The heat equation

Student: Glavic Ajla

Lecturer: Assc. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

Technisches Universitet Wien

13.01.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Grundlagen

Die Theorie von der Wärmegleichung ist von Joseph Fourier im Jahr 1822 entwickelt worden. Die Wärmegleichung ist in der Mathematik und Physik eine bestimmte partielle Differentialgleichung und diese gehört zu den am häufigsten untersuchten Themen in der reinen Mathematik.Wichtig ist, dass die Wärmegleichung auch für Riemannsche Verteiler berücksichtigt werden kann,was zu vielen geometrischen Anwendungen führt. Eine Funktion
u: $\mathbf{U} \times I \to \mathbb{R}$, wobei U offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist und ein Teilintervall I von $\mathbb{R}$, ist eine Lösung der Wärmegleichung wenn :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}$$

Die Wärmegleichung wird oft geschrieben als:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

(Absorption) Eine Wärmeeinheit ist die Menge, die zur Erhöhung der Temperatur benötigt wird von einer Einheit Wasser durch eine Einheit Temperatur. Der Betrag der Erhöhung der Menge von der Wärme ΔQ in einem Material ist direkt proportional zur Masse , des Materials und zum Temperaturansteig

$$\Delta u : \Delta Q = cm\Delta u.$$

Hier ist c eine Proportionalitätskonstante und es wird angenommen, dass sie nur mit dem Material abweicht. (c=1 für Wasser, c=0.03 für Blei, c=0.06 Für Silber).

1.2 Grundlösungen der Wärmegleichung

Einige der grundlegenden Lösungen sind: Exponential Lösung, Wärmepolynome, die Quellelösung, die abgeleitete Quellelösung, ergänzende Fehlerfunktion und elliptische Theta-Funktionen. Im Folgenden werden wir einige der Lösungen mehr beschreiben.

EXPONENTIAL LÖSUNG

Wir wählen zwei Konstanten α und β , so dass eine Lösung der Wärmegleichung

$$exp(\alpha x + \beta t) \text{ mit } \beta = \alpha^2.$$

WÄRMEPOLYNOME

Das Wärmepolynom ist definiert als:

$$e^{xz+tz^2} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) \frac{z^n}{n!}$$
$$v_n(x,t) = n! \textstyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{t^k}{k!} \frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!}$$

1.3 Allgemeine

Die Wärmegleichung spielt eine wichtige Rolle in allgemeinen partiellen Differentialgleichungen linearer zweiter Ordnung:

$$L\{u\} = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial t} + Fu = 0 \ (1)$$

Hier können die Koeffizienten Funktionen von x und t sein, aber nicht von u. Die Gleichung wird in verschiedene Typen eingeteilt:

1. $B^2 - 4AC < 0$ (elliptisch) ; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ (Laplace);
2. $B^2 - 4AC > 0$ (hyperbolisch) ; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ (Welle);
3. $B^2 - 4AC = 0$ (parabolisch); $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ (Hitze).

Die charakteristischen Kurven, die mit Gleichung (1) zugeordnet sind, werden durch Die Differentialgleichung definiert:

$$Adt^2 - Bdydt + Cdx^2 = 0$$

Diese Kurven sind wichtig zur Lösung der Randwertprobleme für (1). Das sogenannte CAUCHY PROBLEM :

$$u(x,t) = \varphi(x,t), u_x(x,t) = \psi(x,t)$$

2 1-D Wärmegleichung

1. Wärmeenergie eines Körpers hat folgende Eigenschaft:

$$\text{Wärmeenergie} = \text{cmu}$$

wobei m-Körpermasse, u-Temperatur, und c-spezifische Wärme. c ist eigentlich die Energie zur Erhöhung eine Einheit Masse der Supstanz in der Temperatur.

2.Laut dem Fourier´schem Gesetz der Wärmeübertragung:Die Wärmeübertragungsrate ist proportional zur negativen Temperatur gradient :

$$\text{Wärmeübertragungsrate/Bereich} = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

wobei K_0 Wärmeleitfähigkeit ist. Mit anderen Worten , Hitze wird von Bereichen mit hoher bis niedriger Temperatur übertragen.

