



Institut der Finanz- und Versicherungsmathematik

Seminararbeit

# **On detecting spoofing strategies in high frequency trading**

unter der Anleitung von  
Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr. tech. Stefan  
Gerhold

durch Simona Aleksandrova

Wien, Februar 2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Organisation des Artikels . . . . .	3
1.2	Ein erstes Beispiel . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Ungleichgewicht und die Abhängigkeit der Preisbewegung von diesem</b>	<b>4</b>
2.1	Markt- und Limit Orders . . . . .	4
2.2	Liquiditätskosten . . . . .	4
2.3	Ungleichgewicht auf dem Markt . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Spoofing Strategie</b>	<b>7</b>
3.1	Existenz von Spoofing . . . . .	8
3.2	Optimale Spoofing und daraus resultierendes Ungleichgewicht	12
<b>4</b>	<b>Monitoring</b>	<b>13</b>
4.1	Monitoring $\tilde{t}_-^N$ . . . . .	14
4.2	Monitoring $\tilde{t}_-^N, \tilde{t}_+^N$ . . . . .	15
4.3	Monitoring $\tilde{t}_-^N$ bedingt auf $\tilde{t}_+^N$ . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Abschluss</b>	<b>19</b>

# 1 Einleitung

Der Hochfrequenzhandel (HFT) ist eine automatisierte Handelsplattform, die große Investmentbanken, Hedgefonds und Investoren zusammen einsetzt. Es verwendet mächtigen Computer, um eine große Anzahl von Aufträgen mit extrem hoher Geschwindigkeit abzuwickeln. Die System benutzt komplexe Algorithmen, um Märkte zu analysieren. Somit können die Händler Veränderungen auf dem Markt erkennen und den Bid-Ask-Spread besser schätzen. Der Hochfrequenzhandel ist auf den Märkten alltäglich geworden, nachdem die Börsen Anreize für Institute eingeführt haben, den Märkten Liquidität zu verleihen.

Das Spoofing entfaltet sich mit der steigenden Bedeutung vom Hochfrequenzhandel. Das ist eine illegale Handlung, bei der die Angebote zum Verkauf und zum Kauf von Terminkontrakte (engl. futures contracts) künstlich verändert werden. Ein mehrstufiges Ungleichgewicht, das die daraus resultierende Preisbewegung beeinflusst, ist eingeführt, auf der wir die Optimierungsstrategie eines potenziellen Spoofers beschreiben. Der Spoofer kann von dieser kurzfristigen Preisbewegung profitieren, indem er das vorherige Angebot storniert, während der Markt wieder zu seinem Gleichgewicht zurückkehrt.

Eine von mehreren Definitionen von Spoofing finden wir in Dodd Frank-Gesetz von 2010. Dort ist Spoofing als Aktivität des Bietens oder Angebots mit der Absicht, vor der Hinrichtung abzusagen - dies kann als Straftat, die mit Strafen von bis zu 1 Million US-Dollar und bis zu zehn Jahren Gefängnis bestraft werden kann. Ein Beispiel, wo diese Strafen angewendet wurden, ist Coscia. Im Jahr 2011 erteilte Coscia gefälschte Aufträge über CME Group Inc. und die europäischen Terminmärkte mit einem Gewinn von fast 1,6 Mio. USD. Coscia wurde wegen sechs Fällen von Spoofing angeklagt, wobei jeder Fall eine Höchststrafe von zehn Jahren Gefängnis und eine Höchststrafe von einer Million Dollar nach sich zog. Die illegalen Aktivitäten von Coscia und seiner Firma fanden in einem Zeitraum von sechs Wochen vom 8. August 2011 bis zum 18. Oktober 2011 auf der Globex-Handelsplattform der CME Group statt.

Aus mehreren Gründen ist das Erkennen und Verfolgen von Spoofing-Verhalten ein herausforderndes Problem. Erstens wegen die schiere Menge an Daten, die aus dem Hochfrequenzhandel mit vielen Finanzprodukten und Veranstaltungsorten stammen. Zweitens ist es normalerweise unmöglich, in Echtzeit zu verfolgen, wer hinter jedem Trade steht, da die Spoofer anonym handeln.

## 1.1 Organisation des Artikels

Der erste Abschnitt stellt die verschiedene Arten von Orders vor, das Ungleichgewicht und die Abhängigkeit der Preisbewegung von diesem Ungleichgewicht. Der zweite Abschnitt, in dem die Spoofing-Strategien vorgestellt werden, befasst sich mit den theoretischen Bedingungen für das Auftreten von Spoofing-Verhalten. Im letzten Abschnitt werden einige quantitative Ansätze zur Verfolgung des Spoofing-Verhaltens in Echtzeit erläutert und vorgestellt, die in realen Datensätzen dargestellt werden.

## 1.2 Ein erstes Beispiel

In diesem einfachen Beispiel von nur einer Order können wir betrachten, wie die Liquidität sich bei Spoofing steigt.

In der ersten Tabelle schauen wir die Anzahl von Aktien in Bid und Ask Seite in den verschiedenen Markttiefen an. In der zweiten Tabelle sehen wir wesentliche Steigung auf der Ask Seite. Diese ergibt sich aus künstlichen Bestellungen (spoofed asks) ohne Absicht, ausgeführt zu werden. Mit dieser Handlung schafft der Spoofer künstlichen Druck auf dem Limit Order Book und der Preis senkt.

Die Markttiefe verweist zu Liquidität. Die gibt die Anzahl von Aktien auf bestimmter Preis.

Bids	Asks	Bids	Asks	Spoofed Asks
	35		55	20
	40		65	25
	60		75	15
	50		65	15
	15		45	30
	30		55	25
	25		50	25
	30		60	30
	20		35	15
	5		5	
10		10		
20		20		
15		65		
30		30		
50		50		
20		20		
30		30		
25		25		
50		50		
60		60		

## 2 Ungleichgewicht und die Abhängigkeit der Preisbewegung von diesem

### 2.1 Markt- und Limit Orders

In dieser Arbeit werden wir uns auf das Spoofing Verhalten vom Aussichtspunkt des Markt Takers (Käufern) fokussieren. Für diese ist die Liquidität von großer Bedeutung, da sie durch die sicherstellen können, dass ein angemessener Preis vorliegt, wenn sie einen Handel eingehen oder eine bestehende Position schließen müssen.

Weitere Annahme, die wir an dieser Stelle machen sollen, ist, dass wir den Markt in einer statischen Situation anschauen werden und die Dynamik ignorieren werden.

