Technische Universität Wien

Seminararbeit

Bayesian Methods in Finance

vorgelegt am 27. Februar 2021

Author:
Bleona GASHI

Supervisor:
Prof.Dipl.-Ing.Dr.techn.
Stefan GERHOLD

Table of content

1 Einleitung **2**

2 Bayes' scher Ansatz **3**

3 Satz von Bayes **3**

3.1 A-priori Verteilung 4

3.1.1 Informative Prior Erhebung 5

3.1.2 Nicht informative a-priori Verteilung 6

3.2 A-posteriori Verteilung 6

3.3 Likelihood 7

3.4 Bayes Theorem im Hinblick auf die Modellauswahl 9

3.5 Bayes Theorem im Hinblick auf die Klassifikation 9

4 Bayes' sche nummerische Berechnung **11**

4.1 Monte Carlo Integration 12

4.1.1 Bayes' sche Monte-Carlo Methode 13

4.2 Weitere Algorithmen 13

4.2.1 Rejection sampling Algorithmus 14

4.2.2 Importance sampling Algorithmus 16

4.2.3 Monte-Carlo Markow-Chain Methode 16

5 Bayes'sche Struktur zur Portfolioallokation **17**

5.1 Klassische Portfolioauswahl 19

5.2 Black-Litterman Portfolioauswahl 20

6 Zusammenfassung **22**

1 Einleitung

Im Rahmen dieser Seminararbeit wurde die Thematik der Bayes‘ schen Methoden in der Finanzwelt näher beleuchtet. Der Ausdruck *"Bayes‘ sche Methoden"* stellt einen Sammelbegriff für zahlreiche Konzepte und Techniken dar, welche basierend auf dem Satz von Bayes, zur Lösung finanzieller Probleme angewandt werden. Zeithistorisch betrachtet, gewannen die Bayes‘ schen Methoden, unter vielen anderen Ansatzmethoden, in den letzten Jahrzehnten immer mehr Anerkennung im Finanzwesen, besonders im Risiko- und Portfoliomanagement. Eine wesentliche Rolle in dieser Kerhtwendung spielte die Veröffentlichung eines Papers, verfasst von Markowitz, welches die Ansichten der Portfolioauswahl revolutionierte.
Als Einführung in die folgende wissenschaftliche Arbeit werden voerst die Grundsteine der Bayes' schen Methoden dargelegt. Dabei wird sowohl auf den Satz von Bayes und seine wesentlichen Bestandteile, als auch auf die tiefreichende Wirkung dieses Theorems im Finanzwesen näher eingegangen. Im zweiten Abschnitt der Arbeit wird die numerische Berechnung mittels der Bayes' schen Ansatzmethoden thematisiert. Im letzten Abschnitt dieser Arbeit werden zwei häufig angewandten Möglichkeiten zur Portfolioauswahl näher erklärt und gegenübergestellt.
Zusätzlich werden einige weitere Kofaktoren für die tendenziell wachsende Popularität der Bayes' schen Finanzmethoden und die dafürsprechenden Vorteile im Laufe dieser Arbeit aufgezählt und näher erklärt.

Das Sammelwerk *"Bayesian Methods in Finance"*, verfasst von Svetlozar T. Rachev, Biliana S. Bagasheva, John S. J. Hsu und Frank J. Fabozzi bildet die literarische Grundlage dieser Arbeit.

2 Bayes' scher Ansatz

Die Bayes' sche Ansicht der Welt basiert auf der subjektivistischen Interpretation der Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit wird als subjektiv aufgefasst, genauer gesagt als ein gewisser Glaubensgrad, welcher aktualisiert wird, wenn neue Informationen oder Daten erfasst werden. Die Bezeichnung Bayes' sche Methoden bildet den Überbegriff für diverse Konzepte und Techniken zur Lösung finanzieller Probleme. Diese Methoden erhielten im letzten Jahrhundert immer mehr an Zuspruch. Gründe für diese tendenziell wachsende Popularität stellt beispielsweise die robuste Schätzeinstellung, welche das explizite Schätzungsrisiko beinhaltet, dar.

Die drei Schritte der Bayes' schen Entscheidungsfindung können wie folgt umrissen werden:
1.) Formulierung der a-priori Wahrscheinlichkeiten, um vorhandene Informationen widerzuspiegeln
2.) Aufbau des quantitativen Modells unter Berücksichtigung der Unsicherheit, die den Modellannahmen innewohnt
3.) Auswahl und Bewertung einer Nutzenfunktion, welche die Auswirkungen von Unsicherheit auf alternative Modellentscheidungen beschreibt
(vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.2 ff)

3 Satz von Bayes

Wie bereits vorweggenommen spielt das Theorem von Bayes in der hier behandelten Thematik eine wesentliche Rolle. Der Mathematiker Thomas Bayes postulierte erstmals im 18. Jahrhundert den nach ihm benannten Satz von Bayes. Dieser bildet die Grundlage für die Bayes' schen Verfahren. Formal gesehen ist das Theorem ein Resultat der einführenden Wahrscheinlichkeitstheorie und dem Verknüpfen der bedingungslosen Verteilung einer Zufallsvariable mit ihrer bedingten Verteilung. In Bayes' schen Verfahren wird die Wahrscheinlichkeit als Maß für das potenzielle Eintreten eines Ereignisses interpretiert. Dies macht den Satz von Bayes zu einem hilfreichen Theorem, um seine Überzeugungen mit Hilfe neu gewonnener Information zu aktualisieren.

