TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

SEMINARARBEIT

Bike Sharing Systems

ausgeführt am
Institut für
FINANZ- UND VERSICHERUNGSMATHEMATIK
TU WIEN

unter der Anleitung von
Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan GERHOLD

durch

Robert Melcher
Martikelnummer: 11778952

26. Februar 2020

Abstract

Bike-Sharing-Systems haben sich weltweit rasch entwickelt und werden als eine vielversprechende Möglichkeit angesehen, um den städtischen Verkehr und die Umweltverschmutzung zu verringern. Bei der Analyse von Bike-Sharing-Systems gibt es allerdings viele Schwierigkeiten und Herausforderungen, welche unter der Betrachtung einiger allgemeiner Faktoren zu bewältigen sind. In dieser Seminararbeit wird zunächst auf die Grundlagen eines Bike-Sharing-Systems eingegangen, um zwar sowohl auf die mathematischen als auch auf die allgemeinen Grundlagen. Aufbauend auf diesen Grundlagen wird ein allgemeineres Bike-Sharing-System anhand einiger heavy traffic conditions (Betrachtung eines Verkehrssystems mit hoher Auslastung) eines geschlossenen Warteschlangennetzwerkes mit nicht exponentiellen Faktoren betrachtet. Daraufhin werden anhand des Systems verschiedene fluidskalierte und diffusionskalierte Gleichungen und Prozesse, auf Basis der Anzahl der Fahrräder, sowohl in den Stationen als auch auf den Strecken aufgestellt. Darüber hinaus konvergieren die skalierten Prozesse für die Anzahl der Fahrräder in den Stationen und auf den Strecken in Verteilung gegen Brownsche Bewegungen, woraus einige fluid und diffusion limit Theoreme aufgestellt werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bike-Sharing-Systems sind wichtige Möglichkeiten, welche uns für den öffentlichen Verkehr zustehen, in Bezug auf Zugänglichkeit und Leistbarkeit. Sie sind in über 600 Städten verteilt, des Weiteren sind diese Systeme umweltfreundlich, reduzieren Staus, es gibt weniger Parkplatzprobleme und weniger Lärmbelästigung. Allerdings ergeben sich zwei wichtige operative Probleme bei solchen Systemen:

i. Leere Stationen: Es muss bei jeder Station mindestens ein Fahrrad geparkt sein, damit sich ein Kunde jederzeit ein Rad ausborgen kann.

ii. Volle Stationen: Es müssen genügend Parkplätze in den Stationen bereitgestellt werden, damit ein Kunde sein Fahrrad auch wieder abgeben kann.

Daher werden die leeren und die vollen Stationen als Problemstationen bezeichnet. Bei der Untersuchung dieser Problemstationen wurden schon effiziente Maßnahmen entwickelt wie beispielsweise zeitinhomogene Nachfrageprognosen, durchschnittliche Fahrradbestände, zeitnahe Fahrradnachführung und Wahrscheinlichkeitsanalysen. Darüber hinaus wurden Warteschlangen und Markow Prozesse für die Charakterisierung dieser Probleme betrachtet. Ein wichtiges Merkmal dabei sind die zufälligen Ankunftszeiten von Fahrradnutzern und ihre zufälligen Fahrtzeiten. Im Allgemeinen ist die Analyse von Bike-Sharing-Systemen mit zufälligen Ankünften von Kunden und allgemeinen Fahrtzeiten immer sehr schwierig und herausfordernd, weil kompliziertere geschlossene Warteschlangennetzwerke mit mehreren Klassen eingerichtet werden müssen. Hierfür können Fluid- und Diffusionsnäherungen eine effektive und gute Methode für die Untersuchung allgemeinerer Bike-Sharing-Systeme sein. Dies motiviert uns in dieser Seminararbeit, Flüssigkeits- und Diffusionsgrenzen für allgemeinere groß angelegte Bike-Sharing-Systeme zu entwickeln. Fluid- und Diffusionsnäherungen werden normalerweise für die Analyse von allgemeineren, großen und komplizierten Warteschlangennetzen genutzt.

Aufbau der Arbeit: Der Aufbau der Arbeit ist viergeteilt. Der erste Teil besteht darin, einen allgemeinen Überblick über Bike-Sharing-Systems zu geben. Dazu wird ein Einblick in die mathematische Grundlage der Arbeit gegeben, um zwar werden die Grundzüge der Warteschlangentheorie erläutert.
Im zweiten Teil wird auf Basis dieser Grundlagen ein allgemeineres, groß angelegtes System zur gemeinsamen Nutzung von Fahrrädern angelegt, welches die unterschiedlichen Ankunftszeiten sowie die unterschiedlichen Fahrtzeiten der Nutzer beinhaltet. Des Weiteren folgt die Einrichtung eines mehrklassigen geschlossenen Warteschlangennetzwerkes aus den praktischen Faktoren des Bike-Sharing-Systems, wobei die Fahrräder als Kunden des Systems betrachtet werden und sowohl die Stationen als auch die Strecken als Bedienstationen betrachtet werden. Dabei ist zu beachten,

dass die Kunden (d. h. die Fahrräder) bei den Stationen nur in eine Klasse eingeteilt sind, währenddessen die Kunden auf den Strecken in zwei verschiedene Klassen aufgeteilt werden. Dies folgt aus den verschiedenen Übergangswahrscheinlichkeiten und Fahrtzeiten.
Im dritten Teil der Arbeit werden Prozesse eingerichtet, welche die Warteschlangenlänge des mehrklassigen geschlossenen Warteschlangennetzes durch Beobachtung der Kunden an den Stationen und auf den Strecken beschreibt. Mithilfe dieser Prozesse werden verschieden Gleichungen aufgestellt, welche zur Formulierung einiger Theoreme benötigt werden.
Im letzten Teil der Arbeit werden verschiedene Näherungen der aufgestellten Prozesse betrachtet, um zwar konvergieren die Prozesse, welche die Anzahl der Kunden in den Stationen und auf den Strecken in Verteilung gegen Brownsche Bewegungen.

Verweise: Diese Arbeit basiert auf dem Werk *Fluid and Diffusion Limits for Bike Sharing Systems* von Quan-Lin lI, Zhi-Yong Qian und Ru-Na Fan, von welchem auch die Notationen übernommen wurden [1]. Des Weiteren wurden für die mathematischen Grundlagen der Arbeit das Skriptum *Warteschlangentheorie* von Karl Grill von der Technischen Universität Wien [2] und die Dissertation *Diffusionsapproximation von Warteschlangensystemen mit Gruppenbedienung* von Dipl.-Math. Lars Dohse von der Technischen Universität Clausthal verwendet [3].

2 Grundlagen

2.1 Allgemeine Grundlagen

Bei einem Bike-Sharing-System handelt es sich um eine Form des Fahrradverleihs, welches der Öffentlichkeit zur Verfügung steht. Dabei sind die Fahrräder entweder im öffentlichen Raum oder an Stationen zugänglich. Solche Systeme werden von Unternehmen im Auftrag von Gemeinden eingerichtet. Meist werden solche Systeme für kurze Fahrtstrecken genutzt mit dem Vorteil, dass die Kunden sich nicht um die Wartung und das sichere Abstellen des Rades kümmern müssen.

Arten:

- Mitgliedschaft: Als Mitglied kann der Kunde einen Mitgliedsausweis herzeigen oder es besteht auch die Möglichkeit, einen Chip am Fahrrad anzuwenden.
- Stationsgebunden: In einem geografisch begrenzten Bereich (beispielsweise in einer Stadt) sind Stationen verteilt, an denen man sich ein Fahrrad ausborgen kann und bei Beendigung der Fahrt wieder an einer anderen Station zurückbringen kann. Das Bike-Sharing-System, womit wir uns später in der Arbeit befassen, wird diesem Typ sein.
- Stationslos: Hier werden die Fahrräder in der Stadt verteilt und die Kunden können diese mithilfe von GPS und einer App aufsuchen und benutzen.

Anbieter: Dieser wachsende Markt wurde mittlerweile von einigen Unternehmen als Geschäftsmodell entdeckt, um Besuchern und Einwohnern von Städten ein umweltfreundliches Fortbewegungsangebot zu machen, ohne dass diese sich um Investitions- oder Betriebskosten kümmern müssen. Betrieben werden solche Mietsysteme vor allem im Ausland meist durch verschiedene Außenwerbungsunternehmen wie iHeartMedia (Smartbikes) oder Gewista (Citybike Salzburg und Citybike Wien).

Probleme und Kritik: Ein großes Problem stellt der Vandalismus dar, um zwar mit Schäden, die nicht nur durch die unsachliche Behandlung der Räder hervorgehen, sondern auch durch deren mutwillige Zerstörung und Diebstahl. Dies stellt einen Mehraufwand für die Anbieter dar, welcher entweder auf die Benutzer oder auf die ausschreibenden Gemeinden abgewälzt wird. Bei manchen Fällen führte dies sogar zum Rückzug aus dem Markt. Beispielsweise zog sich der in Hongkong ansässige Betreiber Gobee Bike Anfang 2018 nach nur vier Monaten aus dem französischen Markt zurück, nachdem er schon zuvor in Brüssel aufgegeben hatte. Dort waren nämlich bis zu 60 Prozent der Räder beschädigt oder entwendet worden.

2.2 Mathematische Grundlagen

Für die Charakterisierung der Problemstationen in einem stationengebundenen Bike-Sharing-System wurden Warteschlangen und Markov Prozesse betrachtet. In dieser Arbeit wird ausschließlich mit Warteschlangen gearbeitet. Die Folgenden Inhalte basieren zum Großteil aus [2] und [4].

Warteschlangentheorie:

Die Warteschlangentheorie bedient sich zur Beschreibung von Bedienungssystemen eines einfachen Grundmodells. Dieses Grundmodell besteht aus einem Bedienungssystem, welches über ein oder mehrere Bedienschaltern verfügt, und einem Warteraum. Wenn Kunden in das System einfallen, treffen sie einzeln und zu zufälligen Zeitpunkten vor einem Schalter ein. Sofern mindestens einer der Bedienschalter zur Verfügung steht, wird ein ankommender Kunde sofort bedient, andernfalls muss er sich im Warteraum in eine Warteschlange einreihen und warten bis er an der Reihe ist.

Das Grundmodell kann auf vielfältige Weise variiert werden:

- Die Kunden können gruppenweise in das System einfallen oder sie können in Gruppen bedient werden (Wartesysteme mit Gruppenbedienung).
- Kunden können das System vorzeitig verlassen, noch bevor sie bedient wurden. So ein Modell könnte man beispielsweise bei einem Lebensmittelhandel anwenden (wenn die Ware verdorben ist, kommt sie gar nicht erst in den Verkauf).
- Auch die Bedienungsgeräte können eingeschränkt werden, sodass nicht jeder Kunde auf jedes Gerät zugreifen kann (Bedienungssysteme mit eingeschränk-

ter Erreichbarkeit). Anwendung: Fertigungsstraßen mit dedizierten Maschinen, Koppelanordnungen in einem Fernsprechnetz.

- Einige Kunden scheuen sich, in das Bedienungssystem einzutreten, weil ihnen die Warteschlange zu lang erscheint.

Der Strom der ankommenden Kunden wird durch einen sog. Erneuerungsprozess beschrieben. Dazu stelle man sich alle Kunden in der Reihenfolge ihrer Ankünfte durchnummeriert vor. Sei nun I_n eine Folge von stochastisch unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen, welche die Zwischenankunftszeit beschreibt. Die $n$te Zwischenankunftszeit ist die Zeitspanne zwischen der Ankunft des $(n-1)$ten und des $n$ten Kunden. Der Kehrwert des Erwartungswertes von den I_n wird mit λ bezeichnet ($\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mathbb{E}[I]}$) und gibt an, wie viele Kunden im Durchschnitt pro Zeiteinheit in das System einfallen.

Mit $S_n, n = 1, 2, ...$ bezeichnen wir eine Folge von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, welche die Bedienzeit des $n$ten Kunden darstellen. Der Kehrwert des Erwartungswertes wird mit μ bezeichnet ($\Rightarrow \mu = \frac{1}{\mathbb{E}[S]}$) und gibt an, wie viele Kunden im Durchschnitt pro Zeiteinheit von dem Bedienungssystem abgefertigt werden können. μ wird auch als Bedienrate bezeichnet. Wenn mehrere parallele und gleichartige Bedienungsgeräte vorhanden sind, so erhöht sich die Bedienrate entsprechend der Anzahl der Geräte.

Weiters ist es wichtig, eine Abfertigungsdisziplin festzulegen, welche angibt in welcher Reihenfolge die Kunden im Warteraum ausgewählt werden, um ihren Bedienvorgang zu beginnen.

Folgende Disziplinen sind gebräuchlich:

- **FIFO:** (First in First out) Hier werden die Kunden in der Reihenfolge abgefertigt, in der sie in das System eingetreten sind.

- **LIFO:** (Last in First out) Hier geschieht die Abfertigung der Kunden in umgekehrter Reihenfolge als im FIFO-Verfahren.

- **SIRO:** (selection in random order) Beim SIRO-Verfahren wird der nächste Kunde zufällig ausgewählt.

- **Round Robin:** Bei diesem Verfahren haben die Bedienstationen Zeitbeschränkungen. Also kann ein Kunde ein Bediengerät nur eine bestimmte Zeit benutzen, sollte er darüber hinaus noch mehr Zeit benötigen, müsste sich der Kunde neu in die Warteschlange einreihen und warten bis er an der Reihe ist.

Warteschlangen werden gekennzeichnet mit der Notation $A/B/c/m$. A und B bezeichnen die Verteilung der Zwischenankunftszeiten und der Bedienzeiten. c beschreibt die Anzahl der parallel arbeitenden Bediener und m stellt die Kapazität des Warteraums dar. Beispielsweise beschreibt die Notation $M/G/2/4$ ein Warteschlangensystem mit exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten, beliebig verteilten Bedienzeiten, zwei parallel arbeitende Bediengeräte und ein Warteraum, in dem maximal 4 Kunden warten können.

Um die Leistung des Warteschlangensystems zu bewerten, benötigt man verschiedene Prozesse:

- $(N_t)_{t\geq 0}$ beschreibt wie viele Kunden sich zur Zeit t im System aufhalten.
- $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist der Prozess der aufeinanderfolgenden Verweilzeiten. Also bezeichnen die Zufallsvariablen V_n die Zeit, in der sich der $n$te Kunde im System aufhält.

Die Berechnung der Erwartungswerte kann mithilfe verschiedener Methoden der Theorie der stochastischen Prozesse herangezogen werden. Doch hängt dies sehr stark von den Verteilungen der Zwischenankunftszeiten und der Bedienzeiten ab, sowie ob zeitabhängige oder stationäre Größen verwendet werden sollen. Damit ist schon das Grundmodell der Warteschlangentheorie sehr komplex und kann nicht immer eindeutig gelöst werden, daher werden oft Näherungsformeln verwendet. Eine dieser Formeln (von Allen-Cunnen) wäre beispielsweise für die mittlere Anzahl der Kunden im System (im stationären Fall):

$$\mathbb{E}[N] \approx \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \sqrt{\rho^{c+1}} \cdot \frac{c_I^2 + c_S^2}{2} + \rho \cdot c$$

In dieser Formel beschreibt ρ die Auslastung des Systems, der Wurzelterm die Wartewahrscheinlichkeit, c_I^2 und c_S^2 bilden Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeit und der Bedienungszeit. Aus der Formel ist zu erkennen, dass die Anzahl der Kunden im System größer wird, wenn die Auslastung des Systems und die Variationskoeffizienten wachsen. Daher sollte man genügend Kapazitäten bereitstellen oder die Variabilität des Systems geringhalten, um eine kürzere Warteschlange zu bekommen.
Um die mittlere Verweilzeit $\mathbb{E}[V]$ zu bekommen, kann man die Formel von Little heranziehen. Diese Formel besagt

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[V] \cdot \lambda.$$

λ beschreibt hier wieder die Ankunftsrate des Systems. Also besagt Littles Gesetz, dass die durchschnittliche Anzahl von Kunden $\mathbb{E}[N]$ in einem Warteschlangensystem gleich dem Produkt ihrer durchschnittlichen Ankunftsrate λ und ihrer durchschnittlichen Verweildauer $\mathbb{E}[V]$ ist. Dies impliziert bemerkenswerter weise, dass das Verhalten des Systems vollkommen unabhängig von den benutzten Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist und somit keine Annahmen über die Verteilung der Ankunftszeiten oder die Abfertigungsdisziplin getroffen werden müssen. So ist die durchschnittliche Wartezeit beim FIFO-Verfahren genauso groß wie beim LIFO-Verfahren.

Näherungen: Die zwei wichtigsten Näherungen, um Warteschlangen zu lösen, sind die Fluidapproximation und die Diffusionsapproximation. Diese wurden entwickelt aufgrund der Schwierigkeit, Warteschlangen exakt zu lösen [3].

Fluidapproximation:
Bei der Fluidapproximation ist die Idee, den stochastischen Prozess der Warteschlangenlänge auf einen deterministischen Prozess zu reduzieren. Anschaulich betrachtet wird eine Flüssigkeit mit einer vorgegebenen Ankunftsrate in ein System gegossen und mithilfe einer vorgegebenen Bedienrate wieder abgeflossen. Der Nachteil der Fluidapproximation ist, dass die stochastische Qualität der Warteschlange komplett vernachlässigt wird. In verschiedenen Literaturen wird gezeigt, dass dieser deterministische Prozess der Grenzwert einer entsprechend normierten Folge von Warteschlangenprozessen ist. Diese Konvergenz beruht auf einer Verallgemeinerung des starken Gesetzes der großen Zahlen. Bei diesem Vorgehen wird die Verteilung der Warteschlangenlänge auf ihr erstes Moment reduziert, weshalb dann nur noch Vorhersagen über ihren Erwartungswert möglich sind. Später werden wir für die Fluid Limits ebenfalls eine Folge unseres Systems betrachten.

Diffusionsapproximation:
Im Gegensatz dazu basiert die Diffusionsapproximation auf einer Anpassung des zentralen Grenzwertsatzes an Summations- und Zählprozesse. Bei dieser Approximation ist der Grenzwert von einer entsprechenden normierten Folge von Warteschlangenprozessen eine Brownsche Bewegung (also ein zentrierter stochastischer Prozess). Das heißt, in gewisser Weise wird die Verteilung der Warteschlangenlänge durch eine geeignete Skalierung und eine passende Grenzbetrachtung auf ihre ersten zwei Momente reduziert.

3 Modell Beschreibung

In diesem Abschnitt werden wir ein allgemeineres Modell eines Bike-Sharing-Systems beschreiben, welches N verschiedene Stationen und $N(N-1)$ verschiedene Strecken besitzt, mit zufälligen Ankunftszeiten und zufälligen Fahrtzeiten. In diesem System kommt ein Kunde an einer nicht leeren Station an, mietet sich ein Fahrrad, benutzt es für eine Weile und bringt es zu einer anderen Station zurück, woraufhin der Kunde das System wieder verlässt. Wenn ein Kunde an einer leeren Station ein Rad ausborgen möchte, verlässt er das System sofort. Im Folgenden definieren wir uns verschiedene operative Parameter und mathematische Prozesse [1]:

(1) **Stationen und Strecken:** Wir gehen wie schon erwähnt davon aus, dass unser System N verschiedene Stationen und $N(N-1)$ verschiedene Strecken beinhaltet, wobei eine Strecke die Verbindung zwischen zwei Stationen darstellt. Wir gehen weiter davon aus, dass zur Zeit $t = 0$ in der i-ten Station C_i Fahrräder und K_i Parkplätze vorhanden sind, wobei $1 \leq C_i \leq K_i < \infty$ für $i = 1, ..., N$ und $\sum_{i=1}^{N} C_i > K_j$. Die letzte Bedingung bedeutet, dass die Anzahl der Fahrräder im System größer ist als die Anzahl der Parkplätze in den einzelnen Stationen. Dies impliziert, dass es vorkommen kann, bei der Rückgabe eines Fahrrads an einer vollen Station zu verweilen.

(2) **Ankunftsprozess:** Die Ankunft der Kunden in jeder Station kann als allgemeiner erneuerbarer Prozess beschrieben werden. Für die Station j, sei $u_j = \{u_j(n), n \geq 1\}$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen, welche die Ankunftszeiten beschreiben. Genauer beschreibt $u_j(n) \geq 0$ die Zeit zwischen dem $(n-1)$ten Kunden und des $n$ten Kunden. Wir gehen davon aus, dass $u_j(n)$ den Erwartungswert $1/\lambda_j$ und die Varianz $c_{a,j}$ besitzt.

(3) **Rückgabezeiten:**

(3.1) **Die erste Rückgabe:** Wenn sich ein Kunde von der Station i ein Rad ausborgt, fährt er mit der Wahrscheinlichkeit $p_{i \to j}$ zur Station j, mit $\sum_{j \neq i}^{N} p_{i \to j} = 1$. Die Fahrtzeit eines Kunden auf der Strecke $i \to j$ wird beschrieben durch $v_{i \to j}^{(1)}$. Die Fahrtzeit ist allgemeinverteilt mit Erwartungswert $1/\mu_{i \to j}^{(1)}$ und Varianz $c_{s,i \to j}^{(1)}$. Wenn in der Station j ein Parkplatz frei ist, gibt der Kunde sein Rad ab und verlässt sofort das System. Sei nun $r^i = r_j^i(n), n \geq 1$ eine Folge von routing selections für $i, j = 1, ..., N$ mit $i \neq j$, wobei $r_j^i(n) = 1$ bedeutet, dass der $n$te Kunde ein Rad von der Station i ausborgt und direkt zur Station j fährt, somit gilt $P\{r_j^i(n) = 1\} = p_{i \to j}$.

(3.2) **Die zweite Rückgabe:** Sollte der erste Versuch ein Fahrrad zur Station j zurückzubringen fehlschlagen (da kein Parkplatz in der Station frei war), so muss der Kunde zu einer weiteren Station l_1 mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha_{j \to l_1}$, mit $\sum_{l_1 \neq j}^{N} \alpha_{j \to l_1} = 1$, fahren um dort sein Glück zu versuchen. Die Fahrtzeit beträgt hier $v_{j \to l_1}^{(2)}$ für die Strecke $j \to l_1$. Diese Fahrtzeit ist ebenfalls allgemein verteilt mit Erwartungswert $1/\mu_{j \to l_1}^{(2)}$ und Varianz $c_{s,j \to l_1}^{(2)}$. Wenn bei der Station l_1 mindestens ein Platz frei ist, so gibt der Kunde sein Fahrrad ab und verlässt sofort das System.

(3.3) **Die $(k+1)$te Rückgabe:** Hier gehen wir davon aus, dass der Kunde bereits k mal versucht hat sein gemietetes Rad zurückzubringen, jedoch immer gescheitert ist. Somit muss er auf den $(k+1)$ten Versuch hoffen. Somit fährt er von der l_{k-1} vollen Station zur $l_k$ten Station mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha_{l_{k-1} \to l_k}$, mit $\sum_{l_k \neq l_{k-1}}^{N} \alpha_{l_{k-1} \to l_k} = 1$ und einer Fahrtzeit $v_{l_{k-1} \to l_k}^{(2)}$ auf der Strecke $l_{k-1} \to l_k$, welche natürlich den Erwartungswert $1/\mu_{l_{k-1} \to l_k}^{(2)}$ und die Varianz $c_{s,l_{k-1} \to l_k}^{(2)}$ besitzt. Wenn bei der $l_k$ten Station ein Platz frei ist, wird das Fahrrad dort abgegeben und der Kunde verlässt das System, ansonsten muss er den Versuch so oft iterieren bis er das Rad abgegeben hat.

Ab sofort unterscheiden wir bei den Kunden in zwei Klassen. Zum einem die Klasse der Kunden, welche das Rad im ersten Versuch abgeben möchten (erste Klasse) und zum anderen die Klasse der Kunden welche versuchen das Rad im $k$ten Versuch zurückbringen (für $k \geq 2$). Da sich für die Kunden der zweiten Klasse auch die routing selection ändert definieren wir mit $\bar{r}^j = \{\bar{r}_i^j(n), n \geq 1\}$ eine Folge von routing selections für $i, j = 1, ..., N$ mit $i \neq j$, wobei $\bar{r}_i^j(n) = 1$ bedeutet, dass der $n$te Kunde, welcher sein Rad bei der vollen Station j nicht zurückbringen konnte auf die Strecke $j \to i$ wechselt, somit gilt $P\{\bar{r}_i^j(n) = 1\} = \alpha_{j \to i}$.

Das Gleiche machen wir für die Strecken, also $r^{j\to i,(d)} = \{r^{j\to i,(d)}(n), n \geq 1\}$ sei nun eine Folge von routing selections für $i, j = 1, ..., N$ mit $i \neq j, d = 1, 2,,$ wobei $r^{j\to i,(d)}(n) = 1$ bedeutet, dass der $n$te Kunde der Klasse d, welcher seine Fahrt auf der Strecken $j \to i$ beendet, sein Rad auch bei der Station i zurückbringen wird, somit gilt $P\{r^{j\to i,(d)}(n) = 1\} = p_{j\to i,i} = 1$.

(4) **zwei Klassen von Fahrtzeiten:** In (3), haben wir zwei Klassen von Fahrtzeiten, was darauf zurückzuführen ist, dass wir zwei Klassen von Kunden auf den Strecken haben. Sei nun $v_{j\to i}^{(d)} = \{v_{j\to i}^{(d)}(n), n \geq 1\}$ eine Folge von Zufallsvariablen der Klasse d mit $i, j = 1, ...N$ und $i \neq j, d = 1, 2$, wobei $v_{j\to i}^{(d)}(n)$ die Fahrtzeit des $n$ten Kunden der Klasse d auf der Strecke $j \to i$ beschreibt. Wir nehmen an, dass $v_{j\to i}^{(d)}$ den Erwartungswert $1/\mu_{j\to i}^{(d)}$ und die Varianz $c_{s,j\to i}^{(d)}$ besitzt.

(5) **Verlassen des Systems:** Bei der Rückgabe gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

- Ein Kunde verlässt das System, wenn er an einer leeren Station ein Rad ausborgen möchte.
- Wenn ein Kunde ein Rad mietet, verlässt er das System sofort nach der Rückgabe des Rades.

4 Das geschlossene Warteschlangennetzwerk

In diesem Abschnitt erstellen wir ein mehrklassiges geschlossenes Warteschlangennetzwerk, wobei man von einem Warteschlangennetzwerk spricht, wenn die Kunden mehrere etwa m verschiedene Bedienstationen in prinzipiell wahlfreier Reihenfolge durchlaufen können. Ist die Gesamtzahl der Kunden im Netzwerk fest vorgegeben, dann liegt ein geschlossenes Warteschlangennetzwerk vor. In unserem System betrachten wir nun die Fahrräder als Kunden und sowohl die Stationen als auch die Strecken bilden die Bedienstationen für unser Warteschlangennetzwerk. Man beachte, dass sich in den Stationen nur Kunden erster Klasse befinden können, währenddessen sich auf den Strecken Kunden beider Klassen aufhalten können [1].

In unserem System befinden sich nun N Stationen, $N(N-1)$ Strecken und eine bestimmte Anzahl an Fahrräder. Sei nun die Anzahl der Räder mit $\sum_{i=1}^{N} C_i$ fixiert, also gehen wir nicht von einem Verlust von Fahrrädern durch beispielsweise Vandalismus oder Diebstahl aus und es kommen keine neuen Räder in das System hinein. Mit diesen Merkmalen erhalten wir aus unserem Model ein geschlossenes Warteschlangennetzwerk.

Als Nächstes benötigen wir einige Prozesse, damit wir mit unserem Warteschlangennetzwerk rechnen können:

(1) **Die routing Matrix:** Die Komponenten $p_{\tilde{i},\tilde{j}}$ der routing Matrix P geben die Wahrscheinlichkeit an von einem Bediener $\tilde{i}$ zu einem anderen Bediener $\tilde{j}$ zu wechseln. Hierfür definieren wir uns eine Funktion $\sigma(.)$ mit

$$\begin{cases} \sigma(S_i) = i, & i = 1, ..., N, \\ \sigma(R_{i\to j}) = i\langle j\rangle, & i, j = 1, ..., N; i \neq j. \end{cases}$$

Mithilfe dieser Funktion beschreiben wir die Komponenenten $p_{\tilde{i},\tilde{j}}$ der Matrix P mit

$$p_{\tilde{i},\tilde{j}} = \begin{cases} 1, & \tilde{i} = \sigma(R_{i\to j}), \tilde{j} = \sigma(S_j), \\ p_{i\to j}, & \tilde{i} = \sigma(S_i), \tilde{j} = \sigma(R_{i\to j}), \\ \alpha_{j\to k}, & \tilde{i} = \sigma(R_{i\to j}), \tilde{j} = \sigma(R_{j\to k}), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) **Leistungsprozess der Stationen:** Für die Station j bezeichnet nun $S_j = \{S_j(t), t \geq 0\}$ den Leistungsprozess der Station j mit der Folge von Zwischenankunftszeiten $u_j = \{u_j(n), n \geq 1\}$. Es gilt

$$S_j(t) = sup\{n : U_j(n) \geq t\},$$

wobei $U_j(n) = \sum_{l=1}^{n} u_j(l), n \geq 1$ und $U_j(0) = 0$. Sei Weiters b_j der Mittelwert von S_j.

(3) **Leistungsprozess der Strecken:** Für $i, j = 1, ...N$ mit $i \neq j$ und $d = 1, 2$ definieren wir den Prozess $S^{(d)}_{j\to i} = \{S^{(d)}_{j\to i}(t), t \geq 0\}$ auf der Strecke von j nach i mit der Folge von Fahrtzeiten $v^{(d)}_{j\to i} = \{v^{(d)}_{j\to i}(n), n \geq 1\}$. Es gilt:

$$S^{(d)}_{j\to i}(t) = sup\{n : V^{(d)}_{j\to i}(n) \leq t\},$$

wobei $V^{(d)}_{j\to i}(n) = \sum_{l=1}^{n} v^{(d)}_{j\to i}(l), n \geq 1$ und $V^{(d)}_{j\to i}(0) = 0$. Sei Weiters $b^{(d)}_{j\to i}$ der Mittelwert von $S^{(d)}_{j\to i}$.

(4) **Der routing Prozess der Stationen:**
Fall 1: Für die Station j ist der routing Prozess $R^j = \{R^j_i, i \neq j, i = 1, ..., N\}$ und $R^j_i = R^j_i(n), n \geq 1$, zusammen mit der Folge von routing selections $r^i = \{r^i_j(n), n \geq 1\}$, gegeben durch

$$R^j(n) = \sum_{l=1}^{n} r^j(l)$$

bzw.

$$R^j_i(n) = \sum_{l=1}^{n} r^j_i(l), n \geq 1,$$

und die $i$te Komponente von $R^j(n)$ ist $R^j_i(n)$ zusammen mit der Wahrscheinlichkeit $p_{j\to i}$.

Fall 2: Für Station j ist der routing Prozess $\bar{R}^j = \{\bar{R}^j_i, i \neq j, i = 1, ..., N\}$ und $\bar{R}^j_i = \{\bar{R}^j_i(n), n \geq 1\}$, zusammen mit der Folge von routing selections im mehrfachen Versuch das Rad abzugeben $\bar{r}^i = \{\bar{r}^i_j(n), n \geq 1\}$, gegeben durch

$$\bar{R}^j(n) = \sum_{l=1}^{n} \bar{r}^j(l)$$

bzw.

$$\bar{R}^j_i(n) = \sum_{l=1}^{n} \bar{r}^j_i(l), n \geq 1,$$

und die $i$te Komponente von $\bar{R}^j(n)$ ist $\bar{R}^j_i(n)$ zusammen mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha_{j\to i}$.

(5) **Der routing Prozess der Strecken:** Für $i, j = 1, ...N$ mit $i \neq j$ und $d = 1, 2$ definieren wir den routing Prozess $R^{j\to i,(d)} = \{R^{j\to i,(d)}(n), n \geq 1\}$ auf der Strecke von j nach i mit der Folge von routing transfers $r^{j\to i,(d)} = \{r^{j\to i,(d)}, n \geq 1\}$. Es gilt:

$$R^{j\to i,(d)}(n) = \sum_{l=1}^{n} r^{j\to i,(d)}(l), n \geq 1,$$

und die $R^{j\to i,(d)}(n)$ sind asoziiert mit der Wahrscheinlichkeit $p_{j\to i,i} = 1$.

Für die Servicedisziplin unseres Warteschlangennetzwerkes gehen wir vom FIFO-Verfahren aus (first in first out).

5 Der gemeinsame Warteschlangenprozess

In diesem Abschnitt erstellen wir einen Prozess, welcher die Warteschlangenlänge für unser mehrklassiges geschlossenes Warteschlangennetzwerk, mithilfe von Mittelwerten von Fahrrädern in den Stationen und auf den Strecken, beschreibt. Des Weiteren werden Prozesse abhängig von der Zeit beschrieben und in Folge dessen werden einige Gleichungen aufgestellt [1].

(1) $Q(t) = \{(Q_j(t), Q^{(d)}_{j\to i}(t)), i \neq j; i, j = 1, ..., N; d = 1, 2; t \geq 0\}$ wobei $Q_j(t)$ und $Q^{(d)}_{j\to i}(t)$ die Anzahl der Kunden in den Stationen bzw. die Anzahl der Kunden auf den Strecken zum Zeitpunkt t bezeichnen.

(2) $Y^K(t) = \{(Y^K_j(t)), j = 1, ..., N; t \geq 0\}$, wobei $Y^k_j(t)$ die kumulierte Anzahl an Kunden ist, welche von der Station j wegfahren mussten, weil kein Parkplatz frei war, im Intervall $[0, t]$.

(3) $Y^0(t) = \{(Y^0_j(t), Y^{0,(d)}_{j\to i}(t)), i \neq j, i, j = 1, ..., N; d = 1, 2; t \geq 0\}$ wobei $Y^0_j(t)$ und $Y^{0,(d)}_{j\to i}(t)$ die aufsummierte Zeit beschreiben, in der die Station j bzw. die Strecke $j \to i$ leer sind (also wenn keine Kunden in den Bedienstationen vorhanden sind), im Zeitintervall $[0, t]$. Es gilt:

$$Y^0_j(t) = \int_0^t 1\{Q_j(s) = 0\}ds = t - B_j(t),$$

$$Y^{0,(d)}_{j\to i}(t) = \int_0^t 1\{Q^{(d)}_{j\to i}(s) = 0\}ds = t - B^{(d)}_{j\to i}(t).$$

(4) $B(t) = \{(B_j(t), B^{(d)}_{j\to i}(t)), i \neq j, i, j = 1, ..., N; d = 1, 2; t \geq 0\}$ wobei $B_j(t)$ und $B^{(d)}_{j\to i}(t)$ die Zeit beschreiben, in der die Station j bzw. die Strecke $j \to i$ im Zeitintervall $[0, t]$ nicht leer sind. Es gilt:

$$B_j(t) = \int_0^t 1\{0 < Q_j(s) \leq K_j\}ds,$$

$$B^{(d)}_{j\to i}(t) = \int_0^t 1\{Q^{(d)}_{j\to i}(s) > 0\}ds.$$

(5) $B^F(t) = \{(B^F_j(t)), j = 1, ..., N; t \geq 0\}$, wobei $B^F_j(t)$ die Zeit beschreibt, in der die Station j voll ist (also wenn keine Parkplätze mehr zur Verfügung stehen) im Zeitintervall $[0, t]$, es gilt:

$$B^F_j(t) = \int_0^t 1\{Q_j(s) = K_j\}ds.$$

Man beachte, dass wir nur von vollen Stationen ausgehen und nicht von vollen Strecken. Da die Beschränktheit der Strecken allerdings wichtig für spätere Ergebnisse ist, gehen wir davon aus, dass die Strecken die maximale Anzahl an Räder im System aufnehmen können.

(6) $S_j(B_j(t))$ beschreibt die Anzahl der Kunden welche ihre Leistung bei der Station j beendet haben im Intervall $[0,t]$. $S^{(d)}_{j\to i}(B^{(d)}_{j\to i}(t))$ beschreibt die Anzahl der Kunden, welcher ihren Bedienvorgang auf der Strecke $j \to i$ beendet haben im Intervall $[0,t]$.

(7) $R^j_i(S_j(B_j(t)))$ beschreibt die Anzahl der Kunden, welche die Station i von der Station j im Intervall $[0,t]$ beitreten. $\bar{R}^j_i(Y^K_j(t))$ beschreibt die Anzahl der Kunden welche Station i von der Station j aus beitreten, wobei bei j keine Parkplätze mehr zur Verfügung standen im Intervall $[0,t]$; und $R^{j\to i,(d)}(S^{(d)}_{j\to i}(B^{(d)}_{j\to i}(t)))$ beschreibt die Anzahl der Kunden der Klasse d welche Station i von der Strecke $j \to i$ im Intervall $[0,t]$ beitreten.

Nun können wir anhand der Prozesse, die wir aufgestellt haben, verschiedene Gleichungen für die Warteschlangenlänge aufstellen.

Für die Station $j = 1, ..., N$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} Q_j(t) =& Q_j(0) + \sum_{d=1}^{2}\sum_{i\neq j}^{N}[R^{i\to j,(d)}(S^{(d)}_{i\to j}(B^{(d)}_{i\to j}(t))) - R^{i\to j,(d)}(S^{(d)}_{i\to j}(B^F_j(t)))] \\ &- S_j(B_j(t)). \end{aligned}$$

Da man $Y^K_j(t)$ auch schreiben kann als $\sum_{d=1}^{2}\sum_{i\neq j}^{N} R^{i\to j,(d)}(S^{(d)}_{i\to j}(B^F_j(t)))$ erhalten wir:

$$Q_j(t) = Q_j(0) + \sum_{d=1}^{2}\sum_{i\neq j}^{N} R^{i\to j,(d)}(S^{(d)}_{i\to j}(B^{(d)}_{i\to j}(t))) - S_j(B_j(t)) - Y^k_j(t).$$

Für die Strecke $j \to i$ mit $i, j = 1, ..., N; i \neq j$ und $d = 1, 2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} Q^{(1)}_{j\to i}(t) &= Q^{(1)}_{j\to i}(0) + R^j_i(S_j(B_j(t))) - S^{(1)}_{j\to i}(B^{(1)}_{j\to i}(t)), \\ Q^{(2)}_{j\to i}(t) &= Q^{(2)}_{j\to i}(0) + \bar{R}^j_i(Y^k_j(t)) - S^{(2)}_{j\to i}(B^{(2)}_{j\to i}(t)). \end{aligned}$$

Da die Anzahl der Räder in unserem System fixiert ist, erhalten wir weiters:

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i(t) + \sum_{d=1}^{2}\sum_{i\neq j}^{N} Q^{(d)}_{i\to j}(t) = \sum_{i=1}^{N} C_i.$$

Wir erarbeiten uns nun einen Zentrierungsoperator zur Warteschlangenlänge, aufbauend auf der Darstellung unserer Stationen und der Strecken. Dafür schreiben wir die oben aufgestellten Gleichungen um und erhalten:

$$Q(t) = X(t) + R^0 Y^0(t) + R^K Y^K(t),$$

wobei $X(t) = (X_1(t), X_2(t), ..., X_N(t))$, und $X_j(t)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} X_j(t) =& Q_j(0) + \sum_{d=1}^{2}\sum_{i\neq j}^{N}[R^{i\to j,(d)}(S^{(d)}_{i\to j}(B^{(d)}_{i\to j}(t))) - S^{(d)}_{i\to j}(B^{(d)}_{i\to j}(t))] \\ &+ \sum_{d=1}^{2}\sum_{i\neq j}^{N}[S^{(d)}_{i\to j}(B^{(d)}_{i\to j}(t)) - b^{(d)}_{i\to j}B^{(d)}_{i\to j}(t)] - [S_j(B_j(t)) - b_jB_j(t)] \\ &- Y_j^K(t) + \theta_j t, \end{aligned}$$

$$\theta_j = \sum_{d=1}^{2}\sum_{i\neq j}^{N} b^{(d)}_{i\to j} + b_j,$$

Für die Stationen gelten:

$$(R^0Y^0(t))_{\tilde{i},\tilde{j}} = \begin{cases} b_jY_j^0(t), & \tilde{i} = \sigma(S_i), \tilde{j} = \tilde{i}, \\ -\sum_{d=1}^{2} b^{(d)}_{i\to j}Y^{0,(d)}_{i\to j}(t), & \tilde{i} = \sigma(S_i), \tilde{j} = \sigma(R_{i\to j}), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$(R^KY^K(t))_{\tilde{i},\tilde{j}} = \begin{cases} -Y_j^K(t), & \tilde{i} = \sigma(S_i), \tilde{i} = \tilde{j}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Für die Strecken mit $d = 1$ gelten:

$$(R^0Y^0(t))_{\tilde{i},\tilde{j}} = \begin{cases} b^{(1)}_{j\to i}Y^{0,(1)}_{j\to i}(t), & \tilde{i} = \sigma(R_{j\to i}), \tilde{j} = \tilde{i}, \\ p_{j\to i}b_jY_j^0(t), & \tilde{i} = \sigma(R_{j\to i}), \tilde{j} = \sigma(S_j), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$(R^KY^K(t))_{\tilde{i},\tilde{j}} = 0.$$

Für die Strecken mit $d = 2$ gelten:

$$(R^0Y^0(t))_{\tilde{i},\tilde{j}} = \begin{cases} b^{(2)}_{j\to i}Y^{0,(2)}_{j\to i}(t), & \tilde{i} = \sigma(R_{j\to i}), \tilde{j} = \tilde{i}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$(R^KY^K(t))_{\tilde{i},\tilde{j}} = \begin{cases} \alpha_{j\to i}Y_j^K(t), & \tilde{i} = \sigma(R_{j\to i}), \tilde{j} = \sigma(S_j), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

6 Fluid Limits

In diesem Abschnitt werden wir versuchen, ein fluid limit theorem mithilfe der Warteschlangenprozesse unseres geschlossenen Warteschlangennetzwerks aufzustellen.
Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt für $t \to \infty$:

$$(\frac{1}{t}S_j(t), \frac{1}{t}S_{j\to i}^{(d)}(t)) \to (b_j, b_{j\to i}^{(d)}), d = 1, 2,$$

wobei b_j und $b_{j\to i}^{(d)}$ die Mittelwerte der Prozesse $S_j(t)$ und $S_{j\to i}^{(d)}(t)$ bezeichnen. Für $n \to \infty$ gilt:

$$(\frac{1}{n}R_i^j(n), \frac{1}{n}\bar{R}_i^j(n), \frac{1}{n}R^{i\to j,(d)}(n)) \to (p_{j\to i}, \alpha_{j\to i}, 1), d = 1, 2.$$

Wir gehen nun von einer Folge von geschlossenen Warteschlangennetzwerken, indiziert mit $n = 1, 2...$, aus. Alle Prozesse und Parameter, welche zum $n$ten Wartschlangennetzwerk gehören werden mit einem hochgestellten n versehen. Also werden für das $n$te Warteschlangennetzwerk die erneuerbaren Leistungsprozesse der Stationen bzw. der Strecken beschrieben mit $S_j^n = \{S_j^n(t), t \geq 0\}$ und $S_{j\to i}^{(d),n} = \{S_{j\to i}^{(d),n}(t), t \geq 0\}$. Sei b_j^n und $b_{j\to i}^{(d),n}$ die Mittelwerte von $S_j^n(t)$ und $S_{j\to i}^{(d),n}(t)$. Für die N Stationen beschreiben die Vektoren $K^n = (K_1^n, ..., K_N^n)'$ und $C^n = (C_1^n, ..., C_N^n)'$ die Anzahl der Parkplätze in den Stationen bzw. die Anzahl der Räder darin.

Heavy traffic conditions: Für die Fluid Limits betrachtet man Annäherungen für eine starke Auslastung bzw. wie in unserem Fall für einen starken Verkehr. Diese Näherungen ergeben sich aus der Betrachtung des Modells unter den Grenzwerten einiger Modellparameter, und damit das Ergebnis endlich ist, muss das Modell mit einem Faktor n neu skaliert werden.
Wir nehmen an, dass für $n \to \infty$

$$(b_j^n, b_{j\to i}^{(d),n}, \sqrt{n}\theta_j^n, \sqrt{n}\theta_{j\to i}^{(d),n}, \frac{1}{\sqrt{n}}C_i^n, \frac{1}{\sqrt{n}}K_i^n) \to (b_j, b_{j\to i}^{(d)}, \theta_j, \theta_{j\to i}^{(d)}, C_i, K_i),$$

wobei $\theta_j^n = \sum_{d=1}^2 \sum_{j\neq i}^N b_{j\to i}^{(d),n} - b_j^n; \theta_{j\to i}^{(1),n} = p_{j\to i}b_j^n - b_{j\to i}^{(1),n}$ und $\theta_{j\to i}^{(2),n} = -b_{j\to i}^{(2),n}$. Zur gleichen Zeit gehen wir davon aus, dass für $i, j = 1, ..., N$ mit $i \neq j, d = 1, 2$ alle Grenzwerte endlich sind.
Für die anfängliche Warteschlangenlänge $Q_j^n(0)$ und $Q_{j\to i}^{(d),n}(0)$, gehen wir davon aus, dass für $n \to \infty$

$$\bar{Q}_j^n(0) \equiv \frac{1}{n}Q_j^n(0) \to 0 \text{ und } \bar{Q}_{j\to i}^{(d),n}(0) \equiv \frac{1}{n}Q_{j\to i}^{(d),n}(0) \to 0.$$

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt für $d = 1, 2$ wenn $n \to \infty$

$$(\bar{S}_j^n(t), \bar{S}_{j\to i}^{(d),n}(t), \bar{R}_i^{j,n}(t), \bar{\bar{R}}_i^{j,n}(t), \bar{R}^{j\to i,(d),n}(t)) \to (b_jt, b_{j\to i}^{(d)}t, p_{j\to i}t, \alpha_{j\to i}t, t), u.o.c.,$$

($u.o.c.$ bezeichnet hier die gleichmäßige Konvergenz) wobei

$$\bar{S}_j^n(t) = \frac{1}{n}S_j^n(nt), \bar{S}_{j\to i}^{(d),n}(t) = \frac{1}{n}S_j^{(d),n}(nt), \bar{R}_i^{j,n}(t) = \frac{1}{n}R_i^j(\lfloor nt \rfloor);$$

$$\bar{R}_i^{j,n}(t) = \frac{1}{n}\bar{R}_i^j(\lfloor nt \rfloor), \bar{R}^{j\to i,(d),n}(t) = \frac{1}{n}R^{j\to i,(d)}(\lfloor nt \rfloor).$$

Im Folgenden schreiben wir für einen beliebigen Prozess $W^n = \{W^n(t), t \geq 0\}$ den zentrierten Prozess $\hat{W}^n = \{\hat{W}^n(t), t \geq 0\}$ mit

$$\hat{W}^n(nt) = W^n(nt) - w^n nt,$$

wobei w^n den Mittelwert des Prozesses W^n darstellt.
Dementsprechend schreiben wir einige Prozesse der Stationen und der Strecken als:

$$\hat{S}_j^n(nt) = S_j^n(nt) - b_j^n nt, \hat{S}_{j\to i}^{(d),n}(t) = S_{j\to i}^{(d),n}(nt) - b_{j\to i}^{(d),n} nt,$$

$$\hat{R}_i^{j,n}(t) = R_i^{j,n}(\lfloor nt \rfloor) - p_{j\to i}\lfloor nt \rfloor, \hat{\bar{R}}_i^{j,n}(\lfloor nt \rfloor) - \alpha_{j\to i}\lfloor nt \rfloor).$$

Theorem 1 *(Fluid Limit Theorem) für $n \to \infty$ erhalten wir:*

$$(\bar{B}_j^n(t), \bar{B}_{j\to i}^{(d),n}(t), \bar{Y}_j^{0,n}(t), \bar{Y}_{j\to i}^{0,(d),n}(t)) \to (\bar{\tau}_j(t), \bar{\tau}_{j\to i}^{(d)}(t), \bar{Y}_j^0(t), \bar{Y}0, (d)_{j\to i}(t)) u.o.c,$$

wobei $\bar{\tau}_j(t) \equiv et, \bar{\tau}_{j\to i}^{(d)}(t) \equiv et, \bar{Y}_j(t) \equiv 0$ und $\bar{Y}_{j\to i}^{(d)} \equiv 0; \bar{Y}_j^{0,n}(t) = \frac{1}{n}Y_j^{0,n}(nt), \bar{Y}_{j\to i}^{0,(d),n}(t) = \frac{1}{n}Y_{j\to i}^{0,(d),n}(nt), \bar{B}_j^n(t) = \frac{1}{n}B_j^n(nt)$ und $\bar{B}_{j\to i}^{(d),n}(t) = \frac{1}{n}B_{j\to i}^{(d),n}(nt)$ für $i, j = 1, ..., N$ mit $i \neq j, d = 1, 2$.

Dieses Theorem baut auf die oben definierten Prozesse und der von uns vorgegebenen heavy traffic conditions auf. Für den Beweis dieses Theorems wird auf das Werk Fluid and Diffusion Limits for Bike Sharing Systems von Quan-Lin Li, Zhi-Yong Qian und Rui-Na Fan verwiesen, auf dem diese Arbeit aufbaut. [1]

7 Diffusion Limits

In diesem Abschnitt definieren wir uns diffusionskalierte Prozesse unserer Warteschlangenprozesse und betrachten die Resultate, welche sich uns aus der schwachen Konvergenz ergeben.

Wir führen nun den diffusionskalierten Prozess ein:
Für einen Prozess $\hat{W}^n = \{\hat{W}^n(nt), t \geq 0\}$, ist der diffusionskalierte Prozess gegeben durch

$$\tilde{W}^n(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{W}^n(nt) = \frac{1}{\sqrt{n}}(W^n(nt) - w^n nt).$$

Für die Stationen und für die Strecken schreiben wir also nun:

$$\tilde{S}_j^n(t) = \sqrt{n}(\frac{S_j^n(nt)}{n} - b_j^n t), \tilde{S}_{j\to i}^{(d),n}(t) = \sqrt{n}(\frac{S_{j\to i}^{(d),n}(nt)}{n} - b_{j\to i}^{(d),n} t),$$

$$\tilde{R}_i^{j,n}(t) = \sqrt{n}(\frac{R_i^{j,n}(nt)}{n} - p_{j\to i}(t), \tilde{\bar{R}}_i^{j,n}(t) = \sqrt{n}(\frac{\bar{R}_i^{j,n}(nt)}{n} - \alpha_{j\to i}t),$$

$$\tilde{R}^{j\to i,(d),n}(t) = \sqrt{n}(\frac{R^{j\to i,(d),n}(nt)}{n} - t).$$

Für die anfänglichen Warteschlangenprozesse $Q_j^n(0)$ und $Q_{j\to i}^{n,(d)}(0)$ mit $i, j = 1, ..., N$ und $i \neq j, d = 1, 2$ gehen wir davon aus, dass für $n \to \infty$

$$\tilde{Q}_j^n(0) \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} Q_j^n(0) \Rightarrow \tilde{Q}(0),$$

$$\tilde{Q}_{j\to i}^{(d),n}(0) \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} Q_{j\to i}^{(d),n}(0) \Rightarrow \tilde{Q}_{j\to i}^{(d)}(0).$$

Aus dem Skorohod Representation Theorem und dem Donsker's Theorem folgt:

$$(\tilde{S}_j^n(t), \tilde{S}_{j\to i}^{(d),n}(t), \tilde{R}_i^{j,n}(t), \tilde{\bar{R}}_i^{j,n}(t), \tilde{R}^{j\to i,(d),n}(t)) \Rightarrow (\tilde{S}_j(t), \tilde{S}_{j\to i}^{(d)}(t), \tilde{R}_i^j(t), \tilde{\bar{R}}_i^j(t), \tilde{R}^{j\to i,(d)}(t))$$

wobei $\Rightarrow$ die schwache Konvergenz beschreibt und $(\tilde{S}_j(t), \tilde{S}_{j\to i}^{(d)}(t), \tilde{R}_i^j(t), \tilde{\bar{R}}_i^j(t)$ sowie $\tilde{R}^{j\to i,(d)}(t)$ Brownsche Bewegungen mit Kovarianzmatrizen $\Gamma^S, \Gamma^{R,S,l}, \Gamma^{\bar{R},S,l}$ und $\Gamma^{R,S,j\to i}$, sind.

(1) Die Kovarianzmatrix von $\tilde{S}(t) = (\tilde{S}_j(t), \tilde{S}_{j\to i}^{(d)}(t))$ für $i, j = 1, ..., N$ mit $i \neq j, d = 1, 2$, ist gegeben mit

$$\Gamma^S = \begin{pmatrix} (\Gamma^{S,S})_{N\times N} & 0 \\ 0 & (\Gamma^{S,R,(d)})_{(N^2-N)\times(N^2-N)} \end{pmatrix}_{N^2\times N^2}$$

wobei

$$(\Gamma^{S,S})_{\tilde{i},\tilde{j}} = \begin{cases} b_i c_{a,i}^2 \delta_{\tilde{i},\tilde{j}}, & \sigma(S_i) = \tilde{i} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$(\Gamma^{S,R,(d)})_{\tilde{i},\tilde{j}} = \begin{cases} b_{i\to j}^{(d)} (c_{s,i\to j}^{(d)})^2 \delta_{\tilde{i},\tilde{j}}, & \sigma(R_{i\to j}) = \tilde{i}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) Die Kovarianzmatrix von $\tilde{R}(t) = (\tilde{R}^l(t))$ für $l = 1, ..., N$ ist gegeben durch

$$\Gamma^{R,S,l} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\Gamma^{R,S,l})_{(N-1)\times(N-1)} \end{pmatrix}_{N^2\times N^2}$$

wobei

$$(\Gamma_{\tilde{i},\tilde{j}}^{R,S,l}) = \begin{cases} p_{l\to k_1}(\delta_{\tilde{i},\tilde{j}} - p_{l\to k_2}), & \sigma(R_{l\to k_1}) = \tilde{i}, \sigma(R_{l\to k_2}) = \tilde{j}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(3) Die Kovarianzmatrix von $\tilde{\bar{R}}(t) = (\tilde{\bar{R}}^l(t))$ für $l = 1, ..., N$ ist gegeben durch

$$\Gamma^{\bar{R},S,l} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\Gamma^{\bar{R},S,l})_{(N-1)\times(N-1)} \end{pmatrix}_{N^2 \times N^2}$$

wobei

$$(\Gamma^{\bar{R},S,l}_{\tilde{i},\tilde{j}}) = \begin{cases} \alpha_{l\to k_1}(\delta_{\tilde{i},\tilde{j}} - \alpha_{l\to k_2}), & \sigma(R_{l\to k_1}) = \tilde{i}, \sigma(R_{l\to k_2}) = \tilde{j}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(4) Die Kovarianzmatrix von $\tilde{R}(t) = (\tilde{R}^{j\to i}(t))$ für $l = 1, ..., N$ ist gegeben durch

$$\Gamma^{R,S,i\to j} = \begin{pmatrix} (\Gamma^{R,R,j\to i})_{N\times N} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{N^2 \times N^2}$$

wobei

$$(\Gamma^{R,R,j\to i}_{\tilde{l},\tilde{k}}) = \begin{cases} p_{j\to i,l}(\delta_{\tilde{l},\tilde{k}} - p_{j\to i,k}), & \sigma(S_l) = \tilde{l}, \sigma(S_k) = \tilde{k}, \\ 0. & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Theorem 2 *(Diffusion Limit Theorem)*

$$(\frac{1}{\sqrt{n}} Q^n(nt), \frac{1}{\sqrt{n}} Y^{0,n}(nt), \frac{1}{\sqrt{n}} Y^{K,n}(nt)) \Rightarrow (\tilde{Q}(t), \tilde{Y}^0(t), \tilde{Y}^K(t)),$$

wobei $\tilde{Q}(t) = (\tilde{Q}_j(t), \tilde{Q}^{(d)}_{j\to i}(t)), \tilde{Y}^0(t) = (\tilde{Y}^0_j(t), \tilde{Y}^{0,(d)}_{j\to i}(t)); \tilde{Q}(t)$ ist zusammen mit $\tilde{Y}^0(t)$ und $\tilde{Y}^K(t)$ eine $(S, \theta, \Gamma, R)-$semmartingale reflecting Brownian motion mit $\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}(0) + \tilde{X}(t) + R^0\tilde{Y}^0(t) + R^K\tilde{Y}^K(t)$. [1]

Wobei für die Station j ist $\tilde{X}_j(t)$ gegeben durch:

$$\tilde{X}^n_j(t) \Rightarrow \tilde{X}_j(t) = \tilde{Q}_j(0) + \sum_{d=1}^{2} \sum_{i\neq j}^{N} \tilde{S}^{(d)}_{i\to j}(t) - \tilde{S}_j(t) + \theta_j t,$$

wobei $\tilde{X}_j(t)$ eine Brownsche Bewegung mit der anfänglichen Warteschlangenlänge $\tilde{Q}_j(0)$ und der Drift θ_j ist. R^0 und R^K sind in Kapitel 3 gegeben. Für die Strecke $j \to i$, wenn $d = 1$, ist $\tilde{X}^{(1)}_{j\to i}$ gegeben durch

$$\tilde{X}^{(1),n}_{j\to i} \Rightarrow \tilde{X}^{(1)}_{j\to i}(t) = \tilde{Q}^{(1)}_{j\to i}(0) + \tilde{R}^j_i(b_j t) + p_{j\to i}\tilde{S}_j(t) - \tilde{S}^{(1)}_{j\to i}(t) + \theta^{(1)}_{j\to i} t,$$

wobei $\tilde{X}^{(1)}_{j\to i}(t)$ eine Brownsche Bewegung mit der anfänglichen Warteschlangenlänge $\tilde{Q}^{(1)}_{j\to i}(0)$ und Drift $\theta^{(1)}_{j\to i}$ ist, R^0 und R^K sind für den Fall $d = 1$ ebenfalls in Kapitel 3 gegeben. Für den Fall $d = 2$, ist $\tilde{X}^{(2),n}_{j\to i}$ gegeben durch

$$\tilde{X}^{(2),n}_{j\to i} \Rightarrow \tilde{X}^{(2)}_{j\to i}(t) = \tilde{Q}^{(2)}_{j\to i}(0) + \tilde{\bar{R}}^{j,n}_i(\bar{Y}^{K,n}_j(t))) - \tilde{S}^{(2)}_{j\to i}(t) + \theta^{(2)}_{j\to i} t,$$

wobei auch hier $\tilde{X}^{(2)}_{j\to i}(t)$ eine Brownsche Bewegung mit der anfänglichen Warteschlangenlänge $\tilde{Q}^{(2)}_{j\to i}(0)$ und Drift $\theta^{(2)}_{j\to i}$ ist. R^0 und R^K sind für den Fall $d = 2$ wieder in Kapitel 3 gegeben. Zu guter Letzt ist die Kovarianzmatrix $\Gamma = (\Gamma_{\tilde{k},\tilde{l}})_{N^2\times N^2}$ von $\tilde{X}(t) = (\tilde{X}_j(t), \tilde{X}^{(d)}_{j\to i}(t))$ gegeben durch:

$$\Gamma_{\tilde{k},\tilde{l}} = \begin{cases} \sum_{d=1}^{2}\sum_{i\neq k}^{N} b^{(d)}_{i\to k}(c^{(d)}_{s,i\to k})^2\delta_{\tilde{k},\tilde{l}} + b_l c^2_{a,l}\delta_{\tilde{k},\tilde{l}} & \sigma(S_k) = \tilde{k}, \sigma(S_l) = \tilde{l}; \\ p_{k\to l} b_k c^2_{a,k}, & \sigma(S_k) = \tilde{k}, \sigma(R_{k\to l}) = \tilde{l}, d = 1; \\ b_i p_{i\to k}(\delta_{\tilde{k},\tilde{l}} - p_{i\to l}) + p_{k\to l} b_k c^2_{a,k} + b^{(d)}_{k\to l}(c^{(d)}_{s,k\to l})^2, & \sigma(R_{k\to l}) = \tilde{k}, \tilde{l} = \tilde{k}, d = 1; \\ b_k \alpha_{i\to k}(\delta_{\tilde{k},\tilde{l}} - \alpha_{i\to l}) + b^{(d)}_{k\to l}(c^{(d)}_{s,k\to l})^2, & \sigma(R_{k\to l}) = \tilde{k}, \tilde{l} = \tilde{k}, d = 2; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Auch hier wird für den Beweis des Theorems auf die Literatur verwiesen, um zwar wieder auf das Werk auf dem diese Arbeit basiert, *Fluid and Diffusion Limits for Bike Sharing Systems* von Quan-Lin Li, Zhi-Yong Qian und Rui-Na Fan. [1]

8 Conclusio

In dieser Arbeit haben wir ein generelles Bike-Sharing-System erstellt, anhand der allgemeinen und der mathematischen Grundlagen, welche in dieser Arbeit beschrieben wurden, mit erneuerbaren Ankunftsprozessen und generellen Fahrtzeiten. Darüber hinaus haben wir eine Fluid- und eine Diffusionsapproximation von unserem mehrklassigen geschlossenen Warteschlangennetzwerk erstellt, bei welchem die Fahrräder als Kunden und die Stationen sowie die Strecken als Bediener dargestellt werden. Dazu konvergiert der Prozess der Warteschlangenlänge, welcher sich aus Mittelwerten von den Fahrrädern in den Stationen bzw. auf den Strecken darstellen lässt, in Verteilung gegen eine bestimmte Brownsche Bewegung. Zu guter Letzt wurden noch ein Fluid Limit Theorem und ein Diffusion Limit Theorem aufgestellt. Diese Arbeit zeigt, wie man mithilfe von einem System, welches in unserem Alltag vorkommt, ein Warteschlangennetzwerk konstruiert, auf welchem man verschiedene Prozesse definiert und Grenzwerte von diesen betrachtet.

Literaturverzeichnis

[1] Quan-Lin li, Zhi-Yong Qian and Rui-Na Fan.: Fluid and Diffusion Limits for Bike Sharing Systems. Yanshan University, Qinhuangdao 066004, P.R. China, 2018

[2]Karl Grill.: Warteschlangentheorie. Technische Universität Wien, 1999

[3]Dipl.-Math. Lars Dohse.: Diffusionsapproximation von Warteschlangensystemen mit Gruppenbedienung. Technische Universität Clausthal, 2005

[4] https://www.mathematik.tu-clausthal.de/arbeitsgruppen/stochastik/public-relations/das-grundmodell-der-warteschlangentheorie/. Aufgerufen: 05.01.2020