



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

S E M I N A R A R B E I T

# Black was right: Price is within a factor 2 of value

ausgeführt am

Institut für  
Finanz- und Versicherungsmathematik  
TU Wien

unter der Anleitung von

**Dr. Stefan Gerhold**

durch

**David Prikasky**

Matrikelnummer: 11707247

Wien, am 28. Februar 2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Effiziente Märkte</b>	<b>2</b>
2.1	Was ist ein effizienter Markt? . . . . .	2
2.2	Bedingungen für effiziente Märkte . . . . .	2
2.3	Modelle von effizienten Märkten . . . . .	3
2.4	Ergebnisse der empirischen Tests der Markteffizienzhypothese . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Daten</b>	<b>7</b>
3.1	Währungen . . . . .	7
3.2	Staatsanleihen . . . . .	8
3.3	Indizes und Waren . . . . .	9
3.4	Vergleich des Spotkurses mit dem Kurs der Futures . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Vorhersagbarkeit über verschiedene Zeithorizonte</b>	<b>11</b>
4.1	Blacks Intuition . . . . .	11
4.2	Ornstein-Uhlenbeck Prozesse . . . . .	11
4.3	Das Modell . . . . .	12
4.4	Aufbereitung der Daten für Vergleich mit Modell . . . . .	13
4.5	Vergleich der Daten mit dem Modell . . . . .	15
4.5.1	Nichtlineare Effekte . . . . .	16
4.5.2	Factor 2 of value? . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Schlussfolgerungen</b>	<b>19</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>20</b>

# 1 Einleitung

„There is no other proposition in economics which has more solid empirical evidence supporting it than the Efficient Market Hypothesis.“

Dieses berühmte Zitat wurde von M. Jensen in seinem Werk „Some Anomalous Evidence Regarding Market Efficiency“ [4] niedergeschrieben. Und obwohl es, wie in Kapitel 2 dargelegt wird, tatsächlich eine enorme Menge an empirischen Daten gibt, die die Richtigkeit Markteffizienzhypothese nahelegen, gibt es auch eine große Anzahl an ihr scheinbar widersprechender Anomalien, wie beispielsweise das Phänomen der Trends.

Diese Anomalie, ist dabei besonders spannend, da, wie in der Arbeit [5] nachzulesen ist, trendfolgende Strategien, verkaufen wenn Preise fallen und kaufen, wenn sie steigen, zu den wichtigsten Strategien des Finanzmarktes gehören. Insgesamt 16% aller Assets, die von Hedgefonds gemanaget werden, mit einem gemeinsamen Wert von über 325 Milliarden US-Dollar, werden mit Hilfe solcher Strategien angelegt. Diese gigantischen Zahlen legen natürlich nahe, dass diese Anomalie keineswegs irrelevant ist, noch dazu, wo sie für so viele verschiedene Finanzinstrumente, wie Anleihen, Währungen oder Waren mit großem Langzeiterfolg angewendet wird.

Selbst das Nobelpreiskomitee hat 2013 entschieden, keine Seiten zu wählen und hat den Alfred-Nobel Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften, sowohl an E. Fama, dessen Werk [3] die Grundlage des zweiten Kapitels dieser Seminararbeit werden wird, als auch an L. Hansen und R. Shiller, einem Kritiker der Markteffizienz (siehe [5], Seite 1).

Ein Gegenmodell zu Markteffizienz ist dabei das Modell der Mittelwertrückkehr, welches das Schwanken des Preises um einen „fundamentalen“ Preis, oder Wert, postuliert.

In diesem Zusammenhang wurde von Bouchaud et al. in der Arbeit „Black was right: Price is within a factor 2 of value“ [2], in dem an einer gigantischen Datenmenge die Korrektheit von F. Blacks in „Noise“ [1] getätigter, rein intuitive Annahme, dass der Preis zwischen der Hälfte und dem doppelten des Wertes schwankt überprüft wird.

Dieses Paper soll dabei im Weiteren die Grundlage dieser Seminararbeit sein. Außerdem soll im zweiten Kapitel näher erleutert werden, was genau mit Markteffizienz eigentlich gemeint ist, während im dritten Kapitel die Datenmenge, die in [2] verwendet wird, näher betrachtet wird.

## 2 Effiziente Märkte

Dieses Kapitel soll einen Überblick über die Markteffizienzhypothese, die die Existenz effizienter Märkte postuliert und die sie unterstützenden empirischen Belege geben. Dabei wird sich dieses Kapitel vor allem an den ersten beiden, sowie dem letzten Kapitel des Artikels „Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work“ [3] von Eugene F. Fama, welcher im Magazin „The Journal of Finance“ 1970 veröffentlicht wurde, orientieren .

### 2.1 Was ist ein effizienter Markt?

Bevor die Frage nach einem effizienten Markt beantwortet werden kann, muss man zuerst in Erinnerung rufen, was genau ein Markt ist. Ein Markt ist dabei der Ort des Zusammentreffens von Angebot und Nachfrage verschiedenster Güter, wodurch sich ein Marktpreis bildet. Diese Preise wiederum stellen Signale zur Ressourcenallokation zu Verfügung. Der „perfekte“ Markt wäre also ein Markt, in dem alle Preise zu jeder Zeit bereits alle verfügbaren Informationen vollständig enthalten und gibt somit sowohl Produzenten, als auch Konsumenten damit zu jeder Zeit einen Einblick in den „Wert“ der jeweiligen Güter. Ein solcher, Markt, in dem bereits alle vorhandenen Informationen eingepreist sind, wird „effizienter Markt“ genannt.

Dabei unterscheidet man drei verschiedene Arten von effizienten Märkten, die schwachen effizienten Märkte, die mittelstarken effizienten Märkte und die starken effizienten Märkte. In schwachen effizienten Märkten sind nur alle Informationen über die vergangene Marktentwicklung bereits vollständig eingepreist, in mittelstarken effizienten Märkten dagegen sind alle öffentlich verfügbaren Informationen schon in den Preisen enthalten. Öffentlich verfügbare Informationen wären dabei beispielsweise Aktiensplits, die Bekanntgabe des Jahresgewinns oder die Identität des Geschäftsführers. Ein starker effizienter Markt, wäre ein Markt in dem auch Insiderinformationen bereits eingepreist sind.

### 2.2 Bedingungen für effiziente Märkte

In diesem kurzen Unterkapitel wollen wir uns der Frage nach hinreichenden und notwendigen Bedingungen für effiziente Kapitalmärkte widmen.

Ein Markt ohne Transaktionskosten, in dem alle Marktteilnehmer kostenlos Zugang zu allen vorhandenen Informationen haben und sich darüber hinaus einig sind, welchen Einfluss die momentanen Informationen auf die momentanen und zukünftigen

Preise haben werden ist eindeutig effizient. Die Preise spiegeln alle verfügbaren Informationen vollständig wieder. Da jedoch ein solcher Markt natürlich kein Beispiel für einen real existierenden Markt ist muss man sich überlegen, ob diese Bedingungen tatsächlich notwendig oder hinreichend für die Existenz eines effizienten Marktes sind.