Im Folgenden wird die diskrete Version des Theorems betrachtet. Hierbei sollen beliebige, jedoch bekannte Daten mit der Variable θ (Theta) gekennzeichnet werden. Diese stellen den bereits vorhandenen Wissensstand (Priori) dar. Der Term $p(\theta)$ symbolisiert die Überzeugungen des/r Forschers/in an diese Daten. Der Satz von Bayes sagt aus, dass nach einer ausgeführten Studie, beispielsweise in Form von einer Beobachtung, unsere zuvor getroffenen Überzeugungen angepasst und aktualisiert werden.

$$p(\theta \mid y) = \frac{p(y \mid \theta) * p(\theta)}{p(y)}$$

Die Wahrscheinlichkeit von θ (Theta) vor Kenntnis der Daten $p(\theta)$, wird als Prior Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Die aktualisierte Wahrscheinlichkeit $p(\theta \mid y)$ wird hingegen als a-posteriori Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass die Anpassungsgröße der vorherigen Wahrscheinlichkeit $p(\theta)$ nach Beobachtung der Daten durch das Verhältnis $p(y \mid \theta)/p(y)$ gegeben ist. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.10 ff)

3.1 A-priori Verteilung

Die Prior Verteilung ist ein wesentlicher Bestandteil des Bayes‘ schen Inferenzprozesses. Die aktualisierten a-posteriori Überzeugungen sind das Resultat eines Kompromisses zwischen der a-priori-Wahrscheinlichkeit und der Datenverteilung. Zur Vereinfachung der Darstellung folgt anbei die unterkontinuierliche Form des Bayes-Theorems.

$$p(\theta|y) \; \alpha \; L(\theta|y) \; \pi(\theta)$$

Wobei die vorkommenden Terme wie folgt definiert sind:

Θ sei ein unbekannter Parameter, dessen Schlussfolgerungen im Fokus des Interesses stehen. Y sei ein Vektor oder eine Matrix, dessen Einträge den aufgezeichneten Beobachtungen entsprechen. Der Term $\pi(\theta)$ sei die vorherige Verteilung von θ in Abhängigkeit von einem oder mehreren Parametern, auch Hyperparameter genannt. Der Ausdruck $L(\theta|y)$ sei die Wahrscheinlichkeitsfunktion für θ. Der Term $p(\theta|y)$ symbolisiere die a-posteriori Verteilung von θ. Zwei Faktoren bestimmen den Grad des a-posteriori Kompromisses, und zwar zum einen die Stärke der vorherigen Informationen und zum anderen die Menge der verfügbaren Daten.

Allgemein kann folgendes Fazit gezogen werden:

Je mehr Beobachtungen, desto größer fällt der Einfluss auf die Daten der a-posteriori-Verteilung aus. Wenn jedoch nur sehr wenige Datensätze verfügbar sind, spielt die a-priori-Verteilung eine ausschlaggebende Rolle in den aktualisierten Überzeugungen. Spekulationen über die Umschreibung der a-priori Information eines Parameters und die analytische (Verteilungs-) Form $\pi(\theta)$ werden immer wieder in der Fachliteratur aufgegriffen. Des Weiteren stellt, die Frage nach der Empfindlichkeit der a-posteriori Inferenz, in Bezug auf die Wahl des Priors, ein schwieriges Unterfangen dar. Es existiert keine "ideale" Methode, um die a-priori Verteilung zu spezifizieren. Des Weiteren ist das Umschreiben subjektiver Ansichten in a-priori Werte für die Verteilung der Parameter, schwer umsetzbar.

Im Anschluss werden einige, in der Praxis häufig verwendete Ansätze, bezüglich der Ermittlung des Priors näher betrachtet. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.22 f)

3.1.1 Informative Prior Erhebung

Prior Überzeugungen werden als informativ angesehen, wenn sie die enthaltenen Informationen aus der Datenstichprobe erheblich ändern. Genauer gesagt, wenn die daraus resultierende Schlussfolgerungen bezüglich der Modellparameter, erhebliche Unterschiede aufweisen. Wobei diese Schlussfolgerungen entweder auf der a-posteriori Verteilung oder der Datenverteilung allein basieren.

Der gängigste Ansatz zur Darstellung informativer Prior Überzeugungen verläuft wie folgt: Es wird eine Verteilung für den unbekannten Parameter ausgewählt und die Hyperparameter werden so spezifiziert, dass die zuvor getroffenen Überzeugungen reflektiert werden. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.23)

3.1.2 Nicht informative a-priori Verteilung

In vielen Fällen sind die a-priori Überzeugungen sehr vage, als Konsequenz fällt es daher schwer diese Überzeugungen in einen informativen Prior umzuwandeln. Daher wird versucht diese gegebene Unsicherheit über die Modellparameter wiederzuspiegeln. Dies soll ohne eine wesentliche Beeinträchtigung der a-posteriori Paramterinferenz geschehen. Zu diesem Zweck wird der sogenannte nicht informative Prior, auch vager oder diffuser Prior genannt, eingesetzt. Nachdem der Bergiff Hyperparamter bereits zweimal aufgetaucht ist, folgt eine kurze Begriffsdiferenzierung. Hyperparameter sind Modellparameter, die ohne Verwendung tatsächlicher, beobachteter Daten geschätzt werden. Der Begriff "Hyperparameter"wird verwendet, um die vorherigen Vermutungsparameter von anderen in der Statistik verwendeten Parametern zu unterscheiden.(vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.25 f)

