Seminararbeit

Finanz- und Versicherungsmathematik

EFFICIENCY OF RACETRACK BETTING MARKETS

Marlene Firmötz

Matrikelnummer: 11717863

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Seminararbeit beschäftigt sich mit ausgewählten Kapiteln des Buches „Efficiency of Racetrack Betting Markets - 2008 Edition“ von Donald B. Hausch, Victor S. Y. Lo und William T. Ziemba [3].

Der Pferderennsport ist über den Unterhaltungsfaktor hinaus auch aus vielen weiteren Aspekten interessant. Daher ist dieses Buch ein Sammelwerk bestehend aus verschiedensten wissenschaftlichen Arbeiten, die sich in den letzten Jahrzehnten mit Pferderennen auseinandersetzten.
Psychologen verwendeten die vorhandenen Daten, um Erkenntnisse über das Treffen von Entscheidungen zu erlangen und zahlreiche bereits bekannte Verhaltensmuster fanden Bestätigung. Ökonomen wählten einen rationaleren, nutzenorientierten Zugang, um das Entscheidungsverhalten der Wettenden zu erklären. Dabei halfen ihnen die Rennbahndaten, um eine Vielzahl an Theorien zu überprüfen, sowie neue Theorie zu erstellen. Für Finanzexperten war die Ähnlichkeit von Pferdewettmärkten zu tatsächlichen Finanzmärkten der interessante Faktor. Die kurzlebige Struktur von Wettmärkten bot eine bessere Möglichkeit, das Investorenverhalten und die Markteffizienz zu analysieren, als die weitaus komplexeren Finanzmärkte. Statistiker waren bemüht Schätzungen der Wahrscheinlichkeiten von sehr komplexen Ereignissen zu finden. Mathematiker und Betriebswissenschaftler entwickelten Wettstrategien, die auch heute in anderen Bereichen erfolgreich zum Einsatz kommen.

In dieser Arbeit werden das erste Kapitel der psychologischen Studien und das zweite Kapitel der Nutzenanalyse behandelt.
Das erste Kapitel beschäftigt sich mit der Fähigkeit der Wettenden, die tatsächlichen Gewinnwahrscheinlichkeiten der Pferde zu schätzen und versucht Erklärungen für etwaige Abweichungen zu finden. Es wird erstmals der Begriff des „favourite longshot bias“ erwähnt.
Das zweite Kapitel betrachtet die Nutzenfunktion sowie die Risikoaffinität eines Spielers im Laufe eines Renntages.

2 Ablauf eines Pferderennens

An einem klassischen Pferderennen nehmen sechs bis zwölf Reiter mit ihren Pferden teil. Ziel ist es, schnellstmöglich eine gewisse Distanz zurückzulegen. An einem Renntag finden zwischen acht und elf Rennen statt.
Die Zuseher können dabei *straight*- oder *exotic*-Wetten auf den Rennausgang abschließen, deren Spieleinsätze nach Wetten getrennt in sogenannten *pools* gesammelt werden.
Straight-Wetten beschreiben Wetten auf die Platzierung eines einzelnen Pferdes, bei denen man *win*, *place* und *show* und eventuell noch Kombinationen dieser unterscheidet. Bei *win* muss man den Namen des Siegerpferdes nennen, *place* gewinnt, wenn das Pferd mindestens den zweiten Platz belegt und bei *show* reicht jede Podestplatzierung zum Gewinn aus.
Bei *exotic*-Wetten muss man den Rennausgang für zwei oder mehrere Pferde vorhersagen, diese sind dementsprechend auch komplexer. Beispielsweise bei einem Rennen mit 10 Teilnehmern gibt es 90 verschiedene Möglichkeiten eine *exacta*-Wette abzuschließen, die die Nennung des Erst- und Zweitplatzierten in richtiger Reihenfolge verlangt.
Die exotischen Wetten bieten eine Vielzahl an verschiedenen Konstellationen, auch über mehrere Rennen hinweg, wie zum Beispiel die *daily-double*-Wette, bei der man die Gewinner zweier aufeinanderfolgenden Rennen nennen muss.

Um die Gewinnauszahlung anhand der *win*-Wette darzustellen, betrachten wir nun W_i, den Wetteinsatz auf Pferd i. $\sum_i W_i = W$ beschreibt den gesamten Wetteinsatz im *win-pool* bei einem Rennen. Die Rennstreckeninhaber teilen jedoch nicht ganz W auf die Gewinner auf, sondern ziehen vorher noch die sogenannte *track take* ab. Ein Teil dieses Beitrags wird in Form von Steuern an die Regierung bezahlt, den Rest behalten die Betreiber des Rennens als Verwaltungskosten. Vor der Auszahlung wird der Betrag abgerundet, auf den kleinsten Nickel vor dem ganzen Dollar, das sogenannte *breakage*, das auch der Bereicherung der Rennstreckeninhaber dient. Schlussendlich wird der *track payback* Q an die Gewinner ausgezahlt.
Gewinnt Pferd i das Rennen, beschreibt $\frac{Q*W}{W_i}$ den ausgezahlten Gewinn pro gewetteten Dollar.
Sei nun $O_i = \frac{Q*W}{W_i} - 1$ die Quote (*odds*) von Pferd i. Diese beschreibt den tatsächlichen Gewinn pro einer gewetteten Geldeinheit ($Q_i : 1$).

In anderen Sportarten bestimmen sogenannte Quotenmacher die Wettquoten. Im Pferderennsport jedoch werden sie anhand des Einsatzes auf ein jedes Pferd durch die Wettenden bestimmt, das sogenannte Prinzip des Totalisators.
Zwischen den einzelnen Rennen hat der Spieler Zeit seine Wette abzugeben, während man auf einer Tafel die minütlich aktualisierten Quoten ablesen kann.

3 Psychologische Studien

3.1 Erwartungsnutzenhypothese (EUH)

Die Erwartungsnutzenhypothese (*expected utility hypothesis*) beschäftigt sich mit dem Treffen von Entscheidungen unter Ungewissheit.

Man kann jedem Individuum eine Nutzenfunktion u(.) bezüglich eines Güters (z.B. Geld) zuschreiben. Darin wird einem objektiven Wert auf der x-Achse ein subjektiver Nutzen auf der y-Achse zugeschrieben. Somit kann man verschiedene Optionen nach ihrer Brauchbarkeit sortieren, wie auch im späteren Kapitel 4.1 noch genauer erläutert wird.
Da die Resultate nicht immer deterministische Ereignisse sind, sondern deren Eintreffen auch oft unsicher ist, kann man in diesen Fällen eine Erwartungsnutzenfunktion betrachten, also eine Funktion, die den erwarteten Nutzen der einzelnen Präferenzen modelliert.
Sei u(.) nun eine Nutzenfunktion, deren Definitionsbereich eine endliche Menge an unsicheren Ereignissen $x_1, x_2, .., x_n$ ist, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, .., p_n$ eintreffen ($n \in N$), dann wird die Neumann-Morgenstern-Erwartungsnutzenfunktion V(.) durch

$$V(x) = E[u(x)] = \sum_i u(x_i) * p_i$$

beschrieben.
Die Erwartungsnutzenhypothese besagt nun, dass ein Individuum zwischen unbekannten Ergebnissen so entscheidet, dass es den erwarteten Nutzen $V(x_i)$ maximiert.
Zwei der ersten Analysen des Risikoverhaltens anhand der Neumann-Morgenstern-Funktion wurden von Friedmann und Savage (1948) und Markowitz (1952) durchgeführt. [4]

3.2 Griffith: Subjektive und objektive Gewinnwahrscheinlichkeiten

Bei einem Pferderennen werden die Quoten durch die Wettenden bestimmt. Daher wird die subjektive, psychologische Gewinnwahrscheinlichkeit eines Pferdes durch $\frac{1-a}{O_i+1}$ beschrieben, mit O_i als *odds* des Pferdes i und a den Abzügen der Rennbahn. Der Anteil der Siege eines Pferdes an allen belegten Rennen stellt die tatsächliche, objektive Gewinnwahrscheinlichkeit dar.

