SEMINARARBEIT

Viability and Arbitrage under Knightian Uncertainty

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Elena Mayr
Matrikelnummer: 11701234

Wien, am 29.2.2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

> „Unsicherheit muss als etwas radikal anderes als die vertraute Bedeutung von Risiko aufgefasst werden, von der es nie ordentlich getrennt wurde [...] Die entscheidende Tatsache ist: Risiko meint in manchen Fällen eine messbare Quantität, während es in anderen Fällen etwas bezeichnet, das einen völlig anderen Charakter hat; und es gibt weitreichende und entscheidende Unterschiede bzgl. des Verhaltens von Phänomenen je nachdem welche dieser [Bedeutungen] tatsächlich vorliegt.[...] Es scheint, dass messbare Unsicherheit - „risk proper“ genannt - sich von nicht-messbarer [Unsicherheit] in einem solchen Ausmaß unterscheidet, dass es sich [bei Erstem] im Endeffekt überhaupt nicht um eine Unsicherheit handelt.“
>
> – [Knight, 1921]

Unter einem Risiko versteht man eine Situation die eine pobabilistische Beschreibung erlaubt. Man kann also berechnen wie wahrscheinlich es ist, das dieses Ereignis eintritt. Eine Knightsche Unsicherheit ist eine Situation, in der keine probabilistische Beschreibung gelingt. Es liegt entweder kein oder mehrere Priors vor.

Wie in diesem Zitat von Frank Knight, dem Pionier der Abgrenzung zwischen Risiko und Unsicherheit, erkennbar ist, reicht es Begriffe wie Arbitrage und Wirtschaftlichkeit nicht nur unter Risiko zu definieren, man muss ein allgemeineres Modell aufzubauen.

Situationen wie die Finanzkrise zeigen dass es auch in der Finanzwirtschaft zu Ereignissen kommen kann deren Risiko man nicht abschätzen kann. Beispiele hierfür sind Abweichungen der Schwankungsbreiten von Asset Preisen oder das Kreditrisiko,in diesen Bereichen können relevante Parameter nicht durch ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß modelliert werden.

Anfangs werde ich das bekannte Modell von [Harrison and Kreps, 1979] anführen und die Begriffe Arbitrage und Wirtschaftlichkeit unter Risiko erklären. Sie beschreiben ein allgemeine Theorie der Arbitrage in einem Einperiodenmodell mit einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P)und Ereignissen $\omega \in \Omega$. Diese Modell wird ausgeweitet auf ein allgemeineres Mehrperiodenmodell. Dieses Mehrperiodenmodell liegt einer steigenden Familie von sub-σ-Algebren und einem stochastischen Prozess $Z = \{Z(t); t \in \mathbf{T}\}$ zugrunde, welcher zu $\{F_t\}$ adaptiert ist und $Z_k(t)$ ist quadratisch integrierbar für alle $t \in \mathbf{T}$ und $k = 1, \ldots, K$. Im Anschluss dieses Modell wird noch das Fundamental Theorem of Asset Pricing angeführt.

Schließlich wird das allgemeinere Modell von [Burzoni et al., 2017] beschreiben das sich mit den Zusammenhängen von Arbitrage und Wirtschaftlichkeit unter der Knightschen Unsicherheit auseinandersetzt und das Fundamental Theorem of Asset Pricing für die Knightsche Unsicherheit formuliert. Der gemeinsame Prior wird gegen eine gemeinsame Ordnung ausgetauscht. Die Handelnden in der Wirtschaft sind Agenten, ihre Präferenzen sind bezüglich der gemeinsamen Ordnung monoton. Die Kernaussage zeigt dass die Abwesenheit von Arbitrage und die Wirtschaftlichkeit des Modells äquivalent sind.

Im letzten Teil meiner Seminararbeit wird das eben angeführte Modell diskutiert und einige Beispiele angeführt.

Kapitel 2

Arbitrage und Wirtschaftlichkeit unter Risiko

Im Folgenden werde ich einen Teil vom Modell von [Harrison and Kreps, 1979] anführen, das den Zusammenhang von Arbitrage und Wirtschaftlichkeit beschreibt. Im Anschluss wird noch kurz auf das Fundamental Theorem of Asset Pricing eingegangen.

2.1 Wirtschaftlichkeit und Arbitrage nach Harrison und Kreps

[Harrison and Kreps, 1979] betrachten zuerst ein Einperiodenmodell und erweitern das Modell auf ein Mehrperiodenmodell in dem zu mehreren Zeitpunkten gehandelt werden kann.

2.1.1 Einperiodenmodell

Es seien ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) und zwei Zeiten (t=0,T) gegeben. $\omega \in \Omega$ stellen die verschiedenen möglichen Zustände dar.Rentspricht der reellen Gerade. Der Raum X der Zahlungsansprüche, auch Contingent Claims genannt, die zum Zeitpunkt T konsumiert werden ist der Raum der F-messbaren quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen, also $X = L^2(\Omega, F, P)$. (Diese Einschränkung wird zwar für die meisten Folgerungen nicht benötigt erleichtert jedoch die Arbeit.) In dieser Wirtschaft gibt es nur ein Gut.Die Handelnden in der Wirtschaft werden Agenten genannt welche durch Präferenzen charakterisiert werden.

Die Agenten können zum Zeitpunkt $t = 0$ r Einheiten vom Gut kaufen. Der Konsum zum Zeitpunkt $t = T$ hängt jedoch davon ab welcher Zustand $\omega \in \Omega$ eingetreten ist. Der Konsum zum Zeitpunkt $t = T$ wird daher durch eine Zufallsvariable $x \in X$ dargestellt, wobei X der Raum der Zufallsvariablen auf (Ω, F) ist.

Definition 1 (Agent)**.** *Ein Agent wird durch seine Präferenzen auf dem Raum der Handelsbilanzen $R \times X$ definiert. Die Präferenzen sind komplette, transitive und binäre Relationen $\succcurlyeq$ auf $R \times X$. Für diese Präferenzen gilt:*

- ***Konvexität*** *- für alle $(r, x) \in R \times X$ gilt:*

$$\{(r', x') \in R \times X : (r', x') \succcurlyeq (r, x)\} \text{ ist konvex}$$

- ***Stetigkeit*** *- sei τ das Produkt der Topologie auf $R \times X$. τ ist abgeleitet von der Euklidischen Topologie auf R und von der Normtopologie von L^2 auf X. Es gilt für alle $(r, x) \in R \times X$, dass folgende Mengen $\tau-$abgeschlossen sind*

$$\{(r', x') \in R \times X : (r', x') \succcurlyeq (r, x)\} \wedge \{(r', x') \in R \times X : (r, x) \succcurlyeq (r', x')\}$$

- ***streng monotones Wachstum*** *Sei X^+ die Menge der Zahlungsansprüche x für die gilt : $P(x \geq 0) = 1$ und $P(x > 0) > 0$. Für alle $(r, x) \in R \times X,\ r' \in (0, \infty)$ und $x' \in X^+$ gilt:*

$$(r + r', x) \succ (r, x) \text{ und } (r, x + x') \succ (r, x)$$

In Worten bedeutet das, startet man mit einer Handelsbilanz (r,x) und fügt entweder eine positive Menge an "t=0 Konsum"oder einen Zahlungsanspruch $x \in X^+$ (welche den t=T Konsum nicht vermindert sondern nur potentiell erhöht), dann wird der daraus resultierende Handelsbilanzvektor strikt zum Original bevorzugt.