3.2 A-posteriori Verteilung

Neben der a-priori Verteilung spielt die a-posteriori Verteilung eine ebenso bedeutende Rolle in der Materie der Bayes'schen Statistik. Die a-posteriori Verteilung wird durch das Kombinieren des Priors mit der Likelihood gebildet und entspricht der aktualisierten Version des bereits vorhandenen Wissens. Als Kombination des Priors und der Daten enthält der a-posteriori Teil, als Term $p(\theta|y)$, sämtliche relevanten Informationen über den unbekannten

Parameter θ. Die zwei bereits vorgestellten Formeln

$$p(\theta \mid y) = \frac{p(y \mid \theta) * p(\theta)}{p(y)}$$

und

$$p(\theta|y) \; \alpha \; L(\theta|y) \; \pi(\theta)$$

ermöglichen eine simple Berechnung der a-posteriori Verteilung. Wobei die zweite Formel, welche durch die Proportionalität ausgedrückt wird, liefert nur eine Aproximation der a-posteriori Verteilung und nicht den exakten Wert. Im Falle, dass θ ein diskreter Parameter ist, kann die a-posteriori Verteilung (y) mit Hilfe vom Satz der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet werden. Laut diesem Hilfssatz ergibt die Summe aller möglichen Eriegnisse mit zugehörigen Einzelwahrscheinlichkeiten Eins.

$$p(y) = \sum_{i=1}^{j} p(y|\theta_i)p(\theta_i)$$

(vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.30 ff)

3.3 Likelihood

Likelihoodfunktionen sind ein wesentlicher Bestandteil von sowohl stochastischen, als auch statistischen Prozessen. Ein wichtiger Bestandteil der Bayes' schen Statistik, welcher die Wahrscheinlichkeit einer Variable y unter der Bedingung des Paramters θ ausdrückt, als Term $p(y \mid \theta)$, wurde bereits vorgestellt. Äquivalent zu diesem Term wird im Metier der Bayes' schen Statistik die sogenannte Likelihood gebildet. Diese wird zu einem Parameter, welcher im Normalfall die beobachteten Daten enthält, aufgestellt.

Das Likelihoodgesetzt wird in der nachfolgenden Formel dargestellt.

$$L(\theta \mid y) \; \alpha \; p(y \mid \theta)$$

Aus diesem Gesetz lässt sich die Schlussfolgerung ziehen, dass die Likelihood im Grunde eine Kumulation von Funktionen, ausgewertet an dem Parameter θ und verschiedenen y Werten, ist. Zur Ausführung der Likelihood werden verschieden Modelle verwendet. Ein Modell, welches sehr häufig Anwendung findet, ist das Modell der Maximum-Likelihood Schätzung. Damit das Prinzip für die Anwendung der Likelihoodfunktion verständlicher ist, folgt ein kurzes Beispiel.

In diesem Beispiel seien $(y_1, ..., y_n \;)$ beobachtete Aktienrenditen. Die gemeinsame Dichtefunktion von Y für einen bestimmten Parameter θ sei:

$$f(y_1, .., y_n \mid \theta)$$

Diese Funktion kann aufgrund der beobachteten Aktienrenditen auch als Funktion des unbekannten Paramters θ aufgefasst werden. Diese Funktion von θ wird nun Likelihoodfunktion genannt.

$$L(\theta \mid y_1, .., y_n) = f(y_1, .., y_n \mid \theta)$$

Angenommen es wurden zwei mögliche Schätzwerte für θ eruiert. Diese zwei Werte werden im Folgenden mit θ_1 und θ_2 bezeichnet. Mit Hilfe der Likelihoodfunktion, kann ermittelt werden, welcher dieser zwei Werte dem wahren beziehungsweise gesuchtem Wert θ näherkommt. θ_1 ist verglichen mit θ_2 wahrscheinlicher der gesuchte Wert, falls folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$L(\theta_1 \mid y_1, .., y_n) > L(\theta_2 \mid y_1, .., y_n)$$

Dieses kurze Beispiel sollte die intuitive Idee hinter dem Versuch θ als abgegrenzten Wert eines Datensatzes zu aproximieren, darstellen. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.6 ff)

3.4 Bayes Theorem im Hinblick auf die Modellauswahl

Der gewöhnliche Ansatz zur Modellierung eines Finanzphänomens ist die Spezifizierung und Analyse der Verteilungseigenschaft eines Prozesses, von welchem angenommen wird, dass dieser die beobachteten Daten erzeugt. Dieser Prozess wird im Laufe dieser Methode stets wie ein wahrer Prozess behandelt. Dabei fließt eine gewisse Fehlermenge in den Schätzprozess mit ein. Sowohl die Berücksichtigung des Modellrisikos, als auch die der Parameterunsicherheit spielen eine wesentliche Rolle in diesem Verfahren. Die Grundidee hinter der Anwendung des Bayes Theorems auf die Modellauswahl ist das Kombinieren der neu gezogenen Erkenntnisse mit den zuvor getroffenen Überzeugungen bezüglich der Modellvalidität.
Es existieren zwei Selektionsmöglichkeiten:
In der ersten Option wird das "beste" Modell selektiert, welches die höchste a-posteriori Wahrscheinlichkeit aufweist und dessen Schlussfolgerungen werden betrachtet. Die zweite Möglichkeit besteht in dem Heranziehen von Folgerungen jedes Modells mittels der zugehörigen a-posteriori Wahrscheinlichkeit. Hierbei entsteht insgesamt eine gemittelte Schlussfolgerung. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.14)

3.5 Bayes Theorem im Hinblick auf die Klassifikation

Die Klassifizierung bezieht sich auf die Zuordnung eines Objekts anhand seiner Eigenschaften zu einer von mehreren Kategorien. Am häufigsten findet es im Kreditbereich und Versicherungsrisiko Verwendung. Die Klassifizierung ist aufgrund der Existenz von asymmetrischen Informationen ein statistisches Problem. Für ein besseres Verständnis der Materie wird zunächst ein einfaches Beispiel angeführt.

