



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

SEMINARARBEIT

**Konzentration von Reichtum:
ein nichtstandardisierter
Ansatz**

am Institut für Finanz- und Versicherungsmathematik
Technische Universität Wien

verfasst von

Anna Fehringer

Matrikelnummer: 11807838

unter Anleitung von

Assoc. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Stefan Gerhold

vorgelegt Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Definition des grundlegenden Modells	5
2.1	Asset-Exchange Modell	5
2.2	Yard-Sale Modell	6
2.3	Extended Yard-Sale Modell	7
3	Die Dynamik der Verteilung von Reichtum für das extended Yard-Sale Modell	9
3.1	Verteilung von Reichtum	9
3.2	Entwicklung der Verteilung mittels Fokker-Planck Gleichung .	10
4	Mathematische Definition von Oligarchie	13
4.1	Oligarchie allgemein	13
4.2	Nichtstandard Analysis: hyperreelle Zahlen	14
4.3	Anwendung auf die Oligarchie	15
4.4	Reichtum der Oligarchie	15
4.5	Normale Agenten	17
5	Superkritisches System	19
6	Validierung des Modells	23
7	Zusammenfassung	24
8	Verzeichnis	26

1. Einleitung

Diese Arbeit basiert auf dem Paper “A nonstandard description of wealth concentration in large-scale economies“ von Adrian Devitt-Lee, Hongyan Wang, Jie Li und Bruce Boghosian [1]. Professor Boghosian ist Mathematikprofessor an der Tufts Universität in Boston. Er beschäftigt sich unter anderem mit dynamischen Modellen, Wahrscheinlichkeitstheorie und Wirtschaftsmodellen. Auf einem seiner Modelle wurde das in dieser Arbeit beschriebene aufgebaut [2]. Sie handelt von der Verteilung und in weiterer Folge der daraus resultierenden Konzentration von Reichtum bei Betrachtung einer großen Ökonomie. Es wird definiert, wie man Veränderung von Reichtum für Agenten aus einer bestimmten Ökonomie darstellen kann. Bei der Betrachtung deren Ableitung stellt sich heraus, dass es zu einer totalen Konzentration von Reichtum kommt. Diese Konzentration von Reichtum wird dann als Oligarchie definiert und deren Reichtum weiter analysiert. Die Ökonomie ohne Oligarchie wird ebenfalls weiter betrachtet und es entsteht ein Modell, dass aus diesen beiden voneinander unabhängigen Parteien besteht. Schlussendlich wird die Validierung des definierten Systems präsentiert.

Die immer größer werdende Ungleichheit in der Verteilung von Reichtum auf der Welt wird ein immer sichtbarer Problem. Erkennbar ist dies beispielsweise an den Occupy Wall Street Protesten oder der Veröffentlichung der Panama und Paradise Papers. Erstere forderten unter anderem eine stärkere Kontrolle des Finanzsektors durch die Politik, Verringerung des Einflusses der Wirtschaft auf politische Entscheidungen und die Reduktion der sozialen Diskrepanz zwischen arm und reich [3].

Das wissenschaftliche Studium der Reichtumsungleichheit strebt danach sowohl die enorme Unausgeglichenheit in der Verteilung zu verstehen als auch die dahinter stehende Dynamik zu erkennen und zu analysieren. Oxfam International, eine Nothilfe-Entwicklungs-Organisation, welche unter anderem weltweit bemüht ist Armut zu überwinden, berichtete im Jahr 2010, dass 388 Individuen denselben Wert an Vermögen besitzen, wie die Hälfte der restlichen Weltbevölkerung zusammen. In 2016 gab dieselbe Organisation bekannt,

dass sich diese Gegebenheit verringert hat auf 62 Einzelpersonen [4]. Bereits ein Jahr später wurde verkündet, dass sich die Zahl auf nur noch 8 Personen reduziert hat [5]. Daran kann man erkennen wie wichtig es ist, ökonomische Modelle, welche sich mit Reichtumsverteilung beschäftigen, möglichst dynamisch zu entwickeln, um sie den sich rasant ändernden Gegebenheiten anzupassen.

2. Definition des grundlegenden Modells

Zur Modellierung der Verteilung von Vermögen in großen ökonomischen Systemen werden häufig ursprünglich physikalische Notationen und Ansätze verwendet. In der Physik kann man makroskopische Eigenschaften eines betrachteten Objekts ableiten, indem man spezifiziert, wie einzelne Bestandteile auf mikroskopischem Level miteinander interagieren und diese damit approximieren. Ähnlich zu diesem Verfahren kann man Gleichungen, welche die zeitliche Entwicklung der Wohlstandsverteilung in einer Ökonomie beschreiben, ableiten indem man nur Behauptungen über die Aktionen von einzelnen Individuen betrachtet. Um dies umsetzen zu können, muss man erst "kinetische" Ansätze für Mikroökonomien entwickeln, welche sich mit ökonomischen Agenten beschäftigen, die mit Reichtum agieren und diesen austauschen können. Dies ist dann vergleichbar mit Partikeln, welche kollidieren und Energie austauschen. Diese Art der Herangehensweise, auch Ökonophysik genannt, wird seit einiger Zeit zunehmend häufiger herangezogen, obwohl sie bereits in der frühen Entwicklung der kinetischen Theorie von Boltzmann entstanden ist. Er war ein Physiker der im 19. Jahrhundert gewirkt hat und sich unter anderem mit eben diesen makro und mikroskopischen Zusammenhängen beschäftigt hat.

2.1 Asset-Exchange Modell

Ein System, das sich mit den eben genannten Theorien im Zusammenhang mit Reichtumsaustausch beschäftigt, nennt man ein Asset-Exchange Modell. Yaroslav Ispolatov, ein Professor für Evolution und statistische Physik in Santiago, erstellte einen mathematischeren Ansatz für diese einst physikalischen Grundlagen: eine Reihe von simplen AEMs mit denen er die Zeitasymptotik dieser Modelle untersuchen konnte.

