SEMINARARBEIT

Cash Flows

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versichernugsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Assist. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Wagner Lukas
Matrikelnummer: 11704370

Wien, Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Arbeit ist eine Ausarbeitung des Bandes „The Strategic Analysis Of Financial Markets" von Steven D. Moffitt, World Scientific Series in Finance - Vol.11 aus 2017 [1].

Im ersten Abschnitt wird die Definition eines Cashflows vorgestellt und anhand eines einfachen Beispiels dargelegt. Weiters wird sich mit den Risikokennzahlen „Duration" und „Konvexität" auseinandergesetzt, und mit mehreren Beispielen veranschaulicht.

Im zweiten Abschnitt wird das Thema „Zinsstrukturkurve" behandelt. Zuerst was eine Zinsstrukturkurve ist und welche Arten von Kurven existieren. Danach werden die einzelnen Erklärungsmodelle zur Zinsstrukturkurve beschrieben. Zum Abschluss wird noch auf zwei Schätzer eingegangen, nämlich auf den Nelson/Siegel-Schätzer und dem Svensson-Schätzer.

2 Cash Flow Analyse: Statisch

Zahlungsströme sind in der Finanzmathematik der Ablauf der Zahlungen, die aus Wertpapieren, Derivaten oder sonstigen Finanzkontrakten während ihrer Laufzeit resultieren. Dabei sind die Zeitpunkte der einzelnen Zahlungen entscheidend, weil es aus bewertungstechnischer Sicht einen großen Unterschied macht, ob Zahlungen in naher oder ferner Zukunft erfolgen. Zahlungsströme sind in der Finanzmathematik wesentliche, bewertungsrelevante Informationen über ein Finanzinstrument. Zwei Wertpapiere, die denselben Zahlungsstrom haben, haben in einer Modellwelt denselben Wert, auch wenn beide Wertpapiere rechtlich unterschiedlich konstruiert sind. Ziel der Finanzmathematik ist es also, eine Funktion P zu finden, die einem Zahlungsstrom Z einen Barwert zuordnet. Der Barwert ist der Wert, den zukünftige Zahlungen in der Gegenwart besitzen.

Ein Zahlungsfluss (Cash Flow) ist eine zu einem bestimmten Zeitpunkt geleistete oder erhaltene Nettozahlung. Konventionell wird eine erhaltene Zahlung durch eine positive Zahl dargestellt, während eine geleistete Zahlung durch eine negative Zahl dargestellt wird. Ein Zahlungsstrom (Cash Flow Stream) ist eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Cashflows. Die Zahlungsströme, die wir betrachten, werden alle durch Sequenzen (C_k, t_k), k = 1,2, ... dargestellt, wobei C_k das Kapital zum Zeitpunkt t_k ist [2].

2.1 Zinsssätze

Das einfachste Modell der Cashflow-Bewertung geht davon aus, dass für alle Geldbeträge ein einheitlicher Zinssatz gilt.
Nun werden vier grundlegende Methoden für die Angabe von Jahresraten betrachtet. Es wird angenommen, dass die Zinsraten nicht negativ sind und $t_1 < t_2$ gilt.

(1) **Einfache Verzinsung:** Geldbetrag C zum Zeitpunkt t_1 wächst zum Geldbetrag C$\cdot(1+r_s\cdot(t_2-t_1))$ zum Zeitpunkt t_2.

(2) **Diskontrate:** Geldbetrag C$\cdot(1-r_d\cdot(t_2-t_1))$ zum Zeitpunkt t_1 wächst zum Geldbetrag C zum Zeitpunkt t_2

(3) **Zinseszins:** Sei t_2-t_1 = km, wobei es k Zahlungen von $\frac{C}{m}$ bei einfacher Verzinsung von $\frac{r_c}{m}$ pro Zahlung gibt. Geldbetrag C zum Zeitpunkt t_1 wächst zum Geldbetrag C$\cdot(1+\frac{r_c}{m})^{km}$ zum Zeitpunkt $t_2 = km$.

(4) **Stetige Verzinsung:** Geldbetrag C zum Zeitpunkt t_1 wächst zum Geldbetrag $C\cdot e^{r_e\cdot(t_2+t_1)}$ zum Zeitpunkt t_2.

Stetige Verzinsungen haben eine attraktive Eigenschaft - die steige Verzinsung $r_{e,12}$ gilt von t_1 bis t_2, wobei $t_1 < t_2$ und $r_{e,23}$ gilt von t_2 bis t_3, wobei $t_2 < t_3$, dann ist die stetige Verzinsung $r_{e,13}$ von t_1 bis t_3:

$$r_{e,13} = \tfrac{t_2-t_1}{t_3-t_1} r_{e,12} + \tfrac{t_3-t_2}{t_3-t_1} r_{e,23}$$

Die Einfachheit der Formel ist der Hauptgrund dafür, dass stetige Zinssätze in der theoretischen Finanzierung so weit verbreitet sind. Für feste t_1 und t_2 können die Typen (1)-(3) in eine stetige Verzinsung umgewandelt werden:

(1) Einfache Verzinsung in stetige Verzinsung:

$$r_e = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln(1 + r_s(t_2 - t_1))$$

(2) Diskontierte in stetige Verzinsung:

$$r_e = -\frac{1}{t_2 - t_1} \ln(1 + r_d(t_2 - t_1))$$

(3) Zinseszins in stetige Verzinsung:

$$r_e = \frac{1}{m} \ln(1 + \frac{r_c}{m})$$

Es gilt, dass Zinssätze der Typen (1) - (4), die genau denselben Zahlungen entsprechen, im Allgemeinen unterschiedliche Zahlenwerte haben. Betrachten Sie beispielsweise einen Betrag von 1000 US-Dollar, der in zwei Jahren Zinsen von 100 US-Dollar zahlt.

(1) Zinsrate r_s bekommt man durch lösen von: $\$1.100 = \$1.000(1 + 2r_s)$

$$r_s = 5\%$$

(2) Zinsrate r_d bekommt man durch lösen von: $\$1.100(1 - 2r_d) = \$1.000$.

$$r_d = 4.55\%$$

(3) Zinsrate r_c bekommt man durch lösen von: $\$1.100 = \$1.000(1 + r_c)^2$.

$$r_c = 4.88\%$$

(4) Zinsrate r_e bekommt man durch lösen von: $\$1.100 = \$1.000e^{2r_e}$.

$$r_e = 4.77\%$$

Obwohl in theoretischen Behandlungen stetige Raten verwendet werden, sind sie in der Praxis selten angemessen. Die Schwierigkeit ergibt sich aus dem folgenden Problem:
Angenommen, eine Person leiht sich einen Betrag von 1000 USD aus, der in 2 Jahren mit 1100 USD zurückgezahlt werden soll. Der Kreditnehmer entscheidet sich jedoch für eine vorzeitige Rückzahlung nach einem Jahr. Was ist der "faire"Betrag? Jeder der oben genannten Verzinsungen, der auf ein Jahreszins angewendet wird, ergibt ein anderes Ergebnis. Aus diesem Grund gelten für alle zinstragenden Finanzinstrumente, die auf offenen Märkten gekauft und verkauft werden, spezifische Regeln für die Behandlung der Situation der vorzeitigen Zahlung.

2.2 Bewertumg von Zahlungsströmen unter Annahmen

Eine einfache Rente ist ein cash flow stream, der den Betrag C in n gleichmäßig verteilten Zeiträumen von Δt zwischen den Zeitpunkten t und $t + n \cdot \Delta t$ auszahlt. Eine Zeitrente ist eine einfache Annuität, die (bestimmte) Zahlungsflüsse garantiert. Eine nachschüssige Rente ist ein Zeitrente, dessen erste Zahlung zum Zeitpunkt t erfolgt, und ein vorschüssige Rente ist ein Zeitrente, dessen erste Zahlung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ erfolgt. Die einfachste Annahme über die Zinssätze in Cashflow-Strömen ist, dass sie über den Analysezeitraum hinweg konstant sind, was als **Pauschalannahme** bezeichnet wird. Betrachtet man eine vorschüssige Zeitrente, die n Jahre lang C m-mal pro Jahr zahlt. Angenommen, der Marktzins bleibt bei einem konstanten Zinseszins von r pro Jahr. Was ist ein fairer Wert für diesen Zahlungsstrom zum Zeitpunkt t? Diese Art von Problem wird gelöst, indem der Betrag P berechnet wird, der zum Zeitpunkt 0 erforderlich ist, um jede der zukünftigen Zahlungen von C in mn zu leisten:

$$\sum_{i=1}^{nm} \frac{C}{(1+\frac{r}{m})^i}$$

Dies ist einfach die Summe von mn Beträgen, die zum Zeitpunkt 0 investiert werden müssen, um jede der mn zukünftigen Zahlungen zu leisten. Dieses Verfahren kann auf jeden Cashflow verallgemeinert werden, bei dem die Zukünftigen-Zahlungen und zukünftigen Zinssätze zum Zeitpunkt 0 bekannt sind. In solchen Fällen wird der Wert zum Zeitpunkt 0 als Barwert des Cashflows bezeichnet. Wie könnte die Rente zu einem späteren Zeitpunkt bewertet werden? Für feste Zinsen kann P multipliziert werden mit:

$$(1+\frac{r}{m})^{\lfloor \frac{t}{m} \rfloor + t \pmod{m}} = (1+\frac{r}{m})^{\lfloor \frac{t}{m} \rfloor} \cdot (1+\frac{r}{m})^{t \pmod{m}}$$

wobei $t \pmod{m}$ der t geteilt durch m ist und $\lfloor \frac{t}{m} \rfloor$ der ganzzahlige Teil von $\frac{t}{m}$ ist.
Ähnliche Methoden zur Bewertung von Zahlungsströmen gelten für andere Arten von Zinsannahmen und für nicht konstante Zahlungsströme. Wenn also zum Beispiel eine allgemeine Menge von Cashflows (C_i, t_i), i = 1,2, ..., n angegeben ist und ein pauschaler kontinuierlicher Zinssatz r angenommen wird, dann ist der Barwert dieses Cashflows:

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \mathrm{e}^{-rt_i}$$

Wenn die Pauschalannahme fallen gelassen wird und der Zinssatz für den Cashflow (C_i, t_i) r_i ist, dann gilt:

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \mathrm{e}^{-r_i t_i}$$

2.3 Risikomßnahmen: Duration und Konvexität

Für Anleger in festverzinslichen Wertpapieren ist die Sensibilität eines Finanzinstruments für Zinsänderungen von erheblicher Bedeutung. Die Risikomessungen **Duration** und **Konvexität** sind der einfachste Weg, um diese Empfindlichkeit für kleine Änderungen der Zinsraten zu messen.

Die **Duration** gibt zum einen an, wie lange es dauert, bis das in einer Anleihe investierte Kapital vollständig an den Anleger zurückgeflossen ist. Zum anderen gibt die Duration bei Anleihen den Zeitpunkt an, an dem Kursänderungen durch die Wiederanlagebedingungen der Zinsen ausgeglichen werden. Die Duration wird auch als die durchschnittliche Bindungsdauer des Kapitaleinsatzes bezeichnet.

Die **modifizierte Duration** gibt an, um wie viele Prozentpunkte sich der Kurs einer Anleihe verändert, wenn sich der Marktzins um einen Prozentpunkt ändert. Sie drückt also das Zinsänderungsrisiko einer Anleihe aus. Dabei gilt: je größer der Wert für die modifizierte Duration, umso stärker reagiert die Anleihe auf Marktzinsänderungen und umgekehrt. Mit dieser Durationskennzahl lassen sich die Zinsrisiken unterschiedlicher Anleihen direkt vergleichen.

Die **Konvexität** ist eine Kennzahl zur Ermittlung der Beziehung zwischen einem Anleihekurs und den Zinssätzen. Sie wird dazu eingesetzt, um die Auswirkungen von steigenden oder fallenden Zinssätzen auf einen Anleihekurs zu bewerten. Dies zeigt das Risiko eines Anleihegläubigers auf. Der Begriff Konvexität bezieht sich auf das nichtlineare Verhältnis zwischen dem Preis und dem Zinssatz einer Anleihe. Konvexität impliziert, dass der Preis einer Anleihe bei einer gegebenen Zinssenkung stärker steigt als er bei einer gegebenen Zinserhöhung gleichen Ausmaßes sinkt.

Betrachte man einen allgemeinen Cash Flow Stream (C_i, t_i), i = 1,2, ..., n der mit einem einheitlichen Zins r, m-mal pro Jahr bewertet wird. Der Barwert dieses Geldstroms beträgt:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+\frac{r}{m})^i} \tag{2.3.1}$$

Die Ableitung nach r lautet:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+\frac{r}{m})^i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{m} \frac{C_i}{(1+\frac{r}{m})^{i+1}} = -D_M \cdot P(r) \tag{2.3.2}$$

wobei:

$$D_M = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{1+\frac{r}{m}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{m} \frac{C_i}{(1+\frac{r}{m})^i} \tag{2.3.3}$$

D_m wird die **modifizierte Duration** des Geldstromes genannt.
Durch Eliminieren des Faktors $\frac{1}{1+\frac{r}{m}}$ in (2.3.3) ergibt sich die **Macaulay-Duration** D:

$$D = \frac{1}{P} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{m} \frac{C_i}{(1+\frac{r}{m})^i} \tag{2.3.4}$$

Wie oben bereits erwähnt, ist die modifizierte Duration nützlich, um die Änderungen von P für kleine Änderungen von r zu bestimmen. Sei also Δr eine kleine Änderung in r. Dann sind die Änderungen in ΔP:

$$\Delta P = P(r + \Delta r) - P(r) \approx -D_M \cdot P(r) \cdot \Delta r \tag{2.3.5}$$

Gleichung (2.3.5) approximiert die Wertänderung eines Stroms unter Verwendung einer McLaurin-Reihe erster Ordnung.

Angenommen, ein Portfolio enthält die Zahlungsströme $S_1, S_2, \cdots, S_k$ mit den Anteilen $w_1, w_2, \cdots, w_k$. Sei $D_{M_1}, D_{M_2}, \cdots, D_{M_k}$ die modifizierte Duration der Geldströme, und sei $P_1, P_2, \cdots, P_k$ der aktuelle Wert. Dann wird der Barwert des Portfolios sein:

$$P = w_1 P_1 + w_2 P_2 + \cdots + w_k P_k \tag{2.3.6}$$

und die modifizierte Duration lautet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(w_1 P_1 + w_2 P_2 + \cdots + w_k P_k) \\
&= w_1 \frac{P_1}{\partial r} + \cdots + w_k \frac{P_k}{\partial r} \\
&= -w_1 D_{M_1} P_1 - \cdots - w_k D_{M_k} P_k \\
&= -(w_1^* D_{M_1} + \cdots + w_k^* D_{M_k}) P \\
&= -D_M P,
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

wobei:

$$w_i^* = w_i \frac{P_i}{P}, \quad i = 1, \cdots, k \tag{2.3.8}$$

und die modifizierte Duration des w-gewichteten Portfolios D_M ist:

$$D_M = w_1^* D_{M_1} + \cdots + w_k^* D_{M_k} \tag{2.3.9}$$

Es sei daran erinnert, dass

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^* = 1 \tag{2.3.10}$$

gilt.

Die Konvexität einer Anleihe ist eine wichtige Kennzahl, diese beschreibt das Verhalten einer Anleihe bzw. deren Preises im Falle von kurzfristigen Zinsschwankungen oder relevanten Zinsänderungen. Es handelt sich um eine Ergänzung zur Duration und ist somit eine erweiterte Form der Schätzung künftiger Preisentwicklungen.
Es wird eine Approximation zweiter Ordnung für die Konvexität verwendet, wobei die Konvexität V des Zahlungsstromes definiert ist, als

$$V = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \tag{2.3.11}$$

so dass die Approximation zweiter Ordnung

$$\Delta P = P(r + \Delta r) - P(r) \approx -D_M P(r) \Delta r + \frac{PV}{2} (\Delta r)^2 \tag{2.3.12}$$

ist.

In Abb. 1 wird die Veränderung von P in abhängigkeit von r dargestellt. Wobei die strichlierte Linie die Duration und die durchgezogene Linie die Konvexität ist. Wie man erkennt, sind die Ergebnisse bei kleinen Zinsveränderungen ähnlich, unterscheiden sich jedoch bei größeren Zinsänderungen.
Eine Änderung der Zinssätze kann die Laufzeit einer Anleihe beeinträchtigen, denn eine Erhöhung der Zinssätze würde bedeuten, dass der Anleihegläubiger einen wesentlich längeren Zeitraum benötigen würde, um Gewinn zu machen. Gleichzeitig bedeuten sinkende Zinssätze, dass der Zeitraum für einen Trader zum Erhalt der vollen Rendite verkürzt wird.

Es sei noch betont, dass sowohl die Duration als auch die Konvexität von der Zeit und dem Zinssatz abhängen. Darüber hinaus werden im Laufe der Zeit einige Zahlungsströme empfangen oder ausgezahlt, wodurch die grundlegende Berechnung geändert wird, indem diese Zahlungsströme aus dem Zahlungsstrom eliminiert werden. Daher erfordert die Verwendung von Duration oder Konvexität zur Absicherung eine ständige Anpassung des Absicherungsportfolios, wenn sich diese Faktoren ändern.

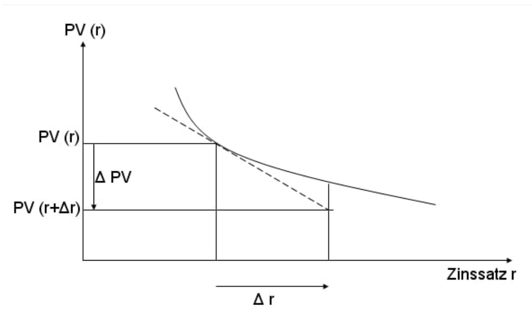

Abb. 1: Duration und Konvexität

2.3.1 Beispiele zur Duration

In diesem Abschnitt wird sich mit der grafischen und numerischen Berechnung der Duration auseinandergesetzt. Davor wird jedoch nochmal drauf hingewiesen, wie sich das Verhältnis vom Marktzins zum Marktkurs und das Verhältnis vom Marktzins zur Wiederanlage verhält.

Als erstes wird der Preis der Anleihe bestimmt. Die Preisbestimmung einer Anleihe erfolgt durch die Diskontierung der Zahlungsströme der Coupons und der Rückzahlung des Nominalwertes. Der für die Diskontierung verwendete Marktzinssatz ist für alle Perioden identisch, das heißt die Zinsstrukturkurve ist Flach (vgl. Abschnitt 2.4). Bei 3% Marktzins und einer Nominalverzinsung von ebenfalls 3%, entspricht der Marktkurs den Nominalwert der Anleihe, also 100%. Steigt der Marktzins wie in Abb. 2 auf 4% sinkt der Marktkurs auf 96,37%. Sinkt der Marktzins wie in Abb. 2 auf 2%, so steigt der Kurs der Anleihe auf 103,81%. Also verhält sich der Marktkurs zum Marktzinssatz invers, das heißt, steigt der Marktzins sinkt der Kurs und umgekehrt.

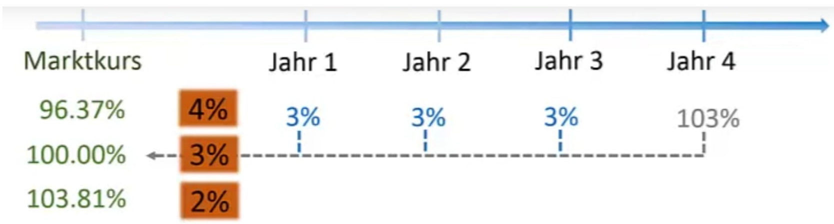

Abb. 2: Veränderter Marktkurs

Der zweite wichtige Effekt bezieht sich auf das Verhältnis zwischen Marktzins und der Wiederanlage. Während der Laufzeit der Anleihe erhaltet man Couponzahlungen. Ist der Marktzinssatz zwischenzeitlich gestiegen, kann man diese zu einem höheren Zinssatz, bis zum Verfall der Anleihe, anlegen. Die Folge davon ist, dass ein höherer Ertrag auf der Wiederanlage der Coupons erwirtschaftet wird. Zusammengefasst bedeutet dies, steigt der Marktzins, sinkt der Marktkurs und der Gewinn aus der Wiederanlage steigt. Sinkt der Marktzins, steigt der Marktkurs und der Gewinn aus der Wiederanlage sinkt.

Beispiel 2.3.1. Für das Beispiel wird eine Couponanleihe mit einer Nominalverzinsung von 3% und einer Restlaufzeit von 6 Jahren verwendet. Die Verfallrendite beträgt 3%. Wie oben erwähnt, impliziert gleicher Marktzins wie Couponzins, dass der Kurs bei 100% bleibt. Die Couponzahlungen kumulieren, inklusive Zinseszins, auf 19,41%. Der Gesamtwert steigt von 100% auf 19,41% (siehe Abb. 3).

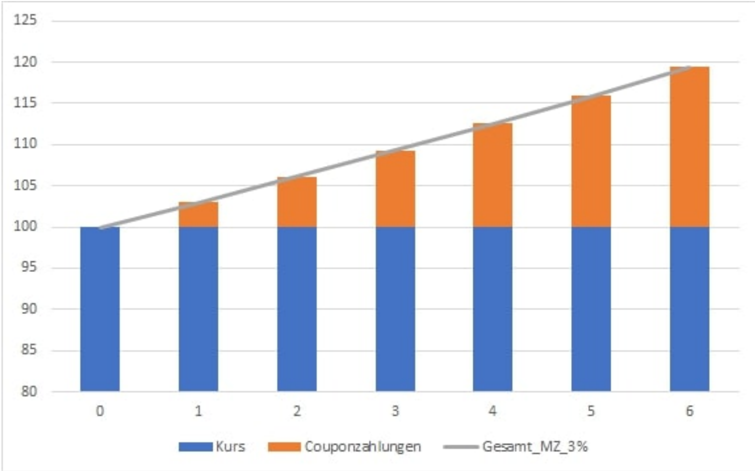

Abb. 3: Vermögenswert mit Marktzins 3%

Nun stellt sich die Frage, was passiert, wenn sich der Marktzins gleich zu beginn ändert. Angenommen der Marktzins steigt auf 5%. Dies würde zur Folge haben, dass der Marktkurs auf 89,85% fällt und sich während der Laufzeit wieder den Nominalwert bzw. den Rückzahlungskurs von 100% annähert. Gleichzeitig entsteht ein positiver Wiederanlageeffekt. Die Couponzahlungen werden nun, nicht mit 3%, sondern mit 5% reinvestiert. In der Summe resultiert am Ende der Laufzeit mit 120,4% ein höherer Endwert (siehe Abb. 4).

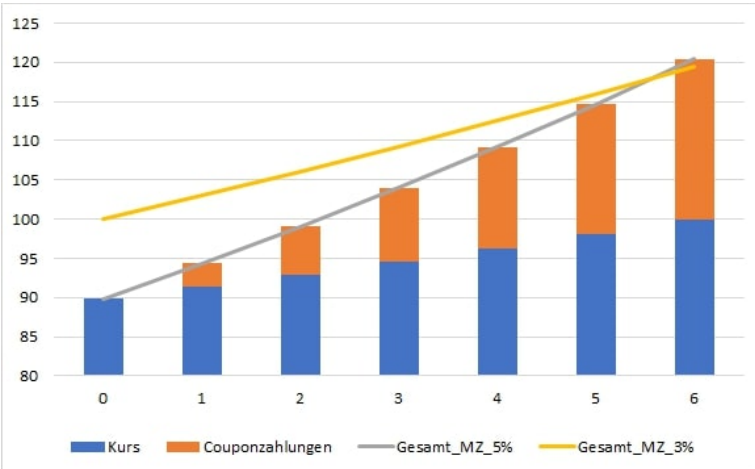

Abb. 4: Vermögenswert mit Marktzins 5%

Angenommen der Marktzins fällt auf 1%. Dies würde zur Folge haben, dass der Marktkurs auf 111,59% steigt und sich während der Laufzeit wieder den Nominalwert bzw. den Rückzahlungskurs von 100% annähert. Gleichzeitig entsteht ein negativer Wiederanlageeffekt. Die Couponzahlungen werden nun, nicht mit 3%, sondern mit 1% reinvestiert. In der Summe resultiert am Ende der Laufzeit mit 118,45% ein niedriger Endwert (siehe Abb. 5).

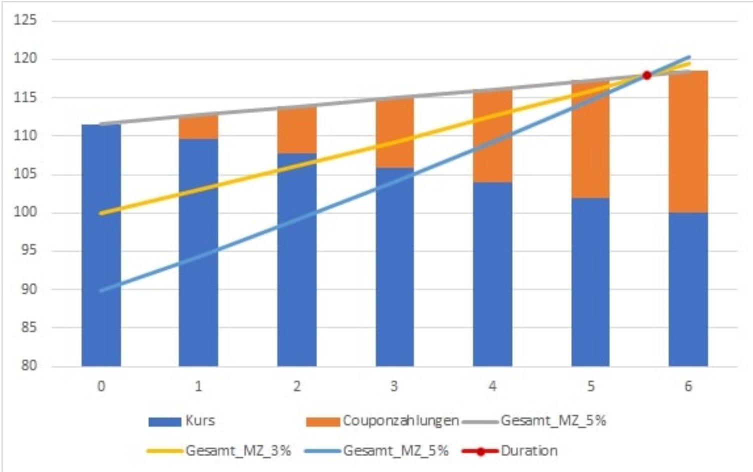

Abb. 5: Vermögenswert mit Marktzins 1%

Verbindet man die Vermögenswerte der einzelnen Jahre wie in Abb. 5. Erkennt man, dass sich diese Linien, vor Laufzeitende, schneiden. Dieser Schnittpunkt wird als Macauly-Duration bezeichnet. In diesem Beispiel beträgt die Duration D ca. 5,7 Jahre.
Wie man sieht, definiert die Duration den Zeitpunkt, an welchen der, aus unterschiedlichen Marktzinsen, berechnete Endwert identisch ist bzw. der Endwert immun gegenüber Zinsänderungen ist.

Beispiel 2.3.2. Nun soll Beispiel 2.3.1 numerisch gelöst werden. Die Laufzeit beträgt 6 Jahre, die Couponzahlungen belaufen sich auf 3% und die Rückzahlung erfolgt zu 100%. Bei einem Marktzins von 4% resultieren folgende Barwerte (siehe Tab. 1).Es sei daran erinnert, dass sich der Barwert durch $C(1+i)^{-t}$ berechnen lässt. Im nächsten Schritt werden die Barwerte mit dem Zeitpunkt ihrer Zahlungen gewichtet. Es gilt also $t \cdot B = B_{gewichtet}$. Die Summe der Barwerte entspricht den heutigen Marktkurs der Anleihe.

Zeitpunkt t	**Zahlungen** Z_t	**Barwerte** B_t	**Gewichteter Barwert** $B_{t_{gewichtet}}$
1	3	2,88	2.88
2	3	2,77	5,55
3	3	2,67	8,00
4	3	2,56	10,26
5	3	2,47	12,33
6	103	81,4	488,41
		94,8	527,4

Tab. 1: Barwerte bei einem Marktzins von 4%

Die Macauly-Duration D ergibt sich nun, aus der Summe der gewichteten Barwerte dividiert durch die Summe der Barwert.

$$D = \frac{B_{gewichtet}}{B} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot Z_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} Z_t \cdot (1+i)^{-t}} = \frac{527,4}{94,8} = 5,6 Jahre \tag{2.3.13}$$

Nun wird die Duration erweitert zur modifizierten Duration D_M. Wie oben im Abschnitt 2.3 erwähnt, ist die modifizierte Duration eine Kennzahl, die das Ausmaß der Preisänderung eines

Wertpapiers, als Reaktion auf die Änderung der Kapitalmarktzinsen angibt.

Es gilt:

$$D_M = \frac{D}{1+i} = \frac{5,6}{1,04} = 5,4$$

Multipliziert man die modifizierte Duration, mit umgekehrten Vorzeichen, mit der erwarteten absoluten Veränderung des Marktzinses, erhält man approximativ die prozentuale Kursänderung der Anleihe.

$$-Duration_{Mod} \cdot Zinsänderung_{absolut} \approx Kursänderung_{prozentual}$$

Bei einer erwarteten Zinserhöhung von einem Prozentpunkt bedeutet das, eine Kursänderung von -5,4%. Der aktuelle Kurs von 94,8% fällt auf 89,7%.

$$-5,4 \cdot 1\% = -5,4\% \rightarrow 94,8\% \cdot (1 - 0,054) = 89,7\%$$

Wird der Rückgang des Marktzinses um einen halben Prozentpunkt erwartet, so steigt der aktuelle Kurs um 2,7%, von 94,8% auf 97,3%.

$$-5,4 \cdot -0,5\% = +2,7\% \rightarrow 94,8\% \cdot (1 + 0,027) = 97,3\%$$

Der Kurs/Rendite-Zusammenhang, wie er bei der modifizierten Duration dargestellt wird, zeigt eine proportionale bzw. lineare Beziehung zwischen Kurs und Rendite. Effektiv ist der Zusammenhang, aber nicht von linearer Natur (siehe Abb. 6).

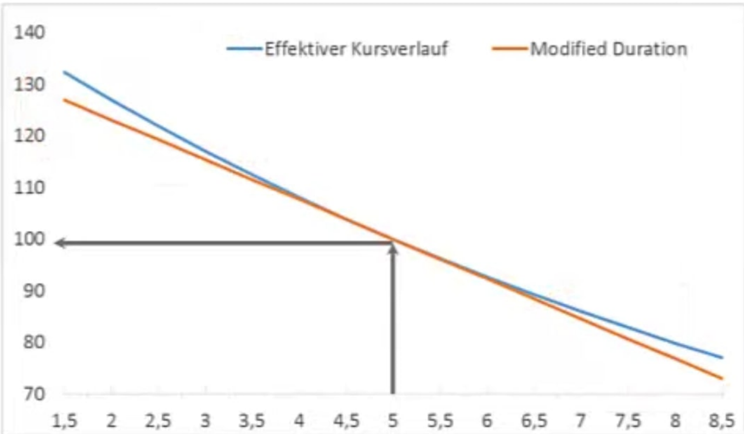

Abb. 6: 5-prozentige Couponanleihe

Wie man in Abb. 6 gut erkennen kann, verläuft der effektive Kursverlauf konvex. Das heißt, bei kleineren Zinsänderung kann, über die modifizierte Duration, die Kursreaktion annähernd genau geschätzt werden. Jedoch nimmt der Schätzfehler bei größeren Zinsänderungen zu. Wie groß der Fehler ist, kann man aus Tab. 2 entnehmen. Weiters erkennt man, dass $\Delta Effektiv$ konvexe Eigenschaften aufweist, während ΔD_{mod} lineare Eigenschaften zeigt.

Zins	Kurs	ΔEffektiv	ΔD_{mod}	Diff.
1,5%	132,28	32,3%	27,0%	5,3%
2,0%	126,95	26,9%	23,2%	3,8%
2,5%	121,88	21,9%	19,3%	2,6%
3,0%	117,06	17,1%	15,4%	1,6%
3,5%	112,47	12,5%	11,6%	0,9%
4,0%	108,11	8,1%	7,7%	0,4%
4,5%	103,96	4,0%	3,9%	0,1%
5,0%	100	0,0%	0,0%	0,0%
5,5%	96,23	-3,8%	-3,9%	0,1%
6,0%	92,64	-7,4%	-7,7%	0,4%
6,5%	89,22	-10,8%	-11,6%	0,8%
7,0%	85,95	-14,0%	-15,4%	1,4%
7,5%	82,84	-17,2%	-19,3%	2,1%
8,0%	79,87	-20,1%	-23,2%	3,0%
8,5%	77,04	-23,0%	-27,0%	4,1%

Tab. 2: Abweichungen

Wichtige Erkenntnisse aus Abschnitt 2.3:

- Die Duration ist eine Kennzahl, welche die Zinssensitivität von Anleihen erfasst
- Mit ihr lassen sich die Zinsrisiken unterschiedlicher Anleihen direkt vergleichen
- Die Duration ist umso höher ···
  - ··· je länger die Restlaufzeit
  - ··· je tiefer der Nominalzins
  - ··· je tiefer der Marktzins
- Allgemeine Investmentregel: Die Duration sollte mit dem Planungshorizont des Anlegers übereinstimmen. Das heißt, nicht die Laufzeit der Anleihe, sondern die Duration ist entscheidend.
  - Erwartet der Anleger steigende Zinsen, sollten Anleihen mit kurzer Duration gewählt werden.
  - Erwartet der Anleger fallende Zinsen, sollten Anleihen mit langer Duration gewählt werden.

2.4 Zinsstrukturkurve

Es gibt nicht den einen Marktzins, sondern der Zins hängt unter anderem von Laufzeit, Risiko oder der steuerlichen Behandlung der entsprechenden Finanzinstrumente ab. Man bezeichnet die Beziehung zwischen Laufzeiten und Zinssätzen als Zinsstruktur.

In einer Zinsstrukturkurve werden die jeweils aktuellen Zinssätze für Kapitalanlagen mit kurzen, mittleren und langen Laufzeiten dargestellt. Eine Laufzeit von unter einem Jahr nennt man eine kurze Laufzeit und ab zehn Jahren spricht man von einer langen Laufzeit. Zinsstrukturkurven nutzen Kapitalmarkt-Händler als Basisinstrumente für ihre Anlageentscheidungen auf den Kapitalmärkten.

Für die Erstellung von Zinsstrukturkurven werden Staatsanleihen mit einer Laufzeit von einem, zwei, drei und bis zu zehn Jahren gewählt. Für jede dieser Anleihen werden die Zinskurven jeweils einzeln eingetragen und grafisch dargestellt. Anhand dieser Darstellung kann die Zinsentwicklung für Anleihen mit unterschiedlichen Laufzeiten zueinander ermittelt und auf Grundlage dieser Daten einer Prognose für die Konjunkturentwicklung aufgestellt werden.

2.4.1 Normale(steigende) Kurve

Angenommen die Konjunkturerwartung ist positiv und der gewünschte Normalfall präsent. Je länger die Laufzeit, desto höher die Zinsen und die resultierende Rendite. Dadurch ergibt sich eine Zinsstrukturkurve mit einem normalen Verlauf (siehe Abb. 7).

Je steiler der Verlauf einer Strukturkurve, desto höher die Erwartungen der Marktteilnehmer an die konjunkturelle Entwicklung. Eine steile Zinsstruktur folgt häufig dem Ende einer Rezession. Die Anleger glauben wieder an einen Aufschwung der Wirtschaft und diese positiven Erwartungen wirken sich auch auf die Rendite der Anleihen aus. Ein Musterbeispiel an normalen Zinskurven sind Festgeldkonten, wobei die goldene Regel lautet: wer lange spart, wird mit steigenden Zinsen belohnt.

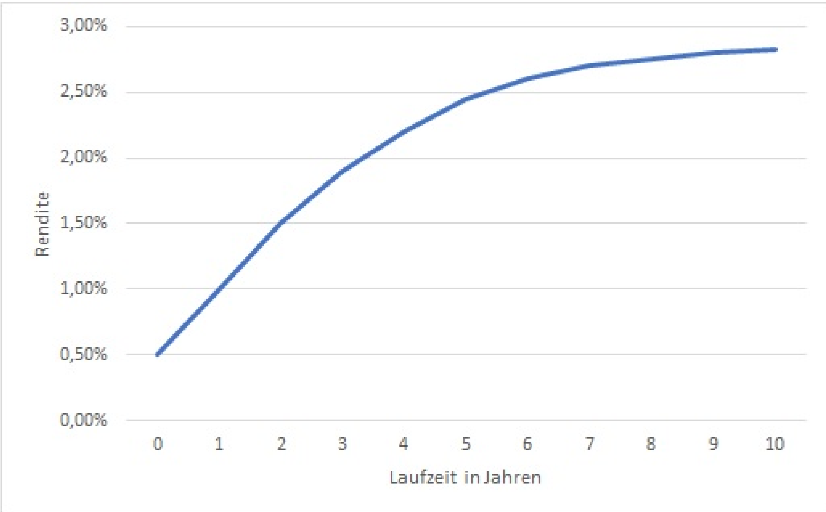

Abb. 7: steigende Zinskurve

2.4.2 Inverse Kurve

Eine inverse Zinsstruktur liegt dann vor, wenn am Kapitalmarkt die langfristigen Zinsen unter den kurzfristigen liegen. Also das Gegenteil einer normalen Zinsstrukturkurve. Diese wird deshalb auch als negative Strukturkurve bezeichnet (siehe Abb. 8).

Die schwachen Erwartungen an den Verlauf der Konjunktur wirken sich ungünstig auf die Zinsen der Anleihen aus. Fallende Zinskurven stellen einer Wirtschaft nicht selten ein schlechtes Zeugnis aus, da sie Rezessionsängste auslösen können.

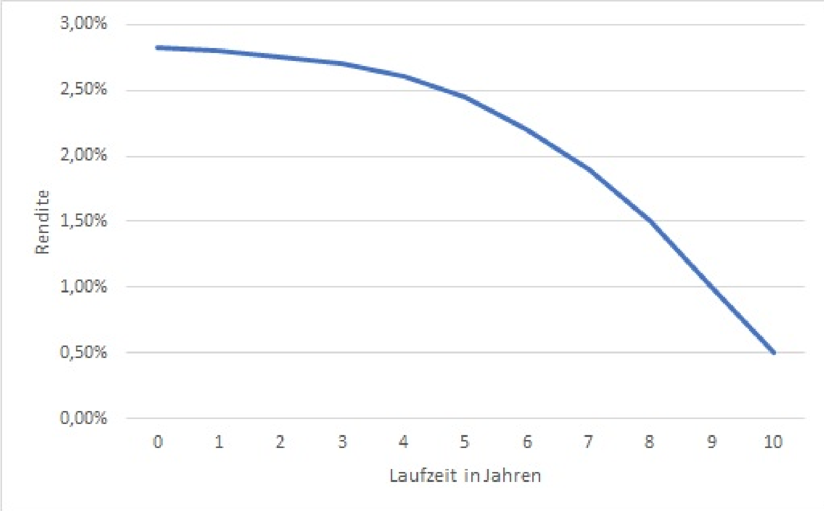

Abb. 8: inverse Zinskurve

2.4.3 Flache Kurve

Das Zinsniveau bewegt sich für kurzfristige wie auch für langfristige Laufzeiten auf einem ausgeglichenen Niveau. Bei mittelfristigen Anleihen kann es zu einem „Buckel" und damit leicht höheren Zinsen als bei kurzen oder langen Laufzeiten kommen. Eine flache Zinsstrukturkurve kann bedeuten, dass die Entwicklung der Zinsen zu einer inversen Struktur führt. Dies kann, muss jedoch nicht der Fall sein (siehe Abb. 9).

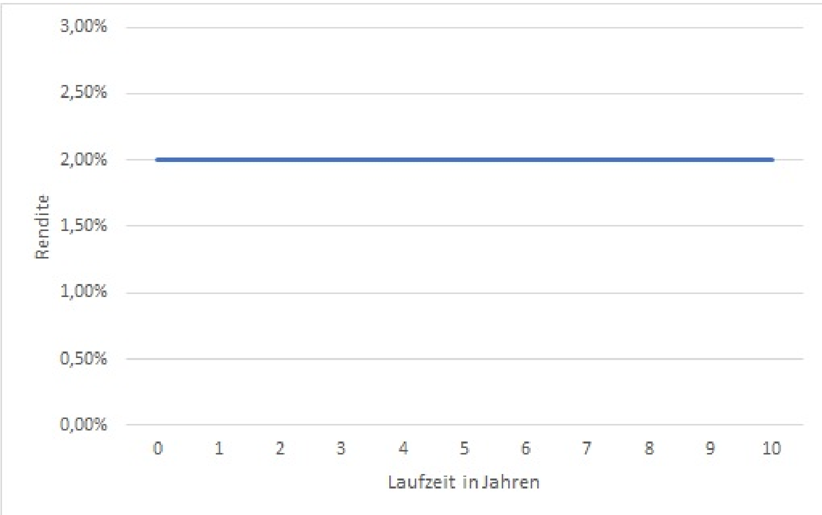

Abb. 9: flache Zinskurve

2.4.4 Erklärungsmodelle für die Existenz von Zinsstrukturen

Im folgenden Abschnitt wird sich mit den einzelnen Erklärungsmodellen für die Existenz von Zinsstrukturen auseinandergesetzt. Diese Zinsstrukturhypothesen können sich teilweise ergänzen, aber konkurrieren auch miteinander.

Erwartungshypothese

Die Erwartungshypothese unterliegt der Annahme der vollständigen **Informationseffizienz** des Marktes und der Annahme der vollständigen **Risikoneutralität** der am Markt handelnden Subjekte.

Die **Informationseffizienz** bedeutet, dass Finanzmärkte effizient sind, sofern vorhandene Informationen bereits eingepreist sind und somit kein Marktteilnehmer in der Lage ist, durch technische Analyse, Insiderhandel, Fundamentalanalyse oder anderweitig zu dauerhaft überdurchschnittlichen Gewinnen zu kommen. Die Markteffizienzhypothese besagt, dass die Preise, die in einem Markt erzielt werden, sämtliche Informationen reflektieren, die in diesem Markt verfügbar sind. Dies bedeute, dass der Markt rationale Erwartungen hat. Hierbei ist es wichtig zu erwähnen, dass eine rationale Erwartung nicht zwingend bedeutet, dass die Mehrheit der Marktteilnehmer rational sein müssen. Es bedeutet lediglich, dass die Gesamteinschätzung (Erwartungswert) der Marktteilnehmer rational ist. In einem Markt, in dem man stets zu Preisen kaufen/verkaufen kann, die sämtlichen Informationen reflektieren, kann man davon ausgehen, dass man nie zu teuer kauft und nie zu billig verkauft.

Die **Risikoneutralität** ist die Risikoeinstellung eines Marktteilnehmers, bei der Wahl zwischen verschiedenen Alternativen gleichen Erwartungswerts, weder sichere noch unsichere Alternativen zu bevorzugen, sondern sich allein an deren mathematischem Erwartungswert zu orientieren. Die Risikoneutralität liegt zwischen der Risikoaversion und der Risikofreude.

Durch die Erwartungstheorie ergibt sich folgendes Bild:

- Erwartet der Markt steigende Zinsen, so investieren die Anleger vorzugsweise in Kurzläufer. Die folge daraus ist, dass die Nachfrage am sogenannten kurzen Ende steigt und dies schmälert die Renditen für Titel von kurzer Laufzeit und die Zinskurve steigt (siehe Abb. 7).
- Werden am Markt fallende Zinsen erwartet, tritt das Gegenteil ein. Anleger wollen ihr Kapital langfristig zu höheren Zinssätzen anlegen. Durch das Zusammenspiel von Angebot und Nachfrage entwickelt sich dann die inverse Zinsstruktur (siehe Abb. 8).

Die Erwartungstheorie ist die Grundlage, für die Berechnung von Terminzinssätzen, die den erwarteten Kassazinssätzen entsprechen. Der **Kassazins** ist der Börsenkurs eines Finanzinstruments oder einer Ware bei Kassageschäften am Kassamarkt. Der **Terminzins** ist jener Zinssatz, der für einen zukünftigen Zeitpunkt gilt. Das Gegenteil des Terminzinses ist der Kassazins. Der Terminzins muss kein guter Schätzer für diesen zukünftigen Kassazinssatz sein.

Durch die Erwartungshypothese wird erklärt, warum in Hochzinsphasen die Zinsstruktur häufig invers ist und warum in den Niedrigzinsphasen die Zinsstruktur steigend ist. Es wird jedoch nicht erklärt, warum steigende Zinsstrukturen die Regel und inverse Zinsstrukturen die Ausnahmen sind. Es sei noch erwähnt, dass langlaufende Anlagen ein höheres Zinsänderungsrisiko aufweisen als kurzfristige Anlagen, dies wird jedoch bei der Erwartungstheorie vernachlässigt.

Liquiditätspräferenzhypothese

Investoren kennen deren zukünftigen Pläne nicht immer genau und legen deshalb ihre Mittel eher kurzfristig an. Die Liquiditätspräferenzhypothese ergänzt die Erwartungstheorie um diesen Umstand. Begründet wird dieser Zustand durch die Furcht, dass man langfristig angelegte Mittel nur zu ungünstigen Bedingungen wieder flüssig machen kann.

Um die Investoren zu langfristigen Anlagen zu motivieren, wird daher eine Liquiditätsprämie bezahlt. Durch die Liquiditätspräferenzhypothese wird erklärt, warum die Zinsstruktur in aller Regel steigend ist. Allein durch die Liquiditätspräferenzhypothese kann jedoch nicht erklärt werden, wie es zur inversen Zinsstrukturkurve kommt. Kombiniert man die Aussagen von Erwartungshypothese und Liquiditätspräferenzhypothese, so kann man aus der Zinsstruktur die vom Markt erwartete Zinsänderung ableiten, zum Beispiel:

- Eine schwach steigende Zinsstruktur bedeutet somit, dass für langlaufende Titel lediglich die Liquiditätsprämie bezahlt wird und der Markt somit keine Zinsänderung erwartet.
- Eine stark steigende Zinsstruktur bedeutet, dass der Markt steigende Zinsen erwartet: Es wird für langlaufende Titel im Vergleich zu kurzfristigen Bindungen mehr als die Liquiditätsprämie gezahlt.

Marktsegmentierungshypothese

Die Marktsegmentierungshypothese beruht auf der Erfahrung, dass es keinen einzigen einheitlichen Anlagemarkt gibt, sondern dass die Marktteilnehmer in einem Segment operieren und dieses selten verlassen. Somit gibt es Angebot/Nachfrage-Situationen in jedem einzelnen Segment, was zu verschiedenen Zinssätzen in den einzelnen Segmenten und damit einer nicht-flachen Zinsstruktur führt. Mit der Marktsegmentierungshypothese kann man den überwiegenden normalen Verlauf der Zinsstrukturkurve erklären, da davon ausgegangen wird, dass auf Grund mangelnder Voraussicht und der daraus begründeten Risikoaversion das Marktverhalten der Kreditgeber durch Liquiditätspräferenz charakterisiert wird. Die Marktsegmentierungshypothese schließt den Einfluss von Erwartungen über die Entwicklung der Zinsen auf die Zinsstrukturkurve grundsätzlich aus.

Dank der Marktsegmentierungshypothese kann man erklären, warum es zu unregelmäßigen Zinsstrukturen kommt, wie zum Beispiel zu einem Buckel (siehe Abb. 10). Weiters folgt aus der Modellannahme, dass Wertpapiere unterschiedlicher Laufzeiten intrasegmental nicht substituierbar sind.

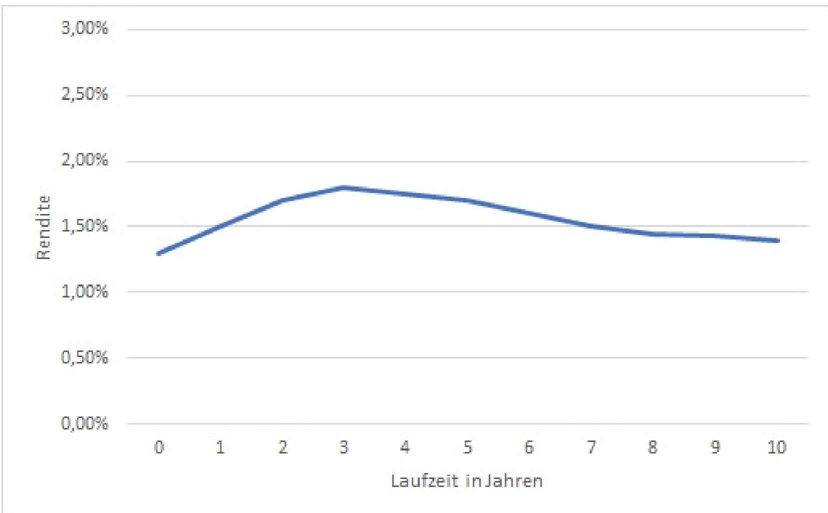

Abb. 10: Buckel

Preferred Habitat Hypothese

Die Preferred Habitat Hypothese von Modigliani und Sutch geht auch von Präferenzen der Marktteilnehmer für bestimmte Laufzeiten aus, die sich aber nicht notwendigerweise auf die Kurzläufer beschränken. Sie berücksichtigt nicht die Preisrisiken von Bonds, sondern das sogenannte Reinvestitionsrisiko, das sich ergibt, wenn Rückzahlungen aus Bonds wieder angelegt werden sollen. Demzufolge werden die Präferenzen der Investoren vom Anlagehorizont gesteuert, zum Beispiel ergeben sich für Versicherungen die Notwendigkeit einer Anlage in langlaufenden Bonds, um damit das Reinvestitionsrisiko zu minimieren oder auszuschalten. Bei kürzeren Laufzeiten ist dieses Reinvestitionsrisiko höher, womit sich die höheren Volatilitäten im unteren Bereich erklären lassen. Die Theorie geht aber im Allgemeinen davon aus, dass Investoren eher kurzlaufende als langlaufende Bonds bevorzugen, womit langlaufende Bonds mit einer höheren Verzinsung, eines sogenannte term premium, zur Steigerung der Attraktivität ausgestattet werden. Je länger die Laufzeit, desto höher die term premium.

Bei der Modellierung heutiger Zinsstrukturkurven durch Forschungsinstitute, Unternehmen und Zentralbanken wird in der überwiegenden Mehrheit aller Fälle auf das Konzept der Erwartungshypothese zurückgegriffen.

2.4.5 Schätzer

Ein gutes Zinsstrukturmodell sollte flexibel genug sein, um nicht nur eine große Breite an verschiedenen Formen der Kurve nachbilden zu können, sondern es sollte auch ein möglichst sinnvoller Verlauf der Zinsstrukturkurve dargestellt werden, d. h. unsinnige Schwankungen und negative Werte diskreditieren ein Modell. Darüber hinaus sollte eine möglichst einfache Implementierung gegeben sein, wodurch natürlich die Genauigkeit der Modelle leiden kann. Für die Ansprüche von Zentralbanken genügen oftmals schon recht einfache Zinsstrukturmodelle. Nichtsdestotrotz verwenden auch die Zentralbanken die gleichen Modelle wie der professionelle Finanzbereich, der geringe Abweichungen zwischen tatsächlichen und theoretischen Werten bevorzugt.

Verfahren ausgewählter Zentralbanken

Im Folgenden wird eine kleine Übersicht über die Verfahren zur Schätzung von Zinsstrukturkurven gegeben wie sie von ausgewählten Zentralbanken verwendet werden. Die meisten der genannten Verfahren werden im Rahmendieser Arbeit genauer vorgestellt.

Zentralbank	**Schätzverfahren**	**Geschätzte Kurve**
Finnland	Nelson/Siegel	Zinsstrukturkurve
Frankreich	Nelson/Siegel; Svensson	Zinsstrukturkurve
Großbritannien	Nelson/Siegel; Svensson; Kubische Splines	Zinsstrukturkurve
Japan	Splines fünfter Ordnung	Zinsstrukturkurve
Norwegen	Kubische Splines; Nelson/Siegel	Zinsstrukturkurve
Schweden	Svensson	Zinsstrukturkurve
Schwewiz	Svensson	Zinsstrukturkurve
Spanien	Nelson/Siegel	Zinsstrukturkurve
USA	Nelson/Siegel; Svensson; Smoothing Splines	Zinsstrukturkurve

Tab. 3: Modellverfahren einzelner Länder im Jahr 1996
[3]

Nelson/Siegel

Ausgangspunkt ist die Annahme eines funktionellen Zusammenhangs zwischen den Kassazinssätzen, den Diskontfaktoren, den Terminzinssätzen auf der einen und der Restlaufzeit auf der anderen Seite. Das dargestellte Schätzmodell beruht auf den Vorschlägen von Nelson und Siegel. Eine Erweiterung dieses Modells ist das Modell von Svensson.

Das Modell von Nelson und Siegel beruht auf der Erwartungshypothese. Sie unterstellen, dass die Terminzinssätze $f(t, t', m)$ als Differentialgleichungen zweiter Ordnung geschrieben werden können.

$$f(t, t', m) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\frac{m}{\tau}) + \beta_2[(\frac{m}{\tau})exp(-\frac{m}{\tau})] \tag{2.4.1}$$

wobei: $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)'$ der zu schätzende Parametervektor ist und τ die Zeitkonstante

Die Wahl dieser Form wird damit begründet, dass durch die Form die typischen Verläufe der Terminzinsstrukturkurve dargestellt werden können. Zwischen den Kassazinssätzen und den Terminzinssätzen gibt es folgenden algebraischen Zusammenhang:

$$(1 + z_{t,m})^m = \prod_{\tau=1}^{m}(1 + f_\tau)$$

Daraus kann man die Kassazinssätze aus den Terminzinsen herleiten, wobei der Zusammenhang $\ln(1 + x) \approx x$ ausgenutzt wird:

$$m \cdot \ln(1 + z_{t,m}) = \sum_{\tau=1}^{m} \ln(1 + f_\tau)$$
$$z_{t,m} = \frac{1}{m}\sum_{\tau=1}^{m} f_\tau$$

Das bedeutet, dass die Kassazinssätze einen Durchschnitt aus den momentanen Terminzinssätzen bilden und es folgt:

$$\begin{aligned} z_{t,m} &= \frac{1}{m}\int_0^m f(x)dx \\ &= \frac{1}{m}[\beta_0 m - \beta_1 \tau \exp(-\frac{m}{\tau}) + \beta_2 \tau(1 - \exp(-\frac{m}{\tau})) - \beta_2 m \exp(-\frac{m}{\tau}) + \beta_1 \tau] \\ &= \beta_0 + \beta_1[\frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau})}{\frac{m}{\tau}}] + \beta_2[\frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau})}{\frac{m}{\tau}} - \exp(-\frac{m}{\tau})] \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

wobei: $z_{t,m}$ =Kassazinssätze in t in Abhängigkeit von der Laufzeit m

Es gilt: $\lim_{m \to M} z_{t,m} = \beta_0$ [β_0 ≡langfristiger Zinssatz, damit $\beta_0 > 0$]
$\lim_{m \to 0} z_{t,m} = \beta_0 + \beta_1$[$\beta_0 + \beta_1$ ≡kurzfristiger Zinssatz, damit $\beta_1 < 0$, falls normale Zinsstruktur]

Die Parameter β_2 und τ bewirken einen Buckel in der Zinsstrukturkurve, wobei es sich um eine Auswölbung nach oben (für $\beta_2 > 0$) oder nach unten (für $\beta_2 < 0$) handeln kann. β_2 und τ in Kombination bestimmen die Lage des Buckels auf der Zinsstrukturkurve in Abhängigkeit der Restlaufzeit, der absolute Wert β_2 beschreibt die Stärke der Amplitude dieses Buckels. Zur Schätzung der gesuchten Kassazinssätze wird die oben genannte Gleichung verwendet. Somit ergibt sich für die geschätzten Kassazinssätze:

$$\hat{z}_{t,m}(\hat{\beta}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1[\frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau})}{\frac{m}{\tau}}] + \hat{\beta}_2[\frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau})}{\frac{m}{\tau}} - \exp(-\frac{m}{\tau})] \tag{2.4.3}$$

Mit Hilfe der geschätzten Kassazinssätze werden die theoretischen Preise der Anleihen ermittelt.

$$\hat{P}_{t,i}(\hat{\beta}_t) = \sum_{m=1}^{M} \frac{C_i}{(1+\hat{z}_{t,m})^m} + \frac{1}{(1+\hat{z}_{t,M})^M} \tag{2.4.4}$$

wobei: $\hat{z}_{t,m}$ =geschätzter Kassazinssatz in t in Abhängigkeit von m
$\hat{P}_{t,i}$ =geschätzter Preis der Anleihe i in t

Die geschätzten Diskontfaktoren ergeben:

$$\hat{\delta}_t(m) = \frac{1}{(1+\hat{z}_{t,m})^m} = \hat{\delta}_t(m, \hat{\beta}) \tag{2.4.5}$$

Der geschätzte Diskontfaktor $\hat{\delta}_t(m)$ und der geschätzte Preis der Anleihe $\hat{P}_{t,i}$ sind beides Funktionen des geschätzten Parametervektors $\hat{\beta}$. Man beachte, dass der Parametervektor $\hat{\beta}$ zeitabhängig ist, somit gilt $\hat{\beta} = \hat{\beta}_t$. Um den Parametervektor $\hat{\beta}$ zu optimieren, wird die quadrierte Abweichung des theoretischen von dem tatsächlich beobachtbaren Preis mit Hilfe einer KQ-Schätzung minimiert:

$$\min_{\beta_t} \sum_{i=1}^{N} (\epsilon_{t,i}(\beta_t))^2, \quad wobei: \epsilon_{t,i} = P_{t,i} - \hat{P}_{t,i}(\hat{\beta}_t)$$

Im vorliegenden Fall wird, wie bereits erwähnt, die quadrierte Abweichung zwischen theoretischen und tatsächlichen Preisen minimiert. In einigen empirischen Untersuchungen werden jedoch die quadrierten Abweichungen der theoretischen und der tatsächlichen Renditen minimiert.

$$\min_{\beta_t} \sum_{i=1}^{N} (\epsilon_{t,i}(\beta_t))^2$$

wobei: $\epsilon_{t,i} = y_{t,i,M} - \hat{y}_{t,i,M}(\hat{\beta}_t)$
$y_{t,i,M}$ =Rendite der Anleihe i in t mit Restlaufzeit M

Dies ist möglich, da es zu jedem gegebenen Anleihepreis, in Verbindung mit gegebenen Ausstattungsmerkmalen, Couponzahlungen und Restlaufzeit, genau eine Rendite gibt. Da laut Svensson das Hauptaugenmerk in der monetären Analyse auf Zinsen und weniger auf Anleihepreisen liegt, sollte statt der Preisabweichung die Renditeabweichung minimiert werden. Bei seiner Untersuchung fand Svensson heraus, dass es zu großen Renditeabweichungen vor allem für kurze Restlaufzeiten kommt, wenn die Preise statt der Renditen minimiert werden.

Der Grund hierfür liegt in der geringen Sensitivität von Preisen gegenüber Renditen im kurzfristigen Laufzeitenbereich. Der Nachteil ist, dass der Rechenaufwand erheblich ansteigt, falls man Renditen, statt Preisabweichungen minimiert.

Mit der Exponentialmodellierung von Nelson und Siegel können Zinsstrukturkurven dargestellt werden, die monoton steigen oder fallen, eine Form mit Buckeln aufweisen oder S-förmig sind. Damit lassen sich Zinsparallelbewegungen sowie Twistbewegungen modellieren. Ein Vorteil der Implementierung dieses Modells ist bei der Betrachtung langer Laufzeiten erkennbar. Zinssätze im langen Bereich konvergieren asymptotisch gegen β_0, das als langfristiger Zinssatz interpretiert werden kann. In vielen anderen Modellen, z.B. bei den Schätzungen mit kubischen und exponentiellen Splines, konvergiert der langfristige Zinssatz nicht, sondern steigt kontinuierlich an oder verhält sich so, dass die Terminzinssätze negativ werden.

Der Nachteil dieses Ansatzes ist, dass er keine Steuereffekte berücksichtigt. Steuereffekte können dann auftreten, wenn Investoren ihre Einkünfte aus Couponzahlungen mit ihren persönlichen Steuersätzen versteuern müssen, Einkünfte, die sich aus Kapitel- und Kursgewinnen ergeben, aber unversteuert bleiben. Demzufolge könnten Investoren eine starke Präferenz für Anleihen mit niedrigen Coupons haben. Dies führt dazu, dass der Relativpreis dieser Anleihen im Vergleich zu Anleihen mit hohen Coupons höher ist. Aus diesem Grund sollte ein optimales Modell eine Korrekturmöglichkeit des Steuereffektes ermöglichen, sofern Steuereffekte überhaupt in den Bonddaten auftreten.

Svensson

Svensson erweiterte das Modell von Nelson und Siegel durch einen weiteren Exponentialterm und durch die Einführung von zwei neuen Parametern. Dadurch sollte die Flexibilität des Modells gesteigert werden. So kann beispielsweise ein zweiter Buckel dargestellt werden, der oftmals in der Praxis in Folge von kurzfristigen Spekulationen zu beobachten ist. Allerdings führt die Aufnahme von zwei neuen Parametern dazu, dass der Rechenaufwand erheblich gesteigert wird. Des Weiteren bedeuten zwei zusätzliche Parameter normalerweise, dass sich die Ergebnisse verbessern.

$$f(t,t',m) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\frac{m}{\tau_1}) + \beta_2[(\frac{m}{\tau_1})\exp(-\frac{m}{\tau_1})] + \beta_3[(\frac{m}{\tau_2})\exp(-\frac{m}{\tau_2})] \tag{2.4.6}$$

wobei: $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)'$ der zu schätzende Parametervektor ist und τ_1, τ_2 = Zeitkonstanten

Aus den Terminzinsen können nun wieder die Kassazinssätze hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} z_{t,m} &= \frac{1}{m}\int_0^m f(x)dx \\ &= \beta_0 + \beta_1[\frac{1-\exp(-\frac{m}{\tau_1})}{\frac{m}{\tau_1}}] + \beta_2[\frac{1-\exp(-\frac{m}{\tau_1})}{\frac{m}{\tau_1}} - \exp(-\frac{m}{\tau_1})] + \beta_3[\frac{1-\exp(-\frac{m}{\tau_2})}{\frac{m}{\tau_2}} - \exp(-\frac{m}{\tau_2})] \end{aligned}$$

Das Modell hat die gleichen Grenzwerteigenschaften wie das Modell von Nelson und Siegel:
$\lim_{m\to M} z_{t,m} = \beta_0$ [$\beta_0 \equiv$langfristiger Zinssatz, damit $\beta_0 > 0$]
$\lim_{m\to 0} z_{t,m} = \beta_0 + \beta_1$[$\beta_0 + \beta_1 \equiv$kurzfristiger Zinssatz, damit $\beta_1 < 0$, falls normale Zinsstruktur]

Obwohl das Svensson Modell eine genauere Spezifikation darzustellen scheint, wird in der Praxis das Nelson-Siegel Modell aus Stabilitätsgründen oftmals bevorzugt. Da weniger Parameter verwendet werden, scheint es robuster und stabiler zu sein, speziell dann, wenn nur wenige Anleihen als Ausgangsdaten zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund verwenden z.B. Spanien und Finnland den Ansatz von Nelson/Siegel. Andere Staaten implementieren beide Modelle und vergleichen die Ergebnisse. Dabei wird oftmals der Nelson-Siegel Ansatz zur Schätzung des Parametervektors $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_0, \tau_1)'$ benutzt. Die geschätzten Parameter werden im Anschluss zusammen mit den Startwerten für β_2 und τ_2 zur Schätzung der Svensson-Erweiterung verwendet. Diesem Vorgehen folgen beispielsweise Frankreich und Belgien.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literatur

[1] Steven D. Moffitt. *The Strategic Analysis Of Financial Markets - Trading System Analytics.* World Scientifie Publishing Co. Pte. Ltd., 2017.

[2] Kuppinger Bernd. *Finanzmathematik : [Zins-, Renten- und Tilgungsrechnung verstehen].* Weinheim : Wiley-VCH-Verl., 2015.

[3] Dominik Scheck. Vergleich statistischer zinsmodelle. Technical report, Universität Konstanz, 2001.