Es wird folgendes Szenario betrachtet:

Ein Bankinstitut möchte eine/n potenzielle/n Kreditnehmer/in in ein risikobasiertes System einstufen. Das Einstufungssystem besteht aus drei Kategorien; geringes Risiko (L), mittleres Risiko (M) und hohes Risiko (H). Damit eine Zuordnung erfolgen kann, werden Daten bezüglich der finanziellen Stabilität des Kreditnehmers gesammelt. Der gesammelte Datensatz wird im Folgenden durch den vierdimensionalen Vektor y dargestellt. Die Dynamik des Vektors y hängt von der Kategorie, in welcher der/die Kreditnehmer/in eingestuft wurde, ah und wird von einer der drei folgenden Verteilungen beschrieben.

$$f(y \mid C = L)$$

$$f(y \mid C = M)$$

$$f(y \mid C = H)$$

C sei dabei eine Zufallsvariable, welche die Kategorie beschreibt. Die Überzeugungen des Bankinstituts über die Kategorie des/der Kreditnehmers/in seien durch π_i symbolisiert.

$$\pi_1 = \pi(\ C = L\ )$$

$$\pi_2 = \pi(\ C = M\ )$$

$$\pi_3 = \pi(\ C = H\ )$$

Mittels der Anwendung der diskreten Version des Bayes-Theorems, kann die a-posteriori Wahrscheinlichkeit bewertet werden.

$$\pi(\ C = i \mid y), \quad i = L, M, H$$

Damit kann ermittelt werden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit der Zugehörigkeit des/r Kreditnehmers/in in der jeweiligen Kategorie ist. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.14 f)

4 Bayes' sche nummerische Berechnung

Die konstante Aufwärtsentwicklung in den letzten zwei Jahrzehnten im Bereich der numerischen Berechnungsmethoden war die treibende Kraft hinter der tendenziell wachsenden Popularität der Bayes'schen Methoden im Rahmen der empirischen und statistischen Forschung. Im Gegensatz zu der traditionellen und häufiger verwendeten Frequentistischen Struktur bieten die Bayes'schen Methoden eine sehr flexible Rechenstellung für die Schätzung komplexer Finanzmodelle. Die Intention der numerischen Rechenverfahren besteht in der Generierung von Stichproben sowohl aus der a-posteriori Verteilung der Parameter, als auch aus der vorhersehbaren Verteilung in jenen Situationen, an denen keine analytischen Resultate zur Verfügung stehen. Es bedarf eine äußerst sorgfältige Gestaltung der Stichprobenentnahme, damit eine zuverlässige a-posteriori und prädikative Inferenz gewährleistet werden kann. Markov-Kette Monte Carlo (MCMC) Integrationsmethoden ermöglichen die Anpassung von Modellen von praktisch unbegrenzter Komplexität, und haben als solche die Praxis der Bayes' schen Datenanalyse revolutioniert. Ein Vergleich der Modelle kann jedoch nicht analog verlaufen, da die Bedingungen zur Gewährleistung eines Konvergenzverhaltens von Markov-

Ketten im Konflikt zueinanderstehen.
Im Folgenden werden die Grundlagen für die numerische Berechnungsstruktur dargelegt. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.61 f)

4.1 Monte Carlo Integration

Die direkte Monte-Carlo-Integration kann auch als randomisierte Quadratur bezeichnet werden. Die Monte-Carlo-Integration ist eine Technik zur numerischen Integration mit Hilfe von Zufallszahlen. Während andere Algorithmen die Integrale in der Regel in einem regulären Raster auswerten, wählt Monte Carlo zufällig Punkte aus, an denen das Integral ausgewertet wird. Dabei werden im Definitionsbereich einer Gleichverteilung zufällige Werte erzeugt und dabei wird die zu integrierende Funktion f an diversen Stellen ausgewertet. Anschließend wird der Mittelwert dieser Funktionswerte gebildet und mit der Breite des Definitionsbereiches multipliziert. Dieser Wert wird dann zur Schätzung des Integrals verwendet. Im Vergleich zur numerischen Integration werden die deterministischen Stützstellen durch zufällige Stellen ersetzt. Jedoch stellt sich beim Testen des Verfahrens auch schnell heraus, dass gegenüber der numerischen Quadratur normalerweise viel mehr Stützstellen notwendig sind, um ein vergleichbar gutes Resultat zu erzielen.
Auch wenn die Monte-Carlo Approximation wie ein einfacher Weg zur Lösung komplexer Probleme erscheinen mag, hat sich diese Methode in der Praxis nicht bewährt.
Gründe dafür sind beispielsweise:

- hohe Approximationsfehler bei den resultierenden Schätzern
- schwer umsetzbare Stichprobenentnahme

(vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.61 ff)

Im Anschluss werden Bayes‘ sche Alternativen zur klassischen Monte-Carlo-Methode zur Bewertung von Integralen evaluiert.