In einem einfachen Asset-Exchange Modell gibt es ein System von N ökonomischen Agenten.

mischen Agenten, wobei jeder dieser als einzige Eigenschaft sein Vermögen besitzt. Diesen Reichtum können die Agenten unter davor festgelegten Bedingungen austauschen. Agenten müssen dabei nicht zwingend Individuen sein, sondern können auch mehrere Personen sein, welche als Einheit agieren, wie beispielsweise Unionen oder Unternehmen. Nach der Definition von Reichtum, die in dieser Arbeit herangezogen wird, kann dieser nicht nur Geldmittel sondern auch verschiedenstes anderes sein: von menschlichem Kapital, über materielle Güter, bis hin zur Mitgliedschaft in einer Organisation, welche Vorteile für ihre Mitglieder in der jeweiligen Ökonomie bringt, wie zum Beispiel die kommunistische Partei in kommunistisch regierten Staaten. Es sei also festgehalten, dass Reichtum oder Wohlstand nicht gleichzusetzen ist mit Geld. Kauft man beispielsweise ein Auto für den exakten Warengewert, so findet kein Austausch von Reichtum statt, im Gegensatz dazu, dass sehr wohl Geld gegen Ware ausgetauscht wird. Reichtum kann bei einer Transaktion wie dieser dennoch durch kleine Fehler ausgetauscht werden - möglicherweise durch eine Ungleichheit an Informationen zwischen den beiden Agenten. Die Betrachtung des Austausches von Reichtum an Stelle jenem von Geld hat einen Vorteil: Bei einer Transaktion zwischen zwei Agenten ist der Austausch von Reichtum meist sehr gering im Vergleich zum Gesamtvermögen der Ökonomie, und insbesondere im Gegensatz zur ausgetauschten Menge an Geld.

2.2 Yard-Sale Modell

Das Yard-Sale Modell (YSM) ist ein Asset-Exchange Modell, das das Handelbetreiben als dominante Macht einer Ökonomie ansieht. Reichtum wird hierbei durch paarweise Transaktionen ausgetauscht. Zwei Agenten, die miteinander interagieren, haben die gleiche Chance einen Gewinn beziehungsweise Verlust zu machen. Die gehandelte Menge an Reichtum ist proportional zum Vermögen des ärmeren Agenten.

Seien mit \bar{w} und \bar{x} jeweils der Reichtum zweier Agenten vor einer Transaktion bezeichnet, so kann man die Veränderung ihres Reichtums durch einen Handel mittels

$$\Delta w = \alpha \eta \min(\bar{w}, \bar{x}) \quad \text{und} \quad (2.1)$$

$$\Delta x = -\alpha \eta \min(\bar{w}, \bar{x}) \quad (2.2)$$

darstellen. Dabei ist η eine Zufallsvariable, welche die Werte ± 1 annehmen kann und α eine Proportionalitätskonstante, die die Höhe des Gewinns beziehungsweise Verlustes beeinflusst. Der Mittelwert von η ist null, sodass jeder der beiden Agenten die selbe Chance hat einen Gewinn zu verbuchen.

Bei den ursprünglichen Konditionierungen führt das Yard-Sales Modell zu einer totalen Reichtumskonzentration: Am Ende hat eine einzige sogenannte Oligarchie das gesamte Vermögen der betrachteten Ökonomie und alle anderen Agenten besitzen nichts mehr. Das ist teilweise zurückzuführen auf die Multiplikativität des Zufallspfades, da dabei eine minimale Tendenz zum reicheren Agenten entsteht. Der Erwartungswert jeder Transaktion ist multiplikativ zum Reichtum des ärmeren Agenten, somit ist der durchschnittliche Austausch an Reichtum des Ärmeren negativ. Demzufolge führen die Zufallspfade, die den Verlauf der Verteilung des Vermögens der Ökonomie beschreiben, für alle, außer den reichsten Agenten, gegen null.

Die Darstellung der Reichtumskonzentration mittels des Yard-Sale Modells ist zwar interessant, es lässt sich allerdings auch schnell daraus schließen, dass diese zu simpel ist, um realitätsgetreu abbilden zu können. In realen Ökonomien sieht man zwar oft Konzentration von Vermögen, allerdings ist dieses extreme Szenario dennoch unwahrscheinlich vorzufinden. Außerdem würde auf Grund unserer Definition von Reichtum der Besitz von nichts bedeuten, nicht einmal jegliche Fähigkeiten oder Ziele zu haben, was man einem Agenten aber in der Realität nicht alles nehmen kann und schon gar nicht allen außer einem.

2.3 Extended Yard-Sale Modell

Durch hinzufügen von zwei weiteren Faktoren wurde das Modell zu einem etwas realistischeren erweitert: dem extended Yard-Sale Modell (EYSM).

Die erste Anpassung ist eine Umverteilung: Es wird nach jeder Transaktion ein kleiner Anteil an Reichtum, $\chi\Delta t$, von jedem Agenten genommen, wobei χ als Einheit Reichtum pro Zeiteinheit hat. Das gesamte dabei eingesammelte Vermögen wird anschließend gleichmäßig auf alle Agenten aufgeteilt. Sei W der gesamte Reichtum und Δt die Transaktionszeiteinheit. Damit ergeben sich folgende neue Formeln:

$$\Delta w = \chi\Delta t \left(\frac{W}{N} - \bar{w} \right) + \alpha\eta \min(\bar{w}, \bar{x}) \quad \text{und} \quad (2.3)$$

$$\Delta x = \chi\Delta t \left(\frac{W}{N} - \bar{x} \right) - \alpha\eta \min(\bar{w}, \bar{x}). \quad (2.4)$$

Die zweite Anpassung des EYSM ist die Beeinflussung der Zufallsvariable η , sodass eine Tendenz vorhanden ist, dass der reichere Agent bei einer Transaktion einen Gewinn erzielt. Es bleibt wie bisher $\eta \in \{-1, +1\}$, aber der Mittelwert soll proportional zur Differenz des Vermögens der beiden handelnden

Parteien in Reaktion zum mittleren Reichtum der gesamten Agenten sein: $\mathbb{E}[\eta] = r \frac{w-x}{W/N}$. Der Parameter r ist dabei ein Maß für den wealth-attained advantage (WAA): der Vorteil, welchen die Wohlhabenderen durch die Macht ihres Reichtums erhalten. Der WAA ist ein Modell, das miteinbezieht, dass Reichtum die Regeln eines Systems beeinflusst. Mit der dadurch verliehenen Macht kann man beispielsweise seine Mitarbeiter weiterbilden, sodass man einen Vorteil bei Verhandlungen hat oder bessere Anwälte beziehungsweise Lobbyisten anstellen, welche Gesetze für die eigenen Transaktionen positiv beeinflussen können.

Im folgenden Kapitel werden einige Annahmen für unser Modell spezifiziert, um das System zu vereinfachen.

3. Die Dynamik der Verteilung von Reichtum für das extended Yard-Sale Modell

3.1 Verteilung von Reichtum

Die Verteilung von Reichtum wird durch eine Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktion, $P(w, t)$, dargestellt, sodass das Integral $\int_a^b P(w, t)dw$ äquivalent ist zur erwarteten Anzahl an Agenten, die zur Zeit t ein Vermögen zwischen a und b besitzen. Wir nehmen für die Definition an, dass es genug Agenten gibt, um zu rechtfertigen, dass man P als stetige Verteilung approximieren kann. Der gesamte Reichtum ist somit gleichzusetzen mit $W_P = \int_0^\infty wP(w, t)dw$ und die Anzahl an Agenten in der betrachteten Ökonomie entspricht $N_P = \int_0^\infty P(w, t)dw$. Der Erwartungswert einer Funktion f mit Verteilung P ist definiert als $\mathbb{E}_P[f] = \frac{1}{N_P} \int_0^\infty P(x, t)f(x)dx$.