Man nennt **A** die Menge aller Agenten, das ist die Menge aller Präferenzrelationen die die eben genannten Eigenschaften erfüllen.

Nun zum Wahrscheinlichkeitsmaß. Da wir uns in diesem Kapitel mit Risiko auseinandersetzten können wir auch von einem Wahrscheinlichkeitsmaß sprechen. Man nehme an, es existiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf (Ω, F) und eine Funktion $u : R \times R \to R$ sodass $\succcurlyeq$ gegeben ist durch:

$$(r, x) \succcurlyeq (r', x') \text{ falls } \int u(r, x(\omega))Q(d\omega) \geq \int u(r', x'(\omega))Q(d\omega)$$

(vorausgesetzt die Integrale existieren und sind endlich) Eine Handelsbilanz wird also einer anderen bevorzugt falls das Integral einer Funktion bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes größer ist als das andere, also der Erwartungswert der Funktion größer ist als der andere.

Hier sieht man, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß P drei Rollen hat.

1. P beschreibt den Raum X der Zahlungsansprüche
2. P bestimmt die Stetigkeitsbedingung für $\succcurlyeq \in A$
3. Durch die Nullmengen spielt P auch eine Rolle in den Voraussetzungen, dass $\succcurlyeq \in \ A$ streng monoton wachsend ist

Da Agenten das Gut zu einem Preis kaufen müssen liegt es nahe ein Preissystem zu definieren um sich mit dem Begriff der Wirtschaftlichkeit näher auseinander zu setzen.

Definition 2 (Preissystem)**.** *Ein Preissystem ist ein Paar* (M, π)*, wobei* M *ein Unterraum auf* X *ist und* π *ein lineares Funktional auf* M*.*

Die Interpretation ist, dass Agenten jedes Paar $(r, m) \in R \times M$ zu einem Preis $r + \pi(m)$ kaufen können. Die Märkte sind reibungslos, außerdem gibt es keine Beschränkungen bezüglich Short Sales. $M \subset X$ ist also der Raum der zu vermarktenden Zahlungsansprüche und $\pi(m)$ gibt den zu m gehörigen Preis an.

Da nun das Preissystem definiert wurde kann man nun auch Wirtschaftlichkeit definieren.

Definition 3 (Wirtschaftlichkeit)**.** *Ein Preissystem* (M, π) *ist wirtschaftlich, falls es einen Agenten* $\succcurlyeq \in \boldsymbol{A}$ *und eine Handelsbilanz* $(r^*, m^*) \in R \times M$ *gibt sodass :*

$$r^* + \pi(m^*) \leq 0 \textit{ und } (r^*, m^*) \succcurlyeq (r, m) \textit{ für alle } (r, m) \in R \times M$$

$$\textit{wobei } r + \pi(m) \leq 0$$

Das bedeutet, dass ein Agent in der Lage ist einen optimalen Handel zu findenund seine Budgetbegrenzung $r + \pi(m) \leq 0$ zu berücksichtigen.

Ist (M, π) ist ein Gleichgewichtspreissystem für Agenten aus $\mathbf{A}$ so möchten alle Agenten bei Ihrer derzeitigen Ausstattung bleiben.

Die soeben genannte Definition von Wirtschaftlichkeit kann noch ausgeweitet werden und mit Hilfe von Funktionalen formuliert werden. Im Folgenden werden Preissysteme bezüglich stetig (bezüglich der L^2-Norm Topologie) linearer Funktionale beschrieben. Ein lineares Funktional ψ ist strikt positiv falls $\psi(x) > 0$ für alle $x \in X^+$. Sei Ψ die Menge aller stetigen und strikt positiven linearen Funktionale auf X.

Satz 1. *Ein Preissystem (M, π) ist wirtschaftlich genau dann wenn ein $\psi \in \Psi$ existiert für dass $\psi|_M = \pi$ gilt*

Zum näheren Verständnis des Satzes kann man an eine Wirtschaft denken in der für alle Zahlungsansprüche $x \in X$ Märkte existieren. Ein Teil dieser Wirtschaft ist der Markt an dem Zahlungsansprüche $m \in M$ zum Preis π gekauft und verkauft werden können. In diesem Fall müssen diese Preise Teil des allgemeinen Gleichgewichtssystem sein, also auch der Preise ψ für alle $x \in X$. Da die Agenten aus **A** sind, müssen diese allgemeinen Gleichtgewichtspreise stetig und strikt positiv sein. Somit muss ψ auf M auch mit dem Preis $\pi(m)$ übereinstimmen.

2.1.2 Mehrperiodenmodell

Es wurde nun ein Grundstock gelegt um den Zusammenhang von Wirtschaftlichkeit und Arbitrage unter Risiko zu untersuchen. Wir brauchen nun aber noch ein paar weitere Informationen. Dafür weiten wir das Einperiodenmodell, auf das Mehrperiodenmodell aus. Die Handelszeitpunkte sind $\mathbf{T} \subseteq [0, T]$, wobei $0, T \in \mathbf{T}$. $\mathbf{T}$ ist also die Menge der Zeitpunkte an denen Wertpapiere gehandelt werden können.

Ähnlich wie in der "Finanzmathematik 1: diskrete Modelle" ist die Informationsstruktur gegeben durch eine steigende Familie von $sub - \sigma - Algebren$ $\{F_t; t \in \mathbf{T}\}$. F_0 ist die triviale $\sigma - Algebra$ und $F_T = F$. F_t repräsentiert die Information die zum Zeitpunkt t verfügbar ist. Der Preisprozess ist ein (K+1)-dimensionaler stochastischer Prozess $Z = \{Z(t); t \in \mathbf{T}\}$ welcher zu $\{F_t\}$ adaptiert ist, $Z_k(t)$ ist quadratisch integrierbar für alle $t \in \mathbf{T}$ und $k = 1, \ldots, K$. Des Weiteren nehmen wir an, dass $Z_0(t, \omega) = 1$ für alle t und ω. Diese Voraussetzung bedeutet, dass das Wertpapier 0 eine risikolose Anlage ist mit einer Zinsrate von 0. Die risikolose Anlage dient als Numeraire.

Ein Wertpapiermarktmodell besteht aus dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P), der Menge der Handelszeitpunkte $\mathbf{T}$, der Informationsstruktur $\{F_t\}$ und dem Preisprozess Z.

Die Agenten in diesem Modell können nur *einfache Strategien* verfolgen.