4.1.1 Bayes' sche Monte-Carlo Methode

Die Bayes' sche Monte-Carlo Methode (BMC Methode) ermöglicht das Einbeziehen von Vorkenntnissen wie beispielsweise, die Glätte des Integranden, in die Schätzung. Diese Methode konnte sich in der Praxis bewähren und schneidet im Normalfall besser ab, als jede klassische Stichprobenmethode. Die Tatsache, dass Proben aus jeder beliebigen Verteilung gezogen werden können, ist ein ausschlaggebender Vorteil des Bayes'schen Ansatzes für Monte Carlo. Dies ermöglicht die aktive Mitbestimmung von Stichprobenpunkten und infolgedessen die Möglichkeit der Maximierung des Informationsgewinns. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.74 f)

4.2 Weitere Algorithmen

Algorithmen zur Simulation aus der a-posteriori Verteilung können grundsätzlich in folgende Kategorien unterteilt werden:
1) Unabhängige Simulationen:
Diese Kategorie enthält Algorithmen, welche eine unabhängige und identisch verteilte Probe von der a-posteriori Verteilung erzeugen.
2) Abhängige Simulationen:
Zur zweiten Kategorie gehören jene Algorithmen, deren Ausgabe eine Stichprobe von (fast) identisch verteilten, jedoch nicht unabhängigen, Auslosungen von der a-posteriori Verteilung darstellt.
Die Algorithmen aus der ersten Gattung können als Vorläufer für die zweite Gattung angesehen werden. Die a-posteriori Simulation verwendet in der Praxis häufig eine Mischung der beiden Algorithmenarten. Vertreter der ersten Gruppe sind beispielsweise das importance sampling (=Wichtigkeitsstichproben) und das rejection sampling (=Ablehnungsstichproben). In die zweite Kategorie fallen alle Algorithmen basierend auf Erzeugung (Simulation) einer Markov-Kette - der sogenannten Markov-Kette Monte-Carlo-Methoden (MCMC).
Im Folgenden werden die zwei genannten Vertreter,importance sampling und rejection samp-

ling, der ersten Gruppe etwas näher erklärt. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.63 f)

4.2.1 Rejection sampling Algorithmus

Der rejection sampling Algorithmus ist einer der frühen Algorithmen für die Simulation der a-posteriori Verteilung und beruht auf einer einfachen Idee. Im Prinzip geht es darum eine "Hülle"der a-posteriori Dichte zu finden und aus dieser Hülle gewisse Daten zu entziehen. Dabei werden jene Daten weggelassen, welche nicht zur a-posteriori Verteilung gehören. Um den Ablehnungsabtastungsalgorithmus zu verwenden, muss der a-posteriori Teil bis auf eine Proportionalitätskonstante bekannt sein. Die Konstante, welche das Verhältnis angibt, ergibt sich aus dem Nenner der Bayes Ratio. Das Grundprinzip des rejection sampling Algorithmus wird nun im Anschluss anhand eines einfachen Beispiels und einer Grafik näher erläutert.

Im Folgenden wird angenommen, dass eine Funktion $h(\theta)$ verfügbar ist, so dass

$$p(\theta \mid y) \leq Kh(\theta)$$

Dabei soll K eine Konstante größer als 1 sein. Dann übernimmt $h(\theta)$ die Rolle der Hüllenfunktion. Dabei soll an dieser Stelle beachtet werden, dass $h(\theta)$ selbst eine Dichtefunktion sein könnte, dies ist jedoch nicht erforderlich. Die Rolle von K besteht darin, sicherzustellen, dass die vorherige Ungleichung für alle Werte von θ erfüllt ist.

Das rejection sampling Verfahren zum Erhalten einer Ziehung vom a-posteriori Teil von θ besteht aus den folgenden Schritten:

1.) Entziehung von θ aus $h(\theta)$ und Bezeichnung dieser Auslosung mit $\theta*$.

2.) Berechnen des Verhältnisses $a = p(\theta * \mid y)\ Kh(\theta*)$

Es folgt entweder die Akzeptanz der Auslosung $\theta*$ mit der berechneten Wahrscheinlichkeit a, als Auslosung vom a-posteriori Teil, $p(\theta \mid y)$ oder Ablehnung der Auslosung und Wiederholung von Schritt 1).

Um zu entscheiden, ob die Auslosung akzeptiert werden soll oder nicht, wird eine Beobachtung u aus der gleichmäßigen Verteilung auf (0, 1) gezogen. Wenn $u \leq a$ ist, wird $\theta*$ akzeptiert. Wenn $u > a$ ist, wird $\theta*$ abgelehnt.