Das Ziel des Hochfrequenzhandels besteht darin, Teilnehmer, die bereit sind, einen Vermögenswert zu verkaufen, mit Teilnehmern, die bereit sind, ihn zu kaufen, zusammenzubringen. Dies erfolgt hauptsächlich durch zwei Arten von Aufträgen: Markt- und Limitaufträge. Marktorders werden von Teilnehmern gesendet, die bereit sind, den Vermögenswert sofort zu kaufen bzw. zu verkaufen, vorzugsweise zum besten verfügbaren Preis. Limit Orders zeigen die Interesse der Teilnehmern, den Vermögenswert zu einem bestimmten Preis zu kaufen oder zu verkaufen. Insbesondere ist die Dringlichkeit bei dieser Art von Aufträge abwesend. In der Regel werden diese Aufträge nicht sofort ausgeführt. Ein anderer Teilnehmer muss bereit sein, den Auftrag zu dem Limit Order angegebenen Preis auszuführen - falls ein solcher Teilnehmer jemals eintrifft.

Daher wird der Preis eines gehandelten Wertpapiere nicht durch einen eindeutigen Preis angegeben, sondern durch eine Sammlung von Preisen, die von allen verfügbaren Limit Orders angegeben werden. Diese Preise bilden das Limit Order Book. Wenn es im begrenzten Auftragsbuch viele Aufträge gibt, werden ankommende Marktorders mit größerer Wahrscheinlichkeit von diesen Limit Orders zu einem guten Preis vollständig abgeglichen. Die Ausgabe von Limit Orders erhöht daher die Liquidität des Vermögenswertes. Im Gegenteil entziehen die Marktorders dem Markt effektiv Liquidität.

### 2.2 Liquiditätskosten

Mit  $p$  wird der Ask Preise notiert und mit  $\bar{v}=(\bar{v}_0, \dots, v_N)$  der Limit Order Book auf Ask Seite, wobei  $\bar{v}_0$  ist das Volumen des gebuchten Briefkurses  $p$ ,

$\bar{v}_1$  - das Volumen zum Briefkurs  $p + \delta$  usw. ( $\delta$  ist beliebig klein). Weiter bezeichnen wir mit  $\bar{v}^- = (\bar{v}_0^-, \dots, \bar{v}_N^-)$  das begrenzte Limitauftrag auf Bid Seite.  $H$  - Anzahl der Aktien.

Für  $H$  definieren wir die Funktion

$$F(H) := \inf \left\{ x \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^x \bar{v}_k \geq H \right\}$$

Die repräsentiert wie groß die positive Abweichung für eine Bestellung der Größe  $H$  ist.

Für die Kosten der Marktorder erhalten wir:

$$pH + \sum_{k=0}^{F(H)} k \delta \bar{v}_k - \delta F(H) \left( \sum_{k=0}^{F(H)} \bar{v}_k - H \right) = pH + \delta G(H)$$

Hier bezeichnet  $G$  die Liquiditätskosten.

**Bemerkung 1.** *Bemerkung Während des theoretischen Teils dieser Arbeit nehmen wir an, dass das Limit Order Buch ist blocked shaped. D.h. die Liquidität wird gleichmäßig über die Bid und Ask Preise verteilt. Mit  $a > 0$  wird die Anzahl von Vermögenswerte auf Ask Seite für jede Preisstufe bezeichnet. Wir betrachten folgende Approximationen*

$$F(H) \approx H/a$$

und

$$G(H) \approx H^2/2a$$

## 2.3 Ungleichgewicht auf dem Markt

Als nächstes interessieren wir uns für Ungleichgewicht der Limitaufträge. Diese ergibt sich vom Differenz zwischen Angebot und Nachfrage. Sei  $w_0, \dots, w_N$  mit  $\sum_{k=0}^N w_k = 1$  und  $w_k > 0$  die relative Auswirkung von Ungleichgewicht auf Stufe  $k$ . Somit erhalten wir für gewichtete durchschnittliche Volumen der Angebot bzw. Nachfrage

$$\bar{B} = \sum_{k=0}^N w_k \bar{v}_k^- = \langle w, \bar{v}^- \rangle$$

$$\bar{A} = \sum_{k=0}^N w_k \bar{v}_k = \langle w, \bar{v} \rangle$$

und das Ungleichgewicht  $\bar{\iota} := \frac{B}{B+A} \in (0, 1)$

**Bemerkung 2.** *Bemerkung In blocked shaped Limit Order Book haben wir für das Ungleichgewicht*

$$\bar{\iota} = \frac{\sum_{k=0}^N w_k b}{\sum_{k=0}^N w_k (a+b)} = \frac{b}{a+b}$$

wobei  $b$  ist Anzahl von Orders für jede Markttiefe auf Bid Seite. Somit erhalten wir für  $b$

$$b = \frac{a\bar{\iota}}{1-\bar{\iota}}$$

Es gibt zwei Hauptfaktoren, die Preisabweichung in der nächste Periode beeinflussen. Der erste ist die Buchung und Stornierung von Limitaufträge. Der hat keinen Einfluss auf Limit Orders. Der zweite ist die Buchung von Marktorders. Der kann auf Limit Orders beeinflussen. Die Verteilungen und die Mittelwerte von beiden möglichen Preisbewegungen in der nächsten Periode bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} dp &= dp_{-N}, \dots, dp_0, \dots, dp_N & \mu &= \sum_{x=-N}^N x dp_x \\ dq &= dq_{-N-1}, \dots, dq_0, \dots, dq_{N+1} & \nu &= \sum_{y=-N-1}^{N+1} y dp_y \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass das Ungleichgewicht keinen Einfluss auf eingehende Marktaufträge hat und dass die Preisabweichung in Bezug auf Marktaufträge neutral ist, also  $\nu = 0$ . Weiter betrachten wir die Parametrisierung  $\iota \mapsto dp(\iota)$  der Preisabweichung. In dem Wissen, dass das Ungleichgewicht sich zwischen 0 und 1 bewegt, geben wir an:  $dp^-$  ist die Verteilung, wenn das Ungleichgewicht in der Nähe zu 0 ist, und  $dp^+$ , wenn das Nähe zu 1 ist. Dadurch erhalten wir

$$dp(\iota) = \iota dp^+ + (1 - \iota) dp^-$$

Mit der Symmetrie vom Indikator des Ungleichgewichtes können wir annehmen, dass

$$dp_x^+ \geq dp_x^- \quad \forall x \geq 0 \quad \text{und} \quad dp_x^+ = dp_x^- \quad \forall x$$

Das impliziert  $\mu(\iota) := \sum_{x=-N}^N x dp_x(\iota) = (2\iota - 1) \sum_{x=-N}^N x dp_x^+ = \mu^+(2\iota - 1)$   
 Nach Annahme ist  $\mu^+$  positiv und insbesondere bewegt sich  $\mu(\iota)$  zwischen  $-\mu^+$  und  $\mu^+$  und ist gleich 0, wenn  $\iota = 1/2$ , also wenn die Angebote gleich die Nachfrage sind.

### 3 Spoofing Strategie

Wir nehmen an, ein Händler, der Anzahl  $H$  Aktien kaufen will, hat 3 Möglichkeiten.

1. Sofortauftrag: Gesamtkosten

$$pH + \delta G(H)$$

2. Verzögerter Marktorder: durchschnittliche Gesamtkosten

$$\sum_{x=-N}^N \sum y = -N - 1^{N+1} [(p + \delta(x+y))H + G(H)] dp_x(\bar{\iota}) dp_y = pH + \delta(G(H) + H\mu^+(2\bar{\iota}-1))$$

Falls  $\iota < 1/2$  ist der unmittelbare Börsenauftrag besser als 2. Möglichkeit.

3. Spoofing und verzögerter Marktorder: Man bucht Limitauftrag auf Ask Seite an Markttiefe  $k$ , mit  $k \in 0, 1, \dots, N$ , um die Liquidität zu erhöhen. Es ist leichter an Markttiefe  $k$  zu spoofen, da so die Möglichkeit gespoofte Aktien ausgeführt zu werden kleiner ist. Also handelt der Spoofer  $k$  Positionen entfernt von besten Preis. In der nächsten Periode weicht der Preis zwischen  $p$  und  $p + \delta(x + y)$  ab.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

$y \leq k$ : Keine Marketordnung erreicht den Limitauftrag. Dieser Limitauftrag wurde nicht gegen eine eingehende Marketordnung ausgeführt. Der letzte Limitauftrag wurde storniert. Die Anzahl  $H$  von Aktien ist an unten stehende Preis erworben:

$$(p + \delta(x + y))H + \delta G(H)$$

$y > k$  : Der Limitauftrag wurde gegen eine eingehende Marketordnung auf Preis  $(p + \delta)x + k =$  ausgeführt. Die neue Ziel ist  $H + v$  Aktien auf folgender Preis zu kaufen:

$$\begin{aligned} (p + \delta(x + y))(H + v) + \delta G(H + v) - (p + \delta(x + k))v \\ = (p + x\delta)H + \delta G(H + v) + \delta(y - k)v \end{aligned}$$

Also sind die Spoofing Nettokosten für Preisabweichung  $p + \delta(x + y)$  wie folgt

$$C_k(v, x, y) = (p + (x + y)\delta)H + \delta G(H + v\mathbb{1}_{\{y > k\}}) + \delta(y - k)v\mathbb{1}_{\{y > k\}}$$

gegeben. Die Buchung des Verkaufimitsvertrages ändert jedoch das Ungleichgewicht von  $\bar{t}$  auf

$$\iota_k(v) := \frac{B}{(A + B + w_k v)}$$

D.h., dass das Ungleichgewicht sich nach unten bewegt und die Verteilung  $dp$  auf günstige Ergebnisse verschiebt. Nehmen wir an, dass  $\nu = 0$ . Es ist nötig das Ungleichgewicht  $\iota_k(v)$  unter  $1/2$  zu bringen. Die durchschnittliche Nettokosten sind dann durch

$$\begin{aligned} C_k(v) &:= \sum_{x=-N}^N \sum_{y=-N-1}^{N+1} C_k(v, x, y) dp_x(v_k(v)) dq_y \\ &= \sum_{x=-N}^N (p + \delta x)H dp_x(v_k(v)) + \delta(1 - Q_k)G(H) + \delta Q_k G(H + v) + \delta v \sum_{y=k+1}^{N+1} (y - k) dq_y \\ &= pH + \underbrace{\delta(1 - Q_k)G(H)}_{\text{Kosten für optimale Situation}} + \underbrace{\delta H \mu^+(2\iota_k(v) - 1)}_{\text{Spoofing Auswirkungen}} + \underbrace{\delta Q_k G(H + v) + \delta v \nu_k}_{\text{Kosten, falls falsch erwischt}} \end{aligned}$$

gegeben. Wobei

$$Q_k = \sum_{y=k+1}^{N+1} dq_y$$

und

$$\nu_k = \sum_{y=k+1}^{N+1} (y - k) dq_y$$

Die Kostenfunktion ist konvex in  $v$ , da  $G$  und  $\iota_k$  konvex sind.

**Bemerkung 3.** *Bemerkung Zu beachten ist, wir gehen davon aus, dass Spoofing nur zu einer bestimmten Tiefe  $k$  möglich ist.*

### 3.1 Existenz von Spoofing

Die Frage ist, ob es möglich ist, das Ungleichgewicht so weit wie möglich auf 0 zu verschieben, um die Kosten für die Buchung von Verkaufsaufträgen, das Ausführen und Liquiditätskosten für Rückkauf zu rechtfertigen.

**Definition 1.** *Definition Begrenztes Auftragsbuch lässt Spoofing Manipulation zu, wenn es  $v > 0$  und  $k \in 0, 1, \dots, N$  existieren, sodass*

$$\begin{cases} C_k(v) < pH + \delta(G(H) + \mu^+ H(2\bar{t} - 1)) & \text{wenn } \bar{t} \geq 1/2 \\ C_k(v) < pH + \delta G(H) & \text{wenn } \bar{t} > 1/2 \end{cases}$$

Mit dieser Bezeichnung und mit obigen Ungleichungen erhalten wir

$$Q_k[G(H + v) - G(H)] < 2\mu^+ H(\bar{t} \wedge 1/2 - \iota_k(v)) - v\nu_k$$

Wir sind zu der Stelle gekommen, wo wir die Existenz von Spoofing Manipulation auf block shaped Limit Orderbuch beweisen werden, wo das Volumen auf der Ask Seite  $a$  überall sind. D.h. die Liquidität ist auf Ask Seite. Weiter kennzeichnen mit  $\rho$  das Verhältnis der gekauften Aktien zur Tiefe der Limitaufträge. In Rahmen dieser Arbeit können wir annehmen, dass  $H = \rho a$ .

**Proposition 1.** *In einem block shaped Limit Orderbuch, wo das Volumen aus Ask Seite des Buches überall ist, gilt*

*i.) Falls  $\bar{t} \leq 1/2$ , der Limitauftrag lässt keine Spoofing Manipulation zu genau dann, wenn*

$$2\rho\mu^+(1 - \bar{t})\bar{t}w_k \leq Q_k\rho + \nu_k \quad (1)$$

*für alle  $k$  gilt.*

*ii.) Falls  $\bar{t} > 1/2$ , der Limitauftrag lässt keine Spoofing Manipulation zu, wenn (1) gilt.*

*Beweis.* Sei  $H = \rho a$ . Weiter sei das Ungleichgewicht  $\iota_k = b/(b + a + w_k v)$ , wobei  $b = a\bar{t}/(1 - \bar{t})$ . Für den Gradient von  $\iota_k(v)$  erhalten wir

$$\nabla(\iota_k(v)) = -\frac{b}{(a + b + w_k v)^2} w_k = -\frac{(1 - \bar{t})}{a\bar{t}} \iota_k^2(v) w_k$$

**Fall 1:**  $\bar{t} \leq 1/2$

Setze  $g(x) = \frac{x^2}{2a}$ . Damit es gilt, dass es keine Spoofing Manipulation gibt, genau dann wenn

$$f(v) := \frac{Q_k v^2}{a} + Q_k \rho v + v\nu_k - 2\rho\mu^+(\bar{t} - \iota_k(v)) \geq 0$$

für alle  $v \geq 0$ . Der Gradient dieser Funktion ist

$$\nabla(f(v)) = Q_k v/a + Q_k \rho + \nu_k - 2\rho\mu^+ \frac{1 - \bar{t}}{\bar{t}} \iota_k^2(v) w_k$$

Dieser ist in  $v$  monoton. Da  $f(0) = 0$  ist, folgt  $f(v) \geq 0$  für alle  $v$  genau dann, wenn  $\nabla(f(0)) \geq 0$  und das ist äquivalent zu

$$Q_k \rho + \nu_k \geq 2\rho\mu^+(1 - \bar{\iota})\bar{\iota}w_k \quad (2)$$

**Fall 2:**  $\bar{\iota} > 1/2$

In diesem Fall existiert keine Spoofung Manipulation genau dann, wenn

$$f(v) := \frac{q_k v^2}{2a} + \rho q_k v - 2\rho a \mu^+(1/2 - \iota_k(v)) \geq 0$$

für alle  $v \geq 0$ . Der Gradient von  $f(v)$  ist durch

$$\nabla(f(v)) = q_k v/a + \rho q_k - q_k k v - 2\rho\mu^+ \frac{1 - \bar{\iota}}{\text{bar}\iota} \iota_k^2(v) w_k$$

Da  $f(0) > 0$  ist, wie wir schon argumentiert haben, folgt  $f(v) \geq 0$  genau dann, wenn  $\nabla(f(0)) \geq 0$ , die ist wiederum äquivalent zu (2). □

Aus dieser Proposition können wir schließen: Preismanipulationen sind wahrscheinlicher, wenn

- $Q_k$  klein ist. Wenn die Wahrscheinlichkeit, einen Spoofing-Auftrag ausgeführt zu werden, klein ist, gibt es beim Spoofing relativ kleine Reduzierung.
- das Ungleichgewicht  $\bar{\iota}$  ist nahe bei  $1/2$ .
- die mittlere Abweichungsempfindlichkeit  $\mu^+$  als Funktion des Ungleichgewichts größer ist. Je empfindlicher die Preisbewegung in Bezug auf das Ungleichgewicht ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, eine Spoofing-Strategie aufzutreten.
- die relative Auswirkung eines Spoofing-Volumens auf Tiefe  $k$  zum Ungleichgewicht  $w_k$  größer ist.
- das Verhältnis der gekauften Aktien zur Tiefe der Limitaufträge  $\rho$  größer ist.

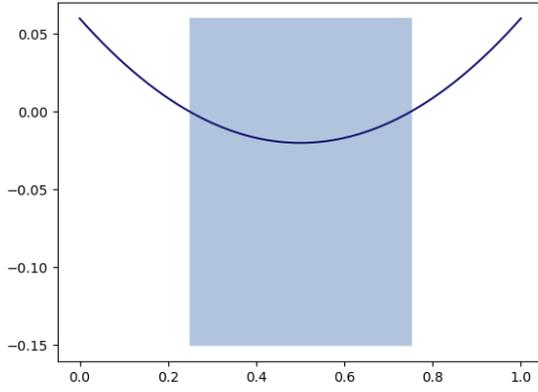


Abbildung 1: Spoofing Zustand als Funktion von  $\bar{t}$

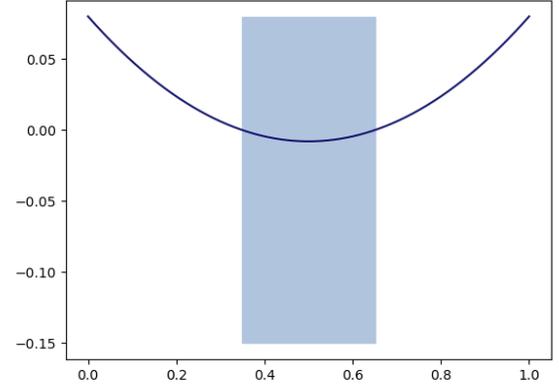


Abbildung 2:  $dq_k$  größer

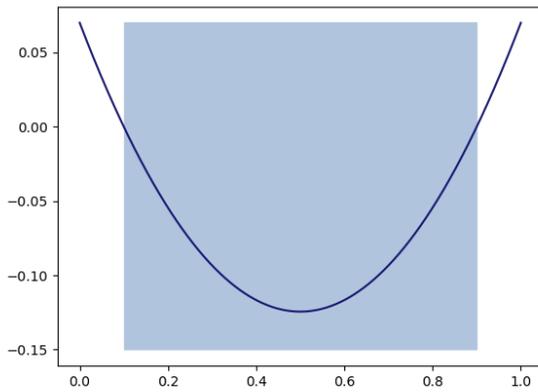


Abbildung 3:  $\mu^+$  größer

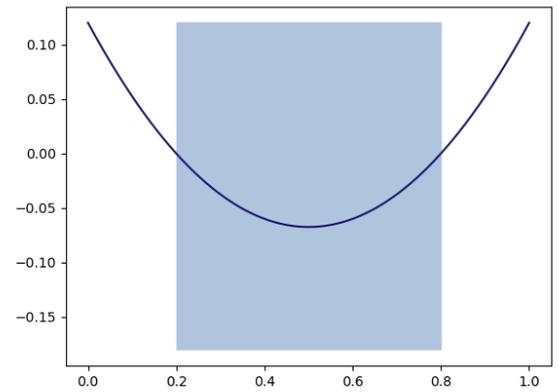


Abbildung 4:  $\rho$  größer

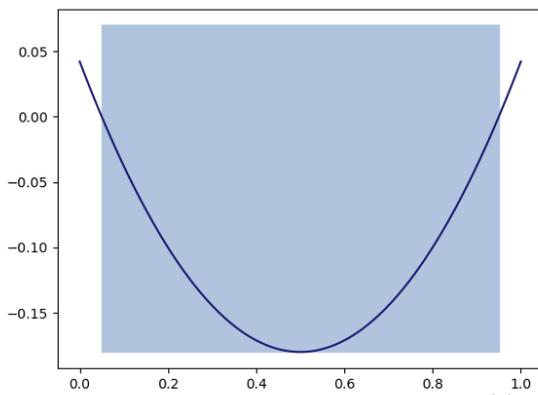


Abbildung 5:  $w_k$  größer

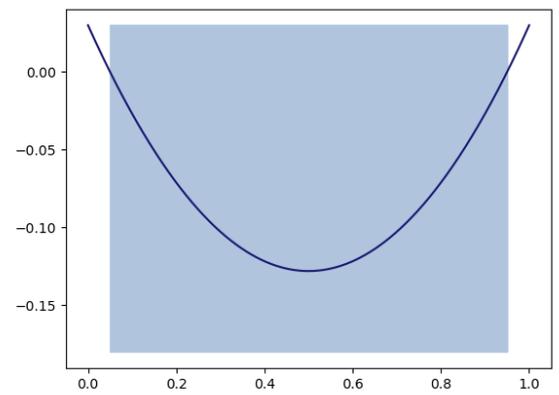


Abbildung 6:  $k$  größer

### 3.2 Optimale Spoofing und daraus resultierendes Ungleichgewicht

Jetzt wollen wir uns die optimale Spoofing Strategie anschauen. Diese ist natürlich von der Markttiefe, in welcher die gespoofte Bestellung aufgegeben ist, abhängig.

**Proposition 2.** *Die optimale Spoofing-Volumen  $v_{spoof}$  auf einem bestimmten Level  $k$  und daraus resultierendes Ungleichgewicht  $\iota_{spoof}$  sind durch*

$$v_{spoof} = \frac{a}{Q} [2\rho w \mu^+ \frac{1-\bar{\iota}}{\bar{\iota}} - (Q\rho + \nu)]^+$$

gegeben. Hier ist folgende Notation übernommen:  $w := w_k$ ,  $Q := Q_k$  und  $\nu := \nu_k$ .  $\iota_{spoof}$  ist die eindeutige Lösung in  $(0, \bar{\iota}]$  von  $\frac{\bar{\iota}}{\iota} = 1 + \frac{(1-\bar{\iota})w}{Q} [2\rho w \mu^+ \frac{1-\bar{\iota}}{\bar{\iota}} - (Q\rho + \nu)]^+$ , die eine Kubikwurzel ist.

*Beweis.* Sei die Notation wie in der Proposition gegeben. Annahme:  $H = \rho a$ . Wir wollen unsere Zielfunktion  $f(v)$  über  $v \geq 0$  optimieren.  $f(v) = (1 - Q) \frac{(\rho a)^2}{2a} + Q \frac{(\rho a + v)^2}{2a} + \rho a \mu^+ (2\iota(v) - 1) + v\nu = \frac{(\rho a)^2}{2a} + Q \frac{v^2}{2a} + (Q\rho + \nu)v + \rho a \mu^+ (2\iota(v) - 1)$ . Nach Bedingungen erster Ordnung mit dem Lagrange Parameter  $\lambda$  ergibt sich

$$Q \frac{v}{a} + (Q\rho + \nu) - 2\rho w \mu^+ \frac{1-\bar{\iota}}{\bar{\iota}} \iota^2 = \lambda$$

wobei  $\iota := \iota(v)$ . Für  $\iota \in (0, 1)$  bekommen wir

$$\lambda(\iota) = [(Q\rho + \nu) - 2\rho w \mu^+ \frac{1-\bar{\iota}}{\bar{\iota}} \iota^2]^2$$

$$v(\iota) = \frac{a}{Q} [2\rho w \mu^+ \frac{1-\bar{\iota}}{\bar{\iota}} \iota^2 - (Q\rho + \nu)]^2$$

Wenn wir nun die optimale  $v(\iota)$  als Funktion von  $\iota$  geben, lösen wir für  $\iota$  so, dass

$$\frac{1}{\iota} = \frac{a + b + wv(\iota)}{b} = \frac{1}{\bar{\iota}} + w \frac{1-\bar{\iota}}{a\bar{\iota}} v(\bar{\iota} = 1 \bar{\iota} + \frac{w}{Q} \frac{1-\bar{\iota}}{\bar{\iota}} [2\rho w \mu^+ \frac{1-\bar{\iota}}{\bar{\iota}} \iota^2 - (Q\rho + \nu)]^2)$$

Da die linke Seite streng monoton fallend auf  $(0, \bar{\iota}]$  ist und die rechte Seite monoton steigend auf das gleich Intervall ist, existiert es eine eindeutige Lösung, die ist eine Kubikwurzel.  $\square$

Von dieser impliziter Lösung kann man folgern, dass das Spoofing-Verhalten als eine Funktion des Abstandes zum oberen Rand (das Top) des Limit-Orderbuches untersucht werden kann.

**Bemerkung 4.** Zu bemerken ist, dass  $\iota_{spoofer} = \bar{\iota}$  genau dann, wenn  $2\rho w\mu^+(1-\bar{\iota})\bar{\iota} \leq Q\rho + \nu$  gilt. Wie wir von Proposition 1 wissen, diese Ungleichung liefert  $\nu_{spoofer} = 0$ , also die Spoofing Bedingungen sind nicht erfüllt.

Von der Definition des Ungleichgewichtes wissen wir,  $\iota(v)$  steigt genau dann an, wenn  $v$  abnimmt. Das heißt, das Spoofing Volumen ist größer, wenn  $\iota_{spoofer}$  kleiner wird. Ingesamt bekommen wir

$$\frac{1}{\iota} = \frac{1}{\bar{\iota}} + \frac{w}{Q} \frac{1-\bar{\iota}}{\bar{\iota}} \left[ 2\rho w\mu^+ \frac{1-\bar{\iota}}{\bar{\iota}} - (Q\rho + \nu) \right]^+ =: f(w, \mu^+, \nu, Q, \bar{\iota}, \rho, \iota)$$

wobei  $f$  ist eine zunehmende Funktion von  $\iota > \frac{1}{\bar{\iota}}$ .

## 4 Monitoring

Wie es in der Einleitung erwähnt war, ist es sehr schwierig heraus zu finden, ob es Spoofing am Markt gibt. Dafür muss man das Ungleichgewicht beobachten, das vom Spoofer beeinflusst war.

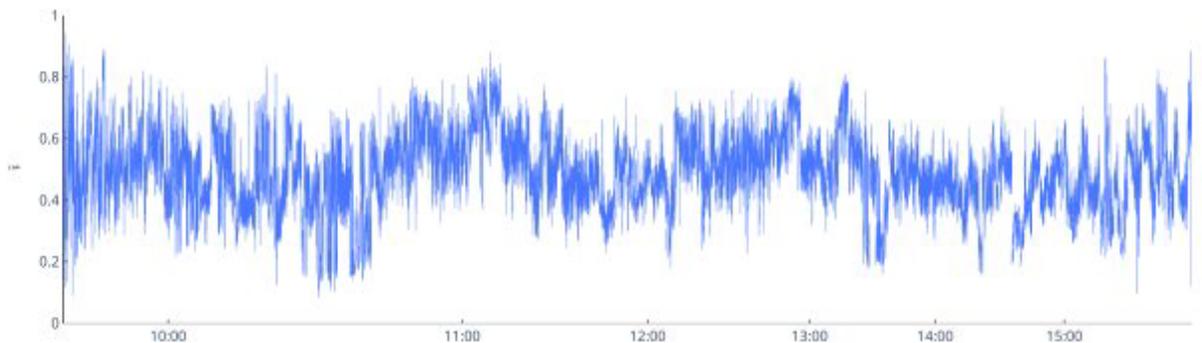


Abbildung 7: Ungleichgewicht auf dem Aktienmarkt BMO von 09:30 bis 16:00 am 07.06.2017

Um eine Spoofing-Strategie erfolgreich zu werden, muss eine Marktorder ausgeführt werden. Wir unterscheiden zwei Situationen.

- Die Marktordnung ist legitim  
Das Ungleichgewicht vor diesem Marktorder markieren wir mit  $\iota_-$  und nach diesem -  $\iota_+$ . Wir sollte das statistische Paar  $(\iota_-, \iota_+)$  beobachten.

- Die Marktorder ist Ergebnis eines Spoofing-Verhaltens  
Das implizite Gleichgewicht ohne Spoofing wäre das Paar  $(\iota_-, \iota_+)$ . Nachdem die Marktorder ausgeführt wurde, sollte das Marktungleichgewicht wieder zu seinem Gleichgewicht zurückkehren. Der Spoofer beobachtet das implizite Ungleichgewicht und beschließt, zu spoofen, indem er das von  $\iota_-$  auf  $\iota_{spoof}(\iota_-)$  bringt. Die daraus resultierende Beobachtung für diese gespoofen Marktorders ist daher das Paar  $(\iota_{spoof}(\iota_-), \iota_+)$ .

Wir werden einige Möglichkeiten für Überwachung vorschlagen.

#### 4.1 Monitoring $\tilde{\iota}_-^N$

Hier werden wir das kurze Verhalten von  $\tilde{\iota}_-^N$  überwachen. Dafür führen wir folgende Notation ein:

- $\Pi = t_1 < t_2 < \dots < t_M$  markiert die Zeit von jeder Marktorder in langer Stichprobe.
- $\tilde{\iota}_-(t)$  und  $\tilde{\iota}_+(t)$  steht für Ungleichgewicht vor und nach Marktorder zu Zeit  $t \in \Pi$ .
- $(\iota_-, \iota_+)$  beschreibt die gemeinsame Verteilung von dem Ungleichgewicht unmittelbar vor und nach jedem Marktauftrag an die Gesamtdaten angepasst. Wir gehen davon aus, dass diese Verteilung das stabile Marktverhalten ohne Spoofing beschreibt.
- $(\tilde{\iota}_-^N, \tilde{\iota}_+^N)$  beschreibt die empirische Verteilung, die durch das letzte  $s = t, \dots, t - N + 1$  erzeugt wird, beobachtet das Ungleichgewicht  $(\tilde{\iota}_-(s), \tilde{\iota}_+(s))$ , wobei  $N \ll M$  Stichprobengröße mit kurzem Horizont ist.

Im Laufe der Zeit wird geprüft, ob  $\tilde{\iota}_-^N$  sich statistisch vom Gleichgewicht  $\iota_-$  unterscheidet. Dies ist jedoch nicht ausreichend, da dies nicht mit dem Spoofing-Verhalten zusammen hängt. Es ist auch nicht klar wie man die Größe eines potentiellen Spoofing ableitet. Weiters ist  $\tilde{\iota}_-(t)$  für jede Marktorder abhängig.

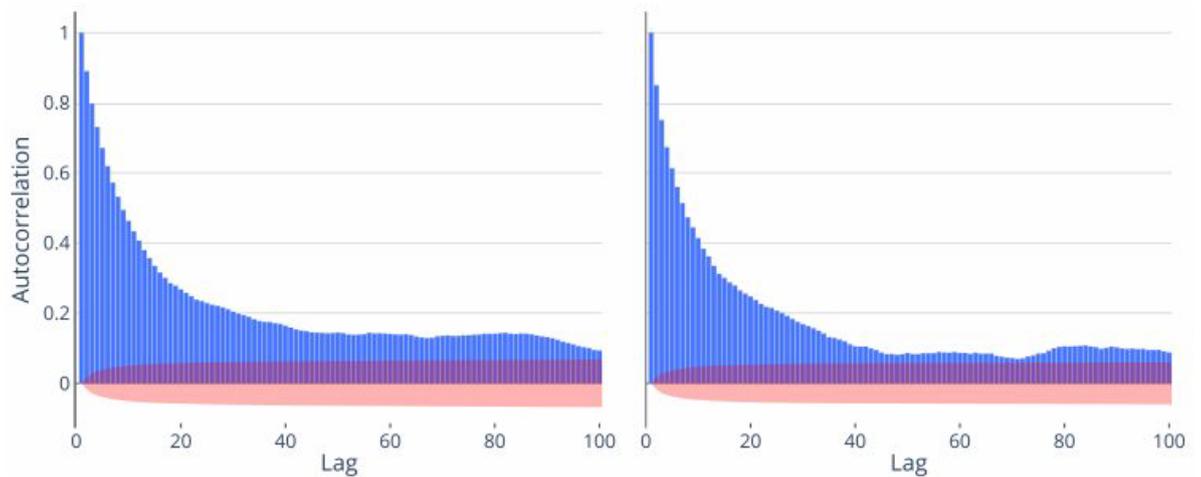


Abbildung 8: Links:  $\tilde{l}_-$  Autokorrelation von BMO am 07.06.2017, Rechts:  $\tilde{l}_+$  Autokorrelation

Die rote Bereich ist 95% Konfidenzintervall der Autokorrelation.