Definition 4 (einfache Strategie). *Eine einfache Strategie ist ein (K+1)-dimensionaler Prozess* $\theta = \{\theta(0); t \in \boldsymbol{T}\}$ *für den gilt:*

1. $\theta(t)$ *ist messbar bezüglich* F_t *für alle* $t \in \boldsymbol{T}$
2. *Das Produkt* $\theta_k(t)Z_k(t) \in X$ *für alle* $t \in \boldsymbol{T}$ *und* $k = 0, \dots, K$
3. *Es existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *und eine Folge* $0 = t_0 < \cdots < t_n$ *für jeden Zustand* $\omega(n = 1, \dots N)$

Nun wird ein Begriff definiert der eine Arbitragemöglichkeit repräsentiert

Definition 5 (einfacher free lunch). *Eine selbstfinanzierende einfache Strategie* θ *wird einfacher free lunch genannt, falls*

- $\theta(0) \cdot Z(o) \leq 0$ *und*
- $\theta(T) \cdot Z(T) \in X^+$

Ein free lunch erlaubt einem Agenten seinen Konsum zum Zeitpunkt 0 zu erhöhen, oder wenigstens nicht zu verringern, aber auch den Konsum zum Zeitpunkt T, mit positiver Wahrscheinlichkeit, zu erhöhen. Sie sind daher auch inkonsistent mit dem wirtschaftlichen Gleichgewicht für Agenten unserer Klasse **A**

Man sagt ein Zahlungsanspruch $x \in X$ wurde zum Zeitpunkt 0 vermarktet, falls eine selbstfinanzierende Strategie θ existiert für die gilt: $\theta(T) \cdot Z(T) = x$ p-fast sicher. In diesem Fall sagt man, θ erzeugt x und $\theta(0) \cdot Z(0)$ nennt man den impliziten Preis von x.

Ein Agent kann zum Preis von $\theta(0) \cdot Z(0)$ mal dem Numeraire das Portfolio θ kaufen. Zu den Zeitpunkten $t_1, t_2, \dots, t_N$ kann er kostenlos seine Anteile, wie in der Strategie θ vorgesehen, ändern. Zum Zeitpunkt T hat er ein Portfolio zum Wert $\theta(T, \omega) \cdot Z(T, \omega) = x(\omega)$ mal dem Numeraire.

Sind die Preise der vermakteten Zahlungsansprüche wohldefiniert so gilt $\theta(0) \cdot Z(0) = \theta'(0) \cdot Z'(0)$. Diese Aussage gilt wenn kein *free lunch* existiert, im Allgemeinen muss es aber nicht stummen. Geht man davon aus dass die Aussage gilt, so sei M die Menge der vermarkteten Zahlungsansprüche und sei $\pi : M \to R$ der Preis der Zahlungsansprüche $m \in M$. Klarerweise ist π ein lineares Funktional auf $M \subset X$ falls kein einfcher *free lunch* existiert. Hat man ein Wertpapiermarktmodell gegeben das keine *simple free lunches* erlaubt, so nennt man (M, π) das zum Modell korrespondierende Preissystem.

Man sagt ein Wertpapiermarktmodell ist *wirtschaftlich* falls es keinen *simple free lunch* erlaubt und das korrespondierende Preissystem (M, π) auch wirtschaftlich ist.

Sei ein witschaftliches Wertpapiermarktmodell gegeben, so sagt man, dass der Preis des Zahlungsanspruches x vorherbestimmt durch Arbitrage vom Modell und p ist der Arbitragepreis von x.

Nun definieren wir ein äquivalentes Martingalmaß. Um den Zusammenhang zwischen dem äquivalentem Martingalmaß und dem linearen Funktional ψ zu zeigen

Satz 2. *Vorausgesetzt das Wertpapierpreismodell lässt keine einfachen free lunches zu. In diesem Fall gibt es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen dem äquivalentem Martingalmaß P^* und den linearen Funktionalen $\psi \in \Psi$ sodass $\psi\big|_M = \pi$. Dieser Zusammenhang ist gegeben durch:*

$$P^*(B) = \psi(1_B) \text{ und } \psi(x) = E^+(x)$$

Daraus folgt

Satz 3. *Folgende Aussagen gelten*

- *Das Wertpapiermarktmodell ist genau dann wirtschaftlich wenn zumindest ein äquivalentes Martingalmaß existiert*
- *Das Wertpapiermarktmodell ist wirtschaftlich und jeder Zahlungsanspruch $x \in X$ ist bepreist durch Arbitrage genau dann wenn ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß existiert.*

2.2 Fundamental Theorem of Asset Pricing

Auf Basis diese Modells wurden weitere Zusammenhänge zwischen Wirtschaftlichkeit und Arbitrage untersucht. Ein wichtiger Satz den [Harrison and Pliska, 1981] formuliert haben ist das Fundamental Theorem of Asset Pricing.

Satz 4. *Ein diskreter Markt auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) ist genau dann arbitragefrei wenn die Menge der äquivalenten Martingalmaße nichtleer ist.*

Auf diesem Satz basierend wurde auch der Begriff der Wirtschaftlichkeit definiert. Ein Marktmodell ist genau dann wirtschaftlich wenn keine Arbitragemöglichkeit existiert.

Kapitel 3

Wirtschaftlichkeit und Arbitrage unter Knightscher Unsicherheit

Der Zusammenhang der Begriffe Wirtschaftlichkeit und Arbitrage wurde in der Literatur fast ausschließlich unter Risiko untersucht. Wie bereits in der Einleitung angesprochen liegen in der Realität nicht nur Risiken vor sondern auch Knightsche Unsicherheiten. [Burzoni et al., 2017] haben sich mit diesem Thema beschäftigt. Ich möchte im Folgenden nun das Modell, die zwei Theoreme und eine anschließende Diskussion besprechen.

3.1 Knightsche Unsicherheit

Bis jetzt wurden Arbitrage und Wirtschaftlichkeit in meiner Seminararbeit nur unter Risiko betrachtet. Liegt ein Risiko vor so hat man, im Gegensatz zur Knightschen Unsicherheit, ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß, also einen eindeutigen Prior. Ein *Risiko* kann man durch ein Münzwürfexperiment, ein Roulette Rad, oder ähnliches darstellen. Im Gegensatz zum Risiko kann die *Knightsche Unsicherheit* nicht durch ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß beschrieben werden, es können mehrere oder auch keine Priors vorliegen.

Das Ellsberg-Paradoxon [Ellsberg, 1961] zeigt den Unterschied zwischen Risiko und Unsicherheit. Man hat zwei Urnen, in der ersten Urne befinden sich 50 rote Kugeln und 50 schwarze Kugeln. In der anderen Urne befinden sich ebenfalls insgesamt 100 Kugeln, man weiß jedoch nicht wie viele rote und wie viele schwarze Kugeln sich in der zweiten Urne befinden. Wettet man darauf, aus der ersten Urne eine schwarze Kugel zu ziehen, so ist man einem Risiko ausgesetzt und die Wahrscheinlichkeit ist $p = \frac{1}{2}$. Wettet man aber darauf eine schwarze Kugel aus der zweiten Urne zu ziehen so kann man keine Wahrscheinlichkeit bestimmen, man ist also einer Unsicherheit ausgesetzt.

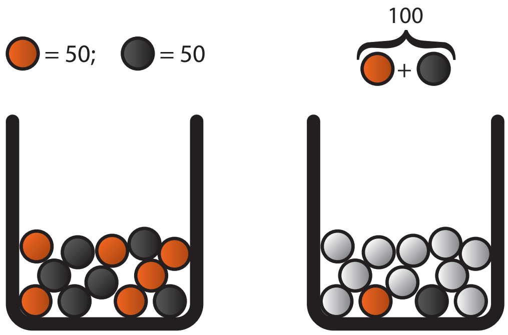

Abbildung 3.1: Ellsberg Paradoxon [fig, 2015]

Die Abrenzung zwischen Risiko und Unsicherheit wurde von Frank Knight [Knight, 1921] geprägt. Der Begriff nimmt auch in der Finanzwirtschaft an Bedeutung zu. Die Abweichung und Schwankungsbreite von Asset Preisen, die Terminstruktur von Zinsraten und Kreditrisiko sind wichtige Bereiche in denen die Wahrscheinlichkeitsverteilung der relevanten Parameter entweder nur ungenau oder gar nicht bekannt sind.