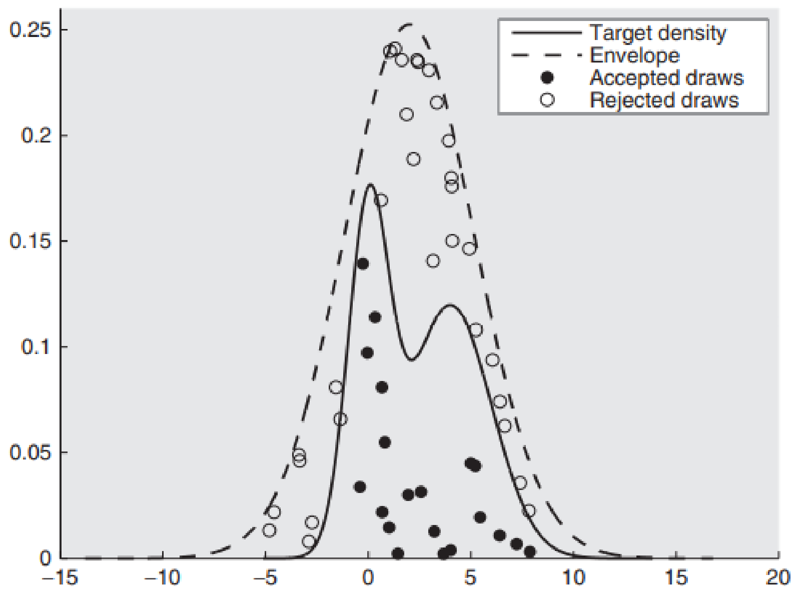

Fig. 1 – Abbildung 1: rejection sampling Algorithmus

Es kann beobachtet werden, dass bei größer werdendem K, die Diskrepanz zwischen $p(\theta \mid y)$ und der Wahrscheinlichkeit, Ziehungen von $h(\theta)$ zu akzeptieren, größer ausfällt. Schließlich werden die Schritte des rejection sampling Algorithmus viele Male wiederholt bis eine genaue Probe aus der a-posteriori Dichte erzeugt werden kann. Dieser Algorithmus ist in Abbildung 1 grafisch dargestellt. Die Auslosungen von θ mit den zugehörigen Punkten unter der a-posteriori Dichtekurve, welche akzeptiert werden, sind in der oberen Grafik in Form von ausgefüllten Kreisen veranschaulicht. Verworfene Ziehungen hingegen, welche in den Außenbereich der a-posteriori Dichtekurve fallen, sind in der Darstellung mit leeren Kreisen symbolisiert. Die Akzeptanzwahrscheinlichkeit a repräsentiert das Verhältnis der Höhen der a-posteriori Dichtekurve und der Hüllenfunktion bei einem bestimmten Wert von θ. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.64 f)

4.2.2 Importance sampling Algorithmus

Ein Algorithmus zur Annäherung von Erwartungen ist der impotance sampling Algorithmus. Dieser steht in Relation zu dem zuvor besprochenen rejection sampling Algorithmus. Die zugrunde liegende Idee ist es, die Genauigkeit eines Schätzers durch stärkere Gewichtung der Simulationen, welche wichtiger beziehungsweise wahrscheinlicher erscheinen, zu erhöhen. Anders als bei dem rejection sampling Algorithmus, werden hier die importance sampling Auslosungen von einer Dichte entnommen, welche der a-posteriori Dichte nahekommt. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.65 f)

4.2.3 Monte-Carlo Markow-Chain Methode

Das Simulieren von unabhängig und identisch verteilten Auslosungen einer komplizierten a-posteriori Dichte ist nicht immer möglich. Die a-posteriori Simulationsalgorithmen, bekannt als MCMC-Methoden, stellen iterative Verfahren zur Probeentnahme aus komplizierten a-posteriori Dichten, durch Vermeidung der Unabhängigkeitsannahme, bereit. Bei jedem Schritt versucht der Algorithmus Parameterwerte mit höherer a-posteriori Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, sodass sich die Approximation unserer erwünschten Dichte der a-posteriori Dichte nähert. Der Grund für die Anwendung der Algorithmen bleibt derselbe und zwar wird versucht die Erwartungen von Funktionen unseres Interesses mit ihren Stichprobenmittelwerten zu approximieren. Der Unterschied ist jedoch, dass die Simulationen von Theta, bei denen die Probenmittelwerte berechnet werden, in Form von Markov-Ketten realisiert werden. In der Tat muss die Markov-Kette ausreichend lange laufen, damit sichergestellt werden kann, dass die Simulationen tatsächlich aus der a-posteriori Verteilung von θ gezogen wurden. Erst dann ist es gerechtfertigt Aussagen über das Konvergenzverhalten der Kette zu tätigen. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.66 f)

5 Bayes'sche Struktur zur Portfolioallokation

Ein von Markowitz verfasstes Paper im Jahre 1952, legte den Grundstein für das, was heute unter dem Begriff "moderne Portfoliotheorie"bekannt ist. Dies hatte tiefreichende Auswirkungen auf die Finanzindustrie. Bis dahin stand die individuelle Sicherheitsauswahl stets im Mittelpunkt der Standard-Anlagepraxis. Danach verlagerte sich der Fokus in Richtung Diversifizierung und Bewertung des Beitrags einzelner Wertpapiere zum Risiko-Rendite-Profil eines Portfolios. Die Mittelwert-Varianz-Analyse beruht auf der Annahme, dass rationale Anleger riskante Vermögenswerte unter der Grundlage von der erwarteten Portfoliorendite und dem Risiko, auswählen. Allerdings hat der Ruf dieser klassischen grundlegenden Struktur in der Praxis aufgrund zahlreicher Umsetzungsschwierigkeiten gelitten. Die daraus abgeleiteten Portfoliogewichte sind notorisch empfindlich gegenüber dem Input. Insbesondere erwartete Rückgaben, stellen häufig nicht intuitive oder gar extreme Zuordnungen dar, welche einen Investor vor unbeabsichtigten Risiken ausstellt. Dieser Input kann in Form von erwarteten Renditen, Abweichungen und Kovarianzen auftauchen. Jedoch unterliegt dieser Input Schätzungsfehlern, welche ein Optimierer im Idealfall auffängt und ausbessert.