Um die Dynamik des extended Yard-Sale Modells zu beschreiben, müssen wir erst annehmen, dass es keine Korrelation zwischen dem Reichtum der verschiedenen Agenten gibt. Demnach genügt es also, nur die Dynamik der einzelnen Parteien zu betrachten und es ist nicht notwendig dies auch beispielsweise paarweise durchzuführen.

Damit ergibt sich folgender Zufallspfad:

$$\Delta w = \chi \Delta t \left(\frac{W_P}{N} - w \right) + \eta \sqrt{\gamma \Delta t} \min(w, x) \quad (3.1)$$

$$\text{mit } \eta \in \{-1, +1\} \quad (3.2)$$

$$\text{und } \mathbb{E}[\eta] = \zeta \sqrt{\frac{\Delta t}{\gamma} \frac{w - x}{W_P/N}}. \quad (3.3)$$

Hierbei ist x ein Wert entnommen aus der P -Verteilung zur Zeit t . Der Faktor $\sqrt{\gamma \Delta t}$ entspricht der Proportionalitätskonstante α von Gleichung (2.3) beziehungsweise (2.4). Weiters wurde für r folgende Substitution durchgeführt:

$r = \zeta \sqrt{\Delta t / \gamma}$, sodass der Parameter ζ nun den Einfluss des “wealth-attained advantage“ bei einem Zufallspfad bestimmt. γ ist ein Maß bezüglich des betrachteten Zeitraums.

3.2 Entwicklung der Verteilung mittels Fokker-Planck Gleichung

Um die Entwicklung von P relativ zur Zeit zu approximieren, betrachten wir den Limes für kleine Transaktionen: $\lim_{\Delta t, \mathbb{E}[\eta] \rightarrow 0}$. Bei Betrachtung des Grenzwerts, bei dem der gehandelte Reichtum sehr gering wird, reduziert sich der Zufallspfad zu einer Fokker-Planck Gleichung. Die zu einem Zufallspfad gehörige Gleichung dieser Art sieht allgemein so aus:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial w^n} [M_n(w, t) P(w, t)], \quad (3.4)$$

wobei $M_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}[(\Delta w)^n / \Delta t]$ ist. Um eine partielle Differentialgleichung zu erhalten, welche die Reichtumsverteilung mit dem Limes für kleine Transaktionen beschreibt, muss man die Momente des Zufallspfads für $\Delta t \rightarrow 0$ kennen.

Für die Berechnung der Koeffizienten teilt man das Integral bei $x = w$, um die Minimumfunktion zu vereinfachen. Beispielhaft wird dies nun für M_2 angeführt:

$$\begin{aligned} M_2(w, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}_P \left[\frac{(\Delta w)^2}{\Delta t} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}_P \left[O(\Delta t) + \eta O(\sqrt{\Delta t}) + \eta^2 \gamma \min(w, x)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_P [\eta^2 \gamma \min(w, x)^2] \\ &= \gamma \left(\int_0^w x^2 \frac{P(x, t)}{N_P} dx + \int_w^\infty w^2 \frac{P(x, t)}{N_P} dx \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zur vereinfachten Darstellung von M_2 und in weiterer Folge M_1 definieren wir folgende Größen:

$$A_P(w, t) := \int_w^\infty \frac{P(x, t)}{N_P} dx, \quad (3.6)$$

$$L_P(w, t) := \int_0^w x \frac{P(x, t)}{W_P} dx, \quad (3.7)$$

$$B_P(w, t) := \int_0^w \frac{x^2}{2} \frac{P(x, t)}{N_P} dx. \quad (3.8)$$

Damit ergibt sich für M_2 :

$$M_2(w, t) = \gamma[2B_P(w, t) + w^2 A_P(w, t)]. \quad (3.9)$$

Eine ähnliche Berechnung kann man auch für M_1 durchführen und kommt zu folgendem Ergebnis:

$$M_1(w, t) = \chi\left(\frac{W_P}{N} - w\right) - \zeta\left[2\frac{N}{W_P}B_P(w, t) - 2wL_P(w, t) - w^2\frac{N}{W_P}A_P(w, t) + w\right]. \quad (3.10)$$

Weiters lässt sich ermitteln, dass $M_k = 0$ für alle $k > 2$ gilt. Für detaillierte Berechnungen wird auf [6] verwiesen. Es ist anzumerken, dass A_P und L_P zwei bekannte Objekte in der ökonomischen Theorie sind: $1 - A_P$ und L_P sind die x- beziehungsweise y-Koordinaten der Lorenzkurve, einer graphischen Darstellung statistischer Verteilungen. Diese veranschaulicht das Ausmaß an Ungleichheit beziehungsweise die relative Konzentration innerhalb der Verteilung [7].

Nun können wir die Ergebnisse der Koeffizienten M_n anwenden und erhalten damit die Fokker-Planck Gleichung in Zusammenhang mit dem EYSM:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[\gamma \left(B_P + \frac{w^2}{2} A_P \right) P \right] - \frac{\partial}{\partial w} \left[\chi \left(\frac{W_P}{N} - w \right) P \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial w} \left[\zeta \left(2\frac{N}{W_P} B_P - 2wL_P - w^2\frac{N}{W_P} A_P + w \right) P \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Der erste Term auf der rechten Seite erfasst die Transaktionen, der zweite die Umverteilung von Reichtum und der dritte steht für die Auswirkung des wealth-attained advantage. Für den Fall $\chi = \zeta = 0$ reduziert sich das System zum grundlegenden Yard-Sale Modell.