Im folgenden werde ich das Modell und die Diskussion des Modells von [Burzoni et al., 2017] wiedergeben.

3.2 Das Modell und die zwei Haupttheoreme

Wie kann man nun Arbitrage und Wirtschaftlichkeit unter Knightscher Unsicherheit formulieren? Dazu betrachten wir nun folgendes:

Sei Ω eine nichtleere Menge, sie ist die Menge alle möglichen Zustände;
$\mathcal{F}$ ist eine $\sigma-$ Algebra auf Ω, sie ist die $\sigma-$ Algebra aller möglichen Ereignisse.

Zahlungsansprüche - Der Warenraum der Zahlungsansprüche $\mathcal{H}$ ist ein Vektorraum von $\mathcal{F}$ - messbaren reellwertigen Funktionen. Er ist ausgestattet mit einer metrisierbaren Topologie τ und einer Halbordnung $\leq$ die mit den Vektorraumoperationen kompatibel ist.

Beschäftigt man sich mit Arbitrage und Wirtschaftlichkeit unter Risiko, so reicht es als Wahrenraum, den Raum aller Zahlungsansprüche, den Raum passender quadratisch integrierbaren Funktionen hinsichtlich eines gegeben Priors mit einer passenden Fast sicheren Ordnung zu nehmen. Es würde dann gelten $\mathcal{H} = L^2\{\Omega, F, P\}$. Da die Situation allgemeiner ist muss man hier nun den abstrakten Vektorraum betrachten um typische Modelle der Finanzwirtschaft abdecken zu können. Insbesondere wenn die gemeinsame Ordnung durch eine nicht dominierende Menge von mehreren Priors induziert wird. Darauf wird im Kapitel 3.3 näher eingegangen.

Die Halbordnung $\leq$ ist konsistent mit der Ordnung der reellen Zahlen für konstante Funktionen und mit der punktweisen Ordnung für messbare Funktionen.

Ein Konsumplan Z $\in \mathcal{H}$ ist nichtig wenn $0 \leq$ Z und Z ≤ 0. C $\in \mathcal{H}$ ist nichtnegativ wenn $0 \leq$ C und positiv falls C nicht ≤ 0 ist.
$\mathcal{Z}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^+$ beschreiben die Menge der nichtigen, nichtnegativen und positiven Zahlungsansprüchen.

Des Weiteren gibt es noch eine weitere relevante Menge $\mathcal{R}$, die Menge der relevanten Zahlungsansprüche, sie ist eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{P}^+$. Die Menge signalisiert einerseits Arbitrage, denn erlaubt eine Handelsbilanz dass eine Auszahlung erwirtschaftet wird die eine relevante Auszahlung bezüglich der gemeinsamen Ordnung dominiert dann spricht man von Arbitrage. Andererseits identifiziert die Menge potentiell erstrebenswerte Konsumrichtungen für die Wirtschaft.

Meistens wird die Menge der relevanten Forderungen als die Menge der positiven, nichtnegativen Forderungen $\mathcal{P}^+$ angesehen. Meistens ist das auch am sinnvollsten. Manchmal macht es aber auch Sinn davon nur eine Teilmenge zu betrachten. Man kann zum Beispiel nur Bargeld als relevante Menge sehen. Es kann sonst sein dass die Liquidationskosten den Arbitragegewinn überwiegen und somit keine Arbitrage mehr besteht, oder es für den Agenten nicht sinnvoll ist der Arbitragemöglichkeit nachzugehen. Unsere Definition von $\mathcal{R}$ erlaubt verschiedene Ideen vom Arbitrage die in dem Kapitel 3.3 weiter besprochen werden.

Der Finanzmarkt - Der Finanzmarkt wird dargestellt durch eine Menge von Handelsbilanzen $\mathcal{I} \subset \mathcal{H}$, ein konvexer Kegel der 0 enthält. $\mathcal{I}$ ist die Menge der Auszahlungen die ein Agent bei einem Ausgangsvermögen von 0 durch handeln im Finanzmarkt erreichen kann. Im klassischen reibungslosen Wertpapiermodell enthält $\mathcal{I}$ die Auszahlungen von selbstfinanzierenden Strategien mit 0 Anfangskapital. In einem reibungslosen Markt ist $\mathcal{I}$ ein Unterraum. In realistischeren Situationen in denen man Einschränkungen bei short selling, Kreditrahmengrenzen, oder Transaktionskosten hat, spricht man von konvexen Kegeln anstatt von Unterräumen.

Wie eben angemerkt nennt man die Handelnden in diesem Modell Agenten. Sie sind ähnlich wie bei [Harrison and Kreps, 1979] durch Präferenzrelationen definiert, jedoch sind die Definitionen nicht äquivalent.

Definition 6 (Agent)**.** *Ein Agent wird in dieser Wirtschaft durch eine Präferenzenrelation (i.e. eine vollkommene und transitiv binäre Relation) auf* $\mathcal{H}$ *beschrieben, die*

- *schwach monoton bezüglich* $\leq$ *sind,* $X \leq Y$ *impliziert* $X \preccurlyeq Y$ *für alle* $X, Y \in \mathcal{H}$
- *konvex, i.e. die oberen Konturlinien* $\{Z \in \mathcal{H} : Z \preccurlyeq X\}$ *sind konvex*
- τ*-unterhalbstetig, i.e. für alle Folgen* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *konvergiert zu* X *in* τ *mit* $X_n \preccurlyeq Y$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, dann gilt* $X \preccurlyeq Y$.

Die Menge aller Agenten sei $\mathcal{A}$. Ähnlich wie bei [Harrison and Kreps, 1979] betrachten wir eine potentiell große Menge von Agenten über die manches bekannt ist. Die genauen Präferenzen oder die Anzahl der Agenten ist nicht bekannt Wir führen nur einige Eigenschaften der Präferenzen der Standardwirtschaft ein. Insbesondere berücksichtigen wir die Interpretation von $\leq$ als gemeinsame Ordnung, die Präferenzen sind monoton bezüglich $\leq$. Darüber hinaus setzen wir ein paar schwache Formen von Stetigkeit voraus hinsichtlich der Topologie τ. Man weiß, dass eine Form von Stetigkeit für die Existenz von Gleichgewicht benötigt wird. Konvexität spiegelt eine Präferenz für Diversifikation wider.

Nun haben wir die Grundsteine für die Definition der Wirtschaftlichkeit gelegt.

Definition 7 (Wirtschaftlichkeit)**.** *Ein Finanzmarkt* $(\mathcal{H}, \tau, \leq, \mathcal{I}, \mathcal{R})$ *ist wirtschaftlich, falls es eine Familie von Agenten* $\{\preccurlyeq_a\}_{a \in A} \subset \mathcal{A}$ *gibt sodass gilt:*

- *0 ist optimal für jeden Agenten* $a \in A$*, i.e.*

$$\forall l \in \mathcal{I} \quad l \preccurlyeq_a 0, \tag{3.1}$$

- *für jeden relevanten Zahlungsanspruch* $R \in \mathbb{R}$ *existiert ein Agent* $a \in A$ *für den gibt*

$$0 \preccurlyeq_a R \tag{3.2}$$

Wir sagen, $\{\preccurlyeq_a\}_{a\in A}$ unterstützt den Finanzmarkt $(\mathcal{H}, \tau, \leq, \mathcal{I}, \mathcal{R})$.

