler schenken dem beschränkten Pareto Gesetz großen Glauben, da ν einen beachtlich großen Bereich hat, wenn die Pareto Funktion an die eigenen Daten von Pareto angepasst werden. Nach Lydall ist die Pareto Funktion nur für die oberen 20% relativ genau. Für den mittleren Teil der Verteilung ist die negative Ableitung der Pareto Funktion nach x mittelmäßig gut und schlecht für die linke Hälfte der Verteilung des Reichtums oder des Einkommens, also die Verteilung von Leuten, die wenig Reichtum haben.

Nun stellt sich die Frage, welche Dichtefunktion an eine ganze Verteilung an Reichtum angepasst werden kann.
Ein Kandidat dafür war eine Zeit lang die logarithmische Normalverteilung, die allerdings nur die Verteilung des persönlichen Einkommens, und nicht des Reichtums approximieren kann. Mit einer Gamma oder Beta Verteilung konnte man die logarithmische Normalverteilung anpassen und verbessern. Ein Vorteil der logarithmischen

Normalverteilung ist, dass man sie mit einem plausiblen stochastischen Prozess beschreiben und somit besser die gewünschte Funktion annähern kann. Es wird erwartet, dass die höheren Einkommen bzw. der größere Reichtum über die Zeit hinweg proportional gleich variiert wie geringeres Einkommen oder Reichtum. Das bedeutet, dass das größere Einkommen in absoluten Zahlen stärker variiert. Man kennt diese Aussage als Gibrats Gesetzt oder "law of proportional effect". Mathematisch kann man Gibrats Gesetzt wie folgt formulieren:
Wir haben einen Markovprozess $Y_t = Y_{t-1} + e_t$, wobei e_t unabhängig von Y_{t-1} ist und der Erwartungswert von e_t null beträgt.
Nun haben wir einen Markovprozess $X_t = X_{t-1} + e_t$, wobei $X_t = lnY_{t-1}$ eine asymptotisch logarithmische Normalverteilung generiert.
Gibrats Gesetzt kann trotz der weitläufig positiv gekrümmten Verteilungen, ohne noch weitere Modifikationen vorzunehmen, nicht als *der* Ungleichheitsprozess bezeichnet werden, da Verteilungen generiert werden, die mit der Zeit unbegrenzt wachsende Varianzen haben.

Der Ungleichheitsprozess, der wahre Prozess, generiert die Verteilung des Reichtums und konvergiert schnell gegen die stationäre (asymptotische) Verteilung. Man konnte beobachten, dass selbst nach den schlimmsten Revolutionen, bei denen erhebliche Änderungen des Reichtums geschahen, die Verteilungen schnell wieder die gewohnte Form annahmen, wenn sie diese überhaupt je verloren haben. Studien, die sich mit den Größenverteilungen von persönlichem Reichtum in Gesellschaften beschäftigten und über Jahre zurück verfolgten, fanden heraus, dass sich die Verteilung von Reichtum im Zuge der Industrialisierung verändert hat.
Es gibt eine große Vielfalt an Dichtefunktionen, die an die Größenverteilung des persönlichen Reichtums oder Einkommens angepasst wurden. McDonald hat herausgefunden, dass die Größenverteilung des Familieneinkommens in den U.S.A. bestmöglich mit Gamma- und Betaverteilungen approximiert werden kann, wenn man Zwei- oder Dreiparameter Verteilungen nimmt. Natürlich gilt, je mehr Parameter eine Verteilung hat, desto besser die Approximation.

3 Die Überschusstheorie von sozialen Schichten

Die wahrscheinlich bekannteste Theorie der Ungleichheit des Reichtums unter Anthropologen, Archäologen und Soziologen ist die Überschusstheorie von sozialen Schichten bzw. "The Surplus Theory of Social Stratification". Die Ursprünge der Theorie im 19. Jahrhundert kann man Adam Smith, Marks und Engels und beispielsweise Lewis Henry Morgan zuschreiben. Im 20. Jahrhundert haben Archäologen die Theorie weiter entwickelt und versucht zu erklären, dass "...the equal distribution of wealth in societies with surpluses is so rare as to be almost non-existent"[3, Seite 371].

Die ersten Nachweise von ungleich verteiltem Vermögen konnten Archäologen bei Ausgrabungen mit dem Beginn von Agrikultur und somit dem Lagern von Lebensmitteln feststellen.
Die Überschusstheorie hat zwei wesentliche Definitionen und zwei wesentliche Propositionen:

Definition 3.1. (Lebensunterhalt)
Lebensunterhalt ist der notwendige Reichtum, um Erzeuger am Leben zu halten und die Langzeitkosten der Produktion zu decken, inklusive der Investitionen, die beinhalten, dass die Familien der Erzeuger am Leben erhalten bleiben.

Definition 3.2. (Überschuss)
Überschuss ist die Differenz von Lebensunterhalt und der totalen Produktion von Reichtum.

Proposition 1. Dort, wo Leute die Möglichkeit haben, einen Überschuss zu produzieren, dort wird ein Teil des Überschusses flüchtig und verlässt den Besitz der Leute, die ihn produziert haben.

Proposition 2. Reichtum überträgt sich auf die Leute, die eine Möglichkeit besitzen, den Reichtum von anderen zu extrahieren. Nimmt man also die Möglichkeit jeder einzelnen Person, den Reichtum in einem allgemeinen Wettbewerb für Überschuss-Reichtum zu übertragen, dann tendieren die reichen Leute dazu, den Armen den Überschuss zu nehmen.

Es gibt eine eingeschränktere und eine ausgeweitete Version der Überschuss Theorie. Die ausgeweitete Version ist die ursprünglich definierte Version, die bereits beschrieben wurde. Die Eingeschränktere ist oft als die originale Version unter Anthropologen und Archäologen bekannt. In der eingeschränkteren Version versteht man unter "Überschuss", überschüssiges Vermögen zu erhalten, um mehr Lebensmittel zu produzieren, als die Leute, die Lebensmittel produzieren, um zu überleben und um weiterhin produzieren zu können. Die ausgeweitete Version der Theorie kann man auf alle Gesellschaften umlegen. Die eingeschränkte Version beschreibt hingegen nur den Übergang von Jäger und Sammler auf den nächst höheren technisch kulturellen Typ einer Gesellschaft, der Ranggesellschaft. Sie erklärt warum Jäger und Sammler, die sich normalerweise mit dem Jagen und Sammeln von Lebensmitteln durchschlagen und auf Gleichheit gerichtet sind, dann reicher werden und Ungleichheit in der Gesellschaft entsteht, sobald sie lernen, Tiere und Pflanzen zu domestizieren. Die eingeschränkte Version setzt voraus, dass den Kleinbauern, die eine Ernte produzieren und besitzen, ein Teil ihrer Ernte genommen wird. Das Konzept vom Tausch von Waren wurde als Basis der Wirtschaft eingeführt. Für viele ist der Tausch von verschieden wertvollen Waren auf Dauer der Grund, warum Reichtum in einigen wenigen Händen verteilt ist.

Beide Überschuss Theorien nehmen an, dass die Erzeuger von Reichtum und Besitz eher nur den Lebensunterhalt besitzen und nicht den Überschuss. Dafür gibt es zwei Gründe. Erstens werden die Kleinbauern mehr Widerstand leisten, je mehr Besitz ihnen genommen wird und je näher sie dem "Wolfs-Punkt" kommen. Der Wolfs-Punkt ist laut Pareto so definiert, dass unter diese Grenze nur noch der Tod kommt, da man weniger als das Lebensnotwendige besitzt. Zweitens werden die Besitzer des Überschusses in ihrem eigenen Interesse handeln und den Erzeugern des Überschusses nur das Lebensnotwendige lassen, damit diese weiterhin produzieren können. Die Richtung beider Theorien, der eingeschränkten und der ausgeweiteten, gehen von Überschuss zu Ungleichheit über. Man sagt, dass der Überschuss und nicht die Agrikultur für die Ungleichheit verantwortlich ist. Der Unterschied zwischen Lebensunterhalt und Überschuss spielt in der eingeschränkteren Version der Überschuss Theorie eine größere Rolle als in der ausgeweiteten, da in einer industrialisierten Gesellschaft der Lebensunterhalt nur einen kleinen Bruchteil des totalen Reichtums ausmacht.

3.1 Was bedeutet Überschuss?

Pearson hat vorgeschlagen, dass die Überschuss Theorie bedeutungslos ist, da das Konzept des Überschusses schwer zu messen ist. Trotzdem verwenden viele Anthropologen weiterhin die Definition: Die ganze Produktion, die über dem Minimum der Ernährungsanforderung steht. Zusätzlich gibt es die Annahme, dass der ganze Überschuss wieder neu verteilt werden kann. Diese Annahme ist essenziell. Misst man die totale Produktion durch die Zweiteilung von Lebensunterhalt und Überschuss, dann teilt man die Produktion in lebensnotwendig und in nichtlebensnotwendig ein. Das Lebensnotwendige kann nicht genommen werden, ohne die weitere Produktion und das Leben der Produzenten zu verletzen. Das Nichtlebensnotwendige kann auch ohne Schaden genommen werden. Misst man den Überschuss nach dieser Methode, so wird vernachlässigt, dass es mehr als nur zwei Stufen von Reichtum geben kann.

3.2 Wie treten Überträge von Überschuss-Reichtum auf?

Proposition 2 der Überschuss Theorie erklärt die Überträge von Reichtum. Die Proposition beteuert, dass der Reichtum selbst die Möglichkeit bietet, Reichtum von anderen zu nehmen. Trifft eine reichere Person in einem allgemeinen Wettbewerb für Reichtum auf eine ärmere Person, so würde die reichere Person einen Vorteil gegenüber der ärmeren Person haben und kann Überschuss von der Ärmeren nehmen. Viele Leute kennen dieses Prinzip als "die Reichen werden reicher und die Armen werden ärmer". Man kann dies auch als Schneeballsystem bezeichnen, welches dann jedoch das Problem hätte, den Übertrag zu erklären. Ist nämlich eine reiche Person immer im Vorteil gegenüber einer ärmeren, so würde der Reichtum sehr schnell nur bei einer Person konzentriert sein und alle anderen hätten keinen Reichtum mehr.

Somit würde eine Gesellschaft aus Sklaverei entstehen. Keine Gesellschaft hatte bis jetzt so eine Situation, und somit ist das Schneeballsystem ohne weitere Modifikationen nicht plausibel.
Nun stell sich die Frage, was den Übertrag von Reichtum in einem Aufeinandertreffen von zwei Personen determiniert. Ein Punkt ist der persönliche Charakter. Manche sind gieriger auf Reichtum andere weniger, manche sind genialer als andere und zusammenfassend haben manche einfach mehr Glück als andere. Betrachtet man den Übertrag von Reichtum als System, so spielen individuelle Charaktere keine Rolle und sind wie eine Lotterie, wie ein irrelevanter stochastischer Prozess. Modelliert man die Treffen, bei denen Reichtum die Hände wechselt, so müssen ein paar Annahmen getroffen werden. Eine Annahme ist, dass es eine Regression gibt, bezüglich dem Durchschnitt über die Generationen hinweg. Selbst wenn persönliche Charaktere, die die Ansammlung von Reichtum beeinflussen, vererbt werden, so würden die Erben von sehr begabten Leuten die Eigenschaft verlieren und mehr wie der Rest der Gesellschaft werden. An diesem Punkt wird es zu komplex, den Einfluss der natürlichen Selektion genauer zu untersuchen, man sollte diesen aber in Betracht ziehen.
Es ist plausibel und notwendig, die Treffen, bei denen Reichtum die Hände wechselt, zu modellieren, genauso wie die individuellen Charaktere als White Noise zu modellieren. Ob größerer Reichtum nun Glück schlägt, weiß man nicht, aber größerer Reichtum schlägt die, die ärmer sind sicher nicht jedesmal, da dies Vermögensverteilungen generieren würde, die in dieser Form nicht beobachtet werden konnten.

3.3 Der Widerstand gegen den Abbau von Überschuss

Da die Zweiteilung in Lebensunterhalt und Überschuss zu vereinfacht ist, ist es notwendig, mehrere Stufen von Verfügbarkeit von Überschuss zu beachten. Es ist wahrscheinlicher, die oberen Schichten von Überschuss zu verlieren als die unteren, die kurz vor dem mindesten Lebensunterhalt sind. Es gibt eine Hypothese von Lenski, die diskutiert wieviel Überschuss ein Produzent behält. In dieser Hypothese wird davon ausgegangen, dass Arbeiter in einer industrialisierten Wirtschaft mehr Überschuss behalten als Arbeiter, die primitivere Technologien verwenden, da sie mehr Überschuss produzieren. Dies ist eine außergewöhnliche Behauptung, da Arbeiter, die in der Industrie arbeiten, das Produzierte nicht selbst besitzen, im Vergleich zu beispielsweise Kleinbauern. Laut Lenski ist die Erklärung, dass Arbeiter in der Industrie geschickter sind und mehr Fähigkeiten haben, als Arbeiter mit primitiveren Technologien. Außerdem stehen Arbeiter in der Industrie den reicheren Arbeitgebern direkter gegenüber. Lenski nimmt auch an, dass reiche Leute absoluten Gewinn über relativen Gewinn stellen. Absoluter Gewinn ist erreichbar durch produktivere und begabtere Arbeiter, die zwar proportional mehr von dem Produzierten behalten, aber insgesamt auch mehr für die Arbeitgeber bleibt. Umgekehrt ist der relative Gewinn durch primitivere Arbeiter erreichbar.

Zwei weitere zentrale Propositionen können nun zur Überschuss Theorie hinzugefügt werden:

Proposition 3. Wenn Überschuss von einer Person, die ihn produziert, genommen wird, so bleibt weniger Überschuss übrig, der noch zum Übertrag verfügbar ist.

Proposition 4. Es wird von Produzenten, die in industrialisierten Gesellschaften leben ein proportional kleinerer Teil des Überschusses genommen, als von Produzenten, die in einer primitiveren Gesellschaft leben.

4 Kriterien für eine Ungleichheits-Theorie

Es gibt 5 wichtige Fakten über die Größenverteilungen von persönlichem Reichtum, die eine Theorie über Vermögensverteilungen erklären können muss.

1. Das allgemeine Pareto Gesetz

Die Einheitlichkeit der Form des rechten Endes einer Größenverteilung von persönlichem Reichtum und der Effekt von Lebensmittelüberschuss in Jäger und Sammler Gesellschaften führen zu der Annahme, dass ein einziger Verteilungsprozess in allen Gesellschaften funktioniert.

2. Das beschränkte Pareto Gesetz

Das beschränkte Pareto Gesetz ist, dass das rechte Ende der Größenverteilung von persönlichem Reichtum durch eine Pareto Dichtefunktion angepasst werden muss. Formuliert man das Gesetz noch eingeschränkter, so ist die Aussage, dass der Parameter ν einen Gleichgewichtswert von $1,5$ hat. Weicht dieser Wert stark ab, so wird eine Revolution erwartet.

3. Stabilität

Eine angemessene Theorie sollte beinhalten, dass der Prozess eine stabile Verteilung generiert. In diesem Kontext bedeutet Stabilität, dass die Verteilung, die durch den Ungleichheits-Prozess generiert wurde, schnell gegen die empirische Größenverteilung von Reichtum konvergiert. Die Stabilität der Form der generierten Verteilung ist einer der wichtigsten Punkte. Die Form kann durch die Varianz, durch höhere Momente oder durch den Wert des Formparameters der angepassten Funktion gemessen werden.

4. Evolution der Ungleichheit durch Technologie

Es gibt unter Anthropologen und Soziologen keine klare Definition von Ungleichheit. Oft wird Ungleichheit mit dem "Gini Concentration Ratio" gemessen. Der Gini Ratio misst die Konzentration von Reichtum, indem man die Prozente des gesellschaftlichen Reichtums, wie beispielsweise die reichsten 1, 5, 10 oder 20 Prozent der Bevölkerung misst. In der Anthropologie und Archäologie wird oft der Abstand des Vermögens zwischen der reichsten und der ärmsten Person gemessen. So kann man die Streuung bestimmen. Diese beeinflusst die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person eine andere Person trifft, die eine unterschiedliche Menge an Reichtum hat und somit Ungleichheit erfahren wird. In Ranggesellschaften hat der Großteil der Bevölkerung gerade nur den Lebensunterhalt und somit herrscht unter ihnen Gleichheit, obwohl eine hohe Konzentration des Reichtums in ein paar wenigen Händen liegt und der Unterschied sehr hoch ist.
Zu Zeiten der Jäger und Sammler war die Konzentration des Reichtums am Minimum, da sie keine Lebensmittel Lager hatten. Dörfer, die aus den Jägern und Sammlern entstanden sind, hatten bereits Konzentrationen zwischen Oberhaupt und Gefolge. Der Einfluss der Technologie in Jäger und Sammler Gesellschaften hat also die Konzentration erhöht, wohingegen die Industrialisierung der Produktion die Konzentration des Reichtums wieder gesenkt hat. Simuliert man einen Anstieg des Durchschnitts des Reichtums pro Person, in einem kleinen industriellen Sektor der Wirtschaft, so sinkt in diesem die Konzentration. Jedoch kann es so wirken, als ob sich diese Industrialisierung, auf das ganze Land betrachtet, als Anstieg der Konzentration auswirkt.
Vergleicht man die Konzentration von Reichtum von Ländern, die entwickelter sind, mit nicht so entwickelten und vergleicht man die Konzentration in Ländern mit ihrer jetzigen Lage und ihrer weniger entwickelten Vergangenheit, so kommt man zum gleichen Ergebnis. Industrialisierung verringert die Konzentration von Reichtum.

5. Evolution der Form der Größenverteilungen von persönlichem Reichtum

Wir wissen zwei wesentliche Dinge über die Verteilung von Reichtum in Jäger und Sammler Gesellschaften. Erstens wissen wir, dass die linke Seite der Verteilung eine Grenze hat und der Großteil der Gesellschaft gerade den Lebensunterhalt besitzt und sich auf der linken Seite der Verteilung findet. Der zweite wichtige Punkt ist, dass das rechte Ende der Verteilung auch ein Ende hat und dieses auch sehr kurz ist. Die Tatsache, dass in dieser Gesellschaft schon kleine Unterschiede im Vermögen große Vorteile den anderen gegenüber machten, wird nicht beachtet. Die Verteilung des Reichtums in Jäger und Sammler Gesellschaften kann man mit einer Gammaverteilung mit dem Formparameter $\alpha = 0,5$ modellieren.
In Ranggesellschaften hingegen hat sich die Größenverteilung maßgeblich verändert. Auf der linken Seite ist die Verteilung zu Jäger und Sammler Gesellschaft ähnlich, da bekannt ist, dass der Großteil der Bevölkerung kaum mehr als den notwendigen Lebensunterhalt besaß. Der Unterschied liegt auf der rechten Seite der Verteilung.

Das rechte Ende einer Ranggesellschaft ist deutlich weitläufiger und dicker, da die reichsten Personen einige Vielfachheiten des notwendigen Lebensunterhaltes hatten. Die Verteilung kann man in diesem Fall ungefähr mit dem Formparameter $\alpha = 1,0$ einer Gammaverteilung approximieren. Vergleichsweise konnte man zwischen 1960 und 1969 die Größenverteilung in US-Haushalten mit dem Formparameter α zwischen $1,94$ und $2,51$ approximieren. Diese Größenverteilung ist charakteristisch für Verteilungen in industrialisierten Gesellschaften.

5 Die Überschusstheorie und der Ungleichheits-Prozess

Die Überschusstheorie selbst impliziert einen Prozess, der den Übertrag von Überschuss-Reichtum beschreibt. Diesen Prozess kann man als Ungleichheitsprozess bezeichnen. Sprechen wir jedoch über *den* Überschuss-Prozess, so ist es der Prozess, der die echten Größenverteilungen von persönlichem Reichtum beschreibt. Diesen schreiben wir in Zukunft mit Bindestrich. Um besser die Implikationen des Ungleichheitsprozesses für die Größenverteilungen des persönlichen Reichtums zu analysieren, formulieren wir die Propositionen in mathematisch-algebraische Gleichungen und Aussagen um.
Proposition 1 ist die Grundlage des Prinzips des Überschuss-Reichtums. Es impliziert, dass die Treffen, bei denen Überschuss den Besitzer wechselt, fair und bereitwillig ablaufen. Vereinfacht werden nur Treffen von zwei Personen modelliert und jeweils eine Gleichung für eine Partei aufgestellt. Die Überschusstheorie beschäftigt sich nicht damit, wie Vermögen an sich entsteht, sondern nur mit der Verteilung. Das heißt, dass die Treffen "Null-Summen" sind, also das, was der eine an Überschuss gewinnt, genau das ist, was der andere verliert.
Proposition 2 beschäftig sich mit der Frage, welche Partei das Treffen gewinnt und erklärt es mit dem Schneeballsystem.
Proposition 3 erklärt, wieviel Verlust der Verlierer hat, und dass es verschiedene Schichten gibt, die man verlieren kann.

Die Kommenden Gleichungen (1) und (2) modellieren Proposition 1. Die Chance, dass jemand gewinnt, hat eine konstante Wahrscheinlichkeit von 50%. Gewinnen in diesem Kontext bedeutet, dass der anderen Partei ein Überschuss genommen wird und man selbst seinen Überschuss zur Gänze behält und den Verlust des anderen dazu bekommt. Der Anteil des Verlustes des Verlierers ist eine konstante und zufällige Proportion.

$$X_{mt} = X_{m(t-1)} + dUX_{n(t-1)} - (1-d)UX_{m(t-1)} \tag{1}$$

$$X_{nt} = X_{n(t-1)} + (1-d)UX_{m(t-1)} - dUX_{n(t-1)} \tag{2}$$

wobei,

X_{mt} = der Überschuss Reichtum von Person m nach einem Treffen mit Person n

$X_{n(t-1)}$ = der Überschuss Reichtum von Person n vor einem Treffen mit Person m

$$d = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit 0.5} \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit 0.5} \end{cases}$$

$U =$ eine stetige gleichverteilte Zufallsvariable in [0,1]

Die Gleichung (1) beschreibt das aktuelle Vermögen von Person m, das sich aus dem Vermögen von m vor dem Treffen mit Person n und dem Gewinn oder Verlust aus dem Treffen mit n zusammensetzt. Gewinnt m, so bekommt m genau $dUX_{n(t-1)}$ von Person n. Dieser Gewinn setzt sich aus dem Produkt von d (wobei $d = 1$), U (eine gleichverteilte steitige Zufallsvariable auf [0,1]) und $X_{n(t-1)}$ (Vermögen, mit dem Person n in das Treffen gekommen ist) zusammen.

Proposition 2 der Überschusstheorie beteuert darauf, dass die reichere Partei des Treffens einen Vorteil bei einem Treffen hat. Dieser Vorteil wird in den folgenden Gleichungen (3) und (4) durch den Parameter δ determiniert.

$$X_{mt} = X_{m(t-1)} + dUX_{n(t-1)} - (1-d)UX_{m(t-1)} \tag{3}$$

$$X_{nt} = X_{n(t-1)} + (1-d)UX_{m(t-1)} - dUX_{n(t-1)} \tag{4}$$

wobei,

$$d = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \delta \text{, wenn } X_{m(t-1)} > X_{n(t-1)} \text{ und} \\ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (1-\delta) \text{, wenn } X_{m(t-1)} < X_{n(t-1)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man nimmt laut Proposition 2 an, dass δ größer ist als $0,5$, also die reichere Partei bei dem Treffen eher gewinnen wird als die ärmere.

Proposition 3 der Überschusstheorie besagt, dass man den Überschuss in Schichten betrachten sollte und die oberen Schichten leichter verliert als die, die nahe dem Lebensunterhalt sind. Es sei L die Anzahl an Schichten, die man in der Menge des Überschuss-Reichtums unterscheidet. Ein einfacher Weg, die Wahrscheinlichkeit des Verlustes in jeder Schicht zu modellieren ist, den Durchschinitt des Verlustes einer

Potenzreihe mit L Termen in U (eine [0,1] Zufallsvariablen) zu bilden. Also verliert der Verlierer die Proportion von U_1 in der obersten Schicht, U_2^2 in der nächsten Schicht usw., bis man bei der letzten Schicht eine Proportion von U_L^L verliert.
In diesem Fall ist U_2^2 das Produkt aus U_2 und U_2 und ist unabhängig von U_1. Der erwartete Verlust wird mit jeder Schicht geringer. Je größer L ist, desto kleiner ist der erwartete Verlust des Verlierers.
Ein Verlierer wird eine Proportion von Überschuss-Reichtum verlieren von:

$$\sum_{i=1}^{L} U_i^i / L = Z$$

Verbindet man nun diese Wahrscheinlichkeit mit den bereits aufgestellten Gleichungen des Ungleichheitsprozesses, so kommt man auf folgende Gleichungen:

$$X_{mt} = X_{m(t-1)} + dZX_{n(t-1)} - (1-d)ZX_{m(t-1)} \tag{5}$$

$$X_{nt} = X_{n(t-1)} + (1-d)ZX_{m(t-1)} - dZX_{n(t-1)} \tag{6}$$

Um am Ende noch Proposition 4 miteinzubeziehen und zu modellieren, also dass mit weiter entwickelter Technologie die Resistenz gegenüber des Verlustes des Überschusses steigt, erhöht man einfach L.

5.1 Simulation des Ungleichheitsprozesses

Die Gleichungen (5) und (6) beschreiben den Prozess der Treffen zwischen zwei Parteien, in denen Vermögen die Hände wechselt. Das ist der Ungleichheitsprozess. Die Simulation des Ungleichheitsprozesses in einer Bevölkerung, die Vermögen besitzt, kann die Größenverteilung finden, die von dem Ungleichheitsprozess impliziert wird. Also wird die Größenverteilung von Reichtum gefunden, die bei der Überschusstheorie impliziert wird.

Um den Ungleichheitsprozess zu simulieren, wurde ein FORTRAN Programm geschrieben. Das Programm generiert Fälle, teilt diesen Vermögen zu, arrangiert Treffen, bei denen Vermögen nach dem Ungleichheitsprozess transferiert und testet in periodischen Abständen den Wert der Fälle und zeichnet diesen auf. An sich ist der Transfer von Vermögen, der in diesem Programm simuliert wird, kompatibel mit den Gleichungen (5) und (6), aber keine reine algebraische Auswertung dieser. Das FORTRAN Programm, das den Ungleichheitsprozess simuliert, ruft Unterprogramme des "International Mathematical and Statistical Library, the IMSL "immer dann auf, wenn es angebracht ist. Beispielsweise generieren IMSL Programme [0,1] gleichverteilte Zufallsvariablen und sortierte Vektoren. Ein zweites FORTRAN Programm analysiert die Verteilung die durch den Ungleichheitsprozess generiert wurde. Dieses Programm ruft ein IMSL Programm auf, welches den "one-sample Kolmogorov-Smirnov Test "durchführt.

Bemerkung. Ein Einstichproben Kolmogorv-Smirnov Test ist ein nichtparametrischer Anpassungstest bei dem entweder überprüft wird, ob zwei Verteilungen sich unterscheiden, oder ob sich die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung von der vorhergesagten Wahrscheinlichkeitsverteilung unterscheidet. [4]

Die Anzahl der generierten Fälle des Simulationsprogrammes und die Anzahl der Iterationen des Ungleichheitsprozesses, die erlaubt sind, determinieren das N, der generierten Verteilung. Es gibt zwei Vorraussetztungen, die bei der Wahl von N gegeben sein müssen.
Erstens muss N groß genug sein, um die Form der generierten Verteilung erkennen und testen zu können. Zweitens muss es kostenminimierend sein. Es werden 200 Fälle generiert und jeweils mit genau $4,0$ Vermögenseinheiten bestückt. Die Wahl der anfänglichen Vermögenseinheiten wurde willkürlich gewählt. Das durchschnittliche Vermögen muss größer als Null sein und die Form der Verteilung, die aus den gegebenen Parametern des Ungleichheitsprozesses L und δ bestimmt wird, ist unabhängig von dem Durchschnitt. Jeder der 200 Fälle hat jeweils ein Treffen mit den restlichen 199 während einer Iteration des Prozesses. An sich gibt die Überschusstheorie nicht vor wer sich mit wem trifft, wie oft man die selbe Partei trifft und wie viele Personen zu einer Partei gehören. Um das Modell zu vereinfachen sind in der Simulation nur paarweise Treffen programmiert. Jeder trifft sich mit jedem und auch nur einmal während einer Iteration. Das bedeutet, dass $(200 \cdot 199)/2 = 19.900$ einzigartige Treffen in einer Iteration stattfinden. Nach zwei ganzen Iterationen werden die Fälle das erste Mal untersucht, um den "edge-effect "(der Effekt der Startverteilung) zu entfernen. Dann wird eine weitere Iteration durchgeführt. Nach dieser Iteration werden die Werte der Fälle das erste Mal festgehalten und notiert. Somit hatte jeder Fall $199 \cdot 3 = 597$ Treffen, bei denen Überschuss die Partei wechselte, bevor es zum ersten Mal notiert wird. Weitere 9 Iterationen werden gestartet, nur dass nun nach jeder Iteration, also nach 199 Treffen jeder Partei, die Werte untersucht werden. Die Stichprobe der Beobachtungen des Ungleichheitsprozesses beinhaltet 2.000 Beobachtungen, also 200 Fälle die 10 mal untersucht wurden. Die Beobachtungen eines Falles, also einer Partei, sind unabhängig voneinander, da die Serienkorrelation nach ein paar Austauschen von Überschuss, gegen null geht. Bestimmt man einen Durchschnitt der Werte, so macht man einen Fall von den anderen 199 Fällen abhängig. Diese Abhängigkeit ist jedoch nicht nennenswert und vernachlässigbar.

5.2 Auswertung der Simulation

Der Ungleichheitsprozess wurde einige Male getestet, wobei man verschiedene Werte für die Parameter L und δ verwendet hat. L beschreibt den Grad der Resistenz gegenüber des Verlustes des Überschusses und δ beschreibt den Grad des Vorteils der reicheren Partei in einem Treffen. Obwohl die Überschusstheorie vorschlägt, δ größer $0,5$ zu wählen, wurden in der Simulation auch Werte für δ kleiner $0,5$ gewählt. Generell wurden verschiedene Werte für die zwei Parameter getestet um herauszufinden, ob sie die empirische Größenverteilung des persönlichen Reichtums nachstellen können. Die Kombinationen der beiden Parameter werden wie folgt definiert:
"P" bedeutet einen Vorteil für die ärmere Partei ($\delta = 0,4$).
"R" bedeutet, dass die reichere Partei einen Vorteil hat ($\delta = 0,6$).
"F" bedeutet, dass beide Parteien eine faire Chance auf einen Gewinn haben ($\delta = 0,5$).
"$1L$" bedeutet, dass es eine Schicht der Resistenz gegenüber des Verlustes des Überschuss-Reichtums gibt.
"$2L$" bedeutet zwei Schichten.
"$F3L$" bedeutet also zusammenfassend, dass der Ungleichheitsprozess mit den Parametern $\delta = 0,5$ und $L = 3$ simuliert wird.

Nun stellt sich die Frage, ob man die Größenverteilung, die durch den Ungleichheitsprozess generiert wurde, mit Gamma- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen anpassen kann. Dies kann man erreichen, indem man anhand der Beobachtungen die Parameter der Gammaverteilung schätzt, durch die Annahme, dass es gammaverteilt ist. Um den Formparameter der Zwei-Parameter Gammaverteilung zu schätzen, reicht es, das arithmetische und geometrische Mittel zu kennen. Damit kann man dann den Maximum-Likelihood Schätzer des Formparameters berechnen. Da das Mittel der Beobachtungen fest ist, kann man den zweiten Parameter β, der für die Skala verantwortlich ist, mit Hilfe der Beziehung $\alpha\beta = \bar{x}$ berechnen. Sobald die zwei Parameter α und β der Gammaverteilung geschätzt wurden, kann man eine theoretische Gammaverteilung mit diesen Parametern mit der beobachteten Verteilung vergleichen. Dieser Vergleich wird mit dem Kolmogorov-Smirnov (K-S) Test gemacht. Ein Einstichproben-zweiseitiger K-S Test wird mit Hilfe des IMSL Programms NKS1, durchgeführt. Das Programm MDGAM des IMSL wird dazu verwendet, um Werte der theoretischen Gammaverteilungsfunktion zu generieren.
Die Ergebnisse des K-S Tests sind in der Tabelle 1 abgebildet. In der Tabelle werden die p-Werte unter der Null-Hypothese dargestellt. Die Null-Hypothese besagt, dass die Verteilungen die gleichen sind. Ist der p-Wert nahe $1,0$, so ist ein kaum erkennbaren Unterschied zwischen den Verteilungen. In der Tabelle 1 sind einige sehr gute Ergebnisse dargestellt. Nur für die zwei Simulationen $P1L$ und $F1L$ wird die Null-Hypothese verworfen, da die p-Werte zu niedrig sind. Würde man in diesen beiden Fällen den Formparameter α mit dem "Method of Moments" Schätzer schätzen und

damit die theoretische Gammaverteilung generieren, so wäre der Unterschied auch sehr gering und wir müssten die Null-Hypothese nicht verwerfen. An sich sind Gammaverteilungen, die einen Formparameter kleiner als $0,5$ haben, wie $P1L$ und $F1L$ es haben, schwerer zu schätzen. Die anderen 16 Simulationen können mit Gammaverteilungsfunktionen verglichen werden.

Tabelle 1: p-Werte eines zweiseitigen Einstichproben K-S Test*

	Parameter δ		
Schichten (L)	$0,4$ (P)	$0,5$ (F)	$0,6$ (R)
1	$0,0848$**	$0,0420$**	$0,9270$
2	$0,2289$	$0,5486$	$0,9451$
3	$0,6409$	$0,8798$	$0,8877$
4	$0,9722$	$0,4475$	$0,6565$
5	$0,5480$	$0,8373$	$0,6410$
6	$0,9530$	$0,6554$	$0,6071$

* $N = 2.000$. Die Formparameter der theoretischen Gammaverteilung passen zu den Beobachtungen von allen Prozessen, die durch die Parameter δ und L definiert werden. Die Parameter werden durch die Beobachtung des Prozesses geschätzt. Diese Schätzungen sind Maximum Likelihood Schätzer. Die Statistik $lnA - lnG$, wobei A das arithmetische Mittel und G das geometrische Mittel sind, wird berechnet. Um α zu schätzen, den Formparameter von $lnA - lnG$, wird die Methode von Greenwood und Durand angewandt. Der Kolmogorov-Smirnov Test wird von dem ISML Programm NKS1 durchgeführt. Die theoretische Gammaverteilungsfunktion, die für den Test benötigt wird, wird von dem ISML Programm MDGAM generiert. Da der Durchschnitt der Beobachtungen fest ist, kann man einen der zwei Parameter der Gammaverteilungsfunktion α und β durch die Gleichung $\alpha\beta = \bar{x}$ berechnen.

** Da die p-Werte jeweils unter den Entscheidungspunkten $0,1$ oder sogar unter $0,05$ liegen, wird die Null-Hypothese verworfen. Das bedeutet, dass die generierte Verteilung des Ungleichheitsprozesses nicht mit der theoretischen Gammmaverteilung vergleichbar ist. Verwendet man in diesem Fall statt des Maximum Likelihood Schätzer (MLE) den Method of Moments Schätzer (MME), so kann man die empirische Verteilung mit der theoretischen vergleichen. Der p-Wert für $P1L$ mit dem MME ist $0,3385$ und für $F1L$ ist es $0,4917$. Somit wird die Null-Hypothese nicht verworfen. Der MME für den Formparameter α ist für $P1L$ $0,6904$ und MLE für $P1L$ $0,6686$. Der MME für α im Prozess $F1L$ ist $0,5369$ und der MLE ist $0,5079$.

Der p-Wert des K-S Tests basiert auf einem N von ungefähr 2.000. Nun stellt sich die Frage, wie gut die Annahme der Unabhängigkeit ist, wenn man 200 Fälle beobachtet und dann noch weitere 9 mal mit denselben Fällen wiederholt. Die Annahme ist exzellent, da die Korrelation zwischen den Werten der Fälle jetzt und später sehr

schnell gegen Null geht. Die Serienkorrelation ist schon nach 5 Treffen fast Null. Die Fälle werden 199 Treffen voneinander entfernt beobachtet. Die Zerfallsgeschwindigkeit der Serienkorrelation hängt leicht von den Parametern δ und L ab, aber für den hier gewählten Bereich der Parameter ist die Variation leicht relativ zu 5 Treffen. Da das durchschnittliche Vermögen fix ist, sind es nur 199 Freiheitsgrade in den 200 Fällen der Simulation. Das exakte N des K-S Tests ist 1.990.
Der Ungleichheitsprozess, so wie er in den Gleichungen (5) und (6) beschrieben wird, generiert Verteilungen, die, wenn sie in Frequenz-Funktionen geordnet sind, durch Gammaverteilungsfunktionen mit Formparametern von $0,38$ bis $3,13$ beschrieben werden. Die Spannweite der Formparameter grenzt annähernd die Spannweite der Formen der generierten Größenverteilungen des Überschuss-Reichtums ein, so wie es über die Jahre hinweg und unter Technologie angenommen wurde. Die Gammaverteilung mit $\alpha = 0,38$ wird durch die Simulation $R1L$, die durch den Ungleichheitsprozess mit $\delta = 0,6$ und $L = 1$ modelliert ist, generiert. Der Ungleichheitsprozess mit $\delta = 0,4$ und $L = 6$ generiert eine Gammaverteilung mit $\alpha = 3,13$ (siehe Tabelle 2).

Tabelle 2: Maximum Likelihood Schätzer von α

	Parameter δ		
Schichten (L)	$0,4$ (P)	$0,5$ (F)	$0,6$ (R)
1	$0,6686$	$0,5079$	$0,3797$
2	$1,0331$	$0,9111$	$0,6665$
3	$1,9029$	$1,3390$	$0,9286$
4	$2,3592$	$1,5809$	$1,1128$
5	$2,5798$	$1,9306$	$1,2379$
6	$3,1307$	$2,2048$	$1,4461$

Je größer L ist, desto größer ist der Formparameter α der Gammaverteilung. Wirft man einen Blick auf Abbildung 1, so sieht man, wie sich die Form der Verteilungen mit der Modernen verändert hat. Proposition 4 der Überschusstheorie besagt, wenn die Resistenz des Verlustes steigt, so sinkt der Grad der Konzentration von Reichtum mit der Industrialisierung. Außerdem wurde gezeigt, wenn Reichtum gammaverteilt ist, so ist der Gini Ratio die einzige Aufgabe des Formparameters. Kann man also die Größenverteilung von Überschuss-Reichtum gut durch Gammaverteilungen annähern, so entspricht die Form der Größenverteilung dem Gini Ratio. Tabelliert man die Werte des Gini Ratio für verschiedene Werte von α, so erkennt man, dass der Gini Ratio sinkt wenn α steigt.

Die Simulationen des Ungleichheitsprozesses haben 4 wesentliche Dinge gezeigt:

1. Proposition 1 der Überschusstheorie, die das Flüchtigkeitsprinzip des Reichtums

beschreibt, kann positiv gekrümmte Verteilungen mit einem langen rechten Ende generieren, ohne die Annahme zu treffen, dass die reicheren Leute einen Vorteil gegenüber den Ärmeren haben. Dies erklärt sich dadurch, da die Simulationen, in denen δ kleiner oder gleich $0,5$ ist, also die reiche Partei keinen Vorteil hat, auch positiv gekrümmte Verteilungen generieren.

2. Der Ungleichheitsprozess generiert Größenverteilungen von persönlichem Reichtum, die gut durch eine Familie von Gammaverteilungen approximiert werden können.

3. Proposition 4, beschreibt die Hypothese, dass Technologie es möglich macht, mehr Resistenz gegenüber dem Verlust von Reichtum aufzubauen und dafür verantwortlich ist, den Gini Ratio als die Konzentration des Reichtums zu senken und zu modifizieren. Die Simulationen haben gezeigt, dass der Ungleichheitsprozess mit großem L, also hoher Resistenz gegenüber dem Verlust, modernere Formen von Größenverteilungen haben, also Gammaverteilungen mit größerem Formparameter α.
Es stellt sich noch die Frage, ob man etwas zu Proposition 2 sagen kann. Es steht fest, dass die reichere Partei nicht immer einen Vorteil gegenüber der Ärmeren haben kann, da sonst unmögliche Vermögensverteilungen entstehen würden. Modifiziert man Proposition 2, so generiert sie keine unmöglichen Verteilungen mehr, da den Reicheren einfach eine höhere Chance auf den Gewinn und keinen sicheren Gewinn zugeteilt wird. Der Parameter δ hat den gegenteiligen Effekt auf die Form der Verteilung als der Parameter L. Macht man δ größer, also gibt man der reicheren Partei einen Vorteil, so wird die Form der Verteilungsfunktion wieder in die Richtung der Jäger und Sammler Verteilungsfunktion getrieben. Also nimmt sie dann wieder Charakteristiken von primitiveren Gesellschaften an, einer Gammaverteilung mit niedrigem Formparameter. Gibt man der ärmeren Partei einen Vorteil, also verkleinert den Parameter δ, so wird die daraus resultierende Verteilung einer moderneren Verteilung entsprechen, die einer Gammaverteilung mit einem größeren Formparameter.

4. Die Simulationen des Ungleichheitsprozesses haben gezeigt, dass die Veränderungen an dem Parameter δ, also dem Grade des Vorteils der reicheren oder ärmeren Parteien, die Form der resultierenden Größenverteilungung von persönlichem Reichtum verändern kann.

5.3 Fazit

Wie gut passt nun der Ungleichheitsprozess, der aus der Überschusstheorie von sozialen Schichten folgt, zu den Kriterien, die eine Theorie von Größenverteilungen von persönlichem Reichtum, beziehungsweise ein allgemeiner Ungleichheits-Prozess erfüllen muss? Im folgenden gehen wir die fünf Kriterien einer Ungleichheits-Theorie noch einmal durch.

1. Das allgemeine Pareto Gesetz

Der Ungleichheitsprozess, der aus der Überschusstheorie resultiert, generiert einen Bereich mit Verteilungsfunktionen, die den ganzen Bereich der Formen der Größenverteilungen von persönlichem Reichtum in verschiedensten Stufen von Technik in Gesellschaften approximieren. Das ist ein Mechanismus, bei dem Technologie die Form der Größenverteilung des Reichtums verändert. Technologie ändert sogar die Form der Verteilung, die durch den Ungleichheitsprozess generiert wurde, in die erwartete Richtung. In dieser Arbeit wurde demonstriert, dass ein einziger Prozess die Verteilung von Reichtum von Personen in jeder Gesellschaft erklären kann.

2. Das beschränkte Pareto Gesetz

Das beschränkte Pareto Gesetzt besagt, dass die Größenverteilung von persönlichem Reichtum mit der Dichtefunktion $f(x) = v x_0^v x^{-(v+1)}$ passend gemacht werden kann. In diesem Fall beschreibt x den Reichtum, x_0 den kleinsten Reichtum oder das geringste Einkommen der gegebenen Daten und v ist ein Parameter. Der rechte Teil der Gammaverteilung unterscheidet sich von der Verteilung von Pareto, aber es ist schwierig diese auseinander zu erkennen, wenn man bedenkt, wie man mit dem Reichtum und den Daten umgeht. Gerneriert man Gamma Beobachtungen mit einem IMSL Programm, genauer GGAMR, vereinigt diese in mehr und noch mehr Kategorien für größere und noch größere Werte und passt eine Pareto Funktion daran an, so bedeutet das, dass man passende Ergebnisse haben wird. Der Ungleichheitsprozess erklärt das beschränkte Pareto Gesetz.

3. Stabilität

Der Durchschnitt der Verteilung, die durch den Ungleichheitsprozess generiert wurde, ist fest bei $4,0$. Bei anderen Statistiken der Verteilung kann dieser allerdings frei variieren. Die Varianz, drittes und viertes Moment, Median und der geschätzte α Parameter der Gammaverteilung mit demselben Durchschnitt und Varianz werden nach je 100 Iterationen des Prozesses berechnet. Es gibt 100 Fälle, die in dieser Simulation des Ungleichheitsprozesses beobachtet werden. Wirft man einen Blick auf die Variationskoeffizienten in Tabelle 3, so sieht man, dass diese sehr klein sind und eine kleine Streuung zeigen. Tabelle 4 zeigt, dass es keinen linearen Trend zwischen dem geschätzten Formparameter α und der Anzahl an Iterationen gibt. Einen offensichtlich nichtlinearen Trend gibt es jedoch auch nicht. Der Ungleichheitsprozess generiert stabile Verteilungen.

Tabelle 3: Durchschnitt und Variationskoeffizienten über 100 Iterationen von verschiedenen beschreibenden Statistiken von 100 Fällen*

Statistiken	Prozess						
	$F2L$	$P2L$	$F3L$	$F4L$	$R5L$	$F5L$	$P5L$
Durchschnitt (fest)	$4,0$	$4,0$	$4,0$	$4,0$	$4,0$	$4,0$	$4,0$
Varianz							
Durchschnitt	$16,1$	$13,0$	$12,2$	$9,8$	$12,7$	$8,4$	$5,8$
Variationskoeffizient	$0,198$	$0,178$	$0,180$	$0,169$	$0,217$	$0,194$	$0,163$
3. zentr. Moment							
Durchschnitt	$121,0$	$84,0$	$70,0$	$48,0$	$83,0$	$35,0$	$16,0$
Variationskoeffizient	$0,597$	$0,527$	$0,606$	$0,547$	$0,711$	$0,707$	$0,574$
4. zentr. Moment							
Durchschnitt	$2075,0$	$1289,0$	$1031,0$	$632,0$	$1317,0$	$444,0$	$163,0$
Variationskoeffizient	$0,927$	$0,802$	$0,980$	$0,824$	$1,136$	$1,145$	$0,862$
Median							
Durchschnitt	$2,80$	$3,04$	$3,05$	$3,25$	$2,99$	$3,36$	$3,54$
Variationskoeffizient	$0,093$	$0,092$	$0,078$	$0,071$	$0,091$	$0,067$	$0,049$
Gini Ratio							
Durchschnitt	$0,502$	$0,456$	$0,446$	$0,405$	$0,449$	$0,378$	$0,322$
Variationskoeffizient	$0,060$	$0,059$	$0,057$	$0,060$	$0,066$	$0,070$	$0,067$
Formparameter α**							
Durchschnitt	$1,03$	$1,27$	$1,36$	$1,68$	$1,32$	$1,98$	$2,83$
Variationskoeffizient	$0,209$	$0,178$	$0,167$	$0,159$	$0,211$	$0,186$	$0,159$

* Die Statistiken werden nach jeder Iteration, die die Verteilung nach dem Ungleichheitsprozess generiert, berechnet. Das N in diesen Statistiken entspricht in jeder Verteilung 100 Fällen. Jede Simulation des Ungleichheitsprozesses hat 100 Fälle. Die Simulation läuft 100 mal und produziert 100 Statistiken. In dieser Tabelle wird der Durchschnitt dieser 100 Statistiken dargestellt und die Variationskoeffizienten des Durchschnitts über die 100 Iterationen.

** Hier ist der Formparameter α der Gammaverteilung gemeint. Der Parameter wurde geschätzt mit dem Method of Moments Schätzer von dem Durchschnitt und der Varianz der 100 Fälle in jeder Iteration von dem Ungleichheitsprozess. Wie die anderen Einträge der Tabelle ist der Formparameter der Durchschnitt der Schätzer von den 100 Iterationen.

Tabelle 4: Korrelations-Koeffizienten zwischen dem geschätzten Formparameter der Gammaverteilung und der Anzahl an Iterationen

Prozess	Korrelations-Koeffizient
$F2L$	$0,0335$
$P2L$	$-0,0187$
$F3L$	$0,0446$
$F4L$	$0,1408$
$R5L$	$-0,0269$
$F5L$	$-0,0153$

4. Evolution der Ungleichheit durch Technologie

Nun stellt sich die Frage, wie der Ungleichheitsprozess aus der Überschusstheorie ableitet, dass die Konzentration von Reichtum in primitiven Gesellschaften durch Technologie steigt, und in moderneren und industriellen Gesellschaften sinkt. Der Ungleichheitsprozess generiert annähernd Gammaverteilungen. Bei Gammaverteilungen ist der Gini Ratio, der am meist genutzte Messwert der Konzentration, also die einzige Funktion des Formparameters α. Gammaverteilungen mit großem α haben einen kleinen Gini Ratio, das heißt, je moderner Formen von Größenverteilungen von persönlichem Reichtum sind, desto geringer ist die Konzentration des Reichtums. Anders herum bedeutet das, dass je primitiver die Form der Verteilung ist, desto höher ist die Konzentration des Reichtums. Dies widerspricht auch dem Fakt nicht, dass in den Jäger und Sammler Gesellschaften der persönliche Reichtum trotzdem fast gleichverteilt ist, da der Ungleichheitsprozess den Überschuss modelliert und nicht das totale Vermögen. Der Überschuss in Jäger und Sammler Gesellschaften ist ungleich verteilt und der Gini-Ratio ist sehr hoch, was auch mit der primitiven Form der Gammaverteilung übereinstimmt. Das totale Vermögen, das sich aus dem notwendigen Lebensunterhalt und Überschuss zusammen setzt, ist jedoch annähernd gleichverteilt.

Der Ungleichheitsprozess erklärt den Anstieg und Fall der Konzentration von Reichtum als eine Funktion der fortschreitenden Technologie in zwei entgegengesetzten Punkten:

1. Wenn Technologie sich von der Jäger und Sammler Phase weiterentwickelt, so entspricht der Lebensunterhalt einem kleineren Bruchteil des totalen Reichtums als zuvor. Überschuss ist ungleich verteilt. Ein Fortschritt in der Technologie in Jäger und Sammler Gesellschaften scheint eine Erhöhung der Konzentration von Reichtum hervorzurufen.

2. Der Grad der Ungleichheit des Überschusses von persönlichem Reichtum sinkt, wenn man diesen als Funktion der Technologie betrachtet. Es kann sein, dass dieser Effekt den ersten überwältigt und die Konzentration des Reichtums sinkt, auch wenn der Grad der Ungleichheit kontinuierlich zurückgeht.

Der Ungleichheitsprozess modelliert die Verteilung von persönlichem Überschuss Reichtum, die Informationen die wir über die Form von Größenverteilungen haben beziehen sich allerdings auf den totalen persönliche Reichtum (also Lebensunterhalt und Überschuss summiert). Man kann die Form der Größenverteilungen und der Überschussverteilung in Jäger und Sammler Gesellschaften überlagern, unter der Annahme, dass der Überschuss Reichtum einen kleinen Bruchteil des Lebensunterhalt ausmacht und in der industrialisierten Gesellschaft einen größeren Bruchteil ausmacht. Die Form der Größenverteilung von persönlichem Reichtum kann durch eine Familie von Gammafunktionen approximiert werden. In diesem Fall ist der Formparameter α an die Technologie gekoppelt. Für industrielle Gesellschaften kann man die Größenverteilungen von totalem persönlichen Reichtum mit Gammaverteilungen mit alpha Werten von $2,0$ bis ungefähr $2,5$ approximieren, wobei der Lebensunterhalt einen kleinen Teil ausmacht. In Ranggesellschaften hingegen, wo der Überschuss sehr gering ist und die Funktion der Verteilung eine starke positive Krümmung hat, ist diese angenähert mit einer Gammaverteilung, mit dem Parameter $\alpha = 1,0$, zu modellieren. In Jäger und Sammler Gesellschaften liegt der alpha Wert bei ca. $0,5$, da sie noch weniger Überschuss besitzen. An dieser Stelle sollte man noch einmal erwähnen, dass es sich hierbei nur um eine Approximation von Größenverteilungen von persönlichem Reichtum handelt, da der Definitionsbereich von Gammadichtefunktionen von 0 bis unendlich geht und es in jeder Gesellschaft eine obere endliche Grenze gibt.

6 Spekulationen

Der Ungleichheitsprozess, der aus der Überschusstheorie folgt, erklärt einige vielfältige Fakten über die Größenverteilung von persönlichem Reichtum. Vielleicht ist es ein gutes Modell von *dem* Überschuss-Prozess, dem sozialen Prozess der die Größenverteilung von persönlichem Reichtum formt. Es stellt sich die Frage, welche Implikationen man von dem Modell des Prozesses auf die Zukunft des Ungleichheits-Prozesses ziehen kann.

Die Form der Größenverteilung von persönlichem Reichtum in Gesellschaften auf höheren technologischen Ebenen als sie es jetzt in industriellen Gesellschaften sind, kann mit einer Gammaverteilung mit größeren Formparametern als $2,5$ dargestellt werden. Hierbei handelt es sich um eine einfache Extrapolation. Zukünftige Technologie könnte möglicherweise verhindern, dass wir wieder zurück zu der Form einer Größenverteilung wie von Ranggesellschaften kommen. Weitere technologische Fortschritte könnten es erleichtern, dass die Menschheit ausstirbt, und jegliche weitere Extrapolation hinfällig wäre. Neben diesen Ungewissheiten, scheint es ein guter Ansatz zu sein, eine Beziehung von 10.000+ Jahren (seit dem Beginn der Agrikultur) zu extrapolieren. Wird der Formparameter der Gammaverteilung größer, dann konvergiert die Gammaverteilung gegen die Normalverteilung. Der Gini Ratio sinkt, wenn der Formparameter α der Gammaverteilung steigt, allerdings mit einer langsameren Rate. Eine Gesellschaft mit höheren technologischen Standards als unserer würde nicht eine solch rapide Veränderung des Gini Ratio bewirken wie eine Agrargesellschaft in einer industriellen Revolution. Dies gilt, obwohl der Formparameter aufgrund der zukünftigen Geschwindigkeit der Entwicklung der Technologie wahrscheinlich gleich schnell steigen würde. Die Form der Gammaverteilung und somit auch der Gini Ratio zeigen eine viel höhere Veränderung auf, wenn sich der Formparameter von $0,5$ auf $1,5$ ändert, als von $4,5$ auf $5,5$. Da der Gini Ratio in einer charakteristischen Verteilung einer Agrargesellschaft dazu neigt sehr schnell zu fallen, wenn die Entwicklung der Technologie den Formparameter höher steigen lässt, kann man das damit erklären, dass Agrargesellschaften gegenüber politischen Revolutionen sehr verletzlich sind.

Literaturverzeichnis

[1] Angle John. “The Surplus Theory of Social Stratification and the Size Distribution of Personal Wealth”. In: *Social Forces* 65.2 (1986), S. 293–326.

[2] Davis Harold. *The Theory of Econometrics*. Principia, 1941.

[3] Herskovits Malville J. *The Economic Life of Primitive Peoples*. Knopf, 1940.

[4] *Kolmogorov–Smirnov Test. In: The Concise Encyclopedia of Statistics*. 2008. URL: `https://doi.org/10.1007/978-0-387-32833-1_214`.