Das Schätzungsrisiko muss daher Bestandteil eines umfassenden Risikos vom Ansatz für den Anlageverwaltungsprozess sein. Der Fokus liegt darin, das Auswahlproblem eines Portfolios robuster zu gestallten. Es wurden mehrere Erweiterungen zum klassischen Mittelwert-Varianz System, welche sich mit dieser Thematik beschäftigen, entwickelt. Darunter befinden sich Erweiterungen, welche auf die Schätzung der Eingabeparameter, Faktormodelle, robuste Optimierungstechniken und Portfolio-Resampling abzielen. Sie alle helfen dabei, die Fehler zu beheben, die bei der Parameterschätzung auftreten. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.92 ff)
Im folgenden Abschnitt wird ein genaueren Blick auf die zuvor genannten Erweiterungen geworfen.

Faktormodelle

Faktormodelle beschreiben das Verhalten von Vermögensrenditen anhand von einer kleinen Anzahl von Faktoren, sogenannten Risikoquellen. Sie sind besonders nützlich bei der Schätzung von der Asset-Kovarianz-Matrix durch drastische Reduzierung der Dimension des Schätzproblems, Einführung und Verbesserung der Struktur der Kovarianz Schätzer.

Robuste Optimierungstechnik

Der robuste Ansatz bei der Portfolioauswahl führt den Schätzungsfehler direkt in den Optimierungsprozess. Robuste Optimierungsschwerpunkte liegen häufiger bei Schätzfehlern im Mittelwerten, als in der Kovarianzmatrix. Dies geschieht wahrscheinlich aufgrund der größeren relativen Bedeutung der Fehler in den Mittelwerten. In seiner einfachsten Form besteht die Idee darin, die Portfoliooptimierung als ein zweistufiges Problem zu betrachten. In der ersten Stufe wird der erwartete Nutzen minimiert in Bezug auf die erwartete Rendite. Dies sollte den „schlimmsten“ Schätzfall widerspiegeln, der möglich wäre. In der zweiten Stufe wird der minimal erwartete Nutzen in Bezug auf die Portfoliogewichte für einen bestimmten Risikoaversionsparameter maximiert.

Es existieren Erweiterungen des robusten Frameworks zur Modellierung des Schätzfehlers in anderen Parametereingaben über die erwarteten Renditen hinaus bis zur Berücksichtigung des Modellrisikos.

Portfolio-Resampling

Das Portfolio-Resampling basiert auf einer Monte-Carlo Simulation und hat sich als heuristischer Ansatz zur teilweisen Erfassung von Schätzfehlern erwiesen. Damit zahlreiche Proben aus der Verteilung der Renditen erhalten werden können, werden Probenparameter im Verfahren stets als die wahren Parameter behandelt. Im Anschluss wird eine Effizienzgrenze für jede der Stichproben berechnet und insgesamt wird so die durchschnittliche neu angetastete

Grenze erhalten. Die Portfolios an der neu erhaltenen Effizienzgrenze sind diverser im Vergleich zu den Portfolios an der herkömmlichen Mittel-Varianz Grenze. Somit wird eine Hauptschwäche der Mittelwert-Varianz-Analyse thematisiert. Allerdings werden Schätzfehler, welche in den Parameterschätzungen entstanden sind an die neu ermittelte Effizienzgrenze weitergegeben. Der Bayes'sche Ansatz hingegen thematisiert das Schätzungsrisiko von einer konzeptionell anderen Perspektive. Anstatt die unbekannten Parameter als fixe Parameter zu betrachten, werden sie stets als zufällig gewählt betrachtet. Die Überzeugungen des/r Anlegers/in über die Parametereingaben, kombiniert mit den beobachteten Daten, ergeben eine Gesamtverteilung der prognostizierten Renditen. Diese Verteilung berücksichtigt explizit die Schätzung und Unsicherheit der Vorhersehbarkeit. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.94 f)

Im Anschluss wird die klassische Portfolioauswahl näher beleuchtet.

5.1 Klassische Portfolioauswahl

Die Mittelwert-Varianz-Analyse geht davon aus, dass Rendite und Risiko von Investoren/innen bei Entscheidungen bezüglich der Portfolio-Auswahl berücksichtigt werden. Ein rationale/r Investor/in würde daher ein Portfolio mit einer höheren erwarteten Rendite für ein bestimmtes Risikoniveau bevorzugen. Ein gleichwertiger Weg zu dem Mittelwert-Varianz-Prinzip lautet: Ein bevorzugtes Portfolio ist eines, welches das Risiko für ein bestimmtes erwartetes Renditeniveau minimiert. Die Portfolios, die optimal in diesen beiden gleichwertigen Sinne sind, bilden die effiziente Grenze. Kein rationale/r Investor/in würde in ein Portfolio investieren, das unterhalb der Effizienzgrenze liegt, da dies bedeuten würde, eine niedrigere Rendite bei gleichem Risiko zu akzeptieren. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.94 f)
Der Ruf dieses klassischen Systems hat in der Praxis unter zahlreichen Umsetzungsschwierigkeiten gelitten. Die daraus resultierenden Portfoliogewichte haben sich als notorisch empfind-

lich gegenüber den Inputs, insbesondere den erwarteten Renditen, herausgestellt. Außerdem stellen sie häufig nicht intuitive oder sogar extreme Allokationen dar, welche den/die Anleger/in vor nicht beabsichtigten Risiken aussetzt. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.116 f)

5.2 Black-Litterman Portfolioauswahl

Am Anfang der 90er Jahre schlug die Quantitative Resources Group bei Goldman Sachs ein Modell für die Portfolioauswahl vor. Dieses Modell, im Volksmund als Black-Litterman (BL) -Modell bekannt, ist die wohl bekannteste Anwendung der Bayes' schen Methodik zur Portfolioauswahl.