Definition 8 (Gleichgewicht). *Ein Markt ist im Gleichgewicht, wenn die Agenten keinen Anreiz haben sich von ihrer derzeitigen Ausstattung wegzubewegen.*

Im Gegensatz zu [Harrison and Kreps, 1979] verwenden wir heterogene Agenten, da man unter der Knightschen Unsicherheit im Allgemeinen nicht einen representativen Agenten annehmen kann.

3.2 stellt einen Form von Monotonie dar, welche den trivialen Fall der indifferenten Agenten zwischen allen Fällen ausschließt.

Unter der Knitghtschen Unsicherheit benötigt man eine andere Herangehensweise an die Definition der Wirtschaftlichkeit als unter Risiko. Genauer darauf eingegangen wird im nächsten Kapitel unter "Wirtschaftlichkeit "

Definition 9 (Arbitragemöglichkeit). *Eine Handelsbilanz $\ell \in \mathcal{I}$ ist eine Arbitragemöglichkeit, falls ein relevanter Zahlungsanspruch $R^* \in \mathcal{R}$ existiert für den $\ell \geq R^*$ gilt*

Definition 10 (free lunch with vanishing risk). *Eine Folge von Nettoabschlüssen $\{l_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{I}$ ist ein free lunch with vanishing risk, falls ein relevanter Zahlungsanspruch $R^* \in \mathcal{R}$ und eine Folge $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$ von nichtnegativen Konsumplänen existieren mit $e_n \xrightarrow{\tau} 0$ für die gilt: $e_n + l_n \geq R^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$*

Definition 11 (überwiegend frei von Arbitrage). *Ein Finanzmarkt ist überwiegend frei von Arbitrage falls kein free lunch with vanishing risk existiert.*

Im Allgemeinen besteht keinen Äquivalenz von Arbitragefreiheit und der Abwesenheit von free lunch with vanishing risk, in [Burzoni et al., 2017] wird genaueres besprochen.

Im Gegensatz zu [Harrison and Pliska, 1981] wird erst jetzt der Zusammenhang von Arbitrage und Wirtschaftlichkeit beschrieben.

Satz 5. *Ein Finanzmarkt ist überwiegend frei von Arbitrage genau dann wenn er wirtschaftlich ist.*

Wie im letzten Kapitel angeführt, wird in der Standardliteratur das Modell der Wirtschaft auf einem Wahrscheinlichkeitsraum mit einem gegebenen Prior $\mathbb{P}$ definiert. In [Harrison and Pliska, 1981] wurde die Wirtschaftlichkeit über die Äquivalenz zur Arbitragefreiheit definiert. ein Finanzmarkt ist genau dann wirtschaftlich falls ein lineares Preismaß in der Form eines risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}^*$ existiert das äquivalent zu $\mathbb{P}$ ist, nach [Harrison and Kreps, 1979]. Da man keinen gemeinsamen Prior hat, müssen wir mit einer allgemeineren sublinearen Begriff der Preisgestaltung arbeiten.

Definition 12 (sublineare Erwartung)**.** *Ein Funktional*

$$\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

ist eine sublineare Erwartung falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- *monoton bezüglich* $\leq$*,*
- *translationsinvariant, i.e. für alle konstanten contingent claims* $c \in \mathcal{H}$ *und* $X \in \mathcal{H}$ *gilt:*
$$\epsilon(X + c) = \epsilon(X) + c$$
- *sublinear, i.e. für alle* $X, Y \in H$ *und* $\lambda > 0$ *gilt :*
$$\epsilon(X + Y) \leq \epsilon(X) + \epsilon(Y) \quad \textit{und} \quad \epsilon(\lambda X) = \lambda \epsilon(X)$$
.

Des Weiteren definieren wir noch weitere Sonderfälle für sublineare Erwartungen. ϵ hat vollen Träger falls

$$\epsilon(R) > 0 \text{ für alle } R \in \mathcal{R}$$

ϵ hat die Martingaleigenschaft, falls $\epsilon(l) \leq 0$ für alle $l \in \mathcal{I}$
ϵ ist eine sublineare Martingalerwartung mit vollem Träger falls alle vorherigen Eigenschaften erfüllt sind.

Man weiß von der Entscheidungstheorie, dass eine sublineare Erwartung auch als der größte Erwartungswert über Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen geschrieben werden kann. Unter Knightscher Unsicherheit tauschen wir Wahrscheinlichkeitsmaße durch passende normalisierte Funktionale aus.

Definition 13 (Martingalfunktional)**.** $\phi \in \mathcal{H}`_+$ *ist ein Martingalfunktional, falls gilt:*

- $\phi(1) = 1$ *(normalisiert)*
- $\phi(l) \leq 0$ *für alle* $l \in \mathcal{I}$

Ein lineares Funktional ist absolutstetig, falls es den Wert Null zu den negierbaren Zahlungsansprüchen zuordnet.

$\mathcal{Q}_{ac}$ ist die Menge der absolutstetigen Martingalfunktionalen.

Das Modell ist nun aufgebaut und wir können das Fundamental Theorem of Asset Pricing unter Knightscher Unsicherheit formulieren.

Satz 6 (Fundamental Theorem of Asset Pricing)**.** *Der Finanzmarkt ist wirtschaftlich genau dann wenn eine unterehalbstetige sublineare Martingalerwartung mit vollem Träger existiert.*

In diesem Fall ist die Menge der absolut stetigen Martingalfunktionale $\mathcal{Q}_{ac}$ nichtleer und

$$\epsilon_{\mathcal{Q}_{ac}} := \sup \Phi \in \mathcal{Q}_{ac}\Phi(X)$$

ist eine unterhalbstetige Martingalerwartung mit vollem Träger. Darüber hinaus gilt, $\epsilon_{\mathcal{Q}_{ac}}$ ist maximal in dem Sinn, dass alle anderen unterhalbstetigen sublinaren Martingalerwartungen mit vollem Träger ϵ $\epsilon(X) \leq \epsilon_{\mathcal{Q}_{ac}}(X)$ für alle $X \in \mathcal{H}$ erfüllen

3.3 Diskussion des Modells

3.3.1 Gemeinsame Ordnung statt gemeinsamen Prior

Die Präferenzeigenschaften die von allen Agenten geteilt werden spiegeln sich in den Gleichgewichtspreisen wider. Handelt es sich um ein Risiko, so teilen sich alle Agenten einen gemeinsamen Prior, also eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Marktumgebung kann damit durch Experimente wie Roulette Räder oder Münzwürfe simuliert werden. Kann das Experiment nicht so dargestellt werden wie in der realen Welt, dann könnte man noch immer von der Existenz eines gemeinsamen subjektiven Glaubens für alle Marktteilnehmer ausgehen. Für die Knightsche Unsicherheit ist das aber eine zu große Einschränkung.