Diese Differentialgleichung ist zu kompliziert um sie analytisch zu lösen, aber man kann mit ihr wichtige Resultate ermitteln. Man kann zum Beispiel stationäre Lösungen für das YSM und das EYSM überprüfen. Der Professor Bruce Boghosian prüfte dies für das YSM und fand dabei heraus, dass die einzige Lösung eine sogenannte Oligarchie ist. Eine Oligarchie in einem kontinuierlichen Modell zu beschreiben ist allerdings um einiges komplizierter. Weitere Untersuchungen ergaben, dass das EYSM eine Phasenverschiebung aufweist, wenn die Parameter ζ und χ sich verändern. Für $\zeta \leq \chi$ existiert eine nicht holomorphe stationäre Lösung. Falls aber $\zeta > \chi$, verändert sich das Ergebnis drastisch und es bildet sich eine partielle Oligarchie. Es ist notwendig Oligarchie mathematisch zu definieren und weiters muss die Fokker-Planck Gleichung für $\zeta > \chi$ neu hergeleitet werden. Es wird gezeigt, dass Oligarchie als eine nichtstandard Funktion dargestellt werden kann. Die nicht lösbare

partielle Differentialgleichung wird zu einer lösbaren gewöhnlichen Differentialgleichung reduziert, die die Entwicklung vom Reichtum der Oligarchie beschreibt, beziehungsweise einer ähnlichen Fokker-Planck Gleichung für die restlichen Agenten der Ökonomie ohne Oligarchie, die wir in weiterer Folge als normale Agenten bezeichnen werden.

4. Mathematische Definition von Oligarchie

Beim Phänomen der Reichtumsverdichtung ist ein endlicher Teil des Vermögens einer Gesellschaft im Besitz von einem minimalen Anteil dieser. Betrachtet man dieses Phänomen für eine Gruppe von N diskreten Agenten bedeutet das: der Reichste von diesen besitzt einen Anteil des Gesamtvermögens, welcher aber nicht von der Anzahl an Agenten abhängt. Die mathematische Beschreibung davon, der Kontinuumslimes, ist hingegen subtiler. Die ursprüngliche Methode dies zu beschreiben wurde mittels Verteilungstheorie gemacht. In dieser Arbeit wird allerdings eine alternative Betrachtung von Reichtumsverdichtung herangezogen, bei der nichtstandard Analysis benutzt wird. Dies ermöglicht in weiterer Folge auch die Ableitung von einigen Lösungen des Modells.

4.1 Oligarchie allgemein

Als erstes betrachten wir, was Oligarchie intuitiv bedeutet: Sei unsere Ökonomie eine Gruppe von N verschiedenen Agenten, dann bedeutet konzentriertes Vermögen $P(w) = (N - 1)\delta(w) + \delta(w - W)$. Wir arbeiten allerdings mit einem stetigen System, in dem auch fraktionelle Agenten existieren können. Wenn also ein halber Agent das gesamte Vermögen der Ökonomie besitzt, dann ist die Verteilung $(N - \frac{1}{2})\delta(w) + \frac{1}{2}\delta(w - 2W)$. Allgemeiner formuliert: eine Konzentration des Reichtums auf einen minimal kleinen Agenten der Größe W_ϵ kann man darstellen mit $(N - W_\epsilon)\delta(w) + W_\epsilon\delta(w - \frac{1}{\epsilon})$. Mit diesen Überlegungen kann man eine Oligarchie als folgenden Grenzwert darstellen:

$$\Xi(w) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \delta\left(w - \frac{1}{\epsilon}\right). \quad (4.1)$$

Hierbei wird der Limes gebildet, nachdem eine passende Testfunktion angewandt wurde. Ξ soll die folgenden drei Eigenschaften besitzen:

- (1) Da die Oligarchie eine nur einfach mögliche Instanz ist, ist Ξ an mindestens einem Punkt nicht null.
- (2) Der gesamte von der Oligarchie besessene Reichtum ist endlich und nicht null.
- (3) Kein anderer Agent hat mehr Vermögen als die Oligarchie.

Wenn also p die Population ohne der Oligarchie beschreibt, so kann Ξ nur dann ungleich null sein, wenn p null ist, also gilt $\text{supp}(\Xi) \subseteq \text{supp}(p)^C$. Die ersten zwei Bedingungen können auch folgendermaßen umgeschrieben werden: $N_\Xi = 0$ und $W_\Xi = 1$. Aus der dritten kann man folgern, dass $\int_0^\infty w^k \Xi(w) dw$ unbeschränkt für $k > 1$ ist. Ξ sollte außerhalb aller kompakten Intervalle am Träger definiert sein, also ist der Verteilungsraum nicht passend um die Funktion zu beschreiben. Weiters werden Integrale, die gegen unendlich streben, nicht bei der Berechnung von Ξ miteinbezogen. Per Definition gilt: $\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$. Dieser Grenzwert kann nicht mit jenem aus (4.1) vertauscht werden, was die Berechnung der Oligarchie schwierig macht, selbst unter Verwendung der erweiterten Verteilungstheorie.

Um uns das Modifizieren eines geeigneten Raums von passenden Testfunktionen, sodass Ξ kein Nulloperator ist, zu ersparen, behandeln wir Ξ als eine nichtstandard Funktion. In der nichtstandard Analysis kann man bis zu einer fixierten unendlichen Zahl integrieren. Wenn man dabei diese fixierte Zahl passend wählt, ist es nicht mehr notwendig den Limes zu bilden. Bevor die Oligarchie näher betrachtet wird, notieren wir erst die wichtigsten Definitionen der nichtstandard Analysis, die in weiterer Folge verwendet werden.

4.2 Nichtstandard Analysis: hyperreelle Zahlen

Der Raum der hyperreellen Zahlen, ${}^*\mathbb{R}$, besteht sowohl aus allen reellen Zahlen als auch unendlichen und unendlich kleinen Zahlen, auch infinitesimalen genannt. Sei ϵ eine positive unendlich kleine Zahl, so gilt für jede positive reelle Zahl $r \in \mathbb{R} : 0 < \epsilon < r$. Die Menge der endlichen Zahlen ist definiert als $F = \{x \in {}^*\mathbb{R} : |x| < n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$. F ist ein Ring und die Menge der unendlich kleinen Zahlen, I , ist ein Ideal, also eine Teilmenge die das Nullelement enthält, von F mit $F/I \cong \mathbb{R}$. Falls $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ und $x - y$ ist unendlich klein, dann schreiben wir $x \approx y$ und sagen x ist sehr nah an y . In dieser Arbeit sei \approx nun nur noch als Äquivalenzrelation der hyperreellen Zahlen definiert.

4.3 Anwendung auf die Oligarchie

Nichtstandard Analysis kann verwendet werden, um eine Klasse von hyperreellen Dirac-Delta-Funktionen zu bilden. Diese sind keine herkömmlichen Funktionen, sondern eigentlich eine spezielle irreguläre Verteilung mit kompaktem Träger [8]. Für jedes infinitesimale μ bildet δ_μ ${}^*\mathbb{R}$ auf sich selbst ab. Die Funktion ist folgendermaßen definiert:

$$\delta_\mu(x) = \begin{cases} \mu^{-1} & \text{falls } |x| < \frac{\mu}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.2)$$

Wenn man nun die Funktionen f und δ_μ miteinander integriert, entspricht das Ergebnis dem Durchschnitt von f im unendlich kleinen Intervall um 0. Falls f eine stetige Standardfunktion ist, ist das Ergebnis $f(0)$, auch für das infinitesimale Intervall. Das verkörpert allerdings keine echte Dirac-Delta-Funktion einer nichtstandard Funktion. Dieses Beispiel hebt ein Muster hervor, das sehr nützlich ist: nichtstandardisierte Funktionen sind generell gut berechenbar, solange sie mit effizient passenden standard Funktionen gepaart sind. In unserem System ist das einzige nichtstandard Objekt die Oligarchie. Sei ϵ eine beliebige infinitesimale Zahl, dann wird die Oligarchie als unendlichkleiner Agent $\Xi_\epsilon : {}^*\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert:

$$\Xi_\epsilon(x) = \epsilon \delta_\epsilon(w - \epsilon^{-1}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |w - \epsilon^{-1}| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.3)$$

Falls die Verwendung der Infinitesimalität keine Rolle spielt, so wird dieser Teil der Definition außer Acht gelassen. Integriert man die Oligarchie zusammen mit 1, w oder w^k , zeigt sich, dass $N_\Xi \approx 0$, $W_\Xi = 1$ und $\int w^k \Xi_\epsilon(w) dw$ endlich für $k > 1$ ist. Damit sind die drei Eigenschaften der Definition der Oligarchie erfüllt. Wählt man ein unendlich kleines μ , sodass $\epsilon/\mu \approx 0$, kann man die gesamte Reichtumskonzentration darstellen als $(N - W_\epsilon)\delta_\mu(w) + W_\epsilon\delta_\epsilon(w - \frac{1}{\epsilon}) \approx N\delta_\mu(w) + W\Xi_\epsilon(w)$. Demnach ist die stationäre Lösung des klassischen Yard-Sale Modells $P(w) \approx N\delta_\mu(w) + W\Xi_\epsilon(w)$.

4.4 Reichtum der Oligarchie

Bei der numerischen Lösung ist die stationäre Lösung eines Zufallspfades für $\zeta < \chi$ von der Form $P(w) = p(w) + cW_P\Xi(w)$. Im zeitabhängigen Fall vermuten wir $P(w, t) = p(w, t) + c(t)W_P\Xi(w)$ als Lösung, wobei $p(w, t)$ eine hyperreelle Erweiterung einer reellwertigen Funktion ist. Weiters wird für p

angenommen, dass es ein endliches zweites Moment besitzt, sodass $B_p(\infty)$ ebenfalls endlich ist. Hierbei ist mit dem Symbol “ ∞ “ der Grenzwert der reellen Zahlen gemeint und nicht eine hyperreelle.

Wir berechnen nun die Koeffizienten M_n der Fokker-Planck-Gleichung. Bevor wir allerdings die Oligarchie Ξ benutzen, müssen wir noch einen Vorbehalt einräumen. Es macht aus mathematischer Sicht zwar die Möglichkeit Sinn einen Agenten mit sich selbst handeln zu lassen, was dazu führen könnte, dass dieser sich symmetrisch in der Hälfte teilt. Wir verbieten Selbsttransaktionen dennoch, da diese sehr unrealistisch sind und unsere Berechnungen unnötig komplizierter gestalten würden.

Um diesen Selbsttransaktionen vorzubeugen, betrachten wir nun zwei verschiedene Szenarien: die Oligarchie interagiert mit einem anderen Agenten beziehungsweise ein normaler Agent interagiert mit einem anderen. Im ersten Fall haben wir einen Agenten mit Reichtum $w = c(t)W_P\epsilon^{-1}$. Somit ist das erste Moment des Zufallsweges:

$$\begin{aligned} M_1(w, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}_P \left[\frac{c(t + \Delta t)W_P\epsilon^{-1} - c(t)W_P\epsilon^{-1}}{\Delta t} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{c(t + \Delta t)W_P\epsilon^{-1} - c(t)W_P\epsilon^{-1}}{\Delta t} \\ &= c'(t)W_P\epsilon^{-1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Diese Vereinfachung entsteht, da die Oligarchie im eigentlichen Sinne eindimensional ist - sie ist eher ein Punkt als ein Dichteprofil.

Betrachten wir auf der anderen Seite den Zufallspfad, bei dem das Integral über \mathbb{R} betrachtet wird, da wir das einzige hyperreelle Objekt, die Oligarchie, nicht betrachten, sieht das erste Moment so aus:

$$\begin{aligned} M_1(w, t) &= \chi\left(\frac{W_P}{N} - c(t)W_P\epsilon^{-1}\right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}_P \left[\eta \sqrt{\frac{\gamma}{\delta t}} \min(c(t)W_P\epsilon^{-1}, x) \right] \\ &\approx \chi\left(\frac{W_P}{N} - c(t)W_P\epsilon^{-1}\right) + \int_{\mathbb{R}} \frac{N}{W_P} \zeta x (c(t)W_P\epsilon^{-1} - x) \frac{p(x, t)}{N} dx. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Minimumfunktion ist nur x , da $\epsilon^{-1} > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Unter der Annahme $W_p \approx W_P(1 - c(t))$ können wir die beiden Ausdrücke für das erste Moment gleichsetzen und kommen somit auf folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} c'(t)W_P\epsilon^{-1} &\approx \chi\left(\frac{W_P}{N} - c(t)W_P\epsilon^{-1}\right) + \frac{N}{W_P} \zeta \int_{\mathbb{R}} x (c(t)W_P\epsilon^{-1} - x) \frac{p(x, t)}{N} dx \\ &= \chi\left(\frac{W_P}{N} - c(t)W_P\epsilon^{-1}\right) + \zeta \left(c(t)W_P(1 - c(t))\epsilon^{-1} - \frac{N}{W_P} B_p(\infty) \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$c'(t) \approx \epsilon \left(\chi \frac{1}{N} - \zeta \frac{N}{W_P^2} B_p(\infty) \right) - \chi c(t) + \zeta c(t)(1 - c(t)). \quad (4.7)$$

Nachdem angenommen wurde, dass $B_p(\infty)$ endlich ist, ist $\epsilon B_p(\infty)$ infinitesimal. Somit ist weiters

$$c'(t) \approx c(t)(-\chi + \zeta(1 - c(t))), \quad (4.8)$$

was man vereinfachen kann zu

$$c'(t) \approx \zeta c(t) \left[\left(1 - \frac{\chi}{\zeta} \right) - c(t) \right]. \quad (4.9)$$

Diese Gleichung macht Sinn für den Reichtum der Oligarchie, auf die wir zurückkommen, nachdem wir die normale Population beschrieben haben.

4.5 Normale Agenten

Wir betrachten nun die Ableitung der Fokker-Planck-Gleichung für normale Agenten. Wir nehmen an, dass w von p repräsentiert wird. Die Quantitäten A_p , L_p und B_p können zu hyperreellen Funktionen erweitert werden. Es gilt $A_P(w) \approx A_p(w)$ und $B_P(w) \approx B_p(w)$ für alle $w \in \mathbb{R}$, wobei A_P und B_P Integrale über den hyperreellen Zahlen sind. Weiters gilt

$$L_P(w) \approx \int_0^w x \frac{p + c(t)W_P\Xi}{W_p/(1 - c(t))} dx \approx (1 - c(t))L_p(w) \quad (4.10)$$

mit reellem w .

Wir können M_2 nun berechnen wie in (3.9), mit dem Unterschied dass die Integrale über den hyperreellen Zahlen sind und nicht über den Reellen.

$$\begin{aligned} M_2(w, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}_P \left[\frac{(\Delta w)^2}{\Delta t} \right] \\ &= \gamma \left(\int_{0 \leq x \leq w} x^2 \frac{P(x, t)}{N_P} dx + \int_{x > w} w^2 \frac{P(x, t)}{N_P} dx \right) \\ &= \gamma [2B_P(w, t) + w^2 A_P(w, t)] \\ &\approx \gamma [2B_p(w, t) + w^2 A_p(w, t)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Der Transaktionsterm bleibt unverändert, da die Oligarchie die Größe der Transaktionen nicht beeinflusst, weil diese begrenzt ist durch den Reichtum des ärmeren Agenten. Betrachte nun M_1 :

$$M_1(w, t) \approx \chi \left(\frac{W_P}{N} - w \right) - \zeta \left[2 \frac{N}{W_P} B_p + 2w(1 - c(t))L_p - w^2 \frac{N}{W_P} A_p + w \right]. \quad (4.12)$$

Wir verwenden ab jetzt den gesamten Reichtum W_P , da dieser eine Erhaltungsgröße ist, auch im superkritischen System. Wir erhalten nun ein neues System an führenden Gleichungen für das superkritische System, das bis hin zur Infinitesimalität gilt:

$$P(w, t) \approx p(w, t) + c(t)W_P\Xi(w), \quad (4.13)$$

$$\frac{dc}{dt} \approx \zeta c \left(1 - \frac{\chi}{\zeta} - c\right), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} \approx & \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[\gamma \left(\frac{w^2}{2} A_p + B_p \right) p \right] - \frac{\partial}{\partial w} \left[\chi \left(\frac{W_P}{N} - w \right) p \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial w} \left[\zeta \left(2 \frac{N}{W_P} B_p - 2w(1-c)L_p - \frac{N}{W_P} w^2 A_p + w \right) p \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

5. Superkritisches System

Wir bestimmen nun die Variable $c(t)$ nach Gleichung (4.9), indem wir eine Trennung der Variablen vornehmen:

$$c(t) \approx \left(1 - \frac{\chi}{\zeta}\right) \frac{c_0 e^{(\zeta-\chi)t}}{c_0 [e^{(\zeta-\chi)t} - 1] + 1 - \frac{\chi}{\zeta}}. \quad (5.1)$$

Es gibt zwei fixe Punkte: $c \approx 0$ und $c \approx 1 - \frac{\chi}{\zeta}$. Die Oligarchie ist stabil wenn $\zeta > \chi$, also genau wenn $c \approx 1 - \frac{\chi}{\zeta}$ positiv ist. Nun stellt sich noch die Frage nach dem Wert von c_0 . In diskreten Systemen ist die Oligarchie der reichste Agent, also würde man erwarten, dass c_0 zumindest so groß ist wie der durchschnittliche Reichtum der Agenten, also $c_0 \geq W_P/N$.

Es werden im folgenden verschiedene Methoden verwendet um die analytisch schwer lösbare Differentialgleichung zu lösen. Als erstes nehmen wir die Monte Carlo (MC) Simulation zur Hilfe, ein stochastischer Ansatz zur Simulation verschiedener Prozesse, bei dem mittels Wahrscheinlichkeitstheorie, insbesondere dem Gesetz der großen Zahlen, gearbeitet wird [9]. Die Monte Carlo Simulation für Zufallspfade bestätigt die stationäre Lösung der Oligarchie (siehe Abbildung 5.1). Sie verifiziert weiters, dass der Reichtum der Oligarchie sich entwickelt wie in der Differentialgleichung (4.15) beschrieben wird, obwohl die Zeitskalen hierbei nicht übereinstimmen (siehe Abbildung 5.2). Die kleine Diskrepanz zwischen stetigen und diskreten numerischen Simulationen können auf den Effekt einer endlichen Population zurückgeführt werden, die eine schwache Korrelation zwischen den Reichtümern einzelner Agenten einführt. Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein numerisches Verfahren zur Lösung komplexer Probleme [10].

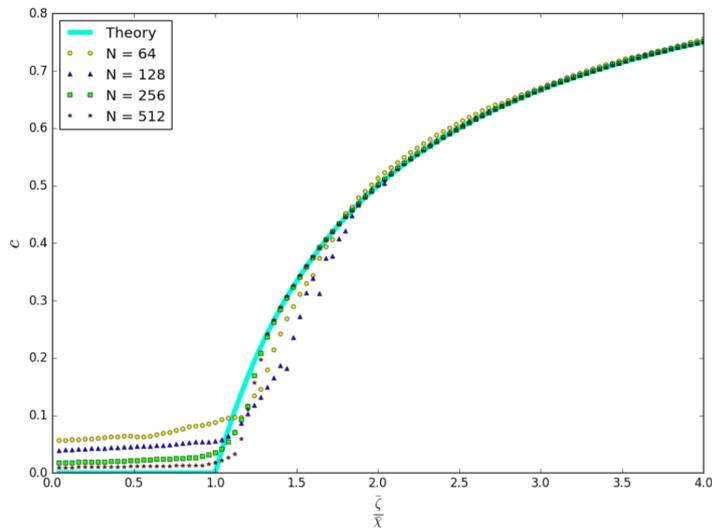


Abbildung 5.1: [1]

Die Achsen des Graphen sind der Reichtum des reichsten Agenten (c) und die Relation ζ/χ einer Monte Carlo Simulation.

Mit zunehmender Größe der Simulation, nähert sich die Verteilung der vorhergesagten theoretischen Kurve an: 0 für $\zeta < \chi$ und $1 - \chi/\zeta$ für $\zeta > \chi$. Für $\chi/\zeta > 1$ besitzt der reichste Agent Vermögen der Größenordnung $1/N$.

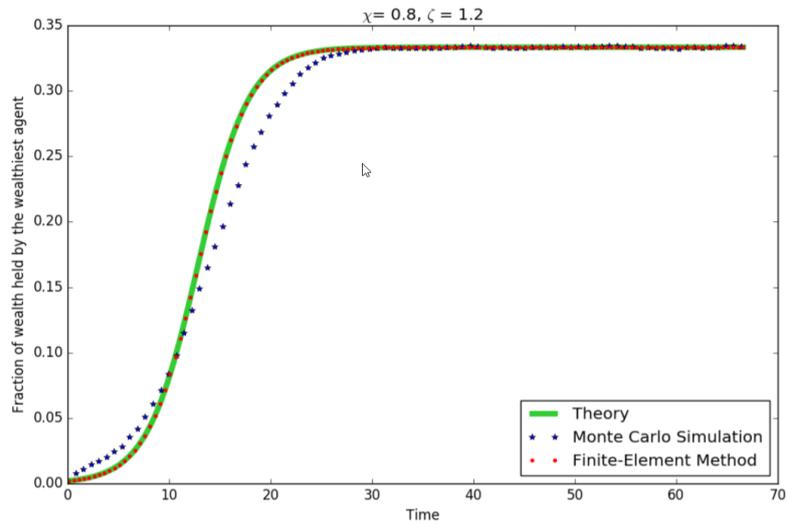


Abbildung 5.2: [1]

Abbildung 5.2 zeigt den Vergleich der Approximationen von $c(t)$ mittels der Monte Carlo Simulation, der Finite-Element Methode und dem theoretischen Ergebnis, jeweils mit $\chi = 0.8$, $\zeta = 1.2$ und $c_0 = 1/521$.

In der MC Simulation wurde $N = 521$ und $\alpha = 0.001$ verwendet. Die Ergebnisse der FEM stimmen mit der Theorie nahezu überein. Man vermutet, dass die Unterschiede der MC Simulation auf endliche Populationseffekte zurückzuführen sind.

Die Stabilität von p stimmt mit folgendem subkritischen System überein. Setzen wir $\partial p/\partial t = 0$ und $c = 1 - \frac{\chi}{\zeta}$, und schreiben den Gesamtreichtum folgendermaßen um: $W_P = W_p/(1 - c) = \frac{\chi}{\zeta}W_p$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[\gamma \left(\frac{w^2}{2} A_p + B_p \right) p \right] - \frac{\partial}{\partial w} \left[\left(\zeta \frac{W_p}{N} - \chi w \right) p \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial w} \left[\left(2\chi \frac{N}{W_p} B_p(w) - 2\chi w L_p(w) - \chi \frac{N}{W_p} w^2 A_p(w) + \zeta w \right) p \right] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[\gamma \left(\frac{w^2}{2} A_p + B_p \right) p \right] - \frac{\partial}{\partial w} \left[\zeta \left(\frac{W_p}{N} - w \right) p \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial w} \left[\chi \left(2 \frac{N}{W_p} B_p(w) - 2w L_p(w) - \frac{N}{W_p} w^2 A_p(w) + w \right) p \right]
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Das ist die stationäre Lösung der Differentialgleichung (4.15) mit χ und ζ vertauscht. Daraus kann man schließen, dass die stationäre normale Population in einem superkritischen System genau einem subkritischen System entspricht, bei dem χ und ζ vertauscht sind und $W = \frac{\chi}{\zeta}W_P$ gilt. Diese Dualität zeigt, dass in Bezug auf stationäre Lösungen nur der Fall $\zeta \leq \chi$ betrachtet werden muss.

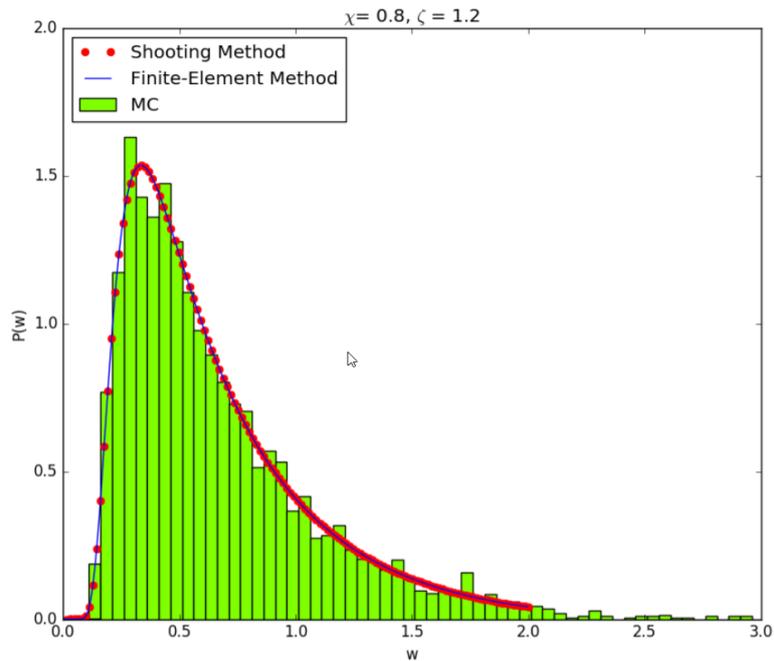


Abbildung 5.3: [1]

Abbildung 5.3 zeigt den Vergleich von drei verschiedenen numerischen Methoden zur Berechnung der Verteilung p mit Parametern $\chi = 0.8$ und $\zeta = 1.2$. Simulationen der Stabilität von p sind konsistent bei der Anwendung dreier verschiedener numerischer Methoden, wie man in Abbildung 5.3 sehen kann. Die Monte Carlo Simulation verwendet Zufallspfade in einem diskreten System, die Finite-Element Methode verwendet die ungebundene Gleichung (4.15) und die Shooting Methode das System, das die Oligarchie beinhaltet mit (3.11).

6. Validierung des Modells

Der wichtigste Test für die Validierung eines Modells ist der Vergleich zu realen Daten. Dies wurde für das in dieser Arbeit beschriebene Modell für die Ökonomie der Vereinigten Staaten von 2013, mittels der “Survey of Consumer Finances report“ und “the Forbes 400’s list“ mit den 400 reichsten Personen, durchgeführt. Dafür wurden die Parameter ζ und χ passend gewählt: $\zeta = 0.024$ und $\chi = 0.022$. Die Abbildung 6.1 zeigt die passende Lorenzkurve. Die Approximation mit unserem Modell ist im Vergleich mit den realen Werten sehr akkurat. Die einzige große Abweichung tritt für negativen Reichtum auf. Negative Werte miteinzubeziehen ist relevant um Schulden darstellen zu können. Dies stellt allerdings kein bleibendes Problem dar, da im EYSM auch negativer Reichtum möglich ist. In weiterführenden Arbeiten kann man daher die Möglichkeit verschuldet zu sein in das Modell einbeziehen und passend weiterentwickeln.

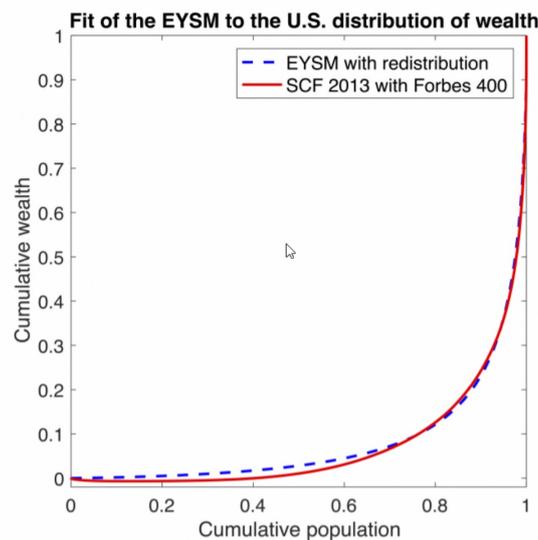


Abbildung 6.1: [1]

7. Zusammenfassung

Die ungerechte Verteilung von Reichtum ist auf der ganzen Welt ein Problem, das weiter an Bedeutung zunimmt. Dennoch gibt es wenige ökonomische Modelle, die treffsicher die enorme Ungleichheit in modernen Ökonomien vorhersagen können. Ein Grund dafür ist, dass die meisten Modelle sich primär mit dem statischen Verhalten beschäftigen. In dieser Arbeit wurde ein mathematischer Rahmen geschaffen, um die Konzentration von Reichtum zu verstehen und in weiterer Folge die Veränderung der Verteilung einer Ökonomie, die im Extended Yard-Sale Modell beschrieben wird, zu analysieren. Es wurde gezeigt, dass das EYSM dazu tendiert eine Population in zwei Klassen zu unterteilen: eine Oligarchie und eine normale Population, von der der Reichtum gebunden ist an jenen der Oligarchie.

Es wurden einige Annahmen getroffen, um es zu ermöglichen diese Systeme aufzustellen und zu analysieren. Als erstes haben wir den Zufallspfad mit drei Faktoren beschränkt: Transaktionen, Umverteilung und wealth-attained advantages. Weiters wurden Faktoren wie Immigration, Inflation, Produktion oder Konsumation nicht miteinbezogen. Professor Boghosian hat diese Faktoren in seiner Arbeit analysiert und ist zum Schluss gekommen, dass diese die Verteilung von Reichtum nicht verändert haben.

Es wurde weiters angenommen, dass bei Transaktionen eine der Parteien verlieren muss, sodass die andere Gewinn machen kann.

Bei der Definition der Fokker-Planck-Gleichung haben wir weitere Annahmen getroffen: dass P und p als stetig angenommen werden können, dass die Menge an ausgetauschtem Reichtum sehr klein ist und dass der Reichtum der verschiedenen Agenten unabhängig voneinander ist. Die Validierung dieser Annahmen kann durch die Konstanz von numerischen Lösungen gezeigt werden. Sowohl die Monte Carlo Simulation, die auf Zufallspfaden mit diskrettem Reichtum und Agenten basiert, als auch die Finite-Elemente Methode, die die Gleichung verwendet, ergeben fast identische Ergebnisse.

Schlussendlich wurde eine Notation für eine Oligarchie eingeführt, wobei nicht standardisierte Analysis verwendet wurde. In der Definition der Oligarchie wird Ξ als ein linearer Operator definiert, der folgendermaßen abbil-

det: $f(s) \mapsto \lim_{s \rightarrow \infty} f(s)/s$. Um dies umzusetzen, ist es nötig den Definitionsbereich von Ξ anzupassen. Die Verwendung von nichtstandard Analysis ermöglicht die vereinfachte Berechnung solange höchstens ein unendliches Objekt existiert, was bei dem definierten Modell gewährleistet ist, da es nur eine einzige Oligarchie geben kann. Der Funktionsraum wird somit relativ simpel, da Standardfunktionen ersetzt werden durch hyperreelle Delta Dirac Funktionen. Grenzwerte können somit ersetzt werden durch infinitesimale und unendliche Werte, was Ausdrücke wesentlich vereinfachen kann, falls diese passend gewählt werden. Weiters ist hervorzuheben, dass der Reichtum der Oligarchie seine Abhängigkeit zu dem der anderen verliert, sodass wir schlussendlich zwei separate Gleichungen für die Verteilung des Reichtums der Oligarchie und der normalen Agenten erhalten.

8. Verzeichnis

- [1] A nonstandard description of wealth concentration in large-scale economies; Adrian Devitt Lee, Hongyan Wang, Jie Li, Bruce Boghosian; 2018 , SIAM Journal on Applied Mathematics
- [2] Bruce Boghosian; <https://engineering.tufts.edu/people/faculty/bruce-boghosian>, aufgerufen am 12.1.2021
- [3] Occupy Wallstreet; <https://de.wikipedia.org/wiki/OccupyWallStreet>, aufgerufen am 12.1.2021
- [4] Oxfam Artikel zu Studie; <https://www.oxfam.de/ueber-uns/aktuelles/16-januar-2015-1749-oxfam-studie-2016-besitzt-1-prozent-weltbevoelkerung-mehr>, zugegriffen am 3.2.2021
- [5] Oxfam Artikel zu Studie; <https://www.oxfam.de/ueber-uns/aktuelles/2017-01-16-8-maenner-besitzen-so-viel-aermere-haelfte-weltbevoelkerung>, zugegriffen am 3.2.2021
- [6] Oligarchy as a phase transition: The effect of wealth-attained advantage in a Fokker-Plank description of asset exchange; Bruce Bghosian, Adrian Devitt Lee, M. Johnson, J. Marcq, Hongyan Wang; 2017, Physica A
- [7] Lorenzkurve; <https://de.wikipedia.org/wiki/Lorenz-Kurve>, aufgerufen am 10.2.2021
- [8] Delta-Verteilung; <https://de.wikipedia.org/wiki/Delta-Distribution>, aufgerufen am 10.2.2021
- [9] Monte Carlo Simulation; <https://de.wikipedia.org/wiki/Monte-Carlo-Simulation>, aufgerufen am 23.2.2021
- [10] Finite-Elemente Methode; <https://de.wikipedia.org/wiki/Finite-Elemente-Methode>, aufgerufen am 23.2.2021