SEMINARARBEIT

# Invarianztheorie

ausgeführt am

Institut für

Finanz- und Versicherungsmathematik

TU Wien

Unter der Einleitung von

**Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold**

durch


**Danylo Redko**

Matrikelnummer: **01611417**


Wien, am 28. Februar 2020

## Inhaltsverzeichnis

# 1. Einleitung

In Rahmen meiner Seminararbeit, habe ich versucht herauszufinden, wie man so ein Thema als Invarianztheorie bei der Lösung von mathematischen Probleme verwenden könnte. Dafür habe ich ein paar Sätze und Beispiele bewiesen bzw. gelöst mithilfe von Invariant. Einige Beispiele, die in Arbeit vorhanden sind, habe ich mir selbst ausgedacht.

Bei manchen Spielen sollte man an einfacher Strategie festhalten. Die Arbeit gibt auch einen Überblick, warum dieses Thema im Rahmen des Mathestudiums ein bisschen tiefer untersucht werden sollte.

Im zweiten Teil geht es darum, Invariante in Bezug auf Spieltheorie und/oder schwere mathematische Probleme die bei IMO (International Mathematical Olympiad) aufgetreten sind kennenzulernen und einige Kapitel zusammenzufassen. Konkret geht es darum Problemstellung zu analysieren, Strategien für die Lösung auszudenken und diese danach richtig zu verwenden.

Ich habe mir auch die Frage gestellt ob es möglich ist, mithilfe von theoretischen Kenntnissen eigene „Invariante“ auszudenken und die dann zu verwenden und letztendlich auch versucht habe zu zeigen, wie man Invariante in Topologie, angewandte Mathematik und Spieltheorie verwenden könnte.

# 2. Theoretischer Teil

Um die Invarianten näher zu erklären, möchte ich mit folgender Übung beginnen:

Nachstehend findet sich eine Tabelle mit 4x4 Zeichen. In jeder Zeile steht entweder ein„+“ oder ein „-“. Mit jedem Zug kann man alle Zeichen in einer Zeile oder auch in einer Spalte verändern.

<u>Frage:</u>

Kann man alle Zeichen gleich machen?

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | - | + | + |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |
| + | - | + | + |

**Lösung:**

*"In der Mathematik versteht man unter einer Invarianten eine zu einem Objekt assoziierte Größe, die sich bei einer jeweils passenden Klasse von Modifikationen des Objektes nicht ändert."* [1] In manchen Aufgaben konnte sich die Invariante sich einfach monoton verändern, also nur abnehmen oder zunehmen.

Zum Beispiel die Aufgaben des mathematischen Wettbewerbes bestehen normallerweise aus folgenden zwei Teilen: einerseits aus den Aufgaben, bei denen man bestimmte Invarianten nachweisen muss, anderseits wurden die Invarianten für die Lösung einer Probleme benutzt.

Sehen wir uns an dieser Stelle die Aufgabe ein wenig näher an: die erste Frage was man stellen sollte: Gibt es hier ein Invariant?

Sehen wir uns vorerst noch eine kleine Tabelle (2x2) an. Konkret geht es um den linken oberen Teil in der Tabelle 4x4 :

| | |
|---|---|
| + | - |
| + | + |

Am Anfang sind 1 „Minus“ und 3 „Plus“ zu sehen.

Nach jedem Zug, und zwar wenn man alle Zeichen in einer Zeile oder auch in einer Spalte verändert, sind zwei Varianten zu betrachten:

x - die Anzahl der Minus

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Invariante_(Mathematik) (Zugriff: 20.11.2019).

1. Variante:
Die Anzahl der Minus kann sich sowohl um zwei sich vergrößern wie auch verkleinern:

$$x_1 = x \pm 2$$

2. Variante:
Die Anzahl der Minus bleibt gleich:

$$x_2 = x$$

Dies bedeutet, dass laut der Paritätsregel (Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist immer ungerade). Die Anzahl von „Minus“ oder „Plus“ ungerade bleibt. Dies bedeutet, dass in dieser Tabelle nicht nur „Plus“ oder „Minus“ stehen können. In der gesamten Tabelle können daher nur beide und nicht entweder "+" oder "-" stehen.

## 2.1 Lemma 1

*„Ob die Summe von Zahlen gerade ist, hängt von der Anzahl der ungeraden Summanden ab. Wenn die Anzahl der Summanden eine gerade Zahl ergibt, dann ist die Summe auch eine gerade Zahl.“* [2]

Beispiel:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 10$ - Die Summe ist eine ungerade Zahl, weil es insgesamt 5 ungerade Summanden gibt.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ - Die Summe ist eine ungerade Zahl.

Aufgabe:

$x + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \cdots + 2^{2015}$ - Wenn die Summe daraus eine ungerade Zahl ergibt, dann stellt sich die Frage, ob x eine gerade oder ungerade Zahl sein muss?

Lösung:

Weil 2, $2^2$, $2^3$.... $2^{2015}$ gerade Zahlen sind und ob die Summe von Zahlen (gerade oder ungerade Zahl) ist, hängt von der Anzahl von ungeraden Summanden ab, muss x eine ungerade Zahl sein.

[2] http://festival.1september.ru/articles/568930/ (Zugriff: 20.11.2019)

### 2.2 Lemma 2

"*Das Vorzeichen eines Produkts P aus mehreren (außer 0) Zahlen a, $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ hängt davon ab, ob die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist.*

$$P = a \times a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots . \times a_n$$

Beispiel:

Die Zahl $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4)$ ist positiv, weil es 4 negative Faktoren gibt.

Die Zahl $(-1) \times (-2) \times 3 \times (-4)$ ist negativ, weil es 3 negative Faktoren gibt.

Aufgabe:

Ist Produkt

$$P = \prod_{n=2012}^{2020} (-n)$$

positiv oder negativ?

Lösung:

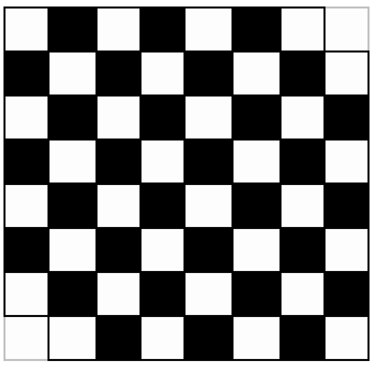
Insgesamt gibt es 9 negative Zahlen in diesem Beispiel, daher ist das Produkt laut dem Lemma 2 offensichtlich negativ.

# 3. Beispiele

Invarianten können sehr oft auch in Spieltheorie verwendet werden. Dies möchte ich zum Anlass nehmen, ein paar „Spiele“ zu zeigen, bei welchen mithilfe von Invarianten man eine geeignete bzw. richtige Strategie wählen könnte.

## 3.1 Schachspiele

**Beispiel 1:**



[3]

Gezeigt wird ein Schachbrett, wo Felder H1 und A8 ausgeschnitten sind.

Die Frage lautet: ist es möglich, dieses Blatt mit mehreren Dominosteinen abzudecken. (Ein Dominostein besteht aus zwei Zellen).

Das ganze Schachbrett hat $8 \times 8 = 64$ Felder. Ein Dominostein besteht aus zwei Zellen, das bedeutet, dass er ein weißes und ein schwarzes Feld abdecken könnte. Um das ganze Schachblatt abdecken zu können, braucht man die gleiche Anzahl von weißen und der schwarzen Felder.

$D_S$ – Anzahl von Dominosteine
S – Anzahl von schwarzen Felder
W – Anzahl von weißen Felder

$$D_s = S + W\ ;\ S = W$$

$S_{ins}$ - gesamte Anzahl der schwarzen Felder — $S_{ins} = 32$
$W_{ins}$ - die gesamte Anzahl der weißen Felder — $W_{ins} = 30$
$D_{ins}$ - die gesamte Anzahl der Dominosteine — $D_{ins} = W_{ins} + S_{ins};\ W_{ins} \neq S_{ins}$

Die Antwort lautet: nein! Es ist nicht möglich, das ganze Schachblatt mit den Dominosteinen abzudecken.

[3]http://festival.1september.ru/articles/566608/Image307.gif (Zugriff: 10.01.2020)

**Beispiel 2:**

Auf dem Schachbrett auf Feld A1 steht ein Springer. Die Frage lautet: Kann der Springer nach 2019 Zügen FeldH8 erreichen?

**Lösung:**

Als Invariante könnte man hier folgende Besonderheit betrachten: **nach jedem Zug, wechselt der Springer die Farbe der Zelle.**

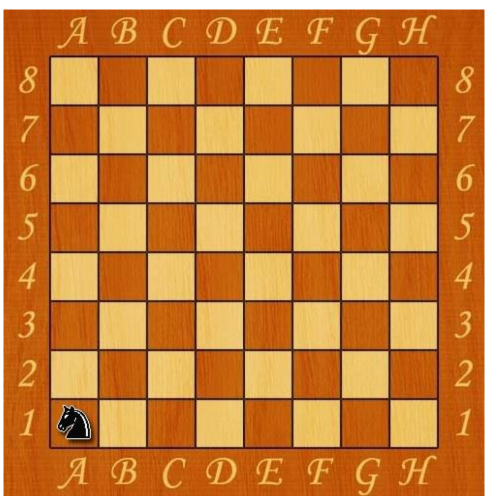
Position 0 - A1 ( Schwarzes Feld );
Zug 1 - B3 oder C2 ( Weiße Felder );
Zug 2 ( möglich ) - C1, A1, D2, C5, A5 ( alle sind schwarze Felder )

Das bedeutet, dass nach $2n + 1 (n \in N)$ Zügen der Springer auf einem weißen und nach $2n;\ n \in N$ Zügen auf einem schwarzen Feld stehen muss.

$$2015 = 2n + 1; n = 1007;\ n \in N$$

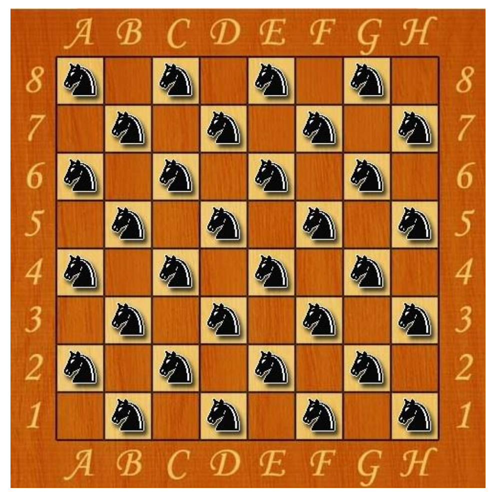
Feld A1 ist schwarz. Dies bedeutet, dass der Springer nur nach $2n;\ n \in N$ Züge H8 erreich kann.

$2015 = 2n\ \rightarrow n = 1007{,}5$ aber weil $n \in N$ sein muss, kann der Springer bei Runde 2015 Feld H8 nicht erreicht.



[4]

Zug 2019
(mögliche Position)



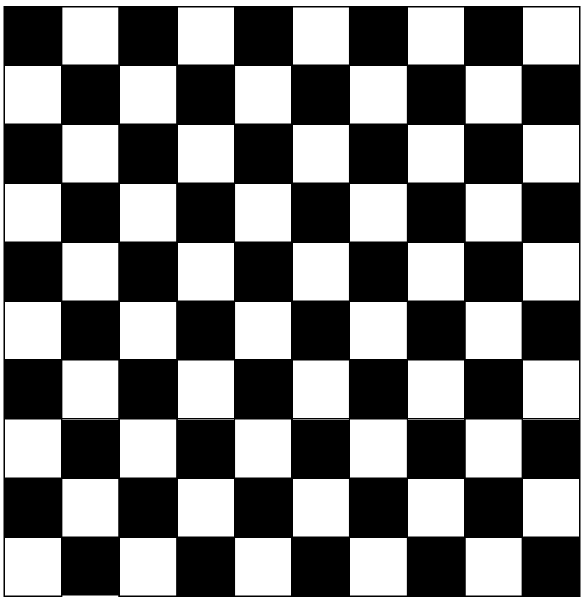

[4] http://playinchess.net/trenager/(Zugriff: 10.01.2020)

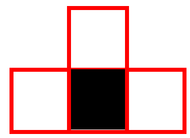
**Beispiel 3:**

Es gibt auch manche Aufgaben, wo ein Brett - zum Beispiel ein Schachbrett 8x8 oder einfach ein Brett 10x12 usw. - gezeigt wird. Die Aufgabe besteht nur darin mithilfe von irgendwelchen Figuren das ganze Brett "auszumalen", also abzudecken.  Meistens geht es hier um gerade oder ungerade Zahlen, allerdings jedoch nicht immer.

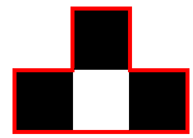
Gezeigt wird ein Brett 10x10 welches wie ein Schachbrett ausschaut.

Beweisen Sie, dass es nicht möglich ist mithilfe von der Figuren X und Y das ganze "Schachbrett" auszumalen bzw. abzudecken?





Figur X



Figur Y

**Beweis:**

Da es insgesamt 100 Felder gibt und das Brett wie ein Schachbrett aussieht, kann man gleich bemerken, dass es 50 weiße und 50 schwarze Felder gibt. Weil beide Figuren X und Y vier Felder haben, braucht man genau $\frac{100}{4} = 25$ Figuren damit das ganze Brett abgedeckt werden kann.

Eine Figur X oder Y besteht entweder aus einem schwarzen Feld oder drei schwarzen Feldern. Weil es insgesamt 25 Figuren gibt, und jede Figur aus der ungeraden Anzahl von schwarzen Felder besteht ist die Summe laut Lemma 1 von 25 ungeraden Summanden eine ungerade Zahl.

Es muss ungerade Zahl von schwarzen Felder sein.  In unserem Beispiel haben wir jedoch 50 schwarzen Felder, weshalb dies nicht möglich ist das ganze „Schachbrett“ mithilfe von Figuren X und Y abzudecken.

## 3.2 Gerade und ungerade Zahlen

**Beispiel 1:**

Sei n eine ungerade natürliche Zahl. An der Tafel wird geschrieben eine Reihenfolge von Zahlen:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 2n$$

Man darf zwei beliebige Zahlen a und b aus dieser Reihenfolge wegstreichen und stattdessen sie durch die Differenz a – b ersetzen. Man macht die Transformation von dieser Reihenfolge weiter, bis es nur noch eine Zahl an der Tafel steht.

Beweisen Sie, dass diese Zahl ungerade ist.

**Lösung**:

Man sieht da ein typisches „invariant“ Beispiel. Was man einfach betrachten sollte wie genau sich die Reihenfolge bzw. die Summe aller Reihenfolgemitglieder $S_0$.

$$S_0 = \sum_{x=1}^{2n} x = n(2n+1)$$

Da wir nach der Voraussetzung annehmen sollten, dass n eine ungerade Zahl ist, ist die ganze Summe am Anfang eine ungerade Zahl. In jedem Schritt ändert sich S um

$$- a - b + (a - b) = -2b$$

also um eine gerade Zahl. Somit bleibt die Ungeradzahligkeit von S immer erhalten. Dies ist genau unsere „Invariant“ und somit ist die letzte Zahl ungerade.

**Beispiel 2:**

Auf dem Tisch stehen 16 Gläser. 15 davon stehen normal und 1 steht umgedreht – also auf dem Kopf. Man dreht 4 beliebige Gläser gleichzeitig um.

Ist es möglich, alle Gläser normal hinzustellen?

**Lösung:**

Als Invariante kommt hier in Betracht, dass wenn man 4 Gläser umdreht, die Anzahl der Gläser, die normal und umgedreht stehen, ungerade bleibt.

Wir können 5 verschiedene Variante betrachten:

x - die Anzahl der "normalen" Gläser - die, die normal stehen

y - die Anzahl der umgedrehten Gläser

$$x \geq 0;\ y \geq 0; \quad x\ = 2n - 1;\ n \in N, n \leq 8\ ; \quad y\ = 2m - 1; m \in N, m \leq 8$$

$$x_1 = x - 3 + 1;\ y_1 = y\ + 3 - 1:$$

man dreht 3 normale Gläser und 1 umgedrehtes Glas um.

$$x_2 = x - 1 + 3;\ y_2 = y\ - 3 + 1:$$

man dreht 1 normales Glas und 3 umgedrehte Gläser um.

$$x_3 = x - 2 + 2;\ y_3 = y\ + 2 - 2:$$

man dreht 2 normale und 2 umgedrehte Gläser um.

$$x_4 = x - 4;\ y_4 = y\ + 4:$$

man dreht 4 normale Gläser um.

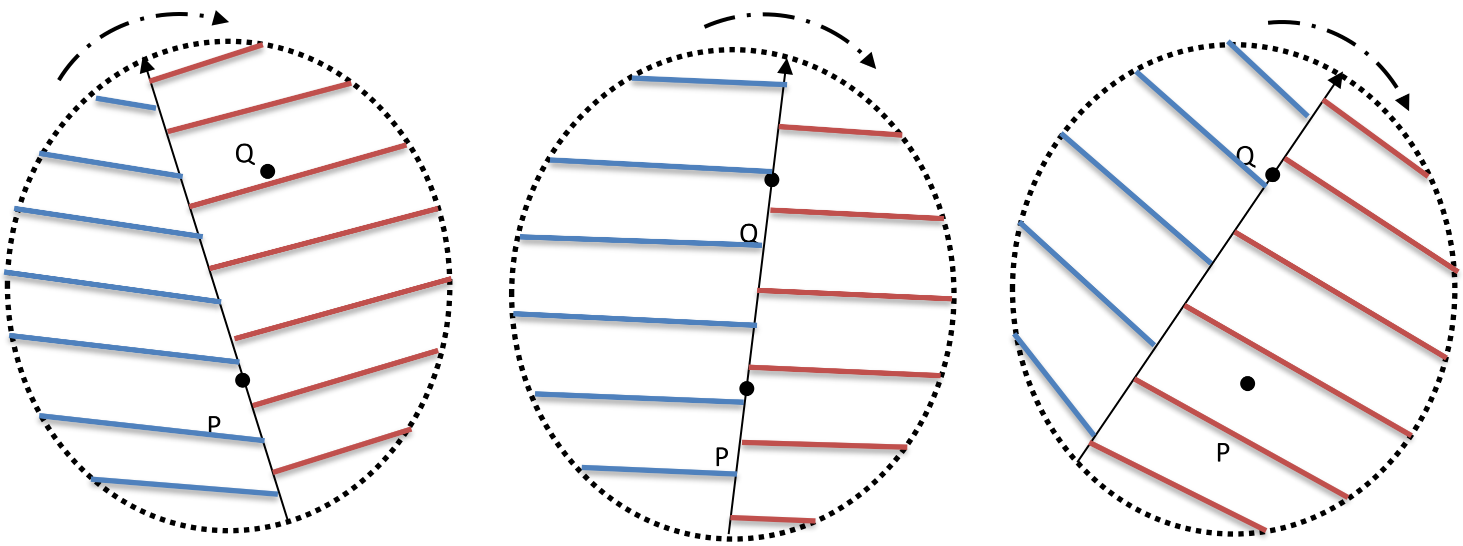
$$x_5 = x + 4;\ y_5 = y\ - 4:$$

man dreht 4 umgedrehte Gläser um.

Man kann erkennen, dass die Anzahl der Gläser, die normal stehen sich nur auf zwei oder vier vergrößern oder verkleinern kann. Da am Anfang die Anzahl der normalen Gläser ungerade war, bleibt die Anzahl immer ungerade. Damit alle Gläser normal stehen, muss die Anzahl der normalen Gläser gerade sein, nämlich 16. Dies bedeutet, dass es nicht möglich ist, alle Gläser normal hinzustellen, zumal 16 eine gerade Zahl ist.

### 3.3 Invariant bei IMO (International Mathematic Olympiad) Beispiel

*"Let S be a finite set of at least two points in the plane. Assume that no three points of S are collinear. By a windmill we mean a process as follows. Start with a line $\ell$ going through a point $P \in S$. Rotate $\ell$ clockwise around the pivot P until the line contains another point Q of S. The point Q now takes over as the new pivot. This process continues indefinitely, with the pivot always being a point from S. Show that for a suitable $P \in S$ and a suitable starting line $\ell$ containing P, the resulting windmill will visit each point of S as a pivot infinitely often."*




**Lösung:**

Zuerst geben wir unsere Linie $\ell$ eine Ausrichtung. Jetzt nun kann man zwischen eine blaue und rote Seite unterscheiden. Was man betrachten sollte ist, dass wenn unsere Linie $\ell$ einen Punkt (in dem Fall Q) berührt, landet Punkt P dort, wo vorher Punkt Q war (bzw. auf rote Seite). Dies Bedeutet allerdings, dass die Anzahl von Punkten auf blaue und rote Seite immer gleich bleibt (ausgenommen wenn die Linie $\ell$ genau zwei Punkte berührt).

Jetzt sind nun 2 Fälle zu unterscheiden:

a) Wo die Anzahl von Punkten auf die Ebene S eine ungerade Zahl ist d.h. $|S| = 2n + 1;\ n \in N$
b) Wo die Anzahl von Punkten auf die Ebene S eine gerade Zahl ist d.h. $|S| = 2n;\ n \in N$

**a)** Man wählt so eine Linie $\ell$, dass die Linie unsere Ebene S in zwei „gleiche Bereiche" aufteilt. Gleiche Teile heißt in dem Fall, dass die Anzahl von Punkten auf blaue Seite genau gleich ist wie die Anzahl von Punkten auf rote Seite. Und Punkt der immer auf die Linie $\ell$ bleibt, liegt auf keine Seite.

Jetzt nun sollte man beweisen, dass die Linie auch alle Punkte unendlich viel Mal berührt. Dazu schauen wir was passiert, wenn die Linie 180 Grad Drehung macht. Weil wie vorher gesagt wurde, bleibt die Anzahl von Punkten auf rote und blaue Seite immer gleich. Dies heißt, dass nach 180 Grad Drehung muss die Linie auf die selbe Position kommen wo sie am Anfang war (allerdings wäre die Anzahl von Punkten ungleich, was nicht möglich ist). Und damit haben alle Punkte auch die „Seite" gewechselt. Letztendlich können die Punkte die Seite ändern dann und nur dann wenn die Linie durch diesen Punkt berührt. Das heißt die Linie hat alle Punkte berührt nach 180 Grad Drehung und weil diesen Prozess unendlich läuft, berührt auch die Linie alle Punkte unendlich viel Mal.

**b)** Jetzt betrachtet man den zweiten Fall wo $|S| = 2n;\ n \in N$. Der Beweis schaut ähnlich aus wie bei **a).** Man wählt die Linie $\ell$ so, dass die Anzahl von Punkten auf blaue Seite $= n$ und auf rote Seite $= n - 1$ Es bleibt uns ein Punkt übrig, der genau auf unsere Linie liegt.

Jetzt genau wie vorher sollte man wieder beweisen, dass die Linie alle Punkte unendlich viel Mal berühren wird. Dazu betrachtet man die 360 Grad Drehung. Nach 180 Grad Drehung geht die Linie nicht mehr durch den Anfangspunkt, weil die Anzahl von Punkten auf zwei Seiten am Anfang nicht gleich war. Allerdings nach 360 Grad Drehung muss die Linie wieder auf Anfangsposition stehen. Und weil alle Punkte haben die Farbe zweimal verändert, muss die Linie alle Punkte berühren.

Somit beweist man, dass wenn dieser Prozess unendlich geht, und man passend die Linie $\ell$ auswählt, berührt die Linie alle Punkte unendlich viel mal.

# 4. Spieltheorie

*"Der Begriff der Spieltheorie beruht darauf, dass am Anfang der mathematischen Spieltheorie Gesellschaftsspielen wie zum Beispiel: Schach, Mühle, Dame etc. große Aufmerksamkeit geschenkt wurde."* [5]

Die mathematischen Spielen in Bezug auf Spieltheorie und Invariant könnte man als Entscheidungssituation beschreiben, woran sich zwei oder mehrere Spieler beteiligen und die Spieler die Beschlüsse fassen können.

*"In welcher Weise sich strategische Spiele prinzipiell von zufälligen und kombinatorischen Spielen unterscheiden, davon handeln die Grundlagen der Spieltheorie. Am Beginn steht eine mathematisch formale Definition eines Spiels. Charakterisiert wird ein Spiel durch seine Regeln, und diese umfassen die folgenden Angaben:*

- *Die Anzahl der Mitspieler.*
- *Wer am Zug ist,*
- *Welche Zugmöglichkeiten für den betreffenden Spieler bestehen und*
- *Auf Basis welcher Informationen er seine Entscheidung zu treffen hat.*
- *Bei Zufallszügen, wie wahrscheinlich die möglichen Ergebnisse sind."* [6]

## 4.1 Welcher Zug ist beim Schachspiel der beste?

Diese Frage unterscheidet sich eindeutig von den bisher gestellten. Die insofern, zumal Schachspiele kombinatorisch sind, das heißt, es gibt viele Schwierigkeiten, die weitere Entwicklung eines Spiels abzuschätzen, was einzig aus der Vielfalt möglicher Zugfolgen resultiert; verdeckte Spielelemente oder Zufälle sind nicht vorhanden.

*"Gut ist ein Zug für uns dann, wenn er letztlich zum gewünschten Ergebnis, also zum eigenen Sieg oder – bei geringeren Ansprüchen – zu einem Remis führt. Solche nachträglichen Kriterien sind für einen Spieler aber wenig hilfreich. Er benötigt vielmehr Kriterien, mit denen er a priori Züge objektiv und absolut, also ohne Bezug auf das weitere Spiel des Gegners, bewerten kann."* [7]

---

[5] https://de.wikipedia.org/wiki/Spieltheorie Zugriff (11.01.2020)
[6] http://www.galois-theorie.de/pdf/Glueck%20Logik%20und%20Bluff%20Mathematik%20im%20Spiel.pdf (Zugriff: 11.01.2020)
[7] Bewersdorf, Jörg(2012): Zu: Glück, Logik und Bluff Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen, Springer Spektrum, Heidelberg 6. Auflage, Seite 95

Es besteht zwischen manchen Zügen und denen des Gegners ein wesentlicher Unterschied: Bei den gegnerischen Zügen muss man immer mit dem Schlimmsten rechnen, also auch mit dem Zug, der für einem am ungünstigsten erscheint. Insbesondere stellt jeder übersehene Zug des Gegners eine Gefahr dar, denn gerade er könnte die eigene Stellung in Gefahr bringen.

*"Beim Schach scheint dies möglich, nicht hingegen bei Spielen wie Roulette oder „Papier-Stein-Schere". Bei ihnen kann nämlich kein Zug als absolut gut oderschlecht charakterisiert werden; alles hängt vom weiteren Geschehen ab. Gute Spieler, die fast immer gewinnen, gibt es bei diesen Spielen daher nicht. Dagegen lässt ein guter Schachspieler einem ihm unterlegenen praktisch keine Chance."* [8]

## 4.2 Manchmal gibt es nur einen Gewinnzug - symmetrische Münzspiele

**Beispiel 1:**

Zwei Spieler nehmen abwechselnd eine Münze von einer Reihe, die zu Beginn elf Münzen hat. Pro Zug darf man eine oder zwei nebenliegende Münzen nehmen. Gewonnen hat jener Spieler, der die letzte Münze genommen hat.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Die Gewinnstrategie hat wie im Beispiel oben bei den Münzenspielen oft mit symmetrische Invariant zu tun.

Insgesamt gibt es elf Münzen, was bedeutet, dass es eine Münze gibt, die genau in der Mitte liegt (Nummer 6). Alle Münzen, die hier in der Reihe liegen, sind symmetrisch zueinander, außer die mittlere Münze (Nummer 6). Das heißt, wenn der erste Spieler die mittlere Münze nimmt, gewinnt er, weil er dann alle Zuge symmetrisch zu seinem Gegner machen kann.

Diese Gewinnstrategie gilt jedoch nur für den ersten Spieler. Wenn der erste Spieler irgendeine Münze nimmt, welche nicht in der Mitte liegt, und der Gegner die mittlere nimmt, gibt es trotzdem die Möglichkeit, dass der zweite Spieler verliert.

[8] Bewersdorf, Jörg(2012): Zu: Glück, Logik und Bluff Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen, Springer Spektrum, Heidelberg 6. Auflage, Seite 95

**Gewinnstrategie für den ersten Spieler. Ein Beispiel:**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Position 0** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1. Zug 1.Spieler : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | (6) | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 2. Zug 2. Spieler | 1 | (2) | (3) | 4 | 5 | (6) | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3. Zug 1.Spieler | 1 | (2) | (3) | 4 | 5 | (6) | 7 | 8 | (9) | (10) | 11 |

Symmetrisch

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4. Zug 2.Spieler | 1 | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | 7 | 8 | (9) | (10) | 11 |
| 5. Zug 1.Spieler | 1 | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | 11 |

Symmetrisch

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6. Zug 2.Spieler | 1 | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) |

7. Zug 1.Spieler(Gewinnzug) - Er nimmt die letzte Münze

**Beispiel 2:**

Zwei Spieler nehmen abwechselnd eine Münze von zwei Haufen, die zu Beginn 100 und 200 Münzen haben. Pro Zug darf man eine beliebige Zahl von Münzen, aber nur von einem Haufen nehmen. Verloren hat jener Spieler, der keine Münze nehmen kann.

Im letzten Beispiel geht es um Symmetrie, aber jetzt nicht in der Reihe, sondern mit 2 Haufen. Der erste Spieler sollte vom zweiten Haufen 100 Münzen nehmen, damit die Anzahl der Münzen in den beiden Haufen gleich hoch wird. Daher muss der erste Spieler einfach die gleiche Anzahl von Münzen nehmen, allerdings von einem anderen Haufen (symmetrisch sozusagen).

Die Frage lautet, wie unterscheiden sich die zwei Spiele sich untereinander? Es geht um Symmetrie und die Voraussetzung fast die gleiche.

Im vorigen Beispiel war die Gewinnstrategie nur für den erste Spieler gültig, hier ist allerdings alles umgekehrt. Wenn der erste Spieler eine bestimmte Anzahl von Münzen nimmt(außer 100), kann der zweiter Spieler so viele Münze nehmen, bis die Anzahl der Münzen in 2 Haufen gleich hoch wurde. Danach gewinnt der zweite Spieler, insofern er richtig spielt.

**Beispiel 3:**

*"Zwei Mathematiker spielen das folgende Spiel: Gezogen wird abwechselnd, wobei sich eine Partie stets über fünf Züge erstreckt. Für jeden Zug denkt sich der betreffende Spieler eine beliebige, nicht negative, ganze Zahl aus und gibt sie seinem Gegner bekannt. Nach fünf Zügen mit den dabei ausgewählten Zahlen x1, x2, x3, x4, x5 gewinnt der erste Spieler genau dann, wenn:*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - x_3x_5 - 2x_3 - 2x_5 - x_4^2 - 3 = 0$$

*ist. Welcher Spieler besitzt eine Gewinnstrategie?"*[9]

**Lösung:**

Zuerst sollte man diese Formel ein bisschen umformulieren, damit man mit ihr besser weiter arbeiten kann:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3x_5 - 2x_3 - 2x_5 - 3 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = x_3x_5 + 2x_3 + 2x_5 + 3$$

$$(x_1 + x_2)^2 + 1 = x_3x_5 + 2x_3 + 2x_5 + 4$$

$$(x_1 + x_2)^2 + 1 = (x_3 + 2) \times (x_5 + 2)$$

Wie man hier sieht, spielt die Zahl $x_4$ überhaupt keine Rolle, was bedeutet, der zweite Zug vom zweitem Spieler ist einfach sinnlos. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, dass er gewinnen könnte.

Schauen wir uns die 2. Formel ein wenig genauer an:

$$(x_3 + 2) \times (x_5 + 2)$$

Die Frage wäre ob es eine Eigenschaft gibt, die immer bei dieser Formel gleich bleibt. Wenn man die Multiplikation von zwei ganzen Zahlen ansieht, besteht keine Möglichkeit, dass diese Multiplikation eine Primzahl zurückgibt. Dies heißt, dass die Rechte Seite von dieser Gleichung kann nie eine Primzahl sein.

Allerdings, der zweite Spieler kann immer so die Zahl $x_2$ auszudenken, nachdem der erste Spieler $x_1$ schon gesagt hat, dass die Formel $(x_1 + x_2)^2 + 1$ eine Primzahl ist.

[9] Bewersdorf, Jörg(2012): Zu: Glück, Logik und Bluff Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen, Springer Spektrum, Heidelberg 6. Auflage, Seite 198

Einige Beispiele für das Spiel:

*Variante 1:*
1. Zug 1. Spieler: $x_1 = 36$

2.Zug 2. Spieler : $x_2 = 18$, weil $(36 + 18)^2 + 1 = 54^2 + 1 = 2917$ - Primär Zahl

Erster Spieler kann nicht mehr gewinnen, weil $(x_3 + 2) \times (x_5 + 2)$ - konnte nicht 2917, also Primzahl sein

*Variante 2:*

1. Zug 1. Spieler: $x_1 = 112$

2.Zug 2. Spieler : $x_2 = 4$, weil $(112 + 4)^2 + 1 = 116^2 + 1 = 13457$ - Primär Zahl

Erster Spieler kann nicht mehr gewinnen, weil $(x_3 + 2) \times (x_5 + 2)$ - konnte nicht 13467, also Primzahl sein

*Variante 3:*

1. Zug 1. Spieler: $x_1 = 1500$

2.Zug 2. Spieler : $x_2 = 24$, weil $(1500 + 24)^2 + 1 = 1524^2 + 1 = 2322577$ - Primzahl

Erster Spieler kann nicht mehr gewinnen, weil $(x_3 + 2) \times (x_5 + 2)$ - konnte nicht 2322577, also Primzahl sein

Wie man in diesem Beispiel sieht, die Gewinnstrategie ist nicht immer für den ersten Spieler geeignet. In diesem Fall gibt Invariant die Möglichkeit, eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler zu finden.

# 5. Invariante Differentialausdrücke:

Der Differentialausdruck, welcher den Krümmungsradius irgendeiner Kurve Im Punkt (X, Y, Z) angibt, hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass, wenn man in ihm setzt

$$dX = \omega.dx\,,\ dY = \omega.dy\,, dZ = \omega.dz\,,$$

Folglich

$$d^2X = \omega.d^2x + d\omega.dx, \qquad d^2Y = \omega.d^2y + d\omega.dy, \qquad d^2Z = \omega.d^2z + d\omega.dz$$

man denselben Ausdruck in $dx$, $dy$, $dz, d^2x$, $d^2y$, $d^2z$ mit dem beliebigen Faktor $\omega$ multipliziert erhält.

Diese Eigenschaft bewirkt, dass die Auflösung der Gleichung

$$(1.)\ \frac{(dX^2+dY^2+dZ^2)^{3/2}}{[(dXd^2Y-dYd^2X)^2+(dYd^2Z-dZd^2Y)^2+(dZd^2X-dXd^2Z)^2]^{1/2}} = \mu$$

Wodurch alle Kurven definiert werden, welche einen konstanten Krümmungsradius $\mu$ haben, höchst einfach ist; denn setzt man wie oben

$$(2.) dX = \omega.dx\,,\ dY = \omega.dy\,, dZ = \omega.dz\,, \text{u.s.w.}$$

So erhält man die Gleichung

$$\frac{\omega(dx^2+dy^2+dz^2)^{3/2}}{[(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2]^{1/2}} = \mu$$

Oder

$$\omega.q = \mu$$

Wenn man mit q den Krümmungsradius der Kurve x, y, z bezeichnet. Aus dieser Gleichung kommt nun

$$\omega = \frac{\mu}{q}$$

Und wenn man diesen Wert von $\omega$ in die Gleichungen (2.) einsetzt, so erhalt man folgende Werte der Koordinaten X, Y, Z der gesuchten Kurven:

$$X = \mu\int\frac{dx}{q}, \qquad Y = \mu\int\frac{dy}{q}, \qquad Z = \mu\int\frac{dz}{q}$$

In diesen Formeln bedeuten x, y, z der beliebigen Formeln einer Veränderlichen, d.h. die Koordinaten einer beliebig auswählten Kurve, und q den Krümmungsradius derselben.

Hierdurch hat Hazzidakis, J.N. versucht zu untersuchen, ob es noch andere Differentialausdrücke gibt, welche die oben erwähnten Eigenschaften haben, und die Resultate seiner Untersuchung waren im wesentlich folgende:

1. Es gibt unendlich viele Differentialausdrucke, welche invariant in Bezug auf die Substitution $dX = \omega . dx$ , $dY = \omega . dy$ , $dZ = \omega . dz$ sind. Das heißt durch die selbe Substitution keine andere Änderung passiert, als dass sie eine Potenz von $\omega$ als Faktor erhalten
2. In jeder Differentialordnung $n$ $(n > 1)$ gibt es zwei voneinander unabhängige elementare Invarianten $Q_n R_n$, welche in Bezug auf alle Ableitungen, die sie erhalten, homogen und vom Grade n sind und die Ableitungen $X_n$ , $Y_n$ , $Z_n$ (der Ordnung n) nur im ersten Grade enthalten. Die elementaren Invarianten erster Ordnung sind drei Abbildungen $X_1$ , $Y_1$ , $Z_1$
3. Jede Invariante der Ordnung n ist eine homogene Funktion der elementaren Invarianten
   $$X_1\, Y_1\, Z_1, \quad Q_2 R_2, \quad Q_3 R_3, \quad Q_4 R_4, \dots \dots \dots Q_n R_n$$
   Wenn die Ordnung jeder dieser Invarianten als Grad derselben gerechnet wird. Und umgekehrt, jede solche Funktion der elementaren Invarianten ist ebenfalls eine Invariante

# 6. Zusammenfassung und Ausblick

In gegenständlicher Seminararbeit wurde der Versuch unternommen, anhand von diversen mathematischen Beispielen die eine oder andere unterhaltsame Aufgabe zu lösen bzw. eigene Lösungen anzubieten.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass ich persönlich eindeutig davon überzeugt bin, dass meine Arbeit einen Überblick darüber bietet, welche Ergebnisse man unter Zuhilfenahme von Mathematik und Invarianten erzielen kann.

Konkret wurde dies durch Beispiele wie IMO Beispiel bzw. jene mit geraden und ungeraden Zahlen plakativ demonstriert.

Im zweiten Teil meiner Arbeit habe ich versucht, für die Leser ein interessantes Thema als Invarianten bei Spieltheorie zu präsentieren.

Dabei stellte sich heraus, dass in Form von theoretischen Kenntnissen man viele verschiedene Beispiele und Aufgaben lösen kann.

Auch ist es möglich, sich mithilfe von Mathematik, Logik und Invarianztheorie manche Gewinnstrategie auszudenken und diese danach für einige Spiele zu verwenden.

Was mich persönlich sehr überrascht hat, war die Tatsache herauszufinden, dass sogar die Möglichkeit besteht, nicht nur die Gewinnstrategie im Rahmen von mathematischen Spielen (wie z.B. beim Schachspiel oder beim "Mathematische-Gleichungen-Spiel“) einzusetzen, sondern dass diese auch in weltweit bekannten Olympiade verwendet werden könnte

Mit dem Verfassen dieser Arbeit war in erster Linie das Ziel verbunden, bei den LeserInnen ein Interesse für Invarianten zu wecken.

Das Schwierigste in meiner Arbeit war es, viel theoretische Information zu finden, zumal mein Thema sehr viel mit der Mathematik zu tun hat, was zwangsläufig auch bedeutet, dass es in diesem Bereich nicht sehr viele Statistiken bzw. Literatur darüber gibt. Da das Thema Invariant in Österreich nicht populär ist, habe ich auch manche Sachen aus russischen Web-Seiten und Büchern übernommen. Über die Spieltheorie fand ich jedoch relativ viel an interessanten Informationen.

An dieser Stelle möchte ich ergänzend darauf hinweisen, dass es noch genügend weitere(zusätzliche) Spiele(z.B. Kartespiele wie Poker, Black Jack usw.) bzw. auch Casinospiele (wie z.B. Roulette oder Würfelspiele) gäbe, welche man etwa in einer eigenen Untersuchung analysieren hätte können.

Weiters habe ich im Rahmen meiner Arbeit auch einige Fragen gestellt, nämlich wie man sich bei der einen oder anderen Aufgabe am besten mathematisch verhalten könnte.

Zwar habe ich persönlich auch die nötigen Antworten auf diese offenen Fragen geliefert und meine Meinung dazu geäußert, trotzdem bleibt offen, ob sich nicht doch vielleicht noch bessere Möglichkeiten von Gewinnstrategien bieten würden bzw. man sich derartige zusätzlich ausdenken könnte.

Zu guter Letzt hoffe ich, dass ich im Rahmen meiner Arbeit einige neue Aspekte präsentieren und in Folge bei den LeserInnen das nötige Interesse am Thema Invarianztheorie wecken konnte.

# 7. Literaturverzeichnis


https://de.wikipedia.org/wiki/Invariante_(Mathematik)
https://de.wikipedia.org/wiki/Spieltheorie
http://www.galois-theorie.de/pdf/Glueck%20Logik%20und%20Bluff%20Mathematik%20im%20Spiel.pdf
http://festival.1september.ru/articles/566608/
http://festival.1september.ru/articles/568930/
http://www.math.ch/TMU2012/invarianten.pdf
http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour=books.mk1.igry.simm&solution=1

Behrends, Ehrhard(2013). "Fünf Minuten Mathematik“, Wiesbaden, Springer Spektrum Verlag.

Bewersdorff, Jörg (2012). "Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen", Wiesbaden, Springer Spektrum Verlag.

Genkin A., Fomin V. (1994). "Mathematik Olympiade. 2. Teil – Invarianten“, Kirov.

Grinberg, Natalia (2008)."Mathematik für Nachdenker", Frankfurt am Main, Verlag GmbH

Ebbinghaus, Heinz-Dieter (1992). "Zahlen", Berlin, Springer Verlag.

Hazzidakis, J.N.(1889). “ Journal für die reine und angewandte Mathematik“, Berlin, de Gruyter

Könneker, Carsten(2012). "Mathematische Unterhaltungen.Mathematische Spiele und Strategien", 5. Auflage, Heidelberg, Spektrum-der-Wiss.-Verl.