Es wird auf jegliche explizite oder implizite Annahme über einen gemeinsamen Prior $\mathbb{P}$ verzichtet. Stattdessen wird die Analyse einer gemeinsamen Ordnung $\leq$ zugrunde liegen.Das ist eine viel schwächere Annahme und bedarf nur einem einstimmigen Dominanzkriterium.

Ein einfaches Beispiel für eine gemeinsame Ordnung ist die punktweise Ordnung, sie wird im Beispiel 3.3.4 diskutiert.

Die punktweise Ordnung wird zum Beispiel im Falle einer Geldauszahlung auf jeden Fall einheitlich geteilt. Der allgemeine Ansatz erlaubt es eine große Varietät von Situationen abzudecken, den gut untersuchten Fall des Risikos aber auch die Knightsche Unsicherheit.

Hat man eine Familie von eventuell nicht äquivalenten Prior, so kann man die quasi-sichere Ordnung induzieren. Wir haben eine Familie von (potentiell nicht äquivalenten) Priors $\mathcal{M}$, in diesem Fall ist

$$X \leq Y \text{ falls } \mathbb{P}(X \leq Y) = 1 \text{ für alle Prior } \mathbb{P} \text{ in } \mathcal{M}$$

Im Folgenden wird ein Modell betrachtet in welchem die gemeinsame Ordnung von einer Klasse verschiedener Präferenzrelationen abgeleitet wird.

Man geht davon aus, dass kein gemeinsamer Prior gegeben ist, stattdessen startet man mit einer Klasse von Präferenzrelationen $\mathcal{A}_0$ auf dem Handelsraum $\mathcal{H}$.Die Präferenzrelationen sind konvex und τ-halbstetig. Nun kann man die gemeinsame Ordnung abgeleitet von der Menge der Präferenzrelationen $\mathcal{A}_0$ folgendermaßen definieren.

$$\mathcal{Z}_{\leq} = \{Z \in \mathcal{H} : x \leq Z + X \leq X, \forall X \in \mathcal{H}\}$$

$\mathcal{Z}_{\leq}$ ist die Menge der negierbaren Zahlungsansprüche für die Präferenzrelation $\leq \in \mathcal{A}_0$. Wir nennen $\mathcal{Z}_{uni} := \bigcap_{\preccurlyeq \in \mathcal{A}_0} Z_{\preccurlyeq}$ die Menge der einheitlich negierbaren Zahlungsansprüche.
Die gemeinsame Halbordnung $\leq_{uni}$ auf $\mathcal{H}$ ist gegeben durch

$$(X \leq_{uni} Y) \leftrightarrow (\exists Z \in \mathcal{Z}_{uni} : X(\omega) \leq Y(\omega) + Z(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega)$$

Es wird die punktweise Ordnung auf den reellen Zahlen verwendet und eine einheitlich negierbare Auszahlung um die gemeinsame Ordnung von der Menge der $\mathcal{A}_0$ abzuleiten.

$(\mathcal{H}, \leq_{uni})$ ist dann ein halbgeordneter Vektorraum und die Agentepräferenzen sind in $\mathcal{A}_0$ sind monoton bezüglich der gemeinsamen Halbordnung. Man kann (auch größere) Klassen von Präferenzrelationen $\mathcal{A}$ die die Voraussetzungen unseres Ansatzes erfüllen, inklusive Monotonie bezüglich der abgeleiteten gemeinsamen Ordnung ableiten.

3.3.2 Finanzmärkte

Der Finanzmarkt wird sehr vereinfacht modelliert mit dem konvexen Kegel $\mathcal{I}$. Dieser abstrakte Ansatz ist ausreichend für die Betrachtung der Relation von Arbitrage und Wirtschaftlichkeit.

In den nächsten beiden Beispielen wird gezeigt wie die üblichen Modelle von statischem und dynamischem Handel eingebettet sind.

[Burzoni et al., 2017] haben diese vier Beispiele mit steigender Komplexität angeführt

Beispiel 1

In einem Einperiodenmodell mit endlich vielen Zuständen $\Omega = 1, \ldots, N$, einem Finanzmarkt mit $J+1$ Wertpapieren kann durch seine Anschaffungskosten $x_j \geq 0, j = 0, \ldots, J$ un eine (J+1)$\times N-$ Auszahlungsmatrix F beschrieben werden. (vergleiche [LeRoy and Werner, 2014])

Ein Portfolio $\bar{H} = (H_0, \ldots, H : J) \in \mathbb{R}^{J+1}$ hat die Auszahlung $\bar{H}F = \left(\sum_{j=0}^{J} H_j F_{jw}\right)_{\omega=1,\ldots,N}$; für die Anschaffungskosten gilt: $H \cdot x = \sum_{j=0}^{J} H_j x_j$. Falls die nullte Anlage risikolos mit einem Preis $x_0 = 1$ ist und in überall in jedem Zustand 1 auszahlt dann kann eine Handelsbilanz mit null Anschaffungskosten bezüglich des Portoflio Risikoasset $H = (H_1, \ldots, H_J) \in \mathbb{R}^J$ und die Renditmatrix $\hat{\mathrm{F}} = (F_{j\omega} - x_j)_{j=1,\ldots,J,\omega=1,\ldots,N}$. $\mathcal{I}$ ist gegeben durch die $J \times N$ Renditenmatrix $\hat{\mathrm{F}}$ beschrieben werden, i.e.

$$\mathcal{I} = \{H\hat{\mathrm{F}} : H \in \mathbb{R}^J\}$$

Beispiel 2

Das Modell beinhaltet nun auch den Fall von endlich langen Handelsperioden. Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und $S = (S_t)_{t=0}^T$ ein adaptierter stochastischer Prozess mit Werten aus $\mathbb{R}_+^J$ für $J \geq 1; S$ modelliert die risikobehafteten Anlagen. Wir nehmen an, dass auch ein festverzinsliches Wertpapier mit einer Zinsrate von 0 gegeben ist. Die Menge der Handelsgewinne kann dann durch die Gewinne der Handelsprozesse beschrieben werden:

$\ell \in \mathcal{H}$ ist in $\mathcal{I}$ so ausgestattet sodass vorhersehbare Integranden $H_t \in (\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}))^J$ für $t = 1, \ldots, T$ existieren sodass,

$$\ell = (H \cdot S)_T := \sum_{T}^{t=1} H_t \cdot \Delta S_t, \quad \text{wobei} \quad \Delta S_t := (S_t - S_{t-1})$$

Im reibungslosen Fall ist die Menge der Handelsbilanzen ein Unterraum von $\mathcal{H}$. Im Allgemeinen kann man auch Einschränkungen für die Menge der zulässigen Handelsstrategien einführen. Zum Beispiel kann man short selling von Risikoanlagen exkludieren oder den Kreditrahmen des Agenten beschränken. In diesen Fällen ist der vermarktete Unterraum $\mathcal{I}$ ein konvexer Kegel, siehe [Luttmer, 1996], [Jouini and Kallal, 1995], [Araujo et al., 2018],e.g.