Hohe Transaktionskosten implizieren beispielsweise, keineswegs, dass bei durchgeführten Transaktionen die Preise nicht alle verfügbaren Informationen vollständig widerspiegeln. Ebenso muss eine Uneinigkeit zwischen den Marktteilnehmern, bezüglich der Verwertung der erhaltenen Informationen nicht unbedingt auf einen ineffizienten Markt hinweisen, es sei denn einer der Marktteilnehmer kann die verfügbaren Informationen dauerhaft besser auswerten, als seine Konkurrenten. Es müssen auch nicht alle Teilnehmer Zugriff auf alle Informationen haben. Damit die Preise akkurat die verfügbaren Informationen wiedergeben, ist eine genügend große Anzahl von informierten Marktteilnehmern ausreichend.

Transaktionskosten, nicht verfügbare Information und unterschiedliche Interpretationen der Daten sind allesamt in realen Märkten zu einem gewissen Grad vorhanden und auch wenn sie nicht notwendigerweise Ineffizienz implizieren, so können sie zur Ineffizienz eines Marktes beitragen. Eines der Hauptziele der empirischen Forschung in diesem Feld ist also, die Auswirkungen dieser drei Zustände auf die Preisgestaltung in einem Markt zu untersuchen.

### 2.3 Modelle von effizienten Märkten

Ein Problem bei dem Versuch, die Markteffizienzhypothese empirisch zu testen, ist, die ungenaue Definition eines effizienten Marktes, als ein Markt in dem alle verfügbaren Informationen zu jedem beliebigen Zeitpunkt und für jedes beliebige Gut bereits „vollständig“ eingepreist sind. Um das Verhalten effizienter Märkte zu testen, muss also der Prozess der Preisbildung genauer definiert werden.

Ein mögliches Modell ist dabei die Gruppe der „expected return models“, bei denen man davon ausgeht, dass die Bedingungen des Marktgleichgewichts in irgendeiner Weise von der erwarteten Rendite abhängt. Formuliert man diese Aussage mathematisch:

$$E(\tilde{p}_{j,t+1}|\Phi_t) = [1 + E(\tilde{r}_{j,t+1}|\Phi_t)]p_{j,t}, \quad (2.1)$$

wobei  $E$  den Erwartungswertoperator,  $p_{j,t}$  den Preis des Assets  $j$  zum Zeitpunkt  $t$ ,  $r_{j,t+1}$  die relative Rendite des Assets und  $\Phi_t$  die „vollständig“ eingepreisten Informationen bezeichnen. Mit

$$x_{j,t+1} := p_{j,t+1} - E(p_{j,t+1}|\Phi_t) \text{ und } z_{j,t+1} := r_{j,t+1} - E(\tilde{r}_{j,t+1}|\Phi_t) \quad (2.2)$$

gilt also  $E(\tilde{x}_{j,t+1}|\Phi_t) = 0$ , sowie  $E(\tilde{z}_{j,t+1}|\Phi_t) = 0$ . Damit sind  $x_{j,t}$  und  $z_{j,t}$  bezüglich der Information  $\Phi_t$  faire Spiele.

Die Differenz  $x_{j,t}$  zwischen dem tatsächlichen und dem erwarteten Preis des Assetes  $j$  zum Zeitpunkt  $t$ , der auf Basis der zum Zeitpunkt  $t-1$  erhältlichen Informationen berechnet wurde, wird auch „excess market value“ genannt, während  $z_{j,t}$  der Unterschied zwischen der tatsächlichen relativen Rendite und der erwarteten relativen Rendite ist.

Ein Spezialfall dieses Modells ist das Submartingal-Modell, bei dem davon ausgegangen wird, dass der Preis eines Assetes  $j$  dem Pfad eines Submartingals folgt, also der erwartete Preis für die nächste Periode bedingt auf die vorhandene Information größer gleich ist, als der Preis in der momentanen Periode. Man fordert also, dass für alle Zeitpunkte  $t$  gilt:

$$E(\tilde{p}_{j,t+1}|\Phi_t) \geq p_{j,t} \quad (2.3)$$

Das Spannende an diesem Modell ist die Tatsache, dass es impliziert, dass der erwartete Gewinn, bedingt auf die verfügbare Information  $\Phi_t$ , von diversen Handelsstrategien, die sich auf ein einzelnes Asset, sowie Geld beschränken und dem Marktteilnehmer raten, wann er halten, kaufen oder verkaufen soll keinen größeren erwarteten Gewinn haben können, als Strategien, die nur kaufen und halten über die zukünftige Periode in Betracht ziehen.

Eine weitere Möglichkeit effiziente Märkte zu modellieren, ist das sogenannte Zufallsweg-Modell, bei dem davon ausgegangen wird, dass die „vollständige“ Einpreisung verfügbarer Information meint, dass nachfolgende Preisänderungen oder Rendite unabhängig und identisch verteilt sind. Formal bedeutet das, dass die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung und die Randverteilung ident sind, sowie für alle  $t$  die Dichtefunktion  $f$  gleich ist:

$$f(r_{j,t}|\Phi_t) = f(r_{j,t}) \quad (2.4)$$

Dieses Modell kann als eine Art Erweiterung des weiter oben kennengelernten „fair game model“ gesehen werden, bei dem sich die Verteilungen der Rendite über einen gewissen Zeitraum hinweg wiederholen. In diesem Zusammenhang ist interessant, dass empirische Tests des Zufallsweg-Modells, die in Wirklichkeit die „fair game“-Eigenschaften messen, das Modell stärker untermauern, als Tests der Unabhängigkeit der Rendite. Während die Unabhängigkeit der Rendite, also von Tests nur vergleichsweise schwach bestätigt wird, gibt es aber auch nur wenig Indizen gegen die Unabhängigkeit der Rendite.

## 2.4 Ergebnisse der empirischen Tests der Markteffizienzhypothese

Grundsätzlich gibt es drei verschiedene Arten von empirischen Tests der Markteffizienzhypothese, Tests von starken effizienten Märkten, Tests von mittelstarken effizienten Märkten und Tests von schwachen effizienten Märkten. Das sehr restriktive

starke Modell ist dabei vermutlich keine sehr genaue Beschreibung der Realität, gibt aber einen sehr guten Vergleichsmaßstab ab.

Der Großteil der empirischen Literatur beschäftigt sich mit schwachen effizienten Märkten und die Resultate scheinen diese durchaus zu unterstützen. Es scheint eine beträchtliche Abhängigkeit zwischen nachfolgenden Preisänderungen oder Renditen zu existieren. Die meisten dieser Hinweise stimmen jedoch dem „fair game model“ zu, der Rest ist statistisch nicht aussagekräftig genug, um den Markt als ineffizient zu deklarieren. Tatsächlich gibt es für Zeitspannen länger als einen Tag nur wenige Hinweise, die gegen das Zufallsweg-Modell sprechen würden.

Es gibt genügend Anhaltspunkte für eine positive Abhängigkeit der täglichen Preisänderungen oder Renditen. Diese Abhängigkeit taucht tatsächlich in mehreren empirischen Arbeiten als Tendenz kleiner Filter auf, profitabler zu sein als simple „buy and hold“ Strategien. Jedes System, das jedoch versucht diese kurzzeitigen Abhängigkeiten in Profit zu verwandeln würde so viele Transaktionen benötigen, dass selbst die geringstmöglichen Transaktionsgebühren den möglichen Profit übertreffen würden, wodurch diese geringfügige positive Abhängigkeit, bei einer lockereren Interpretation von Markteffizienz, nicht ausreichend erscheint, um die Existenz effizienter Märkte abzulehnen.