Gründe, warum das Modell Praktizierende anspricht:

- Portfoliomanager geben Ansichten zu den erwarteten Renditen für Vermögen ihrer Wahl an. Klassische Mittelwert-Varianz-Optimierung erfordert, dass Schätzungen für die Mittelwerte und (Mit-) Abweichungen aller Vermögenswerte des Anlageuniversums zur Verfügung gestellt werden. Angesichts der Anzahl der Wertpapiere ist diese Aufgabe unpraktisch - Portfoliomanager verfügen in der Regel über Kenntnisse und Expertise, sodass sie in der Lage sind zuverlässige Prognosen bezüglich der Rendite von nur wenigen Vermögenswerten, zu erstellen. Dies ist wohl einer der wichtigsten Gründe, warum Portfoliomanager die Mittelwertvarianzoptimierung zugunsten nicht quantitativer Allokationsschemata ablehnen. Das BL-Modell bietet einen einfach anzuwendenden Mechanismus, um die Ansichten qualitativer Vermögensverwalter in das Mittel-Varianz-Problem einzubeziehen.

- Zuordnungen, bei denen nur wenigen Assets Gewichte ungleich Null zugewiesen werden, werden vermieden. Die traditionelle Optimierung der mittleren Varianz wird durch das Problem unrealistischer Vermögensgewichte verfolgt. Die Stichprobenmittel und

> (Co-) Varianzen sind häufig Teil des Inputs im Mittelwert-Varianz-Optimierer, welcher Wertpapiere mit hohen erwarteten Renditen und geringen Standardabweichungen übergewichtet und diejenigen mit niedrigen erwarteten Renditen und hohen Standardabweichungen untergewichtet. Daher treten große Schätzfehler bereits im Input auf und werden automatisch bis zur Portfolioallokation weitergegeben. Der Bayes'sche Ansatz zur Portfolioauswahl und insbesondere das BL-Modell berücksichtigen diese durch die Schätzung entstehende Unsicherheit.

Die Bayes'sche Methodik wird allgemein für die Willkür der Parameterauswahl des Priors kritisiert. Dieser Kritikpunt kann mit Hilfe des BL-Frameworks abgewehrt werden, durch die Verwendung eines Asset Pricing-Modells als Referenzpunkt. Das BL-Modell geht noch einen Schritt weiter und bietet dem Investor die Möglichkeit, exogene, also von außen einwirkende, Überzeugungen beziehungsweise Ansichten zum Asset-Preismodell zu spezifizieren. Im Kern liegt die Erkenntnis, dass ein Investor, welcher marktneutral in Bezug auf all seine Wertpapiere in einer Investition ist, die rationale Entscheidung treffen wird, das Marktportfolio zu halten. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Black-Litterman-Modell eine reibungslose Integration der Ansichten der Anleger über die erwarteten Renditen von Vermögenswerten in den Portfolio Optimierungsprozess ermöglicht. (vgl. Svetloza T. Rachev et al.: *Bayesian Methods in Finance*, New Jersey (2008), S.114 ff)

6 Zusammenfassung

Das Bayes Theorem, welches auf den ersten Blick sehr simpel erscheinen mag, erwies sich als äußerest komplex und offenbarte seine wesentliche Rolle in diversen Bereichen des Finanzwesens. Obwohl dem Theorem und den damit verbundenen Bayes' schen Methoden vorerst nicht viel Wichtigkeit zugesprochen wurde, blieb ihr Potenzial nicht unerkannt. In den 90er Jahren kehrte die Bayes' sche Statistik wieder in den Vordergrund der Wirtschaftswelt zurück.
In Folge dessen konnte im Bereich der nummerischen Rechnungsmethoden mit Hilfe der Bayes' schen Verfahren eine sehr flexibel Recheneinstellung für komplexe Finanzmodelle eruiert werden. Des Weiteren wurden diverse Algorithmen und iterative Approximationsverfahren zur Lösung mathematischer Probleme entwickelt.
Im Bereich des Portfoliomanagements waren ebenso tiefreichende Auswirkungen zu verzeichnen. Nach neu gezogegenen Erkentnissen verlagerte sich der Fokus in der Anlagepraxis und es wurde die moderne Portfoliotheorie eingeführt.
Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich die Bayes' schen Methoden in der Praxis bewährt haben und somit einen wichtigen Stellenwert im Finanzwesen eingenommen haben. Sowohl in der nummerischen Berechnung, als auch im Bereich der Portfolioauswahl konnten mit Hilfe des Bayes' schen Ansatzes zahlreiche Durchbrüche erzielt werden.

Reference

[1] Rachev S, Hsu J, Bagasheva B, Fabozzi F: *Bayesian Methods in Finance*
New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc. Verlag (2008)

Abbildungsverzeichnis

1 Abbildung 1: rejection sampling Algorithmus 15