Beispiel 3

Wie bereits in dem Kapitel 2.1 angeführt, ist in [Harrison and Kreps, 1979] der Markt beschrieben durch einen Marktraum $M \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und ein (stetiges) Funktional π auf M. In diesem Fall ist $\mathcal{I}$ der Kern des Preissystems, i.e.

$$\mathcal{I} = \{X \in M : \pi(X) = 0\}$$

Beispiel 4

In stetiger Zeit besteht die Menge der Handelsbilanzen aus stochastischen Integralen der Form

$$\mathcal{I} = \left\{ \int_0^T \theta_u \cdot dS_u : \theta \in \mathcal{A}_{adm} \right\},$$

für eine passende Menge von *zulässigen* Strategien $\mathcal{A}_{adm}$. Es gibt verschiedene mögliche Wahlen solcher Mengen. Wenn der Aktienpreisprozess S ein Semimartingal an Beispiel von $\mathcal{A}_{adm}$ ist die Menge aller S-integrierbaren, vorhersehbaren Prozesse deren Integrale von unten begrenzt sind. Andere typische Beispiele für $\mathcal{A}_{adm}$ würden aus einfachen Integranden bestehen, wenn S ein stetiger Prozess ist und $\mathcal{A}_{adm}$ die Menge der Prozesse mit einer endlichen Variation ist, dann kann das obige Integral durch partielle Integration definiert werden [Dolinsky and Soner, 2014], [Dolinsky and Soner, 2015]

Liegt kein gemeinsamer Prior vor, so kommen einige nicht triviale technische Fragen über die Integrierbarkeit von Zahlungsansprüchen und Handelsstrategien auf. Es ist möglich den Warenraum auf den Raum der messbaren und beschränkten Funktionen zu beschränken, die bezüglich eines Priors integrierbar sind.

3.3.3 Relevante Zahlungsansprüche

Wir verwenden den Begriff der relevanten Zahlungsansprüche um den typischen Ansatz Arbitrage als positive Handelsbilanzen zu definieren zu generalisieren. Dieser Ansatz erlaubt zusätzliche Flexibilität und erlaubt potentiell wichtige Varianten des Begriffs der Arbitrage zu decken. Zum Beispiel: Kann ein positiver Zahlungsanspruch nicht ohne Kosten liquidiert werden, dann sehen Agenten die Handelsbilanz nicht als free lunch with vanishing risk an, falls die Liquidationskosten größer als die potentiellen Gewinne sind. Daher ist es naheliegend nur eine Teilmenge der positiven Zahlungsansprüche als relevant anzusehen, wie zum Beispiel Bargeld.

Darüber hinaus identifizieren relevante Auszahlungen potentiell begehrenswerte Richtungen des Konsums für unsere Wirtschaft. Die Wahrenräume die für Knightsche Unsicherheit verwendet werden sind oft sehr groß. Daher ist es in manchen Anwendungen der Finanzwirtschaft sinnvoll mit einer Menge der relevanten Zahlungsansprüchen zu arbeiten die kleiner ist als die der positiven Zahlungsansprüche.

3.3.4 Wirtschaftlichkeit

Knightsche Unsicherheit bedarf einer vorsichtigen Adaption des Begriffs der Wirtschaftlichkeit. Man kann in Wettbewerbsmärkten unter Risiko einen repräsentativen Agenten mit strikt monotonen Präferenzen für eine Menge von arbitragefreien Wertpapieren konstruieren. In [Harrison and Kreps, 1979] ist Wirtschaftlichkeit äquivalent zu der Existenz eines strikt positiven Funktionals das stetige, strikt monotone Präferenzen induziert. Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz sind diese die Funktionale beschrieben durch Dichten die fast sicher strikt positiv bezüglich des gemeinsamen Priors sind.

Betrachtet man die typischen Finanzmodelle unter der Knightschen Unsicherheit, so hat man einen sehr großen Grundraum auf dem keine strikt positiven linearen Funktionale existieren. Aus diesem Grund muss man Wirtschaftlichkeit anders als in der Standardliteratur definieren. Im folgenden Beispiel werden diese Probleme mit einem einfachen Modell gezeigt in welchem das Einheitsintervall der Zustandsraum ist.

Kann ein arbitragefreies Modell durch einen einzelnen Agenten mit strikt monotone Präferenzen dargestellt werden, der die gegebenen Angaben erfüllt, im Gleichgewicht, dann müsste der Randnutzen dieses Agenten im Gleichgewicht für alle positiven Auszahlungen strikt positiv sein. Somit muss der Grundraum strikt positive lineare Funktionale unterstützen.

Für die Definition des wirtschaftlichen Gleichgewichts benötigt man zwar keinen repräsentativen Agenten, es ist aber ein konzeptionell ansprechender Ansatz eine heterogene Agentenwirtschaft zu erlauben da in echten Finanzmärkten eine große Diversität von Agenten besteht.

Im Gegensatz zu [Harrison and Kreps, 1979] und [Kreps, 1981] wird die strikte Monotonie gelockert, es werden Agenten mit schwach monotonen Präferenzen erlaubt. Um den trivialen Gleichgewichtsfall, in dem Agenten alle indifferent bezüglich allen Zahlungsansprüchen sind auszuschließen, muss ein Form von strikter Monotonie für den Markt als ganzes eingeführt werden. Eigenschaft 3.2 versichert dass die relevanten Zahlungsansprüche von manchen Agenten in der Wirtschaft bevorzugt werden.

Beispiel 1

Sei $\Omega = [0,1]$. Sei $\mathcal{F}$ die Borelalgebra und $\mathcal{H}$ die Menge aller beschränkten, messbaren Funktionen auf Ω. WQir berücksichtigen die quasi-sichere gemeinsame Ordnung welche induziert wird durch eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathcal{Q}$ auf Ω, i.e. $X \geq Y$(“$\mathcal{Q}-$ quasi-sicher“), gegeben dass $\mathbb{Q}(x \geq Y) \geq 0$ für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Die relevanten Zahlungsansprüche sind $\mathcal{R} = \mathcal{P}^{+}$; eine beschränkte messbare Funktion $R \in \mathcal{H}$ ist daher relevant, falls $R \geq 0$ $\mathcal{Q}-$ quasi-sicher und $\mathcal{Q}(R > 0) > 0$ für manche $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$

Um die Kernaussagen zu zeigen betrachten wir den extremen Fall der Knightschen Unsicherheit wo $\mathcal{Q}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße ist. Die gemeinsame Ordnung ist durch die punktweise Ordnung gegeben. Eine beschränkte messbare Funktion ist relevant falls sie überall nichtnegativ ist und strikt positiv für manche $\omega \in \Omega$. Wir betrachten nun die Gilboa-Schmeidler Nutzenfunktion

$$U(X) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} E_{\mathbb{Q}}[u(X)] = \inf_{\omega\in\Omega} u(X(\omega))$$

für strikt monotonen und strikt konkaven Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dieser bestimmte Agent bevorzugt schwach den Nullhandel zu jedem Zahlungsanspruch dessen Minimumwert weniger als null ist. Im speziellen gilt für den relevanten Zahlungsanspruch $R(\omega) = 1_{(0,1]}(\omega)$, dass wir $U(0) = u(o) \geq U(\lambda R)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Bei positiven λ interessiert den Agenten nur der schlimmste Ausgang $\omega = 0$ in welchem der Zahlungsanspruch λR die Auszahlung null hat. Der Agent will keine negativen Vielfache des zahlungsanspruches weil er in jedem möglichen zustand Geld verlieren würde außer in $\omega = 0$. Der Wahrenraum in diesem Beispiel beinhaltet kein strikt lineares Funktional [Aliprantis and Border, 1999], Section 8.10 und Beispiel 21. Zusammenfassen sei gesagt, dass trotz vorsichtig gewählten Agenten die den relevanten Kontrakt $1_{(0,1]}$ der Null bevorzugen können, man keinen einzigen Agenten in der Wirtschaft finden kann der alle relevanten Kontrakte der Null bevorzugt.