Da diese erste Idee nicht gut funktioniert, schauen wir uns eine weitere Monitoring Möglichkeit.

#### 4.2 Monitoring $\tilde{l}_-^N, \tilde{l}_+^N$

Der statistische Zusammenhang zum Spoofing ist die zusätzliche Beobachtung des Ungleichgewichts nach dem Spoofing. Dies liefert statistische a-posteriori Informationen über das implizite Marktgleichgewicht vor dem Spoofing, die im Falle eines Spoofings nicht beobachtet werden können. Die Abbildung auf der linken Seite zeigt die gemeinsame Verteilung  $l_-, l_+$ , während das rechte Feld  $l_{spooft}(l_-), l_+$  darstellt, also die gemeinsame Verteilung im Fall von Spoofing. Die gefälschte Verteilung ist im Vergleich zur nicht gefälschten nach links verschoben. Wie wir von theoretischen Teil wissen, das Spoofing verringert das Ungleichgewicht - im Fall der Kaufbestellung - vor einer Marktorder.

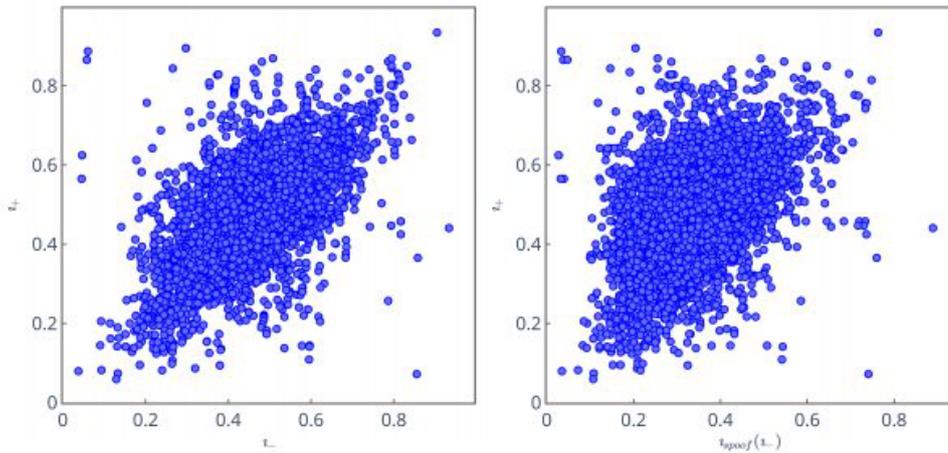


Abbildung 9: Links: Empirische Verteilung von  $(t_-, t_+$ , Rechts: gemeinsame Verteilung  $(t_{spooft}(t_-), t_+$

Ein möglicher Weg, um Spoofing zu erkennen, ist daher der Vergleich der Langzeitverteilung mit der kurzfristigen empirischen Verteilung. Diese beiden Verteilungen haben die Möglichkeit, legitimes Marktverhalten von gefälschten zu erkennen. Wie beim vorherigen Ansatz ist die Reihenfolge der gemeinsamen Beobachtung jedoch wieder nicht festgelegt. Für einen kurzen Zeithorizont kann der Markt legitim sein, wenn auch weit entfernt von der langfristigen Verteilung

### 4.3 Monitoring $\tilde{t}_-^N$ bedingt auf $\tilde{t}_+^N$

Um das vorherige Problem zu lösen, besteht der nächste Ansatz darin,  $\tilde{t}_-^N$  bedingt auf laufenden  $\tilde{t}_+^N$  zu überwachen. Es stellt sich heraus, dass unter der Bedingung von  $\tilde{t}_+(t)$  die Folge von  $\tilde{t}_-(t)$  näher an Verteilung liegt.

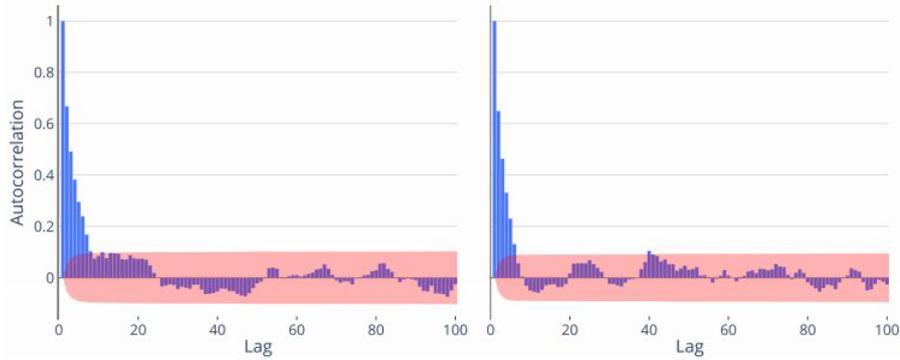


Abbildung 10: Links: Autokorrelation von  $\tilde{\iota}_-^N \mid \tilde{\iota}_+^N \in [0.329, 0.378]$ . Rechts: Autokorrelation von  $\tilde{\iota}_-^N \mid \tilde{\iota}_+^N \in [0.561, 0.61]$ .

Um das Spoofing-Verhalten zu erkennen, messen wir anstelle eines statistischen Tests, für den einige parametrische Annahmen zur Verteilung getroffen werden müssen, den Abstand zwischen  $\iota_-$  und  $\tilde{\iota}_-^N$ , der vom aktuell beobachteten Ungleichgewicht  $\tilde{\iota}_-^N$  abhängig ist, unter Verwendung einer bedingten 2-Wasserstein-Metrik. Für zwei Verteilungen  $\mu$  und  $\nu$  die 2-Wasserstein-Metrik ist definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} W_2(\mu, \nu) &= \left( \inf \left\{ \int (x - y)^2 \pi(dx, dy) : \pi_1 \sim \mu, \pi_2 \sim \nu \right\} \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_0^1 (q_\mu(\alpha) - q_\nu(\alpha))^2 d\alpha \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Wenn wir annehmen, dass

$$(\iota_-, \iota_+) \sim K(y, dx) \otimes \mu(dy)$$

wobei  $\mu \sim \iota_+$  und  $K(y, \cdot) \sim \iota_- \mid \iota_+ = y$ , folgt es

$$(\iota_{\text{spooft}}, \iota_+) \sim K_{\text{spooft}}(y, dx) \otimes \mu(dy)$$

wobei

$$K_{\text{spooft}}(y, \cdot) = K(y, \cdot) \circ \iota_{\text{spooft}}^{-1}$$

Seit  $\iota_+ = y$ , haben wir

$$W_2(K(y, \cdot), K_{\text{spooft}}(y, \cdot)) = \left( \int_0^1 (q_{K(y, \cdot)}(\alpha) - \iota_{\text{spooft}}(q_{K(y, \cdot)}(\alpha)))^2 d\alpha \right)^{1/2}$$

Weiter überwachen wir die folgende zwei Mengen

$$\underbrace{W_2(\iota_-, \tilde{\iota}_-^N) \mid \iota_+^N}$$

Metrik von dem kurzfristigen Ungleichgewicht  $\tilde{\iota}^N$  zu  $\iota_-$  und

$$\underbrace{W_2(\iota_{spooft}(\iota_-), \tilde{\iota}_-^N) \mid \iota_+^N}$$

Metrik von dem kurzfristigen Ungleichgewicht  $\tilde{\iota}_-^N$  zu gespoofeten Ungleichgewicht  $\iota_{spooft}$ .

Die Monitoring Strategie ist zur Zeit  $t \in \Pi$  gegeben wie folgt

1. Die diskrete kurzfristige gemeinsame Verteilung  $(\tilde{\iota}_-^N(t), \tilde{\iota}_+^N(t))$  berücksichtigen, gegeben durch  $(\iota_-(s), \iota_+(s))$ ,  $s = t, \dots, t - N + 1$  des letzten  $N$  Paare vom Ungleichgewicht vor der Zeit  $t$ .
2. Wir definieren  $L$  mit gleicher Kardinalität  $N/L$

$$J_l = \left\{ s : s = t, \dots, t - N + 1, q_{\tilde{\iota}_+^N} \left( \frac{l-1}{L} \right) \leq \iota_+(s) < q_{\tilde{\iota}_+^N} \left( \frac{l}{L} \right) \right\}, \quad l = 1, \dots, L$$

und der Mittelpunkt von jedem

$$\iota_l = \frac{L}{N} \sum_{s \in J_l} \iota_+(s)$$

3. Für jede  $l$ , generieren wir eine zufällige Stichprobe  $\iota_-^{N,L}$  und  $\iota_{spooft}^{N,L}$  von  $N/L$  Punkte jeweils gezeichnet von  $K(\iota_l, \cdot)$  und bzw. von  $K_{spooft}(\iota_l, \cdot)$ .
4. Für jede  $l$  berechnen wir Wasserstein-Metrik

$$W_2(\iota_-^{N,L}, \tilde{\iota}_-^{N,L})$$

und

$$(\iota_{spooft}^{N,L}, \tilde{\iota}_-^{N,L})$$

wobei  $\tilde{\iota}_-^{N,L}$  ist diskrete Verteilung aus der Probe  $\tilde{\iota}_-(s)$  für  $s \in J_l$ . Das ist eine Approximation für die Wasserstein-Metrik

$$W_2(\iota_-, \tilde{\iota}_-^N) \mid \iota_+^N \approx \iota_l$$

und

$$W_2(\iota_-, \tilde{\iota}_-^N) \mid \iota_+^N \approx \iota_l$$

5. Wir sammeln alles zusammen und definieren die Indikatoren

$$S(\iota_{-}, \tilde{\iota}_{-}^N \mid \tilde{\iota}_{+}^N) := \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L W_2(\iota_{-}^{N,l}, \tilde{\iota}_{-}^{N,L})$$

$$S(\iota_{\text{spoofer}}, \tilde{\iota}_{-}^N \mid \tilde{\iota}_{+}^N) := \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L W_2(N_{\text{spoofer}}^{N,l}, \tilde{\iota}_{-}^{N,L})$$

**Bemerkung 5.** *Bemerkung Um die Genauigkeit dieses Indikators zu verbessern, führen wir die Schritte 3 bis 5 einige Male mit verschiedenen Stichproben und Mittelwerte aus.*

## 5 Abschluss

In diesem Artikel befassen wir uns mit der Frage der quantitativen Bewertung des möglichen Spoofing-Verhaltens im Hochfrequenzhandel. Wir präsentieren eine Spoofing-Strategie, wie von einem Marktteilnehmer durch Manipulieren des Ungleichgewichts in unterschiedlicher Tiefe entworfen wird, um die nachfolgende Preisbewegung zu beeinflussen. Wir geben die Bedingungen an, sodass der Markt Spoofing Manipulation zulässt. Anschließend lösen wir die Optimierung Problem aus einer Spoofer-Perspektive und leiten das resultierende Ungleichgewicht nach dem Spoofing als Funktion des Marktparameters. Wir schlagen ein Quantifizierungsinstrument vor, um eventuelles Spoofing-Verhalten auf dem Markt in Echtzeit zu überwachen unter Verwendung einer bedingten Wasserstein-Metrik. Die dynamische Struktur des Limit Orderbuchs und der Strategie, die Speicherabhängigkeit der Parameter im Zeitverlauf sowie die Besonderheiten eines Marktes in Bezug auf einen anderen müssen weiter untersucht werden. Darüber hinaus könnte es alternative Ansätze geben neue Forschungsrichtungen - Überwachung der Ankunftsraten von Bestellungen, Häufigkeit der Stornierung, usw.

## Literatur

- [1] Xuan Tao, Andrew Day, Lan Ling and Samuel Drapeau, *On Detecting Spoofing in high frequency trading*
- [2] Jan Kallsen, Johannes Muhle-Karbe, *High-Resilience Limits of Block-Shaped Order Books*
- [3] <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/trading-investing/spoofing/>

- [4] <https://www.investopedia.com/terms/h/high-frequency-trading.asp>
- [5] <https://www.investopedia.com/ask/answers/09/high-frequency-trading.asp>
- [6] <https://www.quantstart.com/articles/high-frequency-trading-ii-limit-order-books/>
- [7] Antje Fruth, Torsten Schöneborn, Mikhail Urusov, *Optimal trade execution and trade price manipulation in order books with time-varying liquidity*
- [8] [https://en.wikipedia.org/wiki/Spoofing\\_\(finance\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Spoofing_(finance))