3.2.1 Studie und Ergebnisse

Griffith betrachtete für seine Studien die Ergebnisse aus 1386 Rennen, die auf bedeutenden US-Rennbahnen in Churchill Downs, Belmont und Hialeah im Jahr 1947

ausgetragen wurden. Er unterteilte die Pferde nach ihren *odds* in 11 Gruppen und verglich die subjektive Gewinnwahrscheinlichkeit mit der objektiven Gewinnwahrscheinlichkeit der Pferde einer Gruppe.
In seiner Studie stellte Griffith fest, dass die sozial bestimmte Quote im Durchschnitt den tatsächlichen Gewinnchancen eines Pferdes entspricht. Außerdem beobachtete er, dass zu viel Geld auf Pferde, mit niedrigen Gewinnchancen (hohe Quote) und zu wenig Geld auf Pferde, mit hohen Gewinnchancen (niedrige Quote) gesetzt wird und bezeichnete es als *favourite longshot bias*.

3.3 McGlothlin: Stabilität der Wahl

Bei einer Entscheidung über ein ungewisses Ergebnis, wie im Glücksspiel, sind gewöhnlich drei Faktoren relevant: der Einsatz x, der Gewinn y und die objektive Wahrscheinlichkeit den Gewinn zu erzielen, P. Es wird angenommen, dass es im Interesse eines Individuums ist, seinen erwarteten Gewinn zu maximieren. Der Erwartungswert E berechnet sich als Summe über alle möglichen Ereignisse (in diesem Fall Ein- oder Auszahlungen) multipliziert mit deren Eintrittswahrscheinlichkeit. So beschreibt ein positives E einen Gewinn, ein negatives einen Verlust.
Das menschliche Verhalten folgt jedoch nicht immer oben genannten Prinzipien und ist sogar bereit einen negativen Erwartungswert zu akzeptieren, wenn dadurch womöglich der Gewinn höher, jedoch unwahrscheinlicher wird.

McGlothlin behauptet ein Individuum orientiert sich an folgenden drei Faktoren: dem Nutzen einer Wette $u(x)$, dem Nutzen des Gewinns $u(y)$, sowie der subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeit P'. Nun wird angenommen, dass die Entscheidung zwischen ungewissen Alternativen anhand der Maximierung des subjektiv erwarteten Nutzen (*subjectively expected utility*) getroffen wird. [2]

$$SEU = \sum_i P'_i * U_i$$

P'_i.. subjektive Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis i eintritt
U_i.. Nutzen aus Ereignis i

3.3.1 Studie und Ergebnisse

McGlothlin wertete in seiner Studie die Ergebnisse von 9605 Rennen reinrassiger Pferde über die Jahre 1947-1953 aus. Die wichtigsten Daten bezog er aus 9248 Rennen, die an 1156 Tagen stattfanden. Sein Ziel war es anhand dessen die Beständigkeit des Risikoverhalten der Wettenden über mehrere Rennen hinweg zu analysieren.

Ein Zugang ist dabei, die Erwartungswerte unter Anbetracht unterschiedlicher objektiver Erfolgswahrscheinlichkeiten P bei gleichbleibenden Einsätzen zu bestimmen. Dann setzt man diese in Relation mit den *odds* und beobachtet Veränderungen in dieser Beziehung über die Spiele hinweg. Daraus kann man Erkenntnisse über die Stabilität der subjektiven Wahrscheinlichkeit und den Nutzen für den Wettenden gewinnen.

In der Studie beobachtete McGlothlin also Veränderungen im Verhältnis von Erwartungswert zu *odds* im Laufe des Renntages. Da es sich um eine statistische Studie handelt, fehlten Kontrollmechanismen, die in einer Laborstudie gegeben sind. Beispielsweise schwankte die Anzahl der Wettenden, da manche erst später kamen, die Veranstaltung früher verließen, oder nicht in jedem Rennen einen Tipp abgaben. Außerdem variierte die Höhe des gewetteten Einsatzes zwischen den Individuen stark, so dass Spieler mit höheren Einsatz einen größeren Einfluss auf die finalen *odds* hatten.

McGlothlin erkannte, dass die Spannweite der *odds* hauptsächlich von der Differenz der Fähigkeiten der Pferden abhing. In einem klassischen Rennen mit 9-10 Teilnehmern war die *win*-Quote des Publikumslieblings 2:1, die des am wenigsten favorisierten Pferdes 50:1, die *place*-Quote von 1:1 bis 20:1 und die *show*-Quote von 0.5:1 bis 6:1.
Die *win*-Wette ist eine der simpelsten und folglich sind die *odds* für den Wettenden zum Zeitpunkt des Wettabschlusses sehr gut zu kalkulieren. Für *place* und *show*-Wetten sind zum Zeitpunkt der Entscheidung keine vernünftig Schätzungen der *odds* verfügbar.

Bei seinen Studien ging er ähnliche wie Griffith vor und unterteilte die Pferde zuerst nach Rennen, an dem sie teilnehmen, in acht und dann nach ihren *odds* in neun weitere Untergruppen. Die Intervalle der Quoten wählte er mit 0.05-1.95, 2.00-2.95, 3.00-3.95, 4.00-4.95, 5.00-5.95, 6.00-7.95, 8.00-10.95, 11.00-15.95, und 16.00-25.95. Quoten darüber hinweg betrachtete McGlothlin in seiner Studie nicht.
Sei W die Anzahl der Sieger in einer bestimmten *odds*-Klasse und N Anzahl der Teilnehmer in dieser, dann wird die objektive Gewinnwahrscheinlichkeit P dieser Gruppe durch W/N angegeben.
Da wir hier mit Wahrscheinlichkeiten rechnen, ist es zweckmäßiger den Erwartungswert des Gewinnes zu betrachten. Diese beschreibt man durch $E = P * (a' + 1) - 1$, wobei a' der Mittelwert der *odds* nach Abzug des *track take* und P die objektive Gewinnwahrscheinlichkeit eines Pferdes einer bestimmten Gruppe ist.

Bei der Analyse des Erwartungswert-*odds*-Verhältnisses über den Tag hinweg, suchte McGlothlin Abweichungen der einzelnen Gruppen von dem Ergebnis der gesamten Daten. In den einzelnen Rennen sowie für das gesamte Datenset erkannte er positive Erwartungswerte für Pferde mit niedrigen *odds* (hohe Gewinnwahrscheinlichkeit) und negative Erwartungswerte für Pferde mit hohen *odds* (geringe Gewinnwahrscheinlichkeit), sowie eine weitere Bestätigung des *favourite longshot bias*. Abweichungen fielen ihm vor allem im siebten und achten, also den beiden letzten Rennen, auf.

Das siebte ist das *feature*-Rennen, an dem die favorisierten Pferde, also jene auf die im Laufe des Renntages am meisten Geld gewettet wurde, teilnehmen. Hier ist der Erwartungswert E für *odds* kleiner als 3:1 fast gleich null, für die anderen Gruppen ist dieser positiv. Außerdem ist der Erwartungswert für *odds* von 7:1 signifikant größer und für *odds* um 21:1 niedriger, als für die gesamten Daten. Die Erklärung dieses abweichenden Verhaltens im Vergleich zu den anderen Rennen ist die Besonderheit als *feature*-Rennen, da die favorisierten Pferde meist schon beim Publikum bekannt sind. Somit orientierten sich die Spieler beim Wettabschluss eher an den persönlichen Präferenzen, als an den Quoten.

Im letzten Rennen wurden die meisten Wetten auf Pferde mit mittlerer Quote und vernünftiger Gewinnwahrscheinlichkeit abgeschlossen, während Pferde mit hoher Gewinnwahrscheinlichkeit und folglich geringerer Auszahlung unbeliebter waren. Dieses Verhalten findet seine Erklärung darin, dass viele Wettenden im letzten Rennen versuchten die Verluste des Tages zu kompensieren.

Eine allgemeine Änderung im Wettverhalten machte sich in Form von steigenden Wetteinsätzen, sowie einem Wechseln von *show*- oder *place*- zu *win*-Wetten bemerkbar. Außerdem tendierten verlierende Wettende eher dazu ihren Einsatz zu erhöhen als gewinnende.
In den ersten sechs Rennen bleibt das Erwartungswert-*odds*-Verhältnis relativ stabil, jedoch unter stetigen Anstieg der Wetteinsätze und der *win*-Wetten. Dies weist darauf hin, dass die Nutzenskala für Geld im betrachteten Bereich praktisch die gleiche ist wie die objektive Dollarskala. Die wichtigere psychologische Variable ist also die subjektive Wahrscheinlichkeit.
Andererseits spiegelt sich die zunehmende Beliebtheit von Siegwetten (kleinere Gewinnwahrscheinlichkeit als bei *place*- und *show*-Wetten) während der ersten sechs Rennen nicht im E-vs.-*odds*-Muster wider. Jedoch müsste bei Favorisierung von Wetten mit hohem Gewinn und niedriger Wahrscheinlichkeit über mehrere Entscheidungen hinweg der entsprechende negative Erwartungswert verstärkt werden. Dies passiert jedoch bis zum letzten Rennen nicht. Daraus folgerte McGlothlin, dass ein Modell über Entscheidungen unter Risiko nur aufgrund des subjektiv erwarteten Nutzen (SEU) unzulänglich ist.

4 Nutzen-Vorzüge der Wettenden an Rennbahnen

Wetten an einer Pferderennbahn sind ein klassisches Beispiel für Entscheidungen, die über ein unbestimmtes Ergebnis in der Zukunft getroffen werden. Die Wahrscheinlichkeit anhand derer der Wettende handelt ist subjektiv, jedoch wie Griffith zeigte, ungefähr gleich der objektiven Gewinnwahrscheinlichkeit. Im folgenden Kapitel wird unter anderem versucht das Risikoverhalten der Wettenden mit einer Nutzenfunktion zu beschreiben.

4.1 Nutzenfunktion und Indifferenzkurve

Im folgenden bezeichnet $u(.)$ eine subjektive Nutzenfunktion, sie ordnet jeder Produktmenge $x_i \in X$ eine reelle Zahl zu, die den persönlichen Nutzen von x_i für ein Individuum beschreibt. Somit werden die Elemente aus X gemäß der Präferenzen einer Person geordnet.
Eine konkave Nutzenfunktion beschreibt risikoscheues Verhalten und rechtfertigt beispielsweise den Kauf einer Versicherung, bei der man regelmäßige Prämienzahlung einer eventuell eintreffenden großen Aufwendung im Schadenfall bevorzugt. Die lineare Nutzenfunktion bedeutet Risikoneutralität, eine konvexe Risikoaffinität.
Die Indifferenzkurve möchte ich anhand der folgenden Abbildung erläutern.

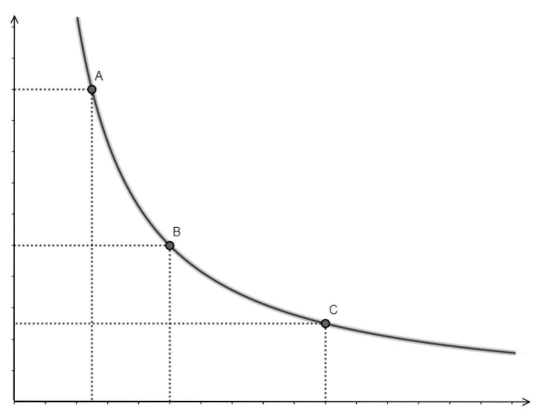


Abbildung 1: Indifferenzkurve

Die x-Achse beschreibt die Menge von Gut x_1, die y-Achse die Menge von Gut x_2. Alle Kombinationen der beiden Güter (wie auch A, B, C), die durch die Indifferenzkurve beschrieben werden, erzielen den gleichen Nutzen für ein Individuum. Verschiedene Indifferenzkurven beschreiben unterschiedlichen Nutzenniveaus. Je näher die Indifferenzkurve am Ursprung liegt, desto geringer ist der erzielte Nutzen [1].

4.2 Kallberg, Ziemba: Das Arrow-Pratt-Maß

Bei Portfolio-Fragen mit mehrdimensional normalverteilten Vermögensanlagen wird das Risikoaversionsmaß $R = -w_0(E[u''(w)])/E[u'(w)]$ mit w_0 als Startvermögen verwendet, um optimales Verhalten zu bestimmen. Im folgenden Abschnitt werden Vergleiche zwischen dem relativen Maß R und dem absoluten Maß R_A gezogen.

Definition 4.1 (Arrow-Pratt Maß)**.** Sei u eine zweimal stetig differenzierbare Nutzenfunktion definiert auf das Vermögen w, dann beschreibt das absolute *Arrow-Pratt*-Maß

$$R_A(w) = \frac{-u''(w)}{u'(w)}$$

ein Maß für die Risikoaversion eines Individuums.

Nimmt das Maß den Wert 0 an, beschreibt dies risikoneutrales Handeln. Ein positiver Wert impliziert Risikoscheu (Risikoaversion) und ein negativer Wert Risikofreude (Risikoaffinität) eines Individuums.

Ist die Varianz des gesamtes Vermögens verschwindend klein, so wird durch das initiale Vermögen w^0, $R_A(w^0)$ bestimmt, welches das optimale Handeln beschreibt. Um exakte theoretische Resultate zu erhalten, braucht man sehr starke Annahmen. Damit zwei Nutzenfunktionen das selbe Verhalten rechtfertigen, muss gelten, dass $R_A^1(w) = R_A^2(w)$ für alle w, also $u_2(w) = au_1(w) + b$ mit $a > 0$.

Betrachtet man mehrdimensional normalverteilte Vermögensanlagen, erhält man folgendes Resultat:

Theorem 1. Sei $\xi \in E^n$ mehrdimensional normalverteilt mit endlichen Erwartungswert und Varianz, u_i eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $u_i' > 0$ und $u_i'' < 0$ für $i = 1, 2$. Man betrachte:
(1) $\{\max E_\xi[u_1(w_1\xi^t x)] : e^t x = 1, x \geq 0\}$
und
(2) $\{\max E_\xi[u_2(w_2\xi^t x)] : e^t x = 1, x \geq 0\}$,
mit w_i als Startvermögen des Investors i. Unter der Annahme, das alle Erwartungswerte endlich sind, x^* die optimale Lösung für (1) bezeichnet und

$$\frac{w_1 * E_\xi[u_1''(w_1\xi^t x^*)]}{E_\xi[u_1'(w_1\xi^t x^*)]} = \frac{w_2 * E_\xi[u_2''(w_2\xi^t x^*)]}{E_\xi[u_2'(w_2\xi^t x^*)]},$$

dann ist x^* auch eine optimale Lösung für (2).

Folglich beschreibt

$$(3) \quad R \equiv \frac{-w_0 * E_\xi[u''(w_0\xi^t x)]}{E_\xi[u'(w_0\xi^t x)]}$$

ein geeignetes Maß, wenn exakte Portfolioergebnisse gefragt sind.

Das erstaunliche an $Theorem$ 1 ist, dass man ein exaktes Ergebnis erhält, unabhängig von der Varianz des finalen Vermögens. Mit kleiner Varianz nähert R_A sich an (3) an.

Nun stellt sich die Frage, wie genau die durch R_A ermittelten Ergebnisse sind, wenn die Varianzen nicht verschwindend klein sind. Dies ist von besonderer Bedeutung, da R_A vorteilhafter in mathematischen Anliegen, für ökonomischen Interpretationen, für qualitative Ergebnisse sowie Leichtigkeit der Schätzung ist. Obwohl R genauer ist, würde deswegen R_A öfter praktische Anwendung finden.

4.2.1 Studie und Ergebnis

Um die Genauigkeit von R_A unter Anbetracht von Vermögen mit nicht verschwindender Varianz zu prüfen, beobachteten Kallberg und Ziemba in drei Sets von zehn $New\ York\ Stock\ Exchange$-Wertpapieren die monatliche, quartalsmäßige und jährliche Entwicklung. Sie nahmen dabei an, dass diese mehrdimensional normalverteilt sind. Deren Varianzen betrugen zwischen 0.0036 (kleinste monatliche) bis 0.3276 (höchste jährliche).
Ihr Ziel war es zu untersuchen, ob Nutzenfunktionen mit ähnlicher Risikoaversion auch ähnliche optimale Portfolios haben. Dabei verwendeten sie quadratische, exponentielle, logarithmische Funktionen und Potenzfunktionen, sowie spezielle exponentielle und Arcustangensfunktionsfamilien, um eine Vielzahl an Eigenheiten der Nutzenfunktionen und größtmöglichen analytischen Nutzen zu erzielen.

Sei u die Referenznutzenfunktion mit optimalen Portfolio x^*. Man betrachte:
$Z(x^*) = \max_{\forall x \in K} E_\xi[u(\xi^t x)]$
$K \equiv \{x : e^t x = 1, x \geq 0\}$,
$Z(\tilde{x}) = E_\xi[u(\xi^t \tilde{x})]$,
$e \equiv (1, ..., 1)^t$
$\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Als Maß um zu beschreiben wie nahe Portfolio $\tilde{x}$ an x^* ist, verwendet man den Prozentsatz der Differenz im Barwert: $\frac{u^{-1}[Z(x^*)] - u^{-1}[Z(\tilde{x})]}{u^{-1}[Z(x^*)]} * 100$. Die Inverse u^-1 existiert, da u streng monoton steigend ist.

Umfassende Berechnungen von Kallberg und Ziemba zeigten, dass die Annäherung $\tilde{R_A^1} = \tilde{R_A^2} \Rightarrow x_1^* \cong x_2^*$ sehr gut ist für alle Nutzenfunktionsklassen und die drei Datensets mit weit variierenden R_A ist. Natürlich ist die Genauigkeit der Annäherung der Sets am höchsten für die monatlich beobachteten und am ungenauesten für die mit jährlichen Horizont. Die höchsten Fehler in Prozent in den drei Datensets von allen betrachteten Nutzenfunktionen betrugen 0.0004%, 0.0191% und 0.7827%. Darüber hinaus waren auch die Mittelwerte, Varianzen und Portfoliogewichtungen bemerkenswert ähnlich. Für die meisten Nutzenfunktionen (alle oben genannten, außer Arcustangens) können die Rechnungen auf jedes beliebig hohe Vermögen durch neues Skalieren der Parameter übertragen werden.

Aus der Studie konnten Kallberg und Ziemba folgern:
• Es ist extrem schwer anhand der betrachteten Portfoliodaten zwischen den unterschiedlichen Modellen zu unterscheiden, da alle, bis auf die Parameter, quasi äquivalent sind.
• Für ein Beobachtungszeitraum von einem Jahr oder weniger kann man mathematisch simplere Ersatz-Nutzenfunktionen verwenden. Außerdem gibt es einen ziemlich gut definierten Kompromiss zwischen Berechnungsgenauigkeit gegenüber Rechenkosten. Für grobe Berechnungen kann man das Maß $-w_0 u''(w_0 * \xi^t x)/u'(w_0 \xi^t x)$ verwenden und vernünftige Ergebnisse für kleine Varianzprobleme (z.B. monatliche Daten) erwarten. Für die genauesten Ergebnisse verwendet man das Maß (3).
• Die quadratische, exponentielle und logarithmischen Nutzenfunktionen ergeben die höchste Varianz von R_A und die sichersten, jedoch auch riskantesten Portfolios für extreme Parameter. Kleine Werte von R_A sind bei allen drei Funktionenfamilien leicht zu implementieren. Sehr hohe Werte jedoch sind für die exponentiellen und logarithmischen Nutzenfunktion eher ungeeignet wegen Definitionsbereich-Problemen. Daher spielt die quadratische Funktion eine wichtige Rolle, wenn die Nummer der möglichen Investitionen hoch ist.
• Die Risikoscheu eines Individuums steigt mit R_A. R_A über vier folgert sehr risikoscheue Portfolios mit geringer Varianz und die Veränderungen des optimalen Portfolios sind sehr gering.
Der Bereich zwischen null und zwei beschreibt sehr riskante Portfolios, bei dem kleine Änderungen von R_A große Schwankungen des optimalen Portfolios bewirken.

4.3 Weitzman: Nutzenanalyse

Nutzenanalyse versucht in der Wirtschaftslehre menschliche Präferenzen mit ökonomischen Verhalten zu erklären. Ein ideales Nutzenexperiment sollte viele Teilnehmer in ihrer natürlichen Umgebung miteinbeziehen. Natürlich ist es schwer diese Faktoren in einen praktischen, kontrollierten und experimentellen Rahmen zu bringen.
Weitzman untersuchte verschiedene Nutzenhypothesen indem er das Gruppenverhalten an Rennbahnen untersuchte. Er definierte einen durchschnittlichen Rennbahnbesucher *Mr Avmart* (average man at the racetrack) und untersuchte dessen Entscheidungen und Indifferenzkurven unter Anbetracht verschiedener Risiken. Die Geldnutzenfunktion von Mr. Avmart wird erstellt und mit bisherigen Ergebnissen verglichen.
Weitzman wertete in seiner Studie über 12000 Rennen, die auf vier New-Yorker Rennbahnen im Zeitraum von 1954 bis 1963 stattfanden, aus.

4.3.1 Die Erwartungsnutzenhypothese (EUH)

Es wird angenommen, dass jede Person ein subjektiv bevorzugtes Verhaltensmuster hat, wenn es darum geht, zwischen alternativen Situationen zu wählen. Hier dient eine Nutzenfunktion, um den Nutzen der einzelnen Entscheidungen in Relation zu setzen. Wenn ein Risiko über das Eintreffen bestimmter Szenarien vorhanden ist, werden auch diese Wahrscheinlichkeiten miteinbezogen.
Auch Weitzman geht von dem Postulat aus, dass ein Individuum stets so handelt, dass es seinen Nutzen maximiert.
Der persönliche Nutzen in einer riskanten Situation, die mit Wahrscheinlichkeit p eintrifft und einen Gewinn von m Dollar bedeutet, wird durch $U(p, m)$ beschrieben. U ist also eine Funktion, die von p und m abgehängt. Normalerweise hängt eine Nutzenfunktion von mehreren Faktoren ab, die Weitzman hier als konstant betrachtet, daher haben sie keinen Einfluss auf das hier erstellte Modell.
Nach der Erwartungsnutzenhypothese gilt $U(p, m) = pu(m)$, wobei $u(m)$ die persönliche Nutzenfunktion abhängig vom Preisgeld m ist. Anstelle von $U(p, m)$ wollen wir nun $u(m)$ maximieren.
Friedmann und Savage waren die Ersten, die versuchten eine Hypothese über das Risikoverhalten von Verbrauchereinheiten mit niedrigen Einkommen aufzustellen. Deren Nutzenfunktion enthielt mehrere Kurven, welche die unterschiedlichen wirtschaftlichen Niveaus beschrieben. Widersprüchliches Verhalten von Individuen, die Versicherungen abschlossen, um sich vor Risiken zu schützen und dann aber ihr Geld auch auf Rennbahnen verwetteten, fand in ihrem Modell bereits eine Erklärung.
Markowitz jedoch kritisierte einige Unregelmäßigkeiten an deren Hypothese und präsentierte seine verbesserte Version, die in Abbildung 2 gezeigt wird. Seine Nutzenfunktion hat keinen eindeutigen Definitionsbereich, sondern wird an das individuelle, momentane Vermögen angepasst.

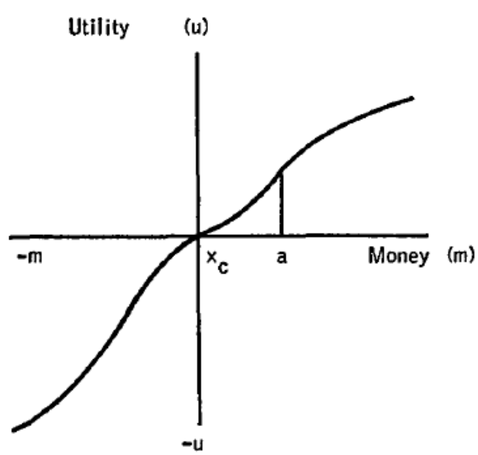


Abbildung 2: Nutzenfunktion des Geldes [3]

Der Punkt x_c ist das momentane Vermögen und beschreibt einen Wendepunkt. Die Funktion verläuft konvex, beschreibt also steigenden Nutzen, bis ein weiterer Wendepunkt a erreicht ist. Die exakte Position von a hängt vom individuellen Risikoverhalten ab. Je risikoaffiner ein Mensch ist, desto weiter rechts befindet sich a. Markowitz verwendete diese Nutzenfunktion als Mittel, um Handeln unter Risiko vorherzusagen und zu erklären. In dieser Studie wird ein Resultat von Markowitz bekräftigt.

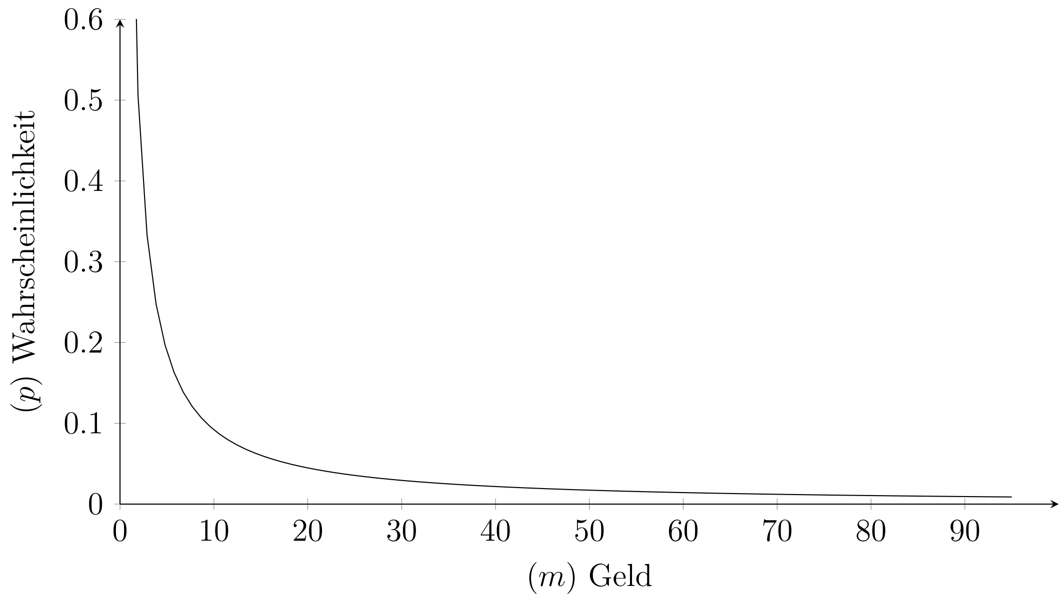
4.3.2 Die experimentelle Wahrscheinlichkeitskurve

Mithilfe der gesammelten Daten wurden die Pferde nach ihren Auszahlungen kategorisiert und nach Gewinn oder Verlust unterkategorisiert.
Eine empirische Gewinnwahrscheinlichkeit berechnete Weitzman indem er die Anzahl der Siege eines Pferdes durch die Anzahl der belegten Wettbewerbe dividierte. Dies lieferte ihm 257 verschiedene Punkte der Form (x, p), mit x als Auszahlung pro gewetteten Dollar und p der zugehörigen Gewinnwahrscheinlichkeit. Experimentell erkannte er, dass die Hyperbel

$$p = \frac{A}{x} + \frac{Blog(1+x)}{x}$$

(mit A = 1.011, B = -0.087) die Testresultate am besten beschreibt, fand jedoch keine Erklärung, warum diese Funktion anderen Annäherungen deutlich überlegen war.

Die theoretische Wahrscheinlichkeitskurve



4.3.3 Das Modell Mr. Avmart

Diese Studie beschäftigt sich mit dem Gruppenverhalten von Wettenden, also kann man die Erkenntnisse nicht auf ein Individuum übertragen. Wir betrachten eine homogene Masse an Spielern, denen allen die gleichen gewünschten Eigenschaften zugeschrieben werden. Mr. Avmarts Spieleinsätze werden entsprechend der untersuchten Spielerpopulationen auf die Pferde gewettet, die an einem Rennen teilnehmen. Natürlich würde keine vernünftige Person auf alle an einem Rennen teilnehmenden Pferde setzen. Mr. Avmart setzt in jedem Rennen \$5.00, da dies dem durchschnittlichen Einsatz pro Spiel sehr nahe kommt.

4.3.4 Mr. Avmarts Indifferenzkurve

Mr. Avmart beschreibt den „typischsten“ Spieler an einer Rennbahn, die Frage nach der tatsächlichen Existenz eines solchen Individuums, kann jedoch nicht beantwortet werden. Angenommen Mr. Avmart hat, wie jeder Wettende an einer Rennbahn, die Absicht seine Nutzenfunktion zu maximieren. Aber Avmart handelt weder bewusst noch unbewusst auf diese Art und Weise. Da er ein Individuum in einer Risikosituation ist, postulieren wir, dass sein Verhalten nach Maximierung des persönlichen Nutzens strebt.

Weitzman betrachtete die modifizierte Abbildung der theoretischen Wahrscheinlichkeitskurve in der die x-Achse verfünffacht wurde und nun m (Geld) beschreibt. Dann entspricht die Hyperbel Mr. Avmarts Indifferenzkurve von verschiedenen Risikoszenarien und zugehörigen Preisgeldern.

Wir betrachten nun zwei Punkte auf der Kurve, A und B: A beschrieben durch (m_1, p_1) und B beschrieben durch (m_2, p_2). Das heißt A bedeutet die Option in der eine Auszahlung von $\$m_1$ mit einer Wahrscheinlichkeit von p_1 erzielt wird, analoges gilt für B mit $\$m_2$ und p_2.

Angenommen Mr. Avmart bevorzugt A gegenüber B. Da er das Handeln der gesamten Rennbahnpopulation beschreibt, wird A allgemein B gegenüber vorgezogen. Dann bewegen sich Teile des Geldes, die auf B gesetzt waren, zu A. Folglich sinkt die Auszahlung pro Dollar für Option A und der Punkt wandert nach links. B wird beliebter und wandert nach rechts. Eine Gleichgewichtssituation ist erreicht, wenn A und B gleich begehrenswert sind. Da die Kurve aber eine Indifferenzkurve beschreibt, sind alle Punkte darauf für Mr. Avmart von identem Nutzen.

4.3.5 Mr. Avmarts Nutzenfunktion des Geldes

Unter der Annahme das Mr. Avmart sich der Erwartungsnutzenhypothese entsprechend verhält, kann man seine Nutzenfunktion exakt bestimmen. In jedem Punkt von Mr. Avmarts Indifferenzkurve gilt $U(p, m) = p * u(m) = K$, wobei K das konstante Nutzenlevel der Kurve beschreibt. Da die Gewinnwahrscheinlichkeit p auch von der Auszahlung m abhängt, gilt $p = p(m)$ mit $m = 5x$. Es folgt $K = p(m) * u(m)$

oder äquivalent dazu $K/p(m) = u(m)$. Weitzman behauptet $u(\$5) = 5$, also \$5 entsprechen 5 Nutzeneinheiten, um die Skala für die y-Achse (Nutzenachse) zu fixieren. Dann gilt $K = 5 * p(\$5)$, mit p(\$5) als Wert der Indifferenzkurve an der Stelle m=\$5. Mit diesen Informationen kann man die Nutzenachse skizzieren.

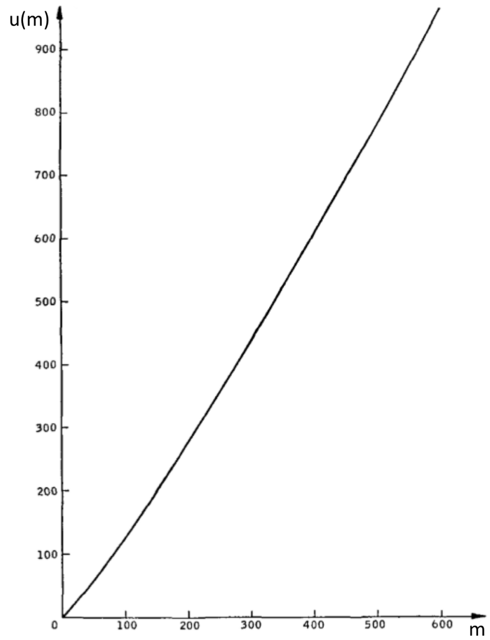


Abbildung 3: Nutzenkurve des Geldes von Mr. Avmart [3]

Wie man erkennen kann, ist die Nutzenfunktion von Mr. Avmart konvex.
Die erste Ableitung von $u(.)$ ist immer positiv für positive m. Die zweite Ableitung ist ebenfalls positiv für alle positiven m, strebt aber immer rascher gegen 0 mit zunehmendem m. Somit erkennt man, dass die Funktion für steigendes m einem Wendepunkt entgegenstrebt. Da man jedoch nur Werte zwischen \$5 und \$500 betrachtet hat, kann man keine genauere Aussage über die Lage des Wendepunkts machen, weder sagen wie die Nutzenfunktion für negative m-Werte aussieht. Jedoch stimmt die Funktion mit Markowitz These des steigendem Nutzen im Intervall $(x_c < m < a)$ überein. Hier ist a auffallend hoch, da das Publikum an Rennbahnen gewöhnlich ein risikoaffines ist.

4.3.6 Fazit

Anstelle einer Analyse des individuellen Verhaltens der Rennbahnbesucher, wurde das Publikum als Gesamtheit betrachtet. Diese Beobachtung bestätigte in einem bestimmten Definitionsbereich die Nutzenfunktion von Markowitz. Die Erkenntnis daraus ist nicht, dass ein Individuum eine klar definierte Nutzenkurve hat, die sie beim Treffen von Entscheidungen in Betracht ziehen. Allerdings handelt ein Wettender an einer Rennbahn *als ob* er eine solche Funktion besäße.

4.4 Ali: Wahrscheinlichkeits- und Nutzenschätzungen

Subjektive und objektive Gewinnwahrscheinlichkeiten wurden über 20247 Trabpferderennen hinweg beobachtet. Dabei erkannte man wieder den *favourite longshot bias*, also das systematische bevorzugen von Pferden mit geringer Gewinnwahrscheinlichkeit und vernachlässigen von jenen mit hoher Gewinnwahrscheinlichkeit. Unter vereinfachten Annahmen wird eine Nutzenfunktion des Geldes eines Entscheidungsträgers abgeleitet und ein quantitatives Risikomaß für sein Verhalten bestimmt. Die Einstellung gegenüber Risiko eines repräsentativen Wettenden wird untersucht. Schlussendlich stellt Ali fest, dass der klassische Rennbahnbesucher ein Risikoliebhaber ist und dazu neigt, mehr Risiko einzugehen, wenn sein Kapital sich verringert.

4.4.1 Schätzungen der Wahrscheinlichkeit

Ali betrachtete nur *win*-Wetten. Die Auszahlung wird durch die *odds* bestimmt, diese wiederum durch die Wettenden, die *track-take* und die *breakage*. Die *odds* für die einzelnen Wettarten werden getrennt gesammelt, in diesem Fall im *win-pool* $W = \sum_i W_i$, mit W_i als Wetteinsätze auf das Pferd i. Seien a die Abzüge bedingt durch *breakage* und *track - take*, dann bestimmen sich die *odds* vom Pferd i durch $O_i = \frac{(1-a)W}{W_i} - 1$. Die Schätzungen von O_i werden im Minutentakt berechnet und sind daher ständigen Schwankungen unterworfen. In den letzten Minuten sind die Änderung nur mehr gering, da zu diesem Zeitpunkt die meisten Wetten bereits abgeschlossen sind. Da sich die verwendeten Daten nur auf die finalen *odds* beziehen, gehen wir hier davon aus, dass diese während der gesamten Wettperiode gelten.

Wie auch schon Griffith und McGlothlin beschreibt Ali die subjektive Gewinnwahrscheinlichkeit von Pferd i durch $W_i/W = (1-a)/(1+O_i)$. Sei I die Menge aller teilnehmenden Pferde an einem Rennen, so gilt

$$\{1\} \qquad \sum_{i \in I} \frac{1-a}{1+O_i} = 1$$

Die objektive Gewinnwahrscheinlichkeit eines Pferdes ergibt sich durch den Anteil der Siegen an der Wiederholung von Rennen, welche immer genauer wird, wenn die Anzahl gegen unendlich strebt. Folglich kann man ein Rennen wie einen Binomialversuch sehen. Die objektive Gewinnwahrscheinlichkeit beschreibt dann die Wahrscheinlichkeit einen Erfolg zu erzielen.

Die subjektive Wahrscheinlichkeit, hier ρ_i, und die objektive Wahrscheinlichkeit, π_i, sind unterschiedlich und schwanken auch zwischen den einzelnen Rennen. Wir wissen, dass $\rho_i = (1-a)/(1+O_i)$ gilt, können somit mit den vorhandenen Daten und Gleichung $\{1\}$ a berechnen und erhalten schlussendlich ρ_i.

In dieser Studie werden die Pferde wieder gruppiert und deren durchschnittliche subjektive Gewinnwahrscheinlichkeit wird mit einem Schätzer der durchschnittlichen objektiven Gewinnwahrscheinlichkeit verglichen. Pferde in einer Gruppe werden als ein Pferd betrachtet.

Wir betrachten N verschiedene Rennen in denen Gewinnwahrscheinlichkeiten ρ_i und π_i für Pferd i gelten. Dann sind die durchschnittlichen Gewinnwahrscheinlichkeiten der einzelnen Gruppen gegeben durch $\overline{\rho} = \sum \frac{\rho_i}{N}$ und $\overline{\pi} = \sum \frac{\pi_i}{N}$.

Ein erwartungstreuer Schätzer von $\overline{\pi}$ ist $\hat{\pi} = \sum Y_i/N$ mit $Y_i = 1$, wenn das Pferd das i-te Rennen gewonnen hat, sonst gilt $Y_i = 0$. Da die Rennen als unabhängige Binomialverteilungen betrachtet werden können, gilt $E(\hat{\pi}) = \hat{\pi}$ und $Var(\hat{\pi}) = \bar{\pi}(1-\bar{\pi})/N - \sigma_\pi^2/N$, mit $\sigma_\pi^2 = \sum(\pi_i - \bar{\pi})^2/N$. Da wir keinen verlässlichen Schätzer für σ_π^2 haben, betrachten wir vereinfacht $Var(\hat{\pi}) = \bar{\pi}(1-\bar{\pi})/N$. Folglich ist der Standardfehler, also die Wurzel der Varianz, hier größer.

Bei der Gruppierung der Pferde ging Ali nach folgenden Kriterien vor:
(a) N sollte so groß wie möglich sein, um $Var(\hat{\pi})$ zu reduzieren und folglich mit $\hat{\pi}$ einen vernünftigen Schätzer für $\bar{\pi}$ zu geben;
(b) σ_π^2 sollte so klein wie möglich sein, um einen validen Test der Hypothese, der subjektiven Über- oder Unterschätzung der objektiven Wahrscheinlichkeit durch Vergleich von $\bar{\pi}$ und $\bar{\rho}$ zu ermöglichen.

Es kann argumentiert werden, dass in der Gruppe der Pferde, die am wahrscheinlichsten gewinnen, σ_π^2 verschwindend klein und N so groß wie die Anzahl an gesamten Rennen ist. Also erfüllt diese Gruppe am ehesten die beiden Kriterien (a) und (b), gefolgt von der, der Pferde die am zweit-wahrscheinlichsten gewinnen. Also bezeichnen wir das Pferd mit den geringsten *odds* als ersten Favoriten und so weiter. Im Folgenden wird der h. Favorit im Rennen das Pferd h sein und dessen subjektive und objektive Wahrscheinlichkeit mit $\bar{\rho}_h$ und $\bar{\pi}_h$ bezeichnet.

In der anschließenden Diskussion der $Tabelle$ 1 wurden die Pferde 9 und 10 nicht beachtet, da die Anzahl an Rennen, an denen sie teilnehmen, sehr gering ist.

Die Schätzungen $\hat{\pi}_h$ und ihre Standardfehler sind in Spalte 3 und 4 zu finden. Der Anteil des Fehlers an dem Schätzer (Spalte 5) liegt zwischen 0.95 und 5.34 Prozent und ist somit klein. Die subjektiven Wahrscheinlichkeiten sind in Spalte 6 abzulesen. Die Differenz zwischen subjektiver und geschätzter objektiver Wahrscheinlichkeit im Verhältnis zum jeweiligen Standardfehler ist in Spalte 7 eingetragen.

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeitsschätzer

Pferd (h)	N	$\hat{\pi}_h$	SE($\hat{\pi}_h$)	100 * $\frac{SE}{\hat{\pi}_h}$	$\bar{\rho}_h$	$\frac{\bar{\rho}_h - \hat{\pi}_h}{SE(\hat{\pi}_h)}$
1	20,247	.3583	.0034	0.95	.3237	-10.29
2	20,247	.2049	.0028	1.37	.2077	0.99
3	20,247	.1526	.0025	1.64	.1513	-0.52
4	20,247	.1047	.0022	2.1	.1121	3.45
5	20,231	.0762	.0019	2.49	.0827	3.49
6	20,088	.0552	.0016	2.90	.0601	3.01
7	19,281	.0341	.0013	3.81	.0417	5.8
8	15,749	.0206	.0011	5.34	.0276	6.2
9	299	.0033	.0033	...	...	...
10	71	.0141	.0140	...	...	...

Außer für die Pferde 2 und 3 ist die Abweichung signifikant. Wie auch schon von Griffith, McGlothlin und Weitzman beobachtet werden Pferde mit hoher Gewinnwahrscheinlichkeit unterschätzt und die mit niedriger Gewinnwahrscheinlichkeit bevorzugt (*favourite longshot bias*).
Die behandelten Daten erstrecken sich über die Zeitspanne von 1970-1974, stammen von unterschiedlichen Rennbahnen mit verschiedenen Rennbedingungen. Um den Einfluss dieser unterschiedlichen Faktoren auszuwerten wurden 15 verschiedene Datensets betrachtet. Die vorherige Folgerung jedoch war in allen diesen Datensets erkennbar.

4.4.2 Theoretische Erklärung der Diskrepanz

Die Ergebnisse über die Beziehung zwischen subjektiven und objektiven Wahrscheinlichkeiten von Griffith, McClothlin und Weitzman stimmen mit denen der vorliegenden Studie überein. Griffith sowie McGlothlin meinten die Differenz sei psychologisch begründbar. Wenn die Spieler intelligent handeln, kann die beobachtete Relation zwischen subjektiver und objektiver Gewinnwahrscheinlichkeit mit der Erwartungsnutzenhypothese (EUH) erklärt werden.
Rosett beobachtete, dass die Diskrepanz nicht der Rationalität im Handeln der Spieler widerspricht und dass sie eine Präferenz für Wetten mit geringer Gewinnwahrscheinlichkeit haben.
Um dies zu sehen, erhalten wir die Annahme von Rosett aufrecht, dass ein rationaler Wettender, der zwischen zwei Möglichkeiten A und B wählen muss:
(1) bei gleicher Gewinnwahrscheinlichkeit, A wählt, wenn diese höheren Gewinn erzielt;
(2) bei gleichem Gewinn, A wählt, wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit höher ist.

Vereinfacht betrachten wir ein Rennen an dem zwei Pferde H_1 und H_2 teilnehmen.

π_h ist die objektive Gewinnwahrscheinlichkeit, ρ_h als Schätzer von π_h die subjektiv Gewinnwahrscheinlichkeit und O_h, die finalen *odds* von Pferd H_h. Für jedes Individuum gilt $\rho_h > 0$, $\rho_1 + \rho_2 = 1$ und, dass sich die Schätzungen von Person zu Person unterscheiden. Sei $F_h(.)$ die Verteilungsfunktion von ρ_h, so dass $F_h(\rho)$ die Proportion an individuellen Schätzungen von π_h beschreibt, die ρ nicht übersteigt. Um mathematische Komplexität zu vermeiden, nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit π_h genau zu erraten gleich null ist. Die Spieler sind per Annahme rational und der Einsatz pro Wette ist für alle gleich hoch.
Unter diesen Annahmen kann man folgendes Theorem beweisen:

Theorem 2. Sei π_h der Median der Verteilung $F_h(.)$, die Wettenden risikoneutral und die subjektive Gewinnwahrscheinlichkeit gegeben durch $\rho_h = (1-a)/(1+O_h)$, mit $0 \leq a < 1$ als *track take* und *breakage*. Dann übersteigt ρ_h die zugehörige objektive Wahrscheinlichkeit π_h, genau dann, wenn $\pi_h < \pi_{h'}$ $(h \neq h')$.

Beweis. Da die Spieler risikoneutral sind, sind ihre Nutzenfunktionen linear; da sie rational handeln, wird auf Pferd H_h gesetzt genau dann, wenn

$$\{1\} \quad [(1+O_h)\rho_h - 1] > max \quad \{0, [(1+O'_h)\rho'_h - 1]\}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a = 0$. Da $\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2 = 1$, $1/(1+O_1) + 1/(1+O_2) = 1$, folgt aus $\{1\}$, das ein Individuum mit geschätzter subjektiver Wahrscheinlichkeit ρ_h und $\rho_{h'}$ auf H_h genau dann auf H_h setzt, wenn $\rho_h > 1/(1+O_h)$. Die Proportion der Wettenden, die auf H_h setzen, entspricht $1 - F_h(1/1+O_h) = 1 - F_h(\bar{\rho_h})$. Dies muss $\bar{\rho_h}$ entsprechen, da die Wettenden alle den selben Einsatz haben. Folglich berechnet man $\bar{\rho_h}$ durch

$$\{2\} \qquad F_h(\bar{\rho_h}) = 1 - \bar{\rho_h} \quad h = 1, 2.$$

Da $F_h(.)$ eine monotone Funktion ist, ist die Lösung eindeutig.
Sei $\pi_1 = \pi_2$, dann gilt $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$. Da π_h der Median der Verteilung ist, $F_h(\pi_h) = 1 - \pi_h$, so dass $\bar{\rho_h} = \pi_h = \frac{1}{2}$.
Sei $\pi_1 > \pi_2$, dann gilt $\pi_1 > \frac{1}{2}$ und $\pi_2 < \frac{1}{2}$. Folglich ist $F_1(\pi_1) > 1 - \pi_1$ und $F_2(\pi_2) < 1 - \pi_2$. Weil $F_h(.)$ eine nichtfallende Funktion beschreibt, folgt aus $\{2\}$, dass $\bar{\rho_1} < \pi_1$ und $\bar{\rho_2} > \pi_2$.
Ähnlich zeigt man für $\pi_1 < \pi_2$, dass $\bar{\rho_1} > \pi_1$ und $\bar{\rho_2} < \pi_2$ ist. □

Nach diesem Theorem gilt für $\pi_1 \neq \pi_2$, dass die größere objektive Wahrscheinlichkeit unterschätzt wird und die kleinere objektive Wahrscheinlichkeit überschätzt wird. Dies ist im Einklang mit den empirischen Ergebnissen.

4.4.3 Risikobereitschaft

Im Folgenden nehmen wir an, dass Spieler Nutzenmaximierer sind, intelligent handeln und die Wettmöglichkeiten auf einzelne Rennen beschränkt sind. Mr. B ist ein Repräsentant für alle Spieler, die zu den finalen *odds* beitragen.
Seine Nutzenfunktion des Vermögens wird durch $u(.)$ beschrieben.
Wir betrachten nun ein Rennen an dem 8 Pferde aus Tabelle 1 teilnehmen. Die objektive Gewinnwahrscheinlichkeit von Pferd h sei $\hat{\pi}_h$.
Da Pferd h in den Rennen an denen es teilnahm keine eindeutigen *odds* hatte, beschreibt hier $\bar{a}_h$ die geschätzten *odds*, die in der zweiten Spalte der Tabelle 2 abzulesen sind.

Tabelle 2: Nutzenfunktion, durchschnittlicher Gewinn und Standardabweichung des Gewinns pro gewetteten Dollar

Pferd (h)	geschätzte *odds* $\bar{a}_h$	x=1+$\bar{a}_h$	Nutzenfunktion $u(x)$	durchschnittlicher Gewinn ($)	SD ($)
1	1.5	2.5	.0574	-0.10	1.26
2	3.0	4.0	.1004	-0.19	1.63
3	4.4	5.4	.1348	-0.17	2.00
4	6.2	7.2	.1966	-0.24	2.30
5	8.7	9.7	.2699	-0.26	2.68
6	12.3	13.3	.3726	-0.27	3.22
7	17.7	18.7	.6028	-0.36	3.64
8	26.4	27.4	1.00	-0.44	4.27

Für jedes Rennen müssen objektive und subjektive Gewinnwahrscheinlichkeiten aufsummiert 1 ergeben. In diesem Fall sind es 1.01 und 0.99. Die $\hat{\pi}_h$'s und $\bar{a}_h$ sind aus verschiedenen Rennen berechnet und können daher als stellvertretende Rennen dieser betrachtet werden.

Unter Anbetracht dieser Werte, Wetteinsatz M, initialem Kapital X_0, ist der erwartete Nutzen von Mr. B gleich

$$\{3\} \quad E_h(u) = (1 - \hat{\pi}_h)u(X_0 - M) + \hat{\pi}_h u[(X_0 - M) + M(1 + \bar{a}_h)].$$

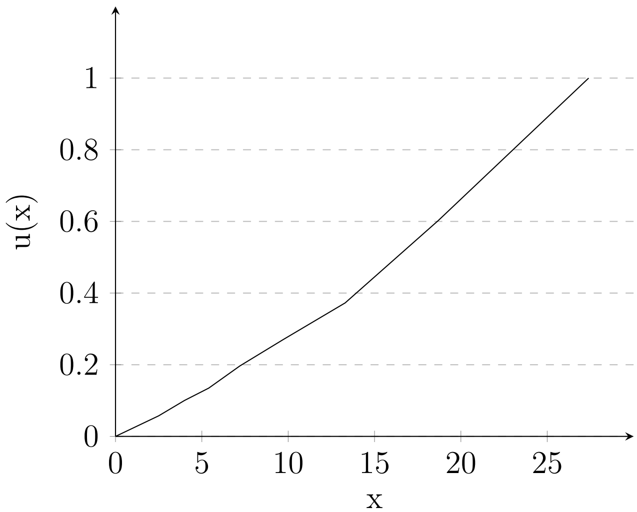
Da Mr. B ein Nutzenmaximierer ist, gilt:

$$\{4\} \quad E_1(u) = E_2(u) = ... = E_8(u).$$

Ohne Beschränkungen der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $X_0 - M = 0$ und dass die *odds* in der Einheit von \$M gegeben sind, wobei M der gemeinsame Nenner aller Wetten ist. Da die Nutzenfunktion bis auf eine positive lineare Transformation eindeutig ist, nehmen wir an, dass $u(0) = 0$ und $u(1+\bar{a_8}) = 1$, wobei $\hat{a_8}$ die höchsten *odds* beschreibt. Dann folgt aus $\{3\}$ und $\{4\}$, dass

$$u(1+\bar{a}_h) = \hat{\pi}_8/\hat{\pi}_h, \quad h = 1, 2, ...7$$

Mit dieser Gleichung kann man die spezifischen Werte von $u(.)$ berechnen, die in Spalte 4 der Tabelle 2 ablesen kann. Anhand der berechneten Punkte kann man die Nutzenfunktion skizzieren.



Die Punkte liegen alle unter einer Verbindungsgeraden von $u(0)$ zu $u(1+\bar{a_8})$. Somit ist die Nutzenfunktion von Mr B. konvex und sein Verhalten ist risikoaffin. Die geschätzte Nutzenfunktion wird durch $u(x) = 1.91 * x^{1.1174}$ beschrieben. Dies zeigt, dass $u'(x) > 0$ und $u''(x) > 0$. Wenngleich das relative Maß für Risikoaversion nach Arrow-Pratt $-x * u''(x)/u'(x)$ konstant ist, steigt das absolute Risikoaversionsmaß $-u''(x)/u'(x)$ mit dem Vermögen. Das impliziert, dass ein Spieler mit sinkenden Vermögen risikobereiter wird. Dies bestätigt Markowitz' Erkenntnisse.

Um weitere Erkenntnisse zu erlangen, betrachtete Ali ein weiteres Maß, um die allgemeine Risikobereitschaft δ zu beschreiben:

$$\delta = 1 - \frac{\int_a^b u(x)dx}{(1/b-a)\int_a^b xdx}.$$

Sei $a = 0$, $b = 1+\bar{a_8}$, $u(a) = 0$ und $u(b) = 1$. Wenn $\delta > 0$ ist der Spieler ein Risikoliebhaber, $\delta < 0$ ein Risikovermeider und bei $\delta = 0$ risikoneutral.

Für die hier betrachteten Daten gilt $\delta = 0.1239$, außerdem fällt wiederum auf das Spieler mit weniger Geld oft ein höheres Risiko eingehen.

Um die Auswirkungen des Kapitals auf die Risikoeinstellung weiter zu untersuchen, stellen wir fest, dass von jedem gewetteten Dollar durchschnittlich 18ct in Form von *breakage* und *track take*, abgezogen werden. Somit sinkt das insgesamt verfügbare Kapital im Laufe einer Veranstaltung. In einer solchen finden zwischen 8 und 11 Rennen statt.
Wir nehmen an, dass alle Wettenden zum ersten Rennen kommen und bis zum letzten bleiben. Berechnet man δ für die ersten beiden und das letzte Rennen erhält man 0.2228, 0.2038 und 0.3040. Dies steht im Einklang mit den vorherigen Erkenntnissen.

4.4.4 Fazit

Wiederum wurde das *favourite longshot bias* beim Auswerten verschiedenster Daten bestätigt. Unterschiedliche Theorien zur Diskrepanz zwischen objektiver und subjektiver Gewinnwahrscheinlichkeit wurden analysiert. Ist der Spieler risikoneutral, aber nicht intellektuell, dürfte der Marktmachanismus die beobachtete Relation generieren. Sind die Spieler intellektuell, haben die selbe Nutzenfunktion und können nur für ein einzelnes Rennen Wetten abschließen, entsteht die entsprechende Nutzenfunktion des Vermögens. Identifiziert man diese mit einem gewöhnlichen Spieler, erkennt man, dass dieser ein Risikoliebhaber ist.

Literatur

[1] Wolfgang Cezanne. *Allgemeine Volkswirtschaftslehre*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2005.

[2] Ward Edwards. „Probability-Preferences in Gambling“. In: *The American Journal of Psychology* 66.3 (1953), S. 349–364.

[3] Donald B. Hausch, Victor SY Lo und William Ziemba. *Efficiency Of Racetrack Betting Markets*. World Scientific, 2008.

[4] Mark J. Machina. „Expected Utility Hypothesis“. In: *The New Palgrave Dictionary of Economics*. London: Palgrave Macmillan UK, 2008. ISBN: 978-1-349-95121-5. DOI: `10.1057/978-1-349-95121-5_127-2`. URL: `https://doi.org/10.1057/978-1-349-95121-5_127-2`.