3.3.5 Sublineare Erwartungen

Unser Fundamental Theorem of Asset Pricing charakterisiert die Abwesenheit von Arbitrage mit Hilfe einer nicht additiven Erwartung $\mathcal{E}$. In der Entscheidungstheorie haben nicht additive Wahrscheinlichkeiten eine lange Geschichte. [Schmeidler, 1989] führt eine Erweiterung von der erwarteten Nutzentheorie basierend auf nicht additiven Wahrscheinlichkeiten. Das weit verbreitete max-min erwartete Nutzenmodell von [Gilboa and Schmeidler, 1989] ist eine andere Instanz. Definiert man die subjektive Erwartung einer Auszahlung als die minimal erwartete Auszahlung über eine Klasse von Priors, dann hat der daraus resultierende Begriff von Erwartung manche Eigenschaften eines Erwartungswertes, wie Monotonie und die Beibehaltung von Konstanten, diese Erwartung ist aber nicht mehr additiv.

In unserem Fall hat die nicht additive Erwartung mehr einen objekitven als eine subjektiven Ansatz, da es das Preisfunktional des Marktes beschreibt. Wohingegen im Allgemeinen ein additives Wahrscheinlichkeitsmaß ausreichend ist um einen wirtschaftlichen Markt in Modellen mit einem gemeinsamen Prior zu charakterisieren, das ist unter Knitghtscher Unsicherheit aber nicht mehr möglich.

Wie bereits angemerkt haben [Harrison and Kreps, 1979] gezeigt, dass aus der Wirtschaftlichkeit eines Preissytems folgt, dass das lineare Marktpreisfunktional auf dem Preissystem zu einem strikt positiven Funktional auf den ganzen Raum der Eventualforderungen erweitert werden kann. Unter Knightscher Unsicherheit ist das nicht mehr möglich, da in vielen Fällen strikt positive Funktionale nicht existieren (vgl. Beispiel: 3.3.4). Wir betrachten den nicht additiven Begriff der Erwartung.

Das Preisfunktional ordnet allen Handelsbilanzen einen nichtpositiven Wert zu.Handelsbilanzen haben also die (super-)Martingaleigenschaft unter dieser Erwartung. Nimmt man nun zum Zwecke der Diskussion an, dass die Menge Handelsbilanzen ein linearer Unterraum ist, dann müssen die Preisfunktionale über dem Unterraum additiv sein. Als Konsequenz ist der Wert von allen Handelsbilanzen unter der sublinearen Preiserwartung null. Für Zahlungsansprüche die außerhalb des Marktunterraums liegen ist die lineare Preisoperation des Marktes sub-additiv.

Das folgende Beispiel zeigt das Problem.

Beispiel 1

Das typische Einschritt-Binomialmodell wird oft das Atom des Finance genannt, es besteht aus zwei Zuständen $\Omega = \{1, 2\}$. Ein Element $X \in \mathcal{H}$ kann mit einem Vektor aus dem $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden. Sei $\leq$ eine gewöhnliche Teilordnung auf $\mathbb{R}^2$. Die relevanten Zahlungsansprüche sind die positiven Zahlungsansprüche $\mathcal{R} = \mathcal{P}^+$. Es gibt eine risikolose Anlage B und eine risikobehaftete Anlage S. Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben beide Anlagen den Wer $B_0 = S_0 = 1$. Für die risikolose Anlage gilt $B_1 = 1 + r$, wobei die Zinsrate $r > -1$ zur Zeit $t = 1$, wohingegen die risikobehaftete Anlage im Zustand 1 den Wert u annimmt und im Zustand 2 den Wert d, $u > d$. Die risikolose

Anlage ist Numeraire. Der diskontierte Handelsgewinn der risikobehafteten Anlage is $\ell^* := S_1/(1+r) - 1$. $\mathcal{I}$ ist der lineare Raum aufgespannt durch ℓ^*. Es gibt keine Arbitrage genau dann wenn der eindeutige Kandidat für die Martingalwahrscheinlichkeit für den Zustand eins

$$p^* = \frac{1+r-d}{u-d}$$

in $(0,1)$ ist, was wiederum zu $u > 1+r > d$ äquivalent ist. p^* induziert das eindeutige Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ mit der Erwartung

$$\mathbb{E}^* = p^* X(1) + (1-p^+) X_1(2)$$

$\mathbb{P}^*$ ist ein lineares Maß; darüber hinaus hat es vollen Träger da wir für alle $R \in \mathcal{R}$, $\mathbb{E}^*[R] < 0$. Der Markt ist wirtschaftlich mit $A = \{\preccurlyeq^*\}$. Die Präferenzrelation ist gegeben durch die lineare Erwartung $\mathbb{P}^*$, i.e $X \preccurlyeq^* Y$ genau dann wenn $\mathbb{E}^*[X] \leq \mathbb{E}^*[Y]$. Es gilt unter diesen Präferenzen $\ell \sim^* 0$ für alle $\ell \in \mathcal{I}$ und $X \preccurlyeq^* X + R$ für $X \in \mathcal{H}$ und $R \in \mathcal{P}^+$. Insbesondere ist jedes $\ell \in \mathcal{I}$ ein optimales Portfolio und der Markt ist wirtschaftlich. Dieses Beispiel lässt sich auf alle endlichen Ω und vollständige Finanzmärkte übertragen.

Kapitel 4

Conclusio

[Harrison and Kreps, 1979] und [Harrison and Pliska, 1981] haben den Zusammenhang zwischen Wirtschaftlichkeit und Arbitrage untersucht und das Fundamental Theorem of Asset Pricing formuliert.

[Burzoni et al., 2017] haben dieses Thema weiter untersucht und sind zu dem Schluss gekommen, dass es auch möglich ist auf Basis einer gemeinsamen Ordnung statt eines gemeinsamen Priors die Äquivalenz der Abwesenheit von Arbitrage und Wirtschaftlichkeit zu zeigen. Die Ordnung wird im Sinne der Präferenzen der Agenten monoton im Bezug auf diese gebildet.

Ein gegebener Finanzmarkt ist wirtschaftlich genau dann wenn ein sublineares Preisfunktional existiert das mit den gegebenen Assetpreisen konsistent ist.

Eine weitere wichtige Aussage ist, dass man unter der Knightschen Unsicherheit keinen einheitlichen Prior für alle Agenten erlassen, das ist eine zu starke Einschränkung. Wenn die Knightsche Unsicherheit durch eine Klasse von Priors beschrieben wird, dann muss die lineare Martingalerwartung durch eine sublineare Erwartug ausgetauscht werden.

Der Ansatz der Knightschen Unsicherheit ist sicher für andere Bereiche der Mathematik auch sehr bedeutend, wie [Harrison and Kreps, 1979] angemerkt hat mag es auch sein die Grundlegenden Modelle der Mechanismus-Design-Theorie und der Spieltheorie ohne einen gemeinsamen Prior zu betrachten. Auch wenn die Modelle unter der Knightschen Unsicherheit einer umfangreicