



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna | Austria

SEMINARARBEIT

nach dem Buch von Steven D. Moffitt

The Strategic Analysis Of Financial Markets

Stefan Tauss

Matrikelnummer: 01640058

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

27.12.2019

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	2
2	Zeitreihen im Finanzwesen	3
2.1	Übersicht der Finanzmärkte	3
2.2	Zeitreihen	3
2.3	Potentiell profitable Glücksspielsysteme	9
3	Statistische Regularitäten von Zeitreihen	13
3.1	Was sind statistische Regularitäten	13
3.2	Definition von statistischen Regularitäten	13
3.3	Gesetzmäßigkeiten von finanztechnischen Zeitreihen	14
3.4	Wieso sind diese Regularitäten wichtig?	18
4	Grundlagen der Nutzentheorie	19
4.1	Grundsätzliches der Nutzentheorie	19
4.2	Informelle Einführung in die Theorie des Nutzens	19
4.3	Präferenzrelation	20
4.4	Kardinale Nutzentheorie auf Präferenzrelationen	21
4.5	Nutzenfunktionen	22
4.6	Verwendung des Nutzens	23

1. Vorwort

Diese Seminararbeit ist eine Ausarbeitung von ausgewählten Kapiteln des Buches "The Strategic Analysis of Financial Markets", geschrieben von Steven D. Moffitt, World Scientific Series in Finance - Vol. 11.

Kapitel 2 führt das grundsätzliche Konzept von Zeitreihen im Finanzsektor ein, insbesondere "potentiell profitable Glückspielsysteme (PPGSs)". Ein PPGS ist ein ein Wettsystem, welches die Grundsätze des "no-arbitrage" Prinzips verletzt und somit nicht in der markteffizienten Welt der modernen Finanzwissenschaften existieren kann.

Kapitel 3 präsentiert empirische Beweise, die untermauern, dass Zeitreihen im Finanzsektor die meisten Standardmodelle der Finanztheorie verletzen. Diese "Anomalien" werden als statistische Grundsätze bezeichnet, sie sind statistische Eigenschaften die weitverbreitet bei Zeitreihen im Finanzwesen auftreten und doch nicht von "einfachen Modellen" beschrieben werden können. Zum Beispiel, fast alle Zeitreihen im Finanzwesen stellen eine Volatilitätsunbeständigkeit dar, in welcher Perioden von hoher Volatilität mit Perioden von niedriger Volatilität alternieren. Der Grund warum statistische Gesetzmäßigkeiten zu Beginn eingeführt werden ist, weil zufriedenstellende Modelle des Finanzmarktes kompatibel mit ihnen sein sollten.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit dem Wesentlichen der von Neumann- Morgenstern vorgestellten Theorie des "Erwarteten Nutzens (EU)". Die EU-Theorie ist das Standardmodell der Rationalität in der theoretischen Wirtschaftswissenschaft. Da Neumann-Morgensterns Rationalität die meisten etablierten Modelle unterstützt und als Kontrast zur Verhaltensforschung benötigt wird, macht es Sinn diese in meine Seminararbeit zu inkludieren.

Basiswissen über Lineare Algebra, multivariates Kalkül, Zeitreihen im Finanzsektor und das Finanzwesen wird vorausgesetzt.

2. Zeitreihen im Finanzwesen

Dieses Kapitel behandelt Zeitreihen im Finanzwesen aus dem Blickwinkel eines Statistikers, nicht des eines Wirtschaftswissenschaftlers. Es wird standardmäßig angenommen, dass in finanziellen Preisreihen von gehandelten Finanzinstrumenten potentiell profitable Glücksspielsysteme existieren. Die Sichtweise von diesem und allen darauffolgenden Kapiteln ist diejenige, dass die Finanzmärkte bezwungen werden können.

2.1 Übersicht der Finanzmärkte

In dieser Seminararbeit werden nur stetige Auktionsmärkte studiert. Handeln in einem stetigen Auktionsmarkt wird bezeichnet als "Handeln mit Zeitstempel". Daten, die nur Informationen über tatsächliche Abschlüsse enthalten nennt man meist Transaktionsdaten. Die Identität der beteiligten "Trader" ist normalerweise unbekannt. Details wie, welcher Finanzmarkt, Börse und Staat werden gänzlich ignoriert, außer diesen Informationen wird interpretative Wichtigkeit zugeordnet. Oft werden diese Daten innerhalb gewisser Zeitintervalle "grobkörniger" zusammengefasst, als "Open, High, Low, Closed (OHLC)".

Gewisse untergeordnete Informationen sind ebenfalls wichtig für eine ordentliche Analyse von stetigen Auktionsmärkten. Diese inkludiert Dividendenzahlungen, Zinskurse, Aktienteilung, Handelsvolumen, in Umlauf befindliche Aktien und andere öffentliche Informationen.

2.2 Zeitreihen

Zeitreihen sind das mathematische Werkzeug der Wahl in der dynamischen Analyse von stetigen Auktionsmärkten. Dieser Abschnitt behandelt die Mathematik hinter den Zeitreihen, der Rest dieses Kapitels ihre Statistik.

Gewisse notationelle Konventionen werden wie gehabt verwendet, beispielsweise Großbuchstaben X, Y, \dots repräsentieren Zufallsvariablen, Klein-

buchstaben x, y, \dots repräsentieren Zahlen oder bereits realisierte Zufallsvariablen. Die Buchstaben s, t stehen für fixierte Zeiten und T steht für eine zufällige Zeit.

2.2.1 Allgemeine Zeitreihe

Eine Zeitreihe ist intuitiv betrachtet ein sich entwickelnder Wahrscheinlichkeitsprozess, der Beobachtungen bei deterministischen oder zufälligen Zeiten wiedergibt. Die folgende Definition ist etwas anders als in der Standardliteratur, aber passend für diese Arbeit, in welcher Zeitreihen von Preisen oder Rückgabewerten potentiell von anderen Variablen abhängen.

Definition 2.2.1 (Vektor-Zeitreihe). Eine Vektor-Zeitreihe $\{X_t\}$ besteht aus 3 Elementen:

1. Einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Zeiten $\mathbb{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$ in aufsteigender Reihenfolge $T_1 < T_2 < \dots$.
2. Ein d -dimensionaler Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ hat verschiedene Realisierungen $X(T_i) = x_{T_i}$ zu jeder Zeit T_i . Wir benutzen eine indizierte Form austauschbar: $X_{T_i} = X(T_i)$.
3. Informationsmengen $\mathbb{I}_t = \{Z_{t,1}, Z_{t,2}, \dots\}$ zu jeder gegebenen Zeiten $t = T_i$, bestehen aus Zufallsvariablen $Z_{t,1}, Z_{t,2}, \dots$ realisiert zur oder vor der Zeit t .

Informationsmengen \mathbb{I}_t genügen der Relation: $\mathbb{I}_t \subset \mathbb{I}_s$ wenn $t < s$. Wenn keine Informationsmenge definiert wurde, wird angenommen, dass \mathbb{I}_{T_i} nur aus der Geschichte von X besteht, zum Beispiel $\mathbb{I}_{T_i} = \{X_{T_1}, X_{T_2}, \dots, X_{T_i}\}$.

Damit Definition 2.2.1 richtig eingeordnet werden kann, sind ein paar zusätzliche Erläuterungen von Nöten. Erstens, Zeiten in \mathbb{T} können zufällig sein, dennoch werden keine Reihen dieser Art in dieser Arbeit untersucht. Zweitens, Informationsmengen $\{\mathbb{I}_t\}$ sind so definiert, dass sie die Geschichte von Variablen quantifizieren und somit zum Verständnis eines Prozesses beitragen, obwohl die einzige Anforderung ein Mitglied von $\{\mathbb{I}_t\}$ zu sein ist, dass eine Variable zur oder vor der Zeit t realisiert wird. Drittens, die Entwicklung von Zeitreihen ist intuitiv ein stufenweiser und abhängiger Prozess. Die Verteilung der Zufallsvariable $X_{T_{i+1}}$ zum Zeitpunkt T_{i+1} wird von der gesamten vorangegangenen Information abhängen. Um die stufenweise und abhängige Natur der Entwicklung einer Zeitreihe zu betonen, schreiben wir $X_{T_{i+1}} | \mathbb{I}_{T_i}$ für die Verteilung von $X_{T_{i+1}}$ abhängig von \mathbb{I}_{T_i} .

Beispiel 2.2.1 (Fairer Münzwurf). Eine faire zweiseitige Münze wird $n > 0$ mal geworfen, jeder Wurf ist unabhängig von anderen Würfeln. Dementsprechend ist $\mathbb{T} = \{1, 2, \dots, n\}$, wobei der Zeitindex, durch natürliche Zahlen als Repräsentanten der Zeiten, vereinfacht wurde und wobei das Resultat eines jeden Wurfes entweder Kopf oder Zahl ist: $X_t \in \{K, Z\}$. Es ist üblich Kopf mit $+1$ und Zahl mit -1 zu codieren. Mit dieser Codierung wird das Resultat von n -Würfeln von einem der 2^n n -Vektoren, die nur ± 1 enthalten, repräsentiert. Sei $X_t \in \{+1, -1\}$ für alle $t \in \mathbb{T}$, so folgt, dass die Informationsmenge die Gestalt $\mathbb{I}_t = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ annimmt. Die Verteilung von X_{t+1} ist gegeben durch

$$P[X_{t+1} = x \mid \mathbb{I}_t] = P[X_{t+1} = x] = \begin{cases} 0.5, & x = +1 \\ 0.5, & x = -1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

da X_{t+1} statistisch unabhängig von allen $X_s, s \neq t+1$ ist. $P[X_{t+1} = x]$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis $X_{t+1} = x$ unter allen Wegen im Raum

$$\frac{|\{(x_1, x_2, \dots, x_{t+1} = x, \dots, x_n) \mid x_i = \pm 1, \text{ für alle } i \neq t+1\}|}{2^n} = 0.5$$

auftritt.

2.2.2 Feste Zeitreihe

Meist wird in dieser Ausarbeitung davon ausgegangen, dass die T_i einer Zeitreihe nicht zufällig sind, was durch ein kleines t_i betont wird. Preisdaten, die täglich, wöchentlich oder jährlich gesammelt werden genügen diesem Kriterium. Daten in welchen die Zeitpunkte T_i als zufällig betrachtet werden beinhalten, zum Beispiel, sogenannte "high-frequency" oder "trade-by-trade" Daten. Derartige Daten werden in dieser Arbeit nicht behandelt. Wie vorher schon erwähnt, existiert eine Mehrdeutigkeit zwischen Zufalls- und nicht-Zufallsvariablen, da eine "degenerierte" Zufallsvariable, die einen Wert mit Wahrscheinlichkeit 1 annimmt, tatsächlich nicht zufällig ist.

2.2.3 Äquidistante Zeitreihe

Zusätzlich zu der Annahme, dass eine Zeitreihe "nicht-zufällig" ist, wird oft auch angenommen, dass die Zeiten äquidistant zueinander sind.

Sei eine Anfangszeit t gegeben, dann setzen sich die darauffolgenden Zeiten folgendermaßen zusammen

$$t + h, t + 2h, \dots, t + nh, \tag{2.1}$$

wobei h eine Zeiteinheit, z.B. 10 min, ist. Wenn aus dem Kontext klar hervorgeht, dass die Zeitperiode h eindeutig ist, werden die Zeiten auch folgendermaßen geschrieben

$$t + 1, t + 2, \dots, t + n. \quad (2.2)$$

Daten, die täglich, monatlich oder jährlich auftreten, genügen 2.2, obwohl die Kalenderjahr-Differenz nicht immer konstant ist. Ein Beispiel für die Nutzung von äquidistanten Zeiten tritt auf, wenn Intervalle mit einer Länge von 5 Minuten hergenommen werden um einen Börsentag mit einer Länge von 6 Stunden einzuteilen. Also findet das Ende eines Börsentages nach 72 Perioden statt, in der 73sten Periode beginnt der nächste Börsentag, was unter der Woche 18 und am Wochenende 66 Stunden bedeutet. Oft “springt“ der Aktienpreis am Beginn eines neuen Tages deutlich mehr als er es jemals während eines Tages machen würde, wegen Feierabend-Ereignissen die den Preis schwanken lassen. Würden diese Aktienpreise einfach aneinander gehängt werden, würden die Tages-Abschlusskurse eine abnormal hohe Schwankung hervorrufen und sollten deswegen nicht wie “Innertageskurse“ behandelt werden.

2.2.4 Zeitreihen von Renditen

Für Preisdaten nutzt man traditionell “percentage returns“ oder “log-relatives“ zur Analyse. Sei $\{C_t\}$ eine Reihe von Cashflows (Dividenden, Zinsraten, etc.) gezahlt an den Besitzer eines Wertpapiers zu einer Zeit t . Dann nimmt die Renditen-Zeitreihe $\{R_t\}$ für eine Zeitreihe X_1, X_2, \dots von Preisen und zugehörigen Cashflows C_1, C_2, \dots normalerweise eine der 3 Formen an:

$$R_t = \frac{X_t + C_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \text{ (Bruch-Form)} \quad (2.3)$$

oder

$$R_t = 100 \frac{X_t + C_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \text{ (Prozent-Form)} \quad (2.4)$$

oder

$$R_t = \ln \left(\frac{X_t + C_t}{X_{t-1}} \right) \text{ (Logarithmus-Form)}. \quad (2.5)$$

Meist wird die Logarithmus-Form bevorzugt, da der Logarithmus die praktische Identität

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad (2.6)$$

erfüllt, die eine Multiplikation in eine Addition konvertiert. Insbesondere, wenn R eine 1-periodische einfache Zinsrate ist, gilt

$$\ln(X(1 + R)) = \ln(X) + \ln(1 + R). \quad (2.7)$$

für kleine R . Also zeigt der Taylor'sche Lehrsatz, dass die Logarithmische Form mit der Bruch-Form ungefähr übereinstimmt:

$$\ln(1 + R) = R - \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \dots \approx R.$$

2.2.5 White Noise

Ein "White Noise Process" $\{X_t\}$ oder einfacher "White Noise (WN)" oder $\text{WN}(0, \sigma^2)$, ist eine reellwertige Zeitreihe, die folgenden Eigenschaften genügt:

$$\begin{aligned} E[X_t] &= 0, \\ \text{Var}[X_t] &= \sigma^2, \sigma > 0 \text{ eine Konstante,} \\ \text{Cov}[X_s, X_t] &= 0, s \neq t. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Falls die Zufallsvariablen $\{X_t\}$ paarweise unabhängig und identisch verteilt (i.i.d.) mit Mittelwert 0 und Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$ sind, dann nennt man $\{X_t\}$ i.i.d. WN oder unabhängiges WN.

Nehmen wir an, dass log-Erträge WN oder i.i.d. WN sind - folgt daraus schon, dass die Bruch-Erträge auch WN sind? Als erstes betrachten wir erwartete Erträge: Bruch-Erträge F_t und log-Erträge R_t stehen mit der Gleichung

$$F_t = \exp(R_t) - 1. \tag{2.9}$$

Wenn $E[R_t] = 0$, folgt dann $E[F_t] = E[\exp(R_t) - 1] = 0$. Laut Jensens Ungleichung gilt: $E[F_t] \geq \exp(E[R_t]) - 1 = \exp(0) - 1 = 0$, da $\exp(0) - 1$ strikt konvex ist. Falls $\{R_t\}$ nicht konstant ist, kann Jensens Ungleichung verstärkt werden durch eine strikte Ungleichung, die impliziert, dass $E[F_t] > 0$. Dementsprechend, falls die Erträge nicht konstant sind, werden Bruch-Erträge positiven Erwartungswert haben, wenn log-Erträge Erwartungswert 0 haben. Eine ähnliche Aussage kann über log-Erträge gemacht werden, wenn Bruch-Erträge Erwartungswert 0 haben. Damit lässt sich zeigen, dass log- und Bruch-Erträge nicht simultan WN sein können.

Sei die Renditen(Ertrags)-Reihe $R_t = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right)$ i.i.d. WN, dann folgt, dass die Transformation 2.9 stetig ist und somit die Unabhängigkeit von F_t . Wenn man letzteres Argument umkehrt, mit Benutzung von $R_t = \ln(1 + F_t)$, lässt sich zeigen, dass wenn die Bruch-Ertrags-Reihe unabhängig ist, dann ist ebenso die log-Ertrags-Reihe unabhängig. Daher, wenn entweder die Bruch-Erträge oder log-Erträge i.i.d. WN sind, wird das jeweils andere i.i.d. sein aber kein WN, da der Mittelwert nicht 0 sein wird.

2.2.6 Zufallsweg

Ein Zufallsweg-Modell einer Preisentwicklung geht davon aus, dass Renditen als fortlaufende unabhängig identisch verteilte ‘‘Schocks‘‘ entstehen. In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird so ein Prozess *homogener Zufallsweg* genannt. Analytisch gesehen, kann ein *homogener Zufallsweg* durch folgende Formel repräsentiert werden

$$X_t = \mu + X_{t-1} + U_t, \quad (2.10)$$

wo $\{X_t\}$ für die Zuwächse steht, μ für eine konstante Verschiebung und U_t sei i.i.d. *White Noise*. Falls $X_0 = 0$ kann ein Zufallsweg 2.10 auch durch

$$X_t = t\mu + \sum_{s=0}^{s=t} U_s \quad (2.11)$$

wiedergegeben werden, für $t = 1, 2, \dots$. Wenn die Schocks $U_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt sind, dann wird 2.10 ein *Gaußscher Zufallsweg* genannt.

2.2.7 Martingale

Im Folgenden betrachten wir einen stochastischen Prozess $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ in diskreter Zeit und stellen uns $\{X_t\}$ als den kumulativen Gewinn zum Zeitpunkt t in einem Glücksspiel vor. So ist z.B. X_0 das Startkapital, mit dem das Spiel begonnen wird. In der folgenden Definition wird beschrieben, was es heißt, dass ein Glücksspiel ‘‘fair‘‘ ist. [4]

Definition 2.2.2 (Martingal). Ein stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, F, (F_t)_{t \in \mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$ heißt ein Martingal, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. X_t ist (F_t) -messbar für alle $t \in \mathbb{N}_0$.
2. $E[X_t] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$.
3. $E[X_{t+1}|F_t] = X_t$ fast sicher für alle $t = 0, 1, \dots$

Die erste Bedingung verlangt, dass der Gewinn zum Zeitpunkt t nur durch die Information bestimmt wird, die zum Zeitpunkt t vorliegt. Um die dritte Bedingung zu interpretieren, stellen wir uns vor, dass wir uns zum Zeitpunkt t entscheiden sollen, ob wir den aktuellen Gewinn X_t behalten, oder weiterspielen. Da uns bereits alle Informationen über den Spielverlauf bis zum Zeitpunkt t vorliegen, ist der erwartete Gewinn zum Zeitpunkt $t + 1$

(falls wir nicht aufhören) durch den bedingten Erwartungswert $E[X_{t+1}|F_t]$ gegeben. Bei einem "fairen" Spiel sollte es im Mittelwert keinen Unterschied machen, ob wir aussteigen oder weiterspielen, d.h. es sollte $E[X_{t+1}|F_t] = X_t$ gelten. Dies ist genau die dritte Bedingung aus der obigen Definition. [4]

2.3 Potentiell profitable Glücksspielsysteme

Wir definieren ein *Glücksspielsystem* für eine reellwertige Zeitreihe $\{X_t\}$ hinsichtlich $\{Z_t\}$ als eine Familie von reellwertigen Funktionen

$$f_t(Z_t, Z_{t-1}, \dots), \quad (2.12)$$

die spezifizieren wie viel zur Zeit t auf den Ausgang zur Zeit $t + 1$, unter Berücksichtigung der Z_t, Z_{t-1}, \dots , gesetzt werden soll. Der *Ertrag vom Glücksspielsystem* f_t bei X_t im Intervall $[t - s, t]$ ist

$$G_{t,s}(f) = \sum_{u=t-s+1}^{u=t} f_{u-1}(Z_{u-1}, Z_{u-1}, \dots)(X_u - X_{u-1}), \quad (2.13)$$

und der *durchschnittliche Ertrag* ist

$$\bar{G}_{t,s}(f) = \frac{1}{s} G_{t,s}(f). \quad (2.14)$$

Definition 2.3.1 (Potentiell profitables Glücksspielsystem). Ein PPGS ist ein Glücksspielsystem f_t für eine Zeitreihe X_t hinsichtlich Z_t , sodass $G_{t,s}(f)$ definiert in 2.13 einen nichtnegativen Erwartungswert besitzt für alle t und $s > 0$ und einen positiven Erwartungswert hat für zumindest ein t und $s > 0$, z.B.

$$E[G_{t,s}(f)] \geq 0, \text{ für alle } t \text{ und } s > 0 \quad (2.15)$$

$$E[G_{t_0,s_0}(f)] > 0, \text{ für ein } t_0 \text{ und ein } s_0 > 0 \quad (2.16)$$

In der herkömmlichen Finanztheorie sind PPGSs unmöglich. Dennoch haben viele Investoren abnormal hohe Renditen über Jahrzehnte generiert, die wesentliche Beweise bereitgestellt haben, dass *profitable Glücksspielsysteme* tatsächlich existieren.

2.3.1 Der erste fundamentale Satz über Aktives Management

Der Begriff *Aktives Management* bezieht sich auf eine Portfolio Managementstrategie, die explizit versucht risikojustierte Renditen in Überschuss zu Richtwert-Portfolios zu generieren.

Im Laufe dieses Kapitels wird die Beziehung zwischen Martingalen und PPGSs entwickelt. Ein PPGS existiert genau dann, wenn eine "beobachtbare Informationsreihe" Z_t existiert, sodass die Preisreihe $\{X_t\}$ hinsichtlich $\{Z_t\}$ kein Martingal ist.

Satz 2.3.2 (Der erste fundamentale Satz über Aktives Management)
 $\{X_t\}$ ist ein Martingal bezüglich $\{Z_t\}$ genau dann, wenn kein PPGS $f_t(Z_t, Z_{t-1}, \dots)$ für $\{X_t\}$ existiert.

Beweis. " \Rightarrow "

Wenn $\{X_t\}$ ein Martingal bezüglich $\{Z_t\}$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} E[G_{t,s}(f)] &= \sum_{u=t-s+1}^{u=t} E[(X_u - X_{u-1})f_{u-1}(Z_{u-1}, Z_{u-2}, \dots) | Z_{u-1}, Z_{u-2}, \dots] \\ &= \sum_{u=t-s+1}^{u=t} (E[X_u | Z_{u-1}, Z_{u-2}, \dots] - X_{u-1})f_{u-1}(Z_{u-1}, Z_{u-2}, \dots) \\ &= \sum_{u=t-s+1}^{u=t} (X_u - X_{u-1})f_{u-1}(Z_{u-1}, Z_{u-2}, \dots) \\ &= 0, \end{aligned}$$

für alle t und $s > 0$, somit kann es kein PPGS sein.

" \Leftarrow "

Sei $\{X_t\}$ kein Martingal und sei

$$K = \{t | E[X_{t+1} | Z_t, Z_{t-1}, \dots] \neq X_t\}$$

die Menge der Zeiten, die nicht der Martingal Bedingung genügen.

Wir definieren ein Glücksspielsystem für $\{X_t\}$, sodass

$$f_t(Z_t, Z_{t-1}, \dots) = \begin{cases} \text{sgn}(E[X_{t+1} | Z_t, Z_{t-1}, \dots] - X_t) & \text{falls } t \in K; \\ 0 & \text{falls } t \notin K. \end{cases}$$

Dann ist $\{X_t\}$ ein PPGS. □

2.3.2 Der zweite fundamentale Satz über Aktives Management

Der erste fundamentale Satz über Aktives Management scheint auszusagen, dass Markteffizienz das selbe ist wie zu zeigen, dass Marktpreise Martingale sind. Das stimmt jedoch nicht, genauer - Preise müssen Martingale bezüglich einer Informationsreihe Z_t sein. Der Fakt das dies keine triviale Aussage ist, ist das Thema des zweiten fundamentalen Satzen über aktives Management.

Satz 2.3.3 (Der zweite fundamentale Satz über Aktives Management)

Sei $\{X_t\}$ eine reellwertige Zeitreihe von Preisen und $\{(Z_t^1, Z_t^2)\}$ eine Zeitreihe mit Vektor-Reihen $\{Z_t^1\}$ und $\{Z_t^2\}$. Dann

1. Falls $\{X_t\}$ ein Martingal bezüglich $\{(Z_t^1, Z_t^2)\}$ ist, dann gilt für jedes Glücksspielsystem f_t bzgl. $\{Z_t^1\}$ und g_t bzgl. $\{Z_t^2\}$

$$E[G_{s,t}^f] = E[G_{s,t}^g] = 0, \quad (2.17)$$

wobei G^f und G^g Kursgewinne für f und g , definiert in 2.13, sind. Deswegen, keine PPGS existieren für $\{X_t\}$ bzgl. $\{Z_t^1\}$ oder $\{Z_t^2\}$

2. Falls $\{X_t\}$ ein Martingal bzgl. $\{Z_t^1\}$ ist, dann existiert kein PPGS bzgl. $\{Z_t^1\}$, aber könnte sein das ein PPGS bzgl. $\{(Z_t^1, Z_t^2)\}$ existiert, man weiß es nicht.

Dieser Satz ist eigentlich nur eine Umformulierung von Satz 2.3.2 in der *Sprache* von Glücksspielsystemen.

2.3.3 Der dritte fundamentale Satz über Aktives Management

Eine reellwertige Zeitreihe $\{X_t\}$ nennt man *seriell korreliert erster Ordnung*, wenn

$$\rho_X(t, t-1) = \frac{\text{Cov}[X_t, X_{t-1}]}{\sigma_{X_t} \sigma_{X_{t-1}}} \neq 0.$$

für alle t , wobei $\text{Cov}[X_t, X_{t-1}]$ die Kovarianz zwischen X_t und X_{t-1} ist und σ_{X_t} und $\sigma_{X_{t-1}}$ die Standardabweichungen von X_t und X_{t-1} sind.

Satz 2.3.4 (Der dritte fundamentale Satz über Aktives Management)

Sei $\{X_t\}$ eine reellwertige Zeitreihe von Preisen, die vorhersehbare, unregelmäßige, positive oder negative serielle Korrelation ρ mit $|\rho| \neq 0$ hat. Dann existiert ein PPGS für $\{X_t\}$.

Drei Vorbehalte sollten mit diesen Sätzen über aktives Management einhergehen. Erstens, jeder Satz setzt voraus, dass Werte, sowie der Mittelwert und serielle Korrelation, für zumindest eine Teilmenge von Zeiten bekannt ist, was in der Praxis nie vorkommt. Zweitens, keine Gebühren wurden berücksichtigt. Es kann passieren, dass ein System potentiell profitabel ist bevor Gebühren abgezogen werden und dann nicht mehr profitabel ist, meist ist dies sogar der Fall. Drittens, der "Vorteil" kann zu klein sein um vertretbar zu sein, z.B. wenn der erwartete Gewinn weniger als eine investierbare "risikofreie" Zinsrate ist. Deswegen muss ein PPGS einen wesentlichen Vorteil haben um sich als tatsächlich profitabel herauszustellen.

Fazit: Damit "Trader" konsistent mehr Gewinn als die durchschnittlichen 15%-25% machen, müssen die Finanzmärkte in der Tat ineffizient sein!

2.3.4 Stationarität

Eine andere wichtige Eigenschaft von Zeitreihen ist Stationarität. Eine Zeitreihe $\{X_t\}$ wird *streng stationär* genannt, wenn ihre gemeinsamen Verteilungen invariant bezüglich Zeitverschiebungen ist:

$$P[X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n] = P[X_{s+t_1} = x_1, X_{s+t_2} = x_2, \dots, X_{s+t_n} = x_n]$$

für jede sinnvolle Auswahl der Zeiten $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ und Zeitverschiebungen s . $\{X_t\}$ nennt man *schwach stationär*, wenn

$$E[X_t] = E[X_{t'}] = \mu, \text{ für alle } t, t', \text{ und} \quad (2.18)$$

$$\text{Cov}[X_t, X_{t+s}] = g(s), \text{ für eine Funktion } g(s) \text{ und für alle } s \geq 0 \text{ und } t, \quad (2.19)$$

das heißt, der unbedingte Mittelwert und die Varianz von $\{X_t\}$ zu einer beliebigen Zeit sind Konstanten μ und $g(0)$.

Nur durch Überprüfung des Plots einer Zeitreihe ist es unmöglich festzustellen ob ein Prozess *stationär* ist. Der Grund dafür ist, dass *Stationarität* ein Gesamtheits-Konzept ist.

3. Statistische Regularitäten von Zeitreihen

3.1 Was sind statistische Regularitäten

Ein guter Punkt anzufangen und zugleich der erste Schritt in einer wissenschaftlichen Herangehensweise ist die Sammlung von Daten und deren Analyse. Heutzutage sind die Ergebnisse von abertausenden Untersuchungen im Gebiet der Preisgestaltung im Finanzwesen seit Mitte des 20. Jahrhunderts zugänglich. Diese Untersuchungen sind voll von mutmaßlichen *statistischen Regularitäten*. Statistische Regularitäten werden weiter unten im Text definiert, in der Zwischenzeit stellen wir sie uns als regelmäßige Muster in Preis- und Gewinnreihen vor, die geläufig in diversen Finanzinstrumenten und Märkten sind.

Einige Beispiele für statistische Regularitäten sind:

1. Die Tendenz, dass kleine Preisänderungen, kleinen Preisänderungen folgen und dass große Preisänderungen, großen Preisänderungen folgen
2. Die Eigenschaft, dass prozentuelle Preisänderungen nicht gaußverteilt sind
3. Die Tendenz, dass Preise schnell fallen sich aber langsam wieder erholen

In diesen Regel- oder auch Gesetzmäßigkeiten liegt die Hoffnung, dass Finanzmärkte mittels statistischen Prozessen “erklärt“ werden können.

3.2 Definition von statistischen Regularitäten

Sei \mathcal{C} eine Klasse von Zeitreihen, die Tradingaktivität in einer Gruppe ähnlicher Anlagen repräsentieren. Beispiele solcher Klassen sind, unter anderen, (1) alle Zeitreihen von Dividendenpapieren der United States und ausländischen Firmen, (2) alle Zeitreihen von ausländischen Finanzbörsen, (3) alle Zeitreihen

von Rohstoffmärkten. Im Kontext einer Klasse sind statistische Regularitäten folgendermaßen definiert:

Definition 3.2.1 (Statistische Regularität). Eine *statistische Regularität* für \mathcal{C} , ist eine Menge von nichttrivialen Statistiken $g_i(X), i = 1, 2, \dots, k$, sodass die *Nullhypothese* $H_{0,i} : g_i(X) \in U_i$, wobei U_i einen kritischen Bereich zum Signifikanzniveau α_i definiert, für alle i in einer Teilmenge $I_R \subset \{1, 2, \dots, k\}$ abgelehnt und für alle i in der Komplementärmenge I_A von I_R für jede Zeitreihe $X \in \mathcal{C}$ akzeptiert wird. Alle Tests von $H_{0,i}$ werden mit dem selben Signifikanzniveau α_i für jede Zeitreihe in \mathcal{C} ausgeführt. Dies ist so zu verstehen, dass g_i und U_i nicht von einem beliebigen $\{X_t\} \in \mathcal{C}$ abhängen.

Die Wortwahl in obiger Definition verschleiert die darunter liegende Einfachheit. Eine statistische Regularität ist eine Wahrscheinlichkeitseigenschaft von Zeitreihen die sich für jedes Mitglied der Klasse manifestiert. Mit statistischen Hypothesentests wird erkannt ob diese Eigenschaft vorliegt oder nicht - deswegen auch *statistische* Regularität und nicht *deterministische* Regularität.

Einige statistische Regularitäten werden so häufig auftreten, sie verdienen spezielle Notation. Hier sind die geläufigsten:

- **SR-RNG**: “Die Verteilung von Renditen ist keine Gauß-Verteilung“
- **SR-RNID**: “Renditen sind nicht unabhängig Verteilt.“
- **SR-PNRW**: “Preise sind kein Zufallsweg“
- **SR-RNW**: “Renditen sind kein WN.“
- **SR-RNM**: “Renditen sind keine Martingale.“
- **SR-RLM**: “Renditen haben *long memory*.“

3.3 Gesetzmäßigkeiten von finanztechnischen Zeitreihen

Eine beliebte Forschungsrichtung besteht aus dem Finden von neuen oder verifizieren von alten statistischen Regularitäten. Es gibt zahlreiche Literatur im Bereich der statistischen Regularitäten, die immer weiter wächst. Man muss jedoch begreifen, dass bis Mandelbrots Veröffentlichungen in den 60er Jahren [8] [9], weit verbreitet war, dass Renditen dem Modell der Zufallswege folgen. Als Lo und MacKinlay 1986 eine Studie präsentierten, die zeigt, dass

Aktienpreise **nicht** dem Modell der Zufallswege [6] folgen, behauptete ein renommierter Wirtschaftswissenschaftler, sie müssten einen Programmierfehler gemacht haben! Damals glaubte man, dass Finanzmärkte nur dann effizient sein konnten, wenn sie mittels Zufallswegen modelliert werden. Hinweis an den Leser - wenn Experten damals so falsch lagen, warum sollten sie heute so richtig liegen?

In den kommenden Unterabschnitten wird auf einige statistische Regularitäten näher eingegangen.

3.3.1 Verteilung mit schweren Rändern

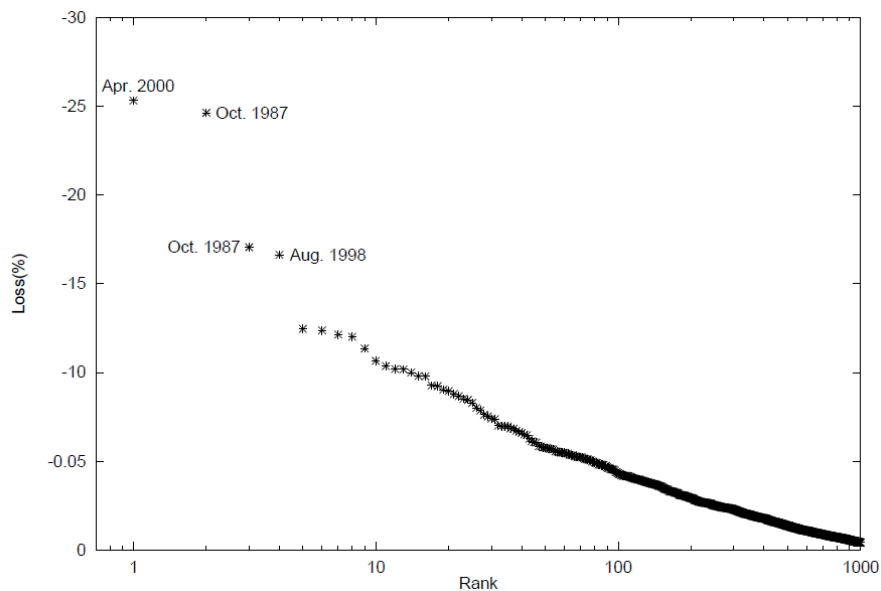


Abbildung 3.1: Rangordnung von aufeinanderfolgenden Läufen von Verlusttagen des NASDAQ Composite Index standardisierte Tagesrendite von 1971 bis 2000. Vier Abschnitte stechen heraus: Zwei im Oktober 1987 (Crash von 1987), einer im August 1998 (Asien-Krise) und im April 2000 (platzen der Dot-com Blase).

Quelle: Johansen und Sornette [3]

Renditen haben typischerweise “Ausreißer“ - Beobachtungen, deren Ausschlag zu hoch ist um mit Standardverteilungen, wie der Normal-, Exponential- oder Gammaverteilung dargestellt zu werden. Eine Zufallsvariable $X > 0$ hat einen “rechten schweren Rand“, wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} P[X > x] = \infty \quad (3.1)$$

für alle $\lambda > 0$, der “linke schwere Rand“ wird analog definiert. Eine Zufallsvariable oder Verteilung wird *Verteilung mit schwerem Rand* genannt, wenn sie entweder linken oder rechten schweren Rand hat. Nachdem der Grenzwert in 3.1 für hinreichend kleines λ bei der Normal-, Exponential- oder Gamma-Verteilung gegen Null geht, haben diese Verteilungen keinen schweren Rand. Während die Wahl der e -Funktion zufällig wirkt, hat sie eine sehr angenehme Eigenschaft: Da die Funktion $e^{\lambda x}$ schneller wächst als jedes Polynom, folgt, dass $e^{-\lambda x}$ schneller fällt als jedes $x^\alpha, \alpha > 0$. Beispiele für Verteilungen mit schwerem Rand sind die Lévy- oder die Weibullverteilung. Ein Beispiel für eine Verteilung mit schwerem Rand zeigt Abbildung 3.1, die die Verteilung von aufeinanderfolgenden Läufen von Verlusttagen des NASDAQ Composite Index von 1971 bis 2000 zeigt, jede der Aufnahmen repräsentiert den prozentuellen Verlust einer maximalen Periode von aufeinanderfolgenden Verlusttagen.

Statistische Regularität: Verteilung mit schweren Rändern. Mehr Beobachtungen am Rand verglichen mit einer exponentiell abklingenden Verteilung.

3.3.2 Aktienpreise und Renditen sind weder Zufallswege noch Martingale

Frühere Modelle postulierten, dass Renditen-Reihen Zufallswege seien. Mandelbrot hat gezeigt, dass die Zufallsweg-Hypothese nur dann konsistent mit Marktpreisen war, wenn die Wegschritte “verteilt mit schweren Rändern“ waren und unendliche Varianz besaßen. Allerdings hatte der Gebrauch von Verteilungen mit unendlicher Varianz wenig Anreiz an die Wirtschaftswissenschaftler und diese Modelle wurden nie etabliert.

Bis Spät in die 1980er war der Glaube verbreitet, dass Renditen dem Modell von Gaußschen Zufallswegen folgten. Lo und MacKinlay [6] haben eine neue Familie von Tests für Zufallswege und die “Variance Ratio (VR) family“ entwickelt. [7]

Statistische Regularität SR-PNRW, SR-RNW, SR-RNM.

3.3.3 Der Hebeleffekt (nur bei Aktien)

Der *Hebeleffekt* für Dividenden beschreibt ein Volatilitätsverhalten wenn Aktien sich nach oben oder unten bewegen. Normalerweise sinkt die Volatilität wenn die Preise steigen und vice versa. Um den Hebeleffekt zu messen, sei

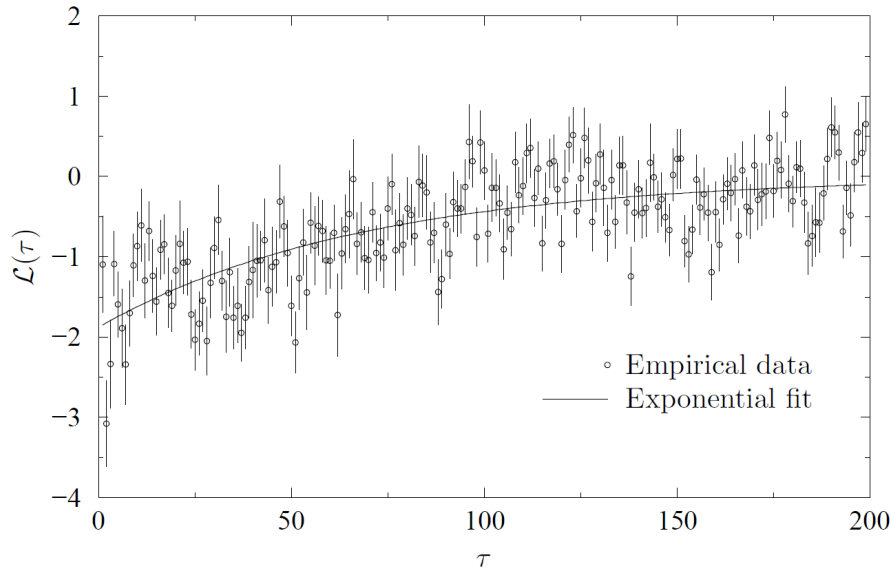


Abbildung 3.2: Ein Plot von Hebelkorrelationsfunktionen gemittelt über 437 S&P 500 Aktien (die schwarzen Punkte) von Januar 1990 bis Mai 2000 für 200 Verzögerungen. Die vertikalen Linien beschreiben den Standardfehler für diese Mittelwerte. Die schwarze Linie ist eine Exponentialkurve, angepasst an die Mittelwerte.

Quelle: Bouchaud, Matacz und Potters [2]

X_t der Preis einer Aktie zum Zeitpunkt t und sei

$$\delta X(t) = \frac{X(t+1) - X(t)}{X(t)} \quad (3.2)$$

der Bruch-Gewinn zum Zeitpunkt t . Wir definieren die *die Hebelkorrelationsfunktion mit Verzögerung* τ , $\mathcal{L}(\tau)$, als

$$\mathcal{L}(\tau) = \frac{E[(\delta X(t+\tau))^2 \delta X(t)]}{E[\delta X(t)^2]^2} \quad (3.3)$$

Wenn nun kleinere Preisänderungen zu höherer Volatilität und höhere Preisänderung zu geringerer Volatilität in Aktie i führen, dann sollte $\mathcal{L}(\tau)$ negativ sein, was die vorhergehende Formulierung, nämlich *die Volatilität sinkt wenn die Preise steigen und vice versa*, unterstützt.

Bouchaud, Matacz und Potters [2] haben eine Analyse von 437 U.S.-Aktien des S&P 500 Index von Januar 1990 bis Mai 2000 durchgeführt. Für jede Aktie i , wurde eine Hebelfunktion $\mathcal{L}_i(\tau)$ nach Gleichung 3.3 für die Verzögerungen $\tau = 1, 2, \dots, 200$ berechnet.

Statistische Regularität: Hebeleffekt bei Aktien.

3.4 Wieso sind diese Regularitäten wichtig?

In der quantitativen Finanzwissenschaft ist ein genaues Modell von realen Finanzmärkten der Heilige Gral. Jedes realistische Modell muss statistische Regularitäten erklären, oder zumindest versuchen plausibel einzubinden. In der Gegenwart gibt es keine Modelle die diese Regularitäten als erste Priorität erklären können, aber es existieren einige die zumindest ein paar Einsichten bieten. Einige von diesen werden im Buch von Steven D. Moffitt [10] genauer beschrieben, jedoch würde dies den Rahmen dieser Seminararbeit sprengen.

Definition 3.2.1 ist nicht spezifisch betreffend den statistischen Methoden, die verwendet werden um eine statistische Regularitäten zu verifizieren. Das ist leider kein triviales Problem, da eine Großzahl von Studien fragwürdige statistische Methoden verwenden haben. Genauer gesagt, Studien betreffend Verteilungen mit schweren Rändern, leiden an statistischen Problemen in der Schätzung von Werten.

4. Grundlagen der Nutzentheorie

4.1 Grundsätzliches der Nutzentheorie

Vieles der modernen Wirtschaftswissenschaften kann auf die bahnbrechende Arbeit von John von Neumann und Oskar Morgenstern in ihrem Buch *Theory of Games and Economic Behavior* [11] zurückgeführt werden. Als Teil ihrer Arbeit haben von Neumann und Morgenstern eine kleine Gruppe von Axiomen präsentiert, die die Basis für eine *rationale Entscheidungsfindung* bilden sollten. Ihre Axiome erfordern einen Entscheidungsträger der die beste Option aus einer Menge von konsistenten Präferenzen, bezogen auf die Wahrscheinlichkeitstheorie, auswählen soll.

Anfangs war man optimistisch, dass die Theorie vom Nutzen eine ganzheitliche Theorie der menschlichen Rationalität bereitstellen würde. Im nächsten Jahrzehnt traten jedoch erhebliche Probleme auf, um nur ein Beispiel zu nennen: Das Paradoxon von Allais [1] zeigte auf, dass die meisten Menschen regelmäßig die Theorie verletzen, anderen Arbeiten zeigten zusätzlich, dass Menschen sich auch nicht besinnen ließen und somit die Nutzentheorie verletzen.

Nichtsdestotrotz begannen Wirtschaftswissenschaftler das Modell des *rationalen Mannes* basierend auf der Nutzentheorie zu entwickeln [5]. Heutzutage steht das gesamte Gebäude der quantitativen Wirtschaftswissenschaft auf dem Fundament dieser Arbeit.

4.2 Informelle Einführung in die Theorie des Nutzens

Im 18ten Jahrhundert wurde das Konzept der mathematischen Erwartung auf einigen Ebenen kritisiert. Der Kritikpunkt, sie würde manchmal keinen Sinn machen kam auf, z.B. wenn "lebendig" als 0 und "tot" als 1 kodiert wird, tritt jedes der beiden Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0.5 auf aber was bedeutet dieser Mittelwert? Was bedeutet es "halbtot" zu sein? Erwar-

tungswerte von finanziellen Quantitäten wurden aus 3 Gründen kritisiert: (1) weil sie den Zeitwert des Geldes ignorierten, (2) weil sie annehmen, dass der Martingalwert jeder zusätzlichen Geldeinheit der Gleiche sei und (3) weil eine Geldeinheit für einen “armen“ Mann einen Mehrwert gegenüber einem “reichen“ Mann hat.

Um Entscheidungsfindung mittels der Nutzentheorie zu formalisieren nimmt man an, dass ein Individuum eine Menge von klar spezifizierten Alternativen, von denen nur genau eine ausgewählt werden kann, zur Verfügung hat. Zum Beispiel, angenommen ein Individuum hat die Auswahl, entweder ein Buch für € 14 zu kaufen oder nicht zu kaufen.

Unsere Leben bestehen größtenteils daraus, alltägliche Entscheidungen zu treffen, getroffen von Moment zu Moment oder von Tag zu Tag. Jede einzelne dieser Entscheidungen zu analysieren ist sicher ein sehr hoch gestecktes Ziel, deswegen beschränkt sich die Entscheidungsanalyse auf die Abstraktion dieser Entscheidungen, genauer auf diejenigen Entscheidungen die gänzlich definiert werden können. In meiner Präsentation über die Nutzentheorie, abstrahiere ich ein Entscheidungsproblem durch spezifizieren von (1) einer Menge von abstrakten Auswahlmöglichkeiten und (2) einer Menge von bekannten Wahrscheinlichkeiten die diesen Auswahlmöglichkeiten zugeordnet werden.

4.3 Präferenzrelation

Eine Auswahl die einem Individuum zur Verfügung steht nennt man Preise und werden mit lateinischen Buchstaben geschrieben. Zur Einfachheit nehmen wir an, dass eine Menge von Preisen Ω endlich ist. Das erste Problem ist eine Beschreibung der “besten“ Wahl aus Ω zu finden.

Eine Menge von geordneten Paaren R aus Ω nennt man *binäre Relation* auf Ω . Wir schreiben

$$A \succeq B \tag{4.1}$$

um anzudeuten, dass das Paar (A,B) in der Menge der geordneten Paare enthalten ist.

Eine Relation die den Axiomen 1-3 genügt nennt man eine *Präferenzrelation*.

Axiom 1 (Totalordnung). Für zwei beliebige Preise $A, B \in \Omega$, trifft zumindest eine von diesen Eigenschaften zu: (1) $A \succeq B$, (2) $B \succeq A$.

Axiom 2 (Reflexivität der Präferenz). Für einen beliebigen Preis $A \in \Omega$ gilt:

$$A \succeq A \tag{4.2}$$

Axiom 3 (Transitivität). Für beliebige Preise A, B und $C \in \Omega$ gilt:

$$A \succeq B \wedge B \succeq A \Rightarrow A \succeq C. \quad (4.3)$$

In dem Kontext der Entscheidungsfindung hat sich besondere Notation und Terminologie für Präferenzrelationen durchgesetzt. Wenn $A \succeq B$ und $B \succeq A$, nennt man den Entscheider *indifferent* gegenüber A und B :

$$A \sim B := A \succeq B \wedge B \succeq A. \quad (4.4)$$

Deswegen teilen die Axiome 1-3, Preise in *indifferenz* Gruppen ein und diese Gruppen sind totalgeordnet. Aus der *schwachen Ordnung* “ \succeq “ kann man eine *strikte Ordnung* “ \succ “ mit der Identität:

$$A \succ B := A \succeq B \wedge A \not\sim B. \quad (4.5)$$

Ein Beispiel für eine Präferenzrelation auf der Menge $\Omega = (A, B, C)$ sei:

Beispiel 4.3.1. Wir betrachten die Relation

$$\{(A, A), (A, B), (A, C), (B, B), (B, C), (C, C)\}.$$

Dann ist $A \succeq A, A \succeq B, A \succeq C, B \succeq B, B \succeq C, C \succeq C$. Diese Relation ist eine Präferenzrelation.

4.4 Kardinale Nutzentheorie auf Präferenzrelationen

Während die Axiome 1-3 die Präferenz von Preisen beschreiben, kann man aus ihnen nicht schließen wie man “Wahrscheinlichkeits“-Preise behandelt. Um die Wahrscheinlich auch einzubinden, führen wir das Konzept einer *Lotterie* ein, diese ordnet jedem Preis seine Wahrscheinlichkeit aufzutreten zu. Eine Lotterie \mathcal{L} ist ein Glücksspiel in dem nur genau einer der Preise A_1, A_2, \dots, A_n mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_n, \sum p_i = 1$, eintreffen kann. Für eine Lotterie wird die Notation

$$\mathcal{L} = (p_1, A_1; p_2, A_2; \dots; p_n, A_n)$$

verwendet.

Um eine Präferenzrelation auf Lotterien einzuführen, beobachten wir, wenn \mathcal{L}_1 A_i mit Wahrscheinlichkeit 1 und \mathcal{L}_2 A_j auch mit Wahrscheinlichkeit 1 auszahlt, reduziert sich das Vergleichsproblem auf A_i und A_j , dieser Vergleich muss dann mit der Präferenzrelation auf den Preisen übereinstimmen. Wenn eine Präferenzrelation auf Lotterien existieren kann, schreiben wir $\mathcal{L}_1 \succeq \mathcal{L}_2$, wenn das Individuum Lotterie 1 strikt bevorzugt und $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$ wenn das Individuum sich indifferent verhält.

Axiom 4 (Zusammengesetzte Äquivalenz). Wenn drei Lotterien

$$\mathcal{L}_i = (p_i, A_1; (1 - p_i), A_2), i = 1, 2, 3,$$

und die zusammengesetzte Lotterie $\mathcal{M} = (q, \mathcal{L}_2; (1 - q), \mathcal{L}_3)$ gegeben sind, dann ist $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{M}$ genau dann, wenn $p_1 = qp_2 + (1 - q)p_3$ ist.

Dieses Axiom sagt aus, dass zusammengesetzte Lotterien das Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeit befolgen.

Axiom 5 (Axiom des Archimedes). Für drei Preise A, B und C , wenn $A \succ B \wedge B \succ C$, dann existiert ein $p \in (0, 1)$, sodass $B \sim (p, A; (1 - p), C)$ gilt.

Dieses Axiom zwingt das Individuum indifferent zwischen, (a) einer Auswahl eines Preises “sandwiched“ zwischen zwei anderen und (b) einer richtig gewählten Lotterie, die die anderen beiden miteinbezieht, zu sein.

Axiom 6 (Substitution). Wenn $A \sim B$, dann gilt für einen beliebigen Preis C und ein beliebiges $p \in [0, 1]$

$$(p, A; (1 - p), C) \sim (p, B; (1 - p), C),$$

und wenn $A \succ B$, dann gilt für einen beliebigen Preis C und ein beliebiges $p \in (0, 1]$

$$(p, A; (1 - p), C) \sim (p, B; (1 - p), C).$$

Wenn Rationalität mit einer Präferenzrelation, die den oben genannten sechs Axiomen genügt, ausgedrückt wird, dann nennt man den Nutzen *kardinalen Nutzen*, wobei *kardinal* für “zählen“ oder “Größe“ steht.

4.5 Nutzenfunktionen

Angenommen ein einziges Individuum würde auf Lotterien \mathcal{L} gerne eine Präferenzrelation einführen. Ein besonders einfacher Weg verwendet *Nutzenfunktionen* auf Preisen in Ω um das gewünschte zu erreichen. Eine Nutzenfunktion ist eine reellwertige Funktion $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Regeln:

1. Preis A_1 wird A_2 bevorzugt, wenn $U(A_1) > U(A_2)$.
2. Preis A_2 wird A_1 bevorzugt, wenn $U(A_1) < U(A_2)$, und
3. Indifferenz herrscht, wenn $U(A_1) = U(A_2)$.

Um obige Definition auf Lotterien zu erweitern, versuchen wir folgendes. Sei $\mathcal{L} = (p_1, A_1; p_2, A_2; \dots; p_n, A_n)$ eine Lotterie und sei

$$U(\mathcal{L}) = E_p[U(A)] = \sum_{i=1}^{i=n} p_i U(A_i).$$

Durch das Einsetzen von Lotterien in obige Definition anstatt von Preisen bekommt man wiederum die bevorzugten Lotterien.

Es kann gezeigt werden (würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen), dass eine beliebige Funktion U eine Präferenzrelation (vorausgesetzt, dass die Preismenge endlich ist), die den obigen sechs Axiomen genügt, induziert. Anmerkung: Wenn

$$\hat{U} = aU + b, a > 0$$

eine positive affine Transformation ist, dann ist das induzierte "Ranking" von \hat{U} mit dem Ranking von U ident.

4.6 Verwendung des Nutzens

In diesem Abschnitt präsentiere ich einige Beispiel um die Verwendung der Nutzentheorie zu illustrieren.

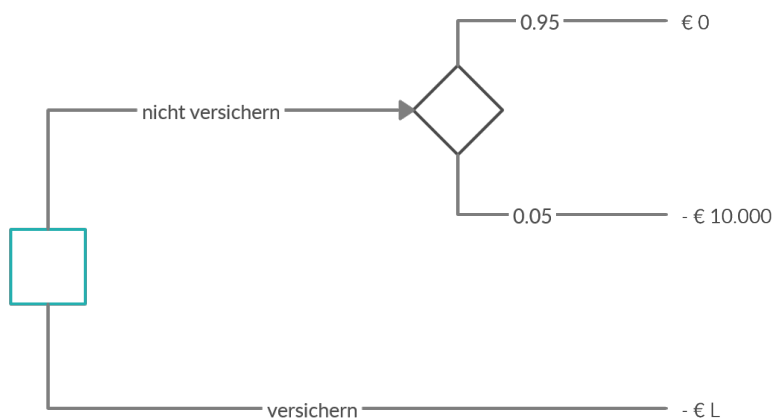


Abbildung 4.1: Entscheidungsbaum des Versicherungsnehmers

Beispiel 4.6.1 (Ein Versicherungsnehmer Problem). Angenommen, ein Versicherungsnehmer, der die Nutzenfunktion $U(x) = a - be^{-0.0001*x}$ verwendet,

würde sich gerne ein Risiko gegen € 10.000 versichern. Was für eine Prämie wäre er bereit zu zahlen wenn wir annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit der Realisierung bei 5% liegt? Sei L die Prämie, die der Versicherungsnehmer entrichtet. Die Nutzen des Betrages errechnet sich wie folgt

$$U(-10.000) = a - be,$$

$$U(0) = a - b, \text{ und}$$

$$U(-L) = a - be^{0.0001*L}.$$

Folglich sollte sich der Versicherungsnehmer für den "nicht versichern" Pfad entscheiden falls

$$0.05 * (a - b * e) + 0.95 * (a - b) > a - b * e^{0.0001*L}$$

⇔

$$0.05e + 0.95 < e^{0.0001*L}$$

⇔

$$L > \frac{\ln(0.05 * e + 0.95)}{0.0001} = \text{€ } 824.22.$$

Daraus folgt:

Nicht versichern: $L > \text{€ } 824.22$

Versichern: $L < \text{€ } 824.22$

Indifferent: $L = \text{€ } 824.22$

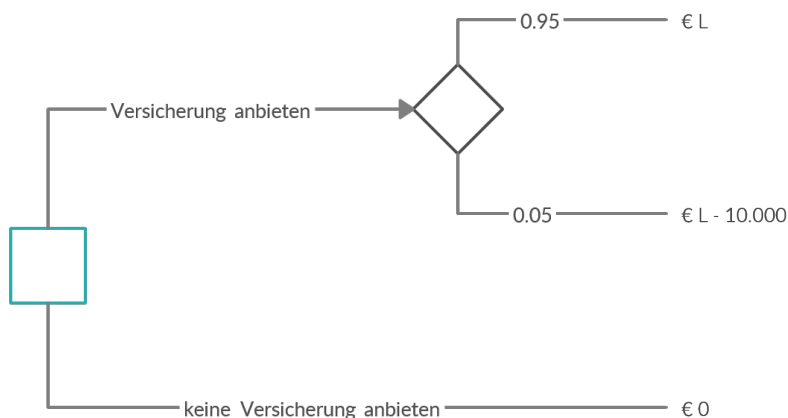


Abbildung 4.2: Entscheidungsbaum des Versicherungsunternehmens

Beispiel 4.6.2 (Ein Versicherer Problem). Angenommen, ein Versicherungsunternehmen, der die Nutzenfunktion $U(x) = a - be^{-0.00001*x}$ verwendet, würde gerne ein Risiko von € 10.000 versichern. Was für eine Prämie müsste das Unternehmen verlangen, wenn die Wahrscheinlichkeit der Realisierung bei 5% liegt? Sei L die Prämie, die das Versicherungsunternehmen verlangt. Die Nutzen des Betrages errechnet sich wie folgt

$$\begin{aligned}
 U(L) &= a - be^{-0.00001*L}, \\
 U(L - 10.000) &= a - be^{-0.00001*L+0.1} \\
 &= a - be^{-0.00001*L} * e^{0.1}, \text{ und} \\
 U(0) &= a - b.
 \end{aligned}$$

Folglich sollte sich das Versicherungsunternehmen für den “Versicherung anbieten“ Pfad entscheiden falls

$$0.95 * (a - b * e^{-0.00001*L}) + 0.05 * (a - b * e^{-0.00001*L+0.1}) > a - b$$

⇔

$$0.95 * e^{-0.00001*L} + 0.05 * e^{-0.00001*L} * e^{0.1} < 1$$

⇔

$$L > \frac{\ln(0.95 + 0.05 * e^{0.1})}{0.00001} = € 524.48.$$

Daraus folgt:

Versicherung anbieten: $L > € 524.48$

Keine Versicherung anbieten: $L < € 524.48$

Indifferent: $L = € 524.48$

Wenn man dieses Ergebnis mit dem Ergebnis aus Beispiel 4.6.1 vergleicht, liegen die möglichen Prämien L im Bereich

$$524.48 \leq L \leq 824.22.$$

Literatur

- [1] Maurice Allais. “Le Comportement de l’homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes l’ecole americaine”. In: *Econometrica* (1953).
- [2] Jean-Phillipe Bouchaud, Andrew Matacz und Marc Potters. “The leverage effect in financial markets: retarded volatility and market panic”. In: *Science & Finance: The research division of Capital Fund Management* (2008).
- [3] Anders Johansen und Didier Sornette. “The Nasdaq crash of April 2000: Yet another example of log-periodicity in a speculative bubble ending in a crash”. In: *Condensed Matter and Complex Systems* (2000).
- [4] Zakhar Kabluchko. *Martingale*. 2018. URL: https://www.uni-muenster.de/Stochastik/kabluchko/Skripte/Skript_Martingale.pdf.
- [5] David Kreps. “Notes on the Theory of Choice”. In: *Underground Classics in Economics* (1988).
- [6] Andrew Wen-Chuan Lo und A. C. MacKinlay. “A Non-Random Walk Down Wall Street”. In: *Princeton University Press* (2001).
- [7] Andrew Wen-Chuan Lo und A. C. MacKinlay. “Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test”. In: *Review of Financial Studies* (1988).
- [8] Benoit Mandelbrot. “The variation of certain speculative prices”. In: *The Journal of Business* (1963).
- [9] Benoit Mandelbrot. “The variation of some other speculative prices”. In: *The Journal of Business* (1967).
- [10] Steven D. Moffitt. *The Strategic Analysis Of Financial Markets*. 2017.
- [11] John von Neumann und Oskar Morgenstern. “Theory of Games and Economic Behavior”. In: *Princeton University Press* (2004).

Abbildungsverzeichnis

3.1	Verlusttage des NASDAQ Composite Index	15
3.2	Hebeleffekt von S&P 500 Aktien	17
4.1	Versicherungsnehmer Entscheidungsbaum	23
4.2	Versicherungsunternehmen Entscheidungsbaum	24