Hinweise, die dem Modell der schwachen effizienten Märkte auf längeren Zeitspannen widersprechen würden sind dabei viel rarer gesät. Es gibt in einige Werken Hinweise darauf, dass in wöchentlichen Renditen eine geringe negative Korrelation vorliegt. In anderen Werken ist diese Abhängigkeit jedoch nicht vorzufinden, in wieder anderen Testläufen scheint sie sogar positiv zu sein. Diese wöchentlichen Abhängigkeiten sind jedoch allesamt zu klein, um daraus eine profitable Handelsstrategie zu entwickeln.

Weiters lassen die Daten einige andere interessante Schlüsse zu. So scheinen beispielsweise auf starke Preisänderungen innerhalb eines Tages weitere starke Preisänderungen zu folgen, was möglicherweise impliziert, dass die Marktteilnehmer wichtige Informationen nicht sofort vollständig verarbeiten können. Ebenfalls interessant sind Daten, denen zufolge Umkehrungen in den Preisänderungen von Transaktion zu Transaktion auftreten. Dies scheint das Zufallsweg-Modell zumindest bei Preisänderungen von Transaktion zu Transaktion zu widerlegen, ist jedoch kein Widerspruch zum Wichtigeren „fair game model“ und es scheint aufgrund der Unvorhersagbarkeit auch hier keinen Weg zu geben mit diesem Wissen eine profitabele Handelsstrategie zu entwickeln.

Auch die mittelstarke Form der Markteffizienzhypothese wird von den empirischen Daten unterstützt. So sind beispielsweise Informationen über Aktiensplits, die die zukünftige Dividende einer Aktie betreffen, zum Zeitpunkt des Splits bereits vollständig eingepreist. Die Daten lassen auch ähnliche Schlüsse bezüglich der Datenverarbeitung von Veröffentlichungen des Jahreseinkommens oder einiger anderer wichtiger Ereignisse zu.

Empirische Analysen der starken Markteffizienz beschäftigen sich vorwiegend mit Spezialisten und Insidern eines Unternehmens, da diese Gruppen häufig Zugriff auf Informationen haben, die anderen Marktteilnehmern nicht zugänglich ist. Dabei wurde herausgefunden, dass vor allem Spezialisten mit Insiderwissen über nicht ausgeführte Limit-Orders in der Lage sind, aus diesem Wissen Gewinn zu schlagen.

Für den Großteil der Marktteilnehmer gibt es jedoch keine Möglichkeit diese Abweichung von der starken Markteffizienz auszunutzen, um dadurch Profit zu generieren. Deshalb scheint, dass die Annahme der Existenz der Markteffizienz für die meisten Investoren durchaus sinnvoll ist und darauf basierende Modelle eine gute Approximation der realen Marktverhältnisse darstellen.

## 3 Daten

Ziel dieses Kapitels ist eine nähere Betrachtung, der von [2] verwendeten Daten. In Kapitel 2 „Data“ des dieser Arbeit zugrunde liegenden Artikels wird auf die Arbeit „Two centuries of trend following“ [5] hingewiesen, in dem diese Daten genauer beschrieben werden.

Grundsätzlich wird versucht die Mittelwertrückkehr an einer möglichst großen Anzahl, verschiedenster Assets zu testen, um zu zeigen, dass Mittelwertrückkehr ein allgemeines Phänomen ist, das nicht von einem bestimmten Asset abhängt. Das hat den positiven Nebeneffekt, dass die Ergebnisse, aufgrund der wichtigen Rolle von Diversifikation in der Realität, anwendungsnäher werden. Da jedoch auch ein Ziel der Arbeit ist, Kursverläufe über einen möglichst langen Zeitraum zu betrachten, müssen einige Einschränkungen aufstrebenden Märkten gegenüber gemacht werden.

Darum limitieren sich die Autoren dahingehend, nur Anleihen, Währungen und Indizes von sieben Ländern zu betrachten. Auch werden nur sieben verschiedene Waren betrachtet. Während die Zeitreihen der Futurepreise 1960 starten, da davor zu wenig Futures gehandelt wurden um aussagekräftige Resultate zu erzielen, werden die Startdaten der Spotpreise im Folgenden genauer besprochen.

### 3.1 Währungen

Interessanterweise wird in [5] auf Seite 4 darauf hingewiesen, dass nur sechs verschiedene Währungen betrachtet werden, während im vorhergehenden Absatz erklärt wird, dass Anleihen, Indizes und Währungen von Australien, Kanada, Deutschland, Japan, Schweiz, dem Vereinigten Königreich und den Vereingten Staaten betrachtet werden. Diese vage und leicht widersprüchliche Beschreibung lässt Raum für Spekulationen. Eine naheliegende Möglichkeit wäre, dass die Daten der Währungskurse der genannten Staaten, mit Ausnahme Deutschlands, aufgrund des Währungswechsels zum Euro 1999, analysiert wurden, während für Anleihen und Indizes die Daten aller sieben Staaten betrachtet wurden.

Weiters ist zu Erwähnen, dass die Zeitreihe für Währungen nur bis 1973 zurückreicht. Die Gründe dafür sind historisch. So wurde das weltweite Währungssystem in der Zeit von 1944-1971 von den Bretton-Woods Verträgen bestimmt, die die Wechselkurse zum US-Dollar festlegten, der als einzige Währung noch zu einer fixen Rate in Gold umtauschbar war. Zu dieser Zeit ohne Wechselkurse, die am freien Markt bestimmt wurden, konnten sich also keine Trends entwickeln. Davor wurde der Wert aller Währungen, durch den Gold-Standard festgelegt. Wechselkurse zwischen den

einzelnen Währungen wurden also auch in diesem System nicht am freien Markt bestimmt, sondern kamen nur durch den unterschiedlichen Wert der Währungen in Gold zustande. Zwischen diesen beiden Systemen wiederum liegt die Zeit der großen Depression und des zweiten Weltkrieges, in der hohe Inflation und damit starke Regierungsinterventionen am Währungsmarkt Alltag waren. Auch in dieser Zeit ist keine Trendentwicklung zu erwarten.

### 3.2 Staatsanleihen

Um Trendentwicklung bei der Zinsentwicklung zu ermöglichen ist nicht nur das Vorhandensein von Staatsschulden, sondern auch ein liquider Sekundärmarkt, auf dem diese Schulden frei gehandelt werden können nötig. Die Entwicklung dieses Sekundärmarktes ist dabei mit der Finanzgeschichte der Staaten verbunden. Bis zum 19. Jahrhundert wurden Staatsschulden vor allem verwendet, um außergewöhnliche Vorhaben, wie beispielsweise Kriege zu finanzieren, um die Schulden später, in finanziell stabileren Zeiten zurückzuzahlen. Mit Beginn der Industrialisierung kam es zu einem so gewaltigen Wirtschaftswachstum, dass Rückzahlungen nicht mehr nötig waren, die Staatsverschuldung relativ zum Bruttoinlandsprodukt verminderte sich fast wie von selbst, solange keine neuen Schulden aufgenommen wurden.