3. Energieeinsparung : Wir betrachten eine Dichte p der länge l mit ungleichmäßiger Temperatur,die auf x-Achse von x=0 bis x=l liegt, die spezifische Wärme c, Wärmeleitfähigkeit K_0 , Querschnittsfläche A wobei alle konstant sind. Dann :

$$\text{Wärmeenergie des Segments} = c \times pA\Delta x \times u = cpA\Delta xu(x,t).$$

Durch die Benutzung vom Fourier'schem Gesetz erhalten wir :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ wobei } k = \frac{K_0}{cp}$$

Beispiel:Abkühlen eines Stabes von einer konstanten Anfangstemperatur
Wir nehmen an, dass eine anfängliche Temperaturverteilung $f(x)$ im Stab konstant ist, also $f(x) = u_0$. Dann ist die Lösung :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$$

wobei die Fourier koeffizienten sind:

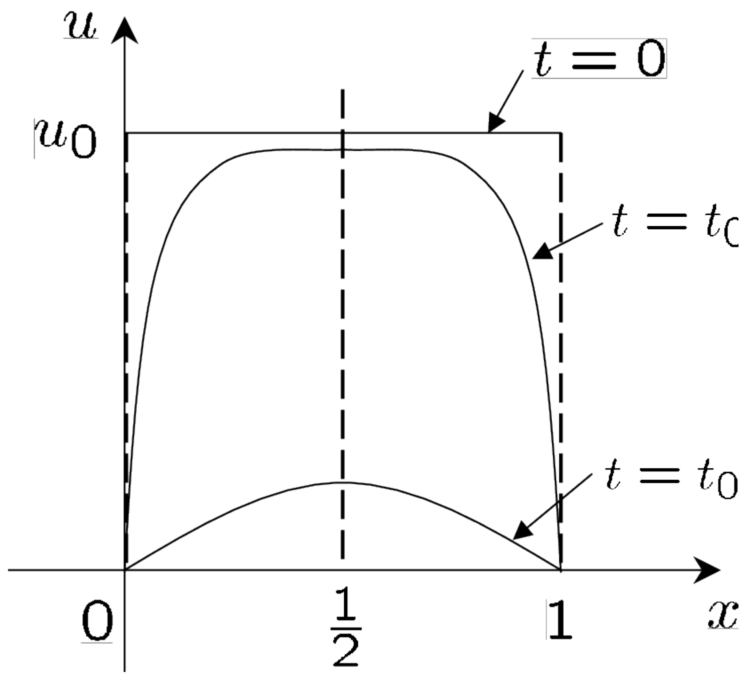
$$B_n = 2\int_0^1 sin(n\pi x)f(x)dx = 2u_0\int_0^1 sin(n\pi x)dx$$

Bei der Berechnung des Integrals bekommen wir : $B_{2n} = 0$, $B_{2n-1} = \frac{4u_0}{(2n-1)\pi}$ und die Lösung wird :

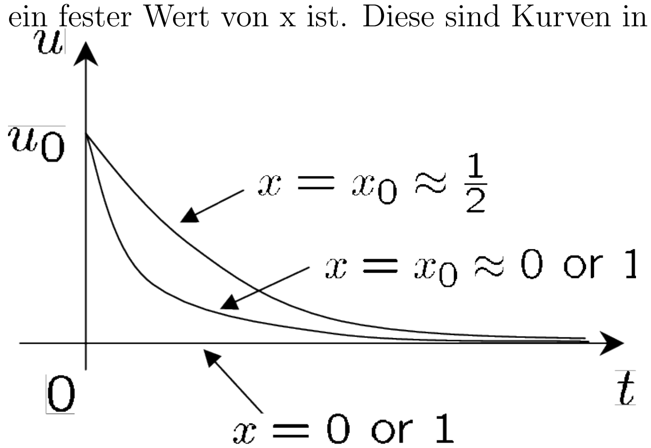
$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin((2n-1)\pi x)}{(2n-1)} exp(-(2n-1)^2\pi^2 t)$$

2.1 Geometrische Visualisierung der Lösung

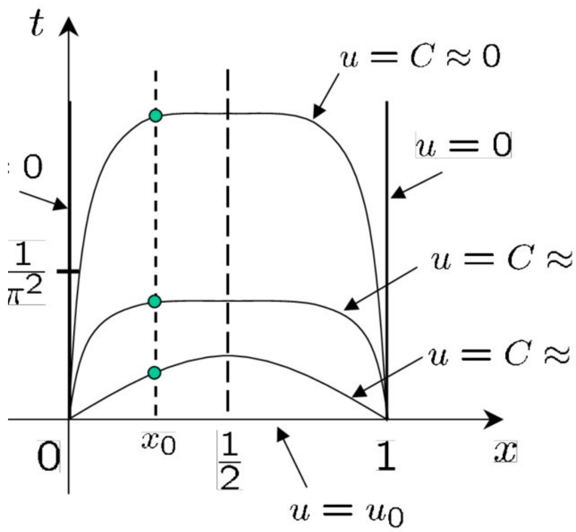
Um die qualitativen Merkmale der Lösung zu analysieren, betrachten wir Kurven in 2D:
1. Räumliches Temperaturprofil ist gegeben durch: $u = u(x, t_0)$, wobei t_0 ein fester Wert von x ist. Diese sind Kurven in der ux-Ebene.



2.Temperaturprofile in der Zeit sind gegeben durch: $u = u(x_0, t)$, wobei x_0 ein fester Wert von x ist. Diese sind Kurven in ut-Ebene.



3.Kurven konstanter Temperatur in der xt-Ebene : $u(x,t) = C$ wobei C ist konstant.



2.2 Maximalprinzip für das Grundwärmeproblem

Die Extrema der Lösung der Wärmegleichung tritt an der Raum-Zeit "Grenze" auf, d.h das Maximum der initiale Bedingung und der zeitlich variierenden Randbedingungen. Genauer gesagt, wir haben eine Wärmegleichung mit einer Anfangsbedingung $f(x)$ und $u(0,t)$, $u(1,t)$, dann auf ein Zeitintervall [0,T] ist die Lösung $u(x,t)$ begrenzt durch :

$$u_{min} \leq u(x,t) \leq u_{max}$$

wobei :

$$u_{max} = max\{max_{0<x<1}f(x), max_{0<t<T}u(0,t), max_{0<t<T}u(1,t)\}$$
$$u_{min} = min\{min_{0<x<1}f(x), min_{0<t<T}u(0,t), min_{0<t<T}u(1,t)\}$$

3 Funktionen

3.1 Positive Temperaturfunktionen

EINZIGARTIGE, POSITIVE TEMPERATUREN AN EINER UNENDLICHEN STANGE

THEOREM A

$$1.\ \alpha_n(x) \in\uparrow, -\infty < x < \infty, n = 1, 2, ...,$$
$$2.\ |\alpha_n(x)| \leq M, -\infty < x < \infty, n = 1, 2, ...$$

$\Rightarrow$ Es gibt ganze Zahlen $n_1 < n_2 <...$ and $f(x) \in\uparrow (-\infty, \infty)$ so dass :

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k}(x) = f(x)\ ,\ -\infty < x < x\infty\ ,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{n_k}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

zu jede $g(x) \in L(-\infty, \infty)$.

THEOREM 1.1

$$1.\ u(x,t) \in H, \geq 0, -\infty < x < \infty, 0 < t < c,$$
$$2.\ 0 < \delta < c$$

$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t)u(y,\delta)dy \leq u(x,t+\delta), 0 < t < c-\delta$ (1)
Wir betrachten für eine beliebige Zahl $A > 0$ die Funktion :

$$v(x,t) = u(x,t+\delta) - \int_{-A}^{A} k(x-y,t)u(y,\delta)dy$$

auf dem Rechteck :
$R = \{(x,t)| - B \leq x \leq B, 0 \leq t \leq c-\delta\}, B > A$
An anderer Seite ist $x = \pm B$ und Integral kann durch Wahl von B gleichmäßig klein gemacht werden, da :

$\int_{-A}^{A} k(x-y,t)u(y,\delta)dy \leq u(x,t+\delta)$

THEOREM 1.2

$$1.\ u(x,t) \in H, \leq 0, -\infty < x < \infty, 0 < t < c,$$
$$2. u(x,t) \in C, -\infty < x < \infty, 0 \leq t < c,,$$
$$3. u(x,0) = 0, -\infty < x < \infty$$

$\Longrightarrow u(x,t) \equiv 0, -\infty < x < \infty, 0 \leq t < c$
Sei $y(x,t) = \int_0^t u(x,y)dy$.
Sei $0 < \delta < c$ and $0 < t_0 < c - \delta$ ind $M = \sqrt{4\pi t_0} \int_{-\infty}^{\infty} k(y,t_0)u(y,\delta)dy$.
Mit Theorem 1.1 :
$M \leq \sqrt{4\pi t_0} u(0, t_0 + \delta)$ Dann:

$$\sqrt{4\pi t_0} k(y,t_0) = e^{\frac{-y^2}{4t_0}} \geq e^{\frac{-x^2}{t_0}}$$

und durch die Konvexität :

$$2xu(x,\delta) \leq \int_0^{2x} u(y,\delta)dy$$

Wir sehen jetzt,dass die Gleichheit in (1) zur Funktion :

$$u(x,t+\delta) - \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t)u(y,\delta)dy$$

ist ≥ 0 und erfüllt alle Bedingungen von Theorem 1.1

STIELTJES INTEGRALE VERTRETUNG, UNENDLICHE STANGE

THEOREM 2

$$u(x,t) \in H, \geq 0, - < \infty < x < \infty, 0 < t < c,$$
$$\Leftrightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) d\alpha(y)$$

wobei $\alpha(y) \in \uparrow (-\infty, \infty)$.
Wenn $\alpha(y)$ eine Sprungfunktion mit einem Sprung bei $y = 0$ ist,enthält dann diese Darstellung $k(x,t)$.
Sei (x_0, t_0) ein beliebiger Punkt und $0 < \delta < c - t_0$ dann bilden wir eine Funktion :

$$\beta_\delta(x) = \int_{-\infty}^{x} k(y,t_0) u(y,\delta) dy \leq u(0, t_0 + \delta)$$

Dann :

$$u(x, t+\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) u(y,\delta) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(x-y,t)}{k(y,t_0} d\beta_\delta(y)$$

wobei:
$0 \leq \beta_\delta(x) \leq u(0,t_0) + 1, -\infty < x < \infty, 0 < \delta < \delta_0$
Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{\delta_n}(x) = \beta(x)$
Sei $\alpha(x) = \int_0^x \frac{d\beta(y)}{k(y,t_0}$ damit haben wir die Gleichung:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) d\alpha(y), o < t < t_0$$

Der Satz ist bewiesen, da $\alpha(x)$ willkürlich war und nicht abnimmt.

WEITERE KLASSEN VON TEMPERATURFUNKTIONEN

THEOREM 3.1

1. $u(x,t) \in H, -\infty < x < \infty, 0 < t < c$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^P dx < M, p > 1, 0 < t < c,$

$\Longrightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) f(y) dy$
wobei :

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^P dy < M$

THEOREM 3.2

1. $u(x,t) \in H, -\infty < x < \infty, 0 < t < c,$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)| dx < M$

$\Longrightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) da(y)$
wobei :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |da(y)| < M$$

3.2 Gebundene Temperaturfunktionen

DIE UNENDLICHE STANGE
Es ist $u(x,t) \in B \cdot H, -\infty < x < \infty, 0 < t < c$ dann und nur dann, wenn:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) f(y) dy, f(y) \in B(-\infty,\infty)$$

THEOREM A

1. $|f_n(x)| < M, -\infty < x < \infty, n = 0,1,2,...$

$\Longrightarrow$ Es existieren ganze Zahlen $n_1, n_2, n_3, ...$ und $f(x) \in B(-\infty,\infty)$ so dass:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{n_k}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

für jede $g(x) \in L(-\infty, \infty)$.

THEOREM 4

1. $u(x,t) \in H \cdot B, -\infty < x < \infty, 0 < t < c$

$\Leftrightarrow u(x,t) = k * f = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) f(y) dy$
Sei (x,t) ein Punkt des Streifens $0 < t < c$.Für eine feste $\delta, 0 < \delta < c - t$ bedenke die Integral :

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) u(y,\delta) dy.$$

Da $u(y,\delta) \in C$ ist, $-\infty < y < \infty$ gilt:

$$\lim_{t \to 0^+} v(x,t) = u(x,\delta)$$

Dann :

$$v(x,t) = u(x,t+\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) u(y,\delta) dy, 0 < t < c - \delta$$

Wir setzen jetzt THEOREM 4 auf $u(y,\delta)$ ein, so dass:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) u(y,\delta_n) dy = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) f(y) dy$$

DIE HALB ENDLICHE STANGE

THEOREM 5

1. $u(x,t) \in H \cdot B, 0 < x < \infty, 0 < t < c,$
2. $u(x,t) \in C, 0 \leq x < \infty, 0 < t < c,$
3. $u(0,t) = 0, 0 < t < c,$

$\Leftrightarrow u(x,t) = \int_0^\infty \{k(x-y,t) - k(x+y,t)\} f(y)dy$ und $f(y) \in B(0,\infty)$
Sei $f(y)$ für $y < 0$, dann :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) f(y)dy$$

Wir können $u(x,t)$ als erweiterte Funktion von $H \cdot B$ in die negative Hälfte des Streifens $0 < t < c$ durch die Definition:

$$u(-x,t) = -u(x,t)$$

Dann :

$$\int_{-\infty}^{0} k(x-y,t) f(y)dy = -\int_0^\infty k(x+y,t) f(y)dy$$

3.3 Homogene Temperaturfunktionen

Sei x und t zwei Variablen. Wir untersuchen ob Funktionen $u(x,t)$ die Wärmegleichung erfüllen und ob sie homogen von Grad n sind:

$$u(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^n u(x,t), \lambda > 0. \ (1)$$

Wir haben zwei Arten von Funktionen:
Erste ist:

$$v_n(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) y^n dy, t > 0, n = 0, 1, ...$$
$$V_n(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xy+ty^2} dy, t < 0, n = 0, 1, ...$$

Zweite ist :

$$h_n(x,t) = \int_0^\infty k(x-y,t)y^n dy, t > o, n = 0,1,...$$
$$H_n(x,t) = \int_0^\infty e^{xy+ty^2} y^n dy, t < 0, n = 0,1,...$$

Wir machen jetzt einen Beweis, dass $v_n(x,t)$ (1) erfüllt. Der Beweis gilt auch für $h_n(x,t)$.

$$v_n(\lambda x, \lambda^2 t) = \int_{-\infty}^\infty k(\lambda x - y, \lambda^2 t) y^n dy, t > 0 \ ,$$
$$= \lambda^{n+1} \int_{-\infty}^\infty k(\lambda x - \lambda z, \lambda^2 t) z^n dz, y = \lambda z.$$

Ähnlich gilt:

$$V_n(\lambda x, \lambda^2 t) = \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda xy + t\lambda^2 y^2} dy, t < 0,$$
$$= \lambda^{-n-1} \int_{-\infty}^\infty e^{xz+tz^2} z^n dz, z = \lambda y.$$

somit sind V und H homogen vom Grad $-n-1$.

THEOREM 6

1. $n = 0,1,2,...$

$\Longrightarrow v_n(x,t), h_n(x,t)$ sind homogen vom Grad n, $t > 0$,
$V_n(x,t), H_n(x,t)$ sind homogen vom Grad $-n-1$, $t < 0$.
Dann:

$$h_n'(x,t) = \int_0^\infty k'(x-y,t)y^n dy = n\int_0^\infty k(x-y,t)y^{n-1}dy$$

Ebenfalls :

$$h_0(x,t) = \int_{-x}^\infty k(y,t)dy, h_0'(x,t) = k(x,t)$$

DIE GESAMTHEIT DER HOMOGENEN TEMPERATUR FUNKTIONEN

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} k(x-z,t-\delta)V_n(z,\delta)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} k(x-z,t-\delta)dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{zy+\delta y^2} y^n dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta y^2} y^n dy \int_{-\infty}^{\infty} k(x-z,t-\delta)e^{zy} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta y^2} e^{xy+ty^2-\delta y^2} y^n dy \\
&= V_n(x,t), \delta < t < 0
\end{aligned}
$$

Der Satz von Fubini ist durch die absolute Konvergenz aller Integrale anwendbar. Ähnlich gilt für H_n.

ZERSETZUNG DER GRUNDFUNKTIONEN
Seien die Funktionen $v_n(x,t)$ selbst Polynome. Für $V_n(x,t)$ gilt:

THEOREM 7

1. $n = 0, 1, 2, ..., t < 0$

$\Longrightarrow V_n(x,t) = (-2t)^{-n} v_n/x, -t)V_0(x,t)$
Aus der Homogenität von $v_n(x,t)$ haben wir:

$$v_n(x,t) = t^n v_n(\tfrac{x}{t}, \tfrac{1}{t}) = t^n v_n(\tfrac{x}{t}, \tfrac{1}{t}) v_0(x,t)$$

Die Huygens-Eigenschaft

Definition 1.1: $u(x,t) \in H^0$ (Huygens-Eigenschaft) ,
$\Leftrightarrow$

A. $u(x,t) \in H$
B. $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-t')u(y,t')dy$

Definition 1.2:

1. $u(x,t) \in H^{\Delta}$

$\Leftrightarrow u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$
wobei :

$$u_1(x,t), u_2(x,t) \in H, \geq 0.$$

Dann :

$$k(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y, t-t')k(y,t')dy, 0 < t' < t < \infty$$

Höhere Dimension

Wir betrachten einen Phasenraum mit rechteckigen Koordinaten x, y, t. Durch die Ungleichungen $a < t < b$ wir meinen die Platte:

$$\{(x,y,t)| -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, a < t < b\}$$

Definition 1.1 : $u(x,y,t) \in H, a < t < b,$
$\Leftrightarrow$

A. $u(x,y,t) \in C^1$
B. $u_t = u_{xx} + u_{yy}$

THEOREM 8.1

$u(x,t), v(y,t) \in H$
$\Leftrightarrow u(x,t)v(y,t) \in H.$
Das ist wahr, wenn :

$$(uv)_{xx} = vu_{xx}, (uv)_{yy} = uv_{yy},$$
$$(uv)_t = uv_t + vu_t = uv_{yy} + vu_{xx} = (uv)_{xx} + (uv)_{yy}.$$

Wir definieren nun die Quellelösung mit der Quelle der Einheitsstärke bei $(x, y) = (0, 0)$
Definition 2.1:

$$K(x, y, t) = k(x, t)k(y, t), -\infty < t < \infty.$$

Wir verwenden $*$ um die zweidimensionale Faltung anzuzeigen:

$$u(x, y) * v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x - \xi, y - \eta)v(\xi, \eta)d\xi d\eta$$

Definition 2.2:

$$v_{m,n}(x, y, t) = v_m(x, t)v_n(y, t), m, n = 0, 1, 2, ...$$

In dieser Form ist v_n ein zweidimensionales Wärmepolynom:
$v_n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x - y, t)y^n dy, t > 0$
Dann :

$$v_{m,n}(x, y, t) = K(x, y, t) * (x^m y^n), t > 0$$

THEOREM 8.2

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < t < \infty$$

$\Longrightarrow e^{x\xi + y\eta + t(\xi^2 + \eta^2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m,n}(x, y, t) \frac{\xi^m}{m!} m \frac{\eta^n}{n!}$
THEOREM 8.3

1. $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 < t < \infty$

$\Longrightarrow K(x-2\xi, y-2\eta, t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} w_{m,n}(x,y,t)\frac{\xi^m}{m!}\frac{\eta^n}{n!}$

BEISPIEL 1

Wir haben die Funktion :

$$u(x,y,t) = (1-4t^2)^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{(tx^2+ty^2+xy)}{(1-4t^2}}$$

Es ist nicht faktorisierbar, da es für $t=0$ auf e^{xy} reduziert wird. Wir zeigen, dass :

$$u(x,y,t) = K(x,y,t) * e^{xy}$$

Dann ist das Integral der Funktion:
$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi,t)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(y-\eta,t)e^{\xi\eta}d\eta$
Der innere Integral ist:

$$e^{tD^2}e^{\xi y} = e^{y\xi+t\xi^2}$$

wobei : $D = \frac{\partial}{\partial y}$.
Dann: $u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi,t)e^{y\xi+t\xi 2}d\xi$
$= e^{\frac{-y^2}{(4t)}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi,t)exp[t(\xi+(y/2t))^2]d\xi$
$= e^{\frac{-y^2}{(4t)}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-r+y(2t)^{-1},t)e^{tr^2}dr$ wobei : $r = \xi + \frac{y}{2t}$.
Entsprechend aus der Maclaurin-Serie :

$$e^{xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xy)^n}{n!}$$

erhalten wir:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_{n,n}(x,y,t)}{n!}$$

wobei: $|t| < \frac{1}{2}$.
Wenn wir jetzt :

$$v_{2n+1}(0,t) = 0 \ , \ v_{2n}(0,t) = \frac{(2n)!t^n}{n!}$$

verwenden, dann :

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} t^{2n}$$

Fourier-Gesetz

Die Wärmeleitungsgleichung spielt eine wichtige Rolle,weil sie die Verteilung der Wärme in einen Körper über die Zeit beschreibt. Die Wärmegleichung leitet sich aus dem Fourier-Gesetz und der Energieerhaltung ab. Das Fourier-Gesetz besagt, dass die zeitliche Wärmeübertragungsrate durch ein Material proportional zum negativen Temperaturgradient und zu der Fläche im rechten Winkel zu dem Gradienten ist, durch den die Wärme fließt. Dass heißt:

$$\overrightarrow{q} = -k \bigtriangledown T$$

wobei: q- Vektor der lokalen Wärmeflussdichte , k- Materiallfähigkeit, $\bigtriangledown T$-Temperatur Gradient.

GENERELLE FORM

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial T}{\partial z}) + q_V = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

wobei: k- Materiallfähigkeit, q_V- Rate, die mit der Energie pro Volumeneinheit des Mediums erzeugt, ρ- Dichte, c_p- spezifische Wärmekapazität.
Diese Gleichung repräsentiert die Fourier-Biot-Gleichung. Aus seiner Lösung können wir das Temperaturfeld als Funktion der Zeit erhalten.

KONSTANTE WÄRMELEITFÄHIGKEIT

$$\alpha \Delta T + \frac{q_V}{\rho c_p} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

wobei: α- thermische Diffusionsfähigkeit des Materials und $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$, q_V- Rate, die mit der Energie pro Volumeninheit des Mediums erzeugt, ρ- Dichte, c_p- spezifische Wärmekapazität.

BEISPIEL 2

Bestimmen Sie mittels des Fourieransatzes die Lösung zu der inhomogenen Wärmeleitungsgleihung :

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} + sin(3\pi x), (t, x) \in (0, \infty) * [0, 1] \\ u(t, 0) = 0, t \in (0, \infty) \\ u(t, 1) = 0, t \in (0, \infty) \end{aligned}$$

$u(0, x) = 5sin(2\pi x) + 2sin(3\pi x), x \in [0, 1]$

Lösung:

Mittels des Ansatzes $u(t, x) = T(t)X(x)$ finden wir wieder den Ansatz :

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) sin(n\pi x).$$

Diesen setzen wir in die inhomogene Wärmeleitungsgleichung ein und erhalten :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) sin(n\pi x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) sin(n\pi x) + sin(3\pi x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dA_n(t)}{dt} sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 A_n(t) sin(n\pi x) + sin(3\pi x), \end{aligned}$$

woraus folgt, dass:

$$\begin{aligned} \frac{dA_n(t)}{dt} = -n^2\pi^2 A_n(t)(n = 1, 2, 3, ...) \\ \frac{dA_3(t)}{dt} = -9\pi^2 A_3(t) + sin(3\pi x). \end{aligned}$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung lauten:

$$A_n(t) = A_n(0)e^{-n^2\pi^2 t}(n = 1, 2, 3...)$$
$$A_3(t) = A_3(0)e^{-9\pi^2 t} + e^{-9n^2 t}\int_0^t e^{9\pi^2\tau}d\tau = 2e^{-9\pi^2 t} + (\tfrac{1-e^{-9\pi^2 t}}{9\pi^2}.$$

Aufgrund der Anfangsbedingung erhalten wir,dass $A_n = 0$ für $n \neq 2, 3$ und $A_n(T) = 5e^{-4\pi^2 t}sin(2\pi x)$. Fassen wir alles zusammen, so folgt:

$$u(t, x) = 5e^{-4\pi^2 t}sin(2\pi x) + [2e^{-9\pi^2 t} + (\tfrac{1-e^{-9\pi^2 t}}{9\pi^2})]sin(3\pi x).$$

Literatur

[1] https: //en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation
[2] D. V. Widder, *The Heat Equation*
[3] https: //ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-303-linear-partial-differential-equations-fall-2006/lecture-notes/heateqni.pdf
[4] https: //www.thermal-engineering.org/de/was-ist-warmegleichung-warmeleitungsgleichung-definition/
[5] http: //www.carsten-erdmann.com/files/vertretung/pdgl_laplace_heat.pdf