Beispielhaft für diese Entwicklung wird in [5] die Geschichte der Vereinigten Staaten von Amerika angeführt. Während die Schulden des Unabhängigkeitskrieges in den 1830er Jahren abgezahlt worden waren, kam es in den 1860er Jahren zu einer erneuten Verschuldung, um den Bürgerkrieg zu finanzieren, die dann durch das enorme Wirtschaftswachstum von selbst verschwindet. Die nächste große Verschuldung folgte dann während des ersten Weltkrieges.

Alle Staaten, die in [5] betrachtet werden haben gemeinsam, dass sie seit dem ersten Weltkrieg keine Schulden mehr zurückgezahlt haben, sondern die nächste Ausgabequelle von Anleihen verwendet haben, um die vorherige zu tilgen.

Tabelle 3.1: Startdatum des Währungsmonopols der Zentralbanken, entnommen von [5], Seite 7

Land	Start
USA	1913
Australien	1911
Kanada	1935
Deutschland	1914
Schweiz	1907
Japan	1904
Vereinigtes Königreich	1844

In etwa zu dieser Zeit entstanden dann die Zentralbanken, die als „unpolitische“ Währungsmonopolisten das Vertrauen der Investoren erheblich steigerten. Das genaue Gründungsdatum der jeweiligen Zentralbanken und die Vergabe des jeweiligen

Währungsmonopols können (3.1) entnommen werden. Erwähnenswert ist, dass die englische Zentralbank das Währungsmonopol weder in Schottland noch in Irland besitzt, aber die Banken reguliert, die dieses besitzen.

Diese Entwicklung ist der Grund, wieso die Zeitreihe der Zinsraten im Jahr 1918 startet, wobei die Kriegszeit, sowie die unmittelbare Nachkriegszeit als Ausreißer, sowohl aus der deutschen, als auch aus der japanischen Entwicklung entfernt wurden.

### 3.3 Indizes und Waren

Die Startdaten für Indizes und Waren sind wesentlich leichter zu wählen. Für einige dieser Waren und Indizes sind sogar Daten aus dem 18. Jahrhundert verfügbar, siehe (3.1) und (3.3), Daten eines Index aus Großbritannien sind sogar ab 1693 durchgängig vorhanden, und enthalten damit sogar schon das wirtschaftliche Desaster, das mit dem Platzen der Südseeblase einherging.

Tabelle 3.2: Startdatum Waren, entnommen von [5], Seite 8

Ware	Start
Erdöl	1859
Erdgas	1986
Mais	1858
Weizen	1841
Zucker	1784
Lebendvieh	1858
Kupfer	1800

Tabelle 3.3: Startdatum Indizes, entnommen von [5], Seite 8

Land	Start
Vereinigten Staaten	1791
Australien	1875
Kanada	1914
Deutschland	1870
Schweiz	1914
Japan	1914
Vereinigtes Königreich	1693

Nicht betrachtet werden wieder die deutschen und japanischen Indexdaten aus der Kriegs- und unmittelbaren Nachkriegszeit, sowie der Erdölpreis in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Abgesehen von diesen Ausnahmen sind die Zeitreihen der Preise tatsächlich von ausgesprochen guter Qualität, es gibt keine Unstetigkeitsstellen und keine besonders erwähnenswerten Ausreißer.

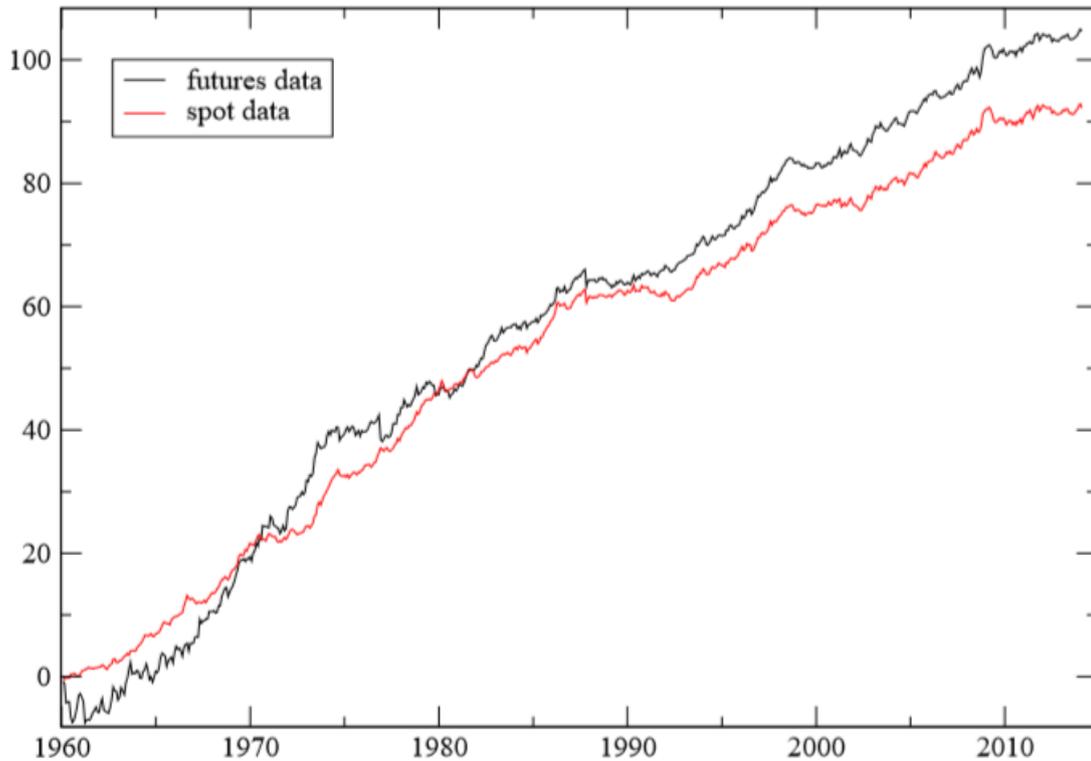


Abbildung 3.1: Trend der Spot- und Futurepreise seit 1960, entnommen von [5], Seite 9

### 3.4 Vergleich des Spotkurses mit dem Kurs der Futures

Da die Zeitreihen der Preise der Futures erst 1960 beginnen, soll in diesem Kapitel gezeigt werden, dass die Ergebnisse, die mit Futures und Spots erzielt werden sehr ähnlich sind, um damit die Erweiterung der Simulation auf die Zeit vor 1960 zu ermöglichen.

In (3.1) kann man den Trend der Spot- und Futurepreise nach 1960 vergleichen. Ab 1982 ist der Verlauf der beiden Graphen beinahe ident und der Korrelationskoeffizient liegt bei 0,91. Wenn man den gesamten Zeitraum seit 1960 betrachtet, kann aufgeteilt auf die verschiedenen untersuchten Arten von Assets für Anleihen und Indizes eine Korrelation von über 90% festgestellt werden, während die Korrelation für die untersuchten Waren nur bei 65% liegt, was wohl an den bei Waren besonders wechselhaften Cost-of-Carry liegt. Aufgrund dieser recht hohen Korrelation und der Tatsache, dass die Cost-of-Carry, den Trend eher verstärken, liegt damit die Annahme nahe, dass das Ergebnis ähnlich dem von echten Futurepreisen sein wird.

## 4 Vorhersagbarkeit über verschiedene Zeithorizonte

### 4.1 Blacks Intuition

„An efficient market is one in which price is within a factor 2 of value, i.e. the price is more than half of value and less than twice value.”

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist diese von F. Black in [1] geäußerte Annahme der Grund für die, dieser Seminararbeit zugrunde liegende Arbeit „Black was right” [2]. Bouchaud et al. fanden dabei Blacks Annahme vor allem deswegen überzeugend, weil sie auf einer fundamentalen Beobachtung über die menschliche Natur beruhte: Menschen haben keine Ahnung von absoluten „Werten”, sondern nur von relativen Werten. Aufgrund von Panik und Trends scheinen sich Preise aufgrund von durch Uninformierte erzeugten Schwankungen in Angebot und Nachfrage zu entwickeln.

Ebenso spannend ist Blacks Unsicherheitsschranke  $\Delta = 0.5$ , da Markteffizienz in einem mittelwertrückkehrenden Markt nur für längere Zeitspannen, als die zur Mittelwertrückkehr benötigte Zeit, möglich wäre. Doch, da diese „mean-reversion time”  $T_{MR}$  die Gleichung  $\sigma\sqrt{T_{MR}}$  erfüllt, würde mit einer jährlichen Volatilität von 20% eine mean-reversion time von beinahe sechs Jahren folgen.

### 4.2 Ornstein-Uhlenbeck Prozesse

In diesem Unterkapitel soll es eine Einführung in die umfassende Theorie der Ornstein-Uhlenbeck Prozesse geben. Dieses Kapitel wird sich dabei vor allem mit Ornstein-Uhlenbeck Prozessen beschäftigen, die auf einer Brownschen Bewegung beruhen und dabei das zweite Kapitel von [6] zusammenfassen.

Der eindimensionale gaußsche Ornstein-Uhlenbeck Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  kann als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \gamma(m - X_t)dt + \sigma dB_t, t > 0 \quad (4.1)$$

mit einem von der Brownschen Bewegung  $(B_t)_{t \geq 0}$  unabhängigen Anfangswert  $X_0$  und den positiven Konstanten  $\gamma$ ,  $m$  und  $\sigma$  definiert werden. In einigen Anwendungen ist es dabei vorteilhaft das Gleichgewichtsniveau  $m$  mit  $X_t^{(m)} = X_t - m$  durch betrachten des neuen Prozesses  $X_t^{(m)}$  zu eliminieren.

Natürlich kann man den Prozess auch alternativ mit Hilfe eines stochastischen Integrals definieren:

$$X_t = m(1 - e^{-\gamma t}) + \sigma e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} dB_s + X_0 e^{-\gamma t}, t \geq 0 \quad (4.2)$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass (4.2) eine wohldefinierte Lösung von (4.1) ist, womit die beiden Definitionsarten äquivalent sind.

Mit  $M_t = \int_0^t e^{\gamma s} dB_s$  ist ein Martingal bezüglich der natürlichen Filtration von  $B$  definiert, welches  $[M, M]_t = \int_0^t e^{2\gamma s} ds$  erfüllt, womit  $M_t = W_{[M, M]_t}$ ,  $t \geq 0$  für eine skalierte Brownsche Bewegung  $W$  gilt. Dadurch lässt sich der eindimensionale gaußsche Ornstein-Uhlenbeck noch auf eine dritte Art als Brownsche Bewegung definieren:

$$X_t = m(1 - e^{-\gamma t}) + \sigma e^{-\gamma t} W_{(e^{2\gamma t} - 1)/2\gamma} + X_0 e^{-\gamma t}, t \geq 0 \quad (4.3)$$

Durch diese drei möglichen Definition kann man nun einige Eigenschaften berechnen. So gilt beispielsweise für Erwartungswert und Kovarianz, sollten Erwartungswert und Varianz von  $X_0$  endlich sein:

$$E[X_t] = m(1 - e^{-\gamma t}) + e^{-\gamma t} E[X_0], t \geq 0 \quad (4.4)$$

$$Cov(X_u, X_t) = \frac{\sigma^2}{2\gamma} e^{-\gamma u} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) + e^{-\gamma(u+t)} Var(X_0) \quad (4.5)$$

Eine für diese Seminararbeit besonders wichtige Anwendung von Ornstein-Uhlenbeck Prozessen findet sich dabei in der Finanzmathematik bei der Modellierung von Mittelwertrückkehr. Betrachtet man (4.1), so kann man  $m$  als Gleichgewichtsniveau interpretieren, jenem Mittelwert, den der Prozess anstrebt. Die Geschwindigkeit dieser Mittelwertrückkehr wird dabei einerseits von der Entfernung zum Mittelwert bestimmt, andererseits von der Konstanten  $\gamma$ , der Steifigkeit oder „mean reversion speed“ bestimmt. Die Diffusion  $\sigma$  regelt in diesem Modell die Stärke, die der Zufall auf den Pfad des Prozesses hat.

### 4.3 Das Modell

Das Modell, mit dem die Daten verglichen werden sollen, ist wie schon im letzten Kapitel angedeutet, ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Der Inhalt dieses Unterkapitels ist Kapitel 3.2 sowie dem Anhang von [2] entnommen worden.

Der modellierende Prozess  $\pi(t)$ , der den enttrendeten logarithmierten Preis darstellen soll, wird durch folgende Differentialgleichung definiert:

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = -\kappa\pi(t) + \eta(t)$$

$$\text{mit } Cov(\eta(t'), \eta(t'')) = 2\sigma^2\kappa[\delta(t' - t'') + \frac{g}{2}(\gamma + \kappa)e^{-\gamma|t' - t''|}] \quad (4.6)$$

Die Konstante  $g$  misst dabei die Stärke des Trends, während  $\kappa^{-1}$  die Steifigkeit und  $\gamma^{-1}$  die Trendkorrelationszeit angeben.

Nun soll die Steigung der Regression  $s(\tau_{<}, \tau_{>})$  analytisch berechnet werden, um damit die zukünftigen Rendite, berechnet auf der Zeitspanne  $\tau_{>}$  als Funktion der vergangenen Rendite der Zeitspanne  $\tau_{<}$  zu betrachten.

Zuerst muss der durch (4.6) gegebene Prozess durch Lösen der Differentialgleichung ermittelt werden. Mit Variation der Parameter kann man  $\pi(t)$  ermitteln:

$$\pi(t) = e^{-\kappa t} \pi_0 + e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} d\eta(t) \quad (4.7)$$

Für große  $t$  ist  $\pi(t)$  also stationär verteilt, mit Mittelwert 0. Damit wird nun die Kovarianz des Prozesses berechnet:

$$\begin{aligned} Cov(\pi(t'), \pi(t'')) &= \pi_0 e^{-\kappa(t'+t'')} + e^{-\kappa(t'+t'')} \int_0^{t'} \int_0^{t''} e^{\kappa(s'+s'')} Cov(\eta(t'), \eta(t'')) ds'' ds' \\ &= \pi_0 e^{-\kappa(t'+t'')} + 2\kappa\sigma^2 e^{-\kappa(t'+t'')} \int_0^{t'} \int_0^{t''} e^{\kappa(s'+s'')} \delta(s' - s'') ds'' ds' \\ &\quad + \kappa g(\gamma + \kappa) \sigma^2 e^{-\kappa(t'+t'')} \int_0^{t'} \int_0^{t''} e^{\kappa(s'+s'')} e^{-\gamma|s'-s''|} ds'' ds' \\ &= \pi_0 e^{-\kappa(t'+t'')} + \sigma^2 (e^{-\kappa|t'-t''|} - e^{-\kappa(t'+t'')}) \\ &\quad + \frac{\kappa g \sigma^2}{\kappa - \gamma} (e^{-\gamma t'' - \kappa t'} + e^{-\gamma t' - \kappa t''}) + \frac{g \sigma^2}{\kappa - \gamma} (\kappa e^{-\gamma|t'-t''|} - \gamma e^{-\kappa|t'-t''|}) \end{aligned}$$

Da  $e^{-\kappa(t'+t'')}$  für große  $t', t''$  beinahe 0 ist, gilt für große  $t', t''$ :

$$Cov(\pi(t'), \pi(t'')) = \sigma^2 (e^{-\kappa|t'-t''|} + \frac{g}{\gamma - \kappa} (\gamma e^{-\kappa|t'-t''|} - \kappa e^{-\gamma|t'-t''|})) \quad (4.8)$$

Mit der Autokorrelation von  $\pi(t)$

$$C(u) := \frac{1}{1+g} e^{-\kappa u} + \frac{g}{1+g} \frac{\gamma e^{-\kappa u} - \kappa e^{-\gamma u}}{\gamma - \kappa} \quad (4.9)$$

kann man also nun die gesuchte Regressionsteigung  $s(\tau_{<}, \tau_{>})$  angeben:

$$s(\tau_{<}, \tau_{>}) = \frac{C(\tau_{<}) + C(\tau_{>}) - C(\tau_{<} + \tau_{>}) - 1}{2\sqrt{(1 - C(\tau_{<}))(1 - C(\tau_{>}))}} \quad (4.10)$$

## 4.4 Aufbereitung der Daten für Vergleich mit Modell

Das dritte Kapitel von [2] widmet sich vor allem der Analyse der Beziehung zwischen der vergangenen enttrenteten Rendite der Zeitspanne  $\tau_{<}$  und der zukünftigen enttrenteten Rendite auf der Zeitspanne  $\tau_{>}$ .

Bezeichnet also  $p(t)$  den Preis eines beliebigen Assets zum Zeitpunkt  $t$ , dann definiert man den Langzeittrend von  $t$  über die Zeitspanne  $T$  durch

$$\mu_t := \frac{1}{T} \log \left[ \frac{p(t)}{p(t-T)} \right]. \quad (4.11)$$

Ziel ist es nun für jedes Asset, jeden Zeitpunkt  $t$  und die verschiedensten  $\tau_<$  und  $\tau_>$  die vergangene enttrentete Rendite und die zukünftige enttrentete Rendite zu berechnen und zu Paaren  $(x,y)$  zusammenzufassen:

$$x := \log[p(t)] - \log[p(t - \tau_<)] - \mu_t \tau_<; \quad y := \log[p(t + \tau_>)] - \log[p(t)] - \mu_t \tau_>, \quad (4.12)$$

wobei  $x$  die vergangene enttrentete Rendite und  $y$  die zukünftige enttrentete Rendite ist. Mit  $T = 20$  und  $\tau_< = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50$  und  $60$  Monate, sowie  $\tau_> = \tau_</5$  für Spotpreise. Für die täglich entnommenen Futuredaten gilt  $\tau_< = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 480, 640, 960$  und  $1280$  Tage, sowie abermals  $\tau_> = \tau_</5$ .

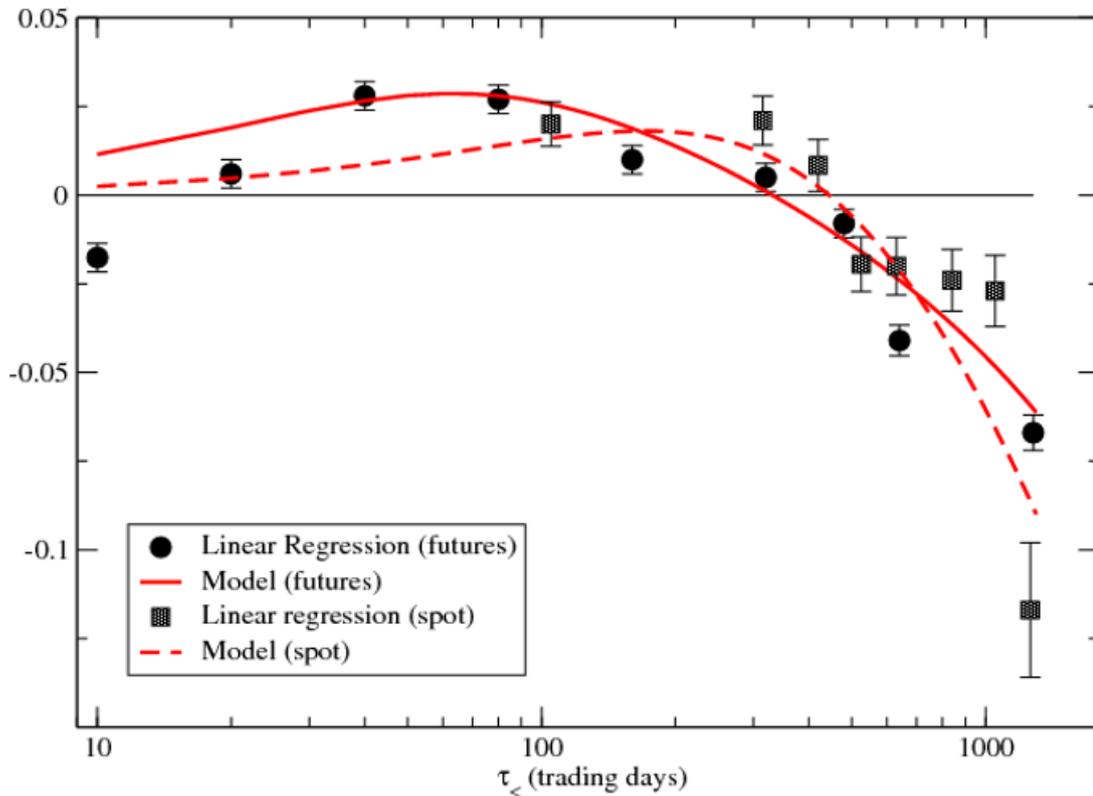


Abbildung 4.1: Vergleich der Steigung der linearen Regression mit dem Modell, entnommen von [2], Seite 4

Durch diese Wahl von  $\tau_>$  wird im Folgenden betrachtet, welcher Zusammenhang zwischen der vergangenen Marktentwicklung, beobachtet über einen bestimmten Zeitraum und der darauf folgenden zukünftigen Entwicklung, beobachtet auf einem

Fünftel dieses Zeitraumes besteht. Es wird also beispielsweise der Zusammenhang zwischen der Marktentwicklung der fünf Jahr vor einem Zeitpunkt  $t$  und der Marktentwicklung im darauffolgendem Jahr gesucht. Die Wahl  $\tau_{>} = \tau_{<}/5$  ist dabei für die weiteren Ergebnisse nicht wichtig, mit  $\tau_{>} = a\tau_{<}$  erhält man mit einem beliebigem  $a \leq 1$  ähnliche Resultate.

Nachdem man die Daten in Futures und Spots unterteilt hat und die Punkte  $(x,y)$  für die verschiedensten Assets und Zeitpunkte  $t$  berechnet hat, werden diese Punkte für die verschiedensten  $\tau_{<}$  in Mengen zusammengefasst. Nach Entfernung der Ausreißer (z.B.  $|x| \geq 4$  oder  $|y| \geq 4$ ) wird nun der Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  mit linearer Regression ermittelt. Die Steigung dieser linearen Regression wird dann mit dem Modell verglichen, siehe dazu Abbildung (4.1).

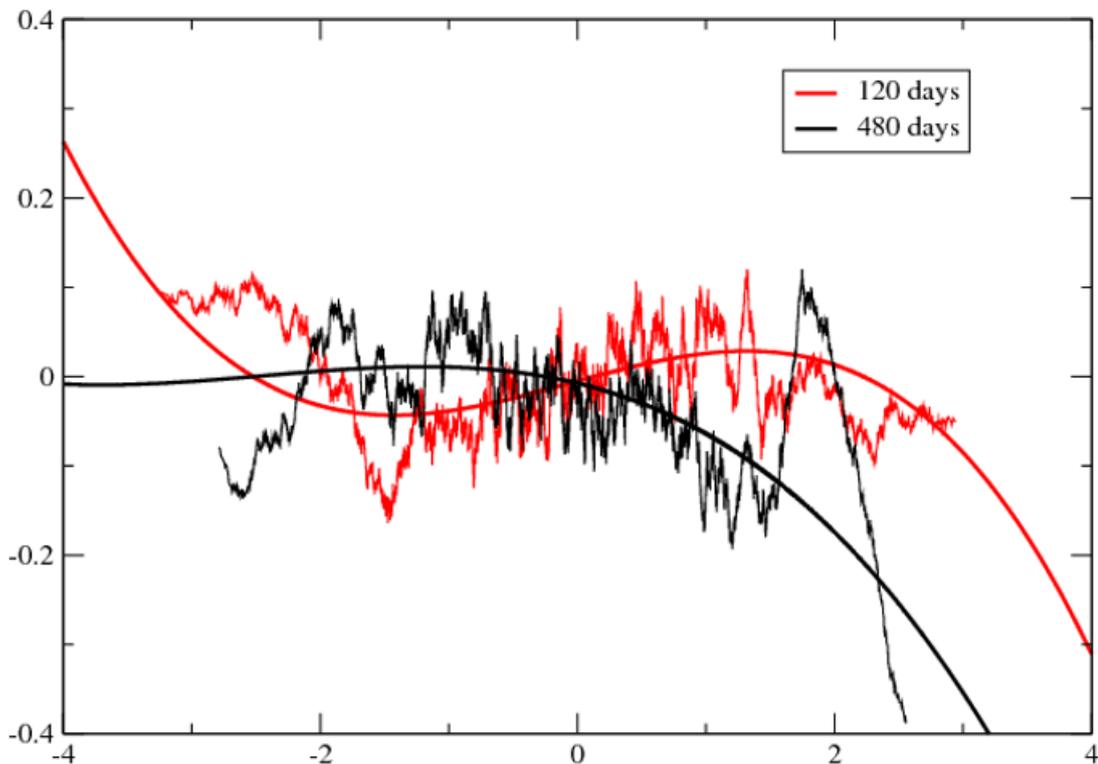


Abbildung 4.2: Vergleich der Plots für  $\tau_{<} = 120$  und  $\tau_{<} = 480$  mit kubischen Regressionen, entnommen von [2], Seite 6

## 4.5 Vergleich der Daten mit dem Modell

Als Parameter für das Modell in Abbildung (4.1) wurden  $g = 0.22$ ,  $\kappa^{-1} = 16$  Jahre und  $\gamma^{-1} = 33$  Tage für die Futures und  $g = 0.33$ ,  $\kappa^{-1} = 8$  Jahre und  $\gamma^{-1} = 200$  Tage für die Spots gewählt. Die Parameter wurden dabei so gewählt, dass die ungefähre

Größenordnung vernünftig erscheint und sind nicht mit hoher Genauigkeit bestimmt worden. In Anbetracht dieser Ungenauigkeit scheint die Übereinstimmung zwischen dem Modell und den Daten durchaus bemerkenswert.

So ist beispielsweise sowohl bei Futures, als auch bei Spots eine positive Steigung für  $\tau_{<} \leq 2$  Jahre erkennbar. Das deckt sich gut mit der Annahme, dass Kurse in kurzen Zeitspannen positiv korreliert sind, um in Zeitspannen, in etwa so lang wie die Zeit, die zur Mittelwertrückkehr benötigt wird, negativ zu korrelieren. Auch die negative Korrelation in längeren Zeitspannen ist klar erkennbar, für  $\tau_{<} \geq 500$  Handelstagen (in etwa die oben genannten 2 Jahre) ist eine negative Steigung erkennbar, die sich mit einer Vergrößerung der betrachteten Zeitspanne immer weiter erhöht.

Interessant ist auch, dass man bei den Futures in kurzen Zeitspannen, für  $\tau_{<} \leq 20$  Handelstagen eine negative Regressionssteigung beobachten kann, die von dem Modell, das zu keiner kurzzeitigen Mittelwertrückkehr imstande ist, nicht simuliert wird.

#### 4.5.1 Nichtlineare Effekte

Abbildung (4.2) scheint darauf hinzudeuten, dass ein bloßer Vergleich der linearen Regressionskoeffizienten unzureichend sein könnte. Aus diesem Grund wird in diesem Unterkapitel ein Blick auf die quadratischen und kubischen Koeffizienten (Abbildung (4.3) und Abbildung (4.4)) siehe einer kubischen Regression geworfen.

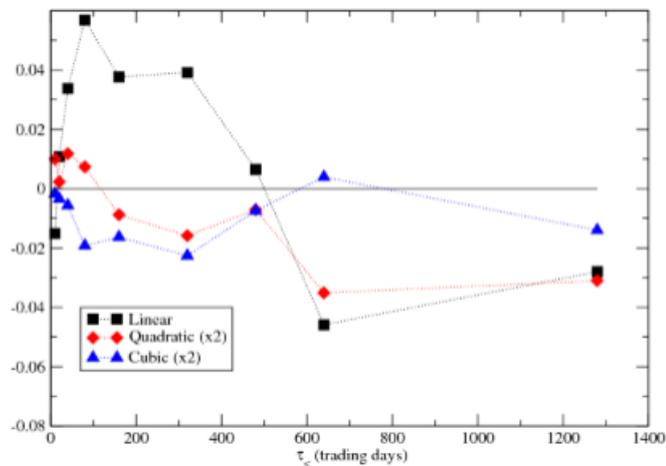


Abbildung 4.3: Koeffizienten der kubischen Regressionen der Futures, entnommen von [2], Seite 7

Der lineare Koeffizient zeigt dabei ein ähnliches Verhalten, wie bereits in Abbildung (4.1), zuerst ist er positiv, dann wird er mit größer werdendem Zeithorizont kleiner. Auch die negativen Koeffizienten für kurze Zeitspannen bei den futures lässt sich beobachten.

Der quadratische Term zeigt ebenfalls, sowohl für Spots, als auch Futures ein

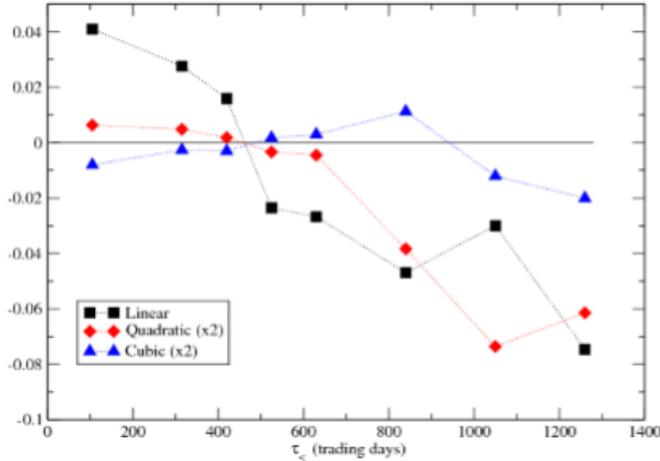


Abbildung 4.4: Koeffizienten der kubischen Regressionen der Spots, entnommen von [2], Seite 7

ähnliches Verhalten, für kurze Zeitspannen ist er positiv, für größere  $\tau_<$  negativ. Dieses Verhalten scheint zu implizieren, dass positive Trends in kurzen Zeitspannen stärker sind, als negative Trends, negative Trends jedoch auf längeren Zeitspannen die Oberhand gewinnen.

Der kubische Koeffizient zeigt dagegen ein anderes Verhalten. Er scheint für Futures für beinahe alle  $\tau_<$  negativ zu sein, für Spots ist dies nicht zu beobachten. Ein negativer kubischer Koeffizient hat dabei den rechnerischen Effekt, dass bei großer Entfernung zum Mittelwert die Mittelwertrückkehr wesentlich schneller einsetzt, als bei einem bloßen linearen Modell.

Zusammenfassend ist also anzumerken, dass selbst unter Einbezug diverser nichtlinearer Effekte, das Hauptresultat, das bereits in Abbildung (4.1) zu betrachten war, unangetastet bleibt: Die Mittelwertrückkehr scheint nach etwa 500 Handelstagen oder 2 Handelsjahren zu beginnen.

#### 4.5.2 Factor 2 of value?

Während die bisher vorgestellten Ergebnisse von [2], Blacks Intuition zur Mittelwertrückkehr zu stützen scheinen, soll hier eine Untersuchung von „factor 2 of value“, also der, auf Intuition beruhenden, Behauptung, der Preis eines Assets würde stets zwischen der Hälfte und dem Doppelten des Wertes schwanken, stattfinden. erinnert man sich an das durch Gleichung (4.6) definierte Modell und im Besonderen, an die in Gleichung (4.8) präsentierte Kovarianz für große  $t'$  und  $t''$ , so folgt für die Varianz des Prozesses  $\pi(t)$ :

$$Var(\pi(t)) = \sigma^2(1 + g) \quad (4.13)$$

Definiert man diese, von  $t$  weitgehend unabhängige Varianz als Quadrate der

Black'schen Unsicherheitsschranke  $\Delta^2$ , so kann man, da die Volatilität für kurze Zeitspannen in unserem Modell durch  $\sqrt{2\kappa}\sigma$  gegeben ist, aus den Marktdaten auf den Wert von  $\sigma$  schließen. Mit einer täglichen Volatilität von 1% folgt für die Unsicherheitsschranke  $\Delta \approx 0,5$  für Futures, sowie  $\Delta \approx 0,35$  für Spots.

Diese Daten scheinen tatsächlich mit Blacks Idee, dass Preise in etwa im Intervall  $[\frac{Wert}{2}, 2 * Wert]$  liegt, übereinzustimmen.

## 5 Schlussfolgerungen

Dieses Kapitel wird sich vorwiegend mit den Schlussfolgerungen beschäftigen, die in „Black was right: Price is within a factor 2 of Value“ im vierten Kapitel „Conclusion“, aus den eben präsentierten Ergebnissen gezogen wurden.

Letzten Endes liefert das Paper [2] neue Hinweise, die bei der empirischen Untermauerung der Mittelwertrückkehr sicher von Nutzen sind. Besonders spannend ist die Bestätigung von Blacks intuitiv gewähltem „factor 2“. Sogar die „Eingangsberechnung“ scheint bestätigt, bei einer jährlichen Volatilität von 20% benötigen die Preise ungefähr sechs Jahre, um um 50% zu variieren.

Gleichzeitig ist natürlich diese Untermauerung der Mittelwertrückkehr ein weiteres, gegen die Markteffizienz, sprechendes Indiz: Die Mittelwertrückkehr sorgt, als „Umkehrungskraft“ von Trends, nur über sehr lange Zeiträume für die Existenz von effizienten Märkten.

Diese Resultate wiederum stimmen mit Erkenntnissen aus dem Teilgebiet „Behavioral Finance“ überein, denen zufolge zwei Arten von Marktteilnehmern existieren. Eine dieser zwei Typen wäre der „chartist“, der als Trendfolger am Markt agiert. Fundamentalisten wiederum sorgen dann für die notwendige Mittelwertrückkehr, sobald sich die Preise eindeutig zu sehr vom „Wert“ des Assets entfernt haben. Dieser These zufolge scheint die Mittelwertrückkehr also eine Art Selbstkorrektur der Märkte zu sein, die unfundierte Trends über längere Zeiträume hinweg mäßigt.

Versucht man diese Ergebnisse nun in die Praxis zu übertragen, so scheint bestätigt, was schon länger bekannt ist: Trendfolgende Strategien, die vor Marktnachteilen schützen, sollten durch preisbasierte, mittelwertrückkehrende Strategien, die vor überschwänglichen Trends schützen, ergänzt werden, um durch den Mix dieser beiden Strategien die Profitabilität von Portfolios signifikant zu verbessern.

## Literaturverzeichnis

- [1] BLACK, FISCHER: Noise. In: *The Journal of Finance* 41 (1986), Nr. 3, 528-543. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1986.tb04513.x>. – DOI 10.1111/j.1540-6261.1986.tb04513.x
- [2] BOUCHAUD, J. P. ; CILIBERTI, S. ; LEMPÉRIÈRE, Y. ; MAJEWSKI, A. ; SEAGER, P. ; RONIA, K. S.: *Black was right: Price is within a factor 2 of Value*. 2017
- [3] FAMA, Eugene F.: Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. In: *The Journal of Finance* 25 (1970), Nr. 2, 383–417. <http://www.jstor.org/stable/2325486>. – ISSN 00221082, 15406261
- [4] JENSEN, Michael C.: Some anomalous evidence regarding market efficiency. In: *Journal of Financial Economics* 6 (1978), Nr. 2, 95 - 101. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-405X\(78\)90025-9](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-405X(78)90025-9). – DOI [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(78\)90025-9](https://doi.org/10.1016/0304-405X(78)90025-9). – ISSN 0304-405X
- [5] LEMPÉRIÈRE, Y. ; DEREMBLE, C. ; SEAGER, P. ; POTTERS, M. ; BOUCHAUD, J. P.: *Two centuries of trend following*. 2014
- [6] In: MALLER, Ross ; MÜLLER, Gernot ; SZIMAYER, Alexander: *Ornstein–Uhlenbeck Processes and Extensions*. 2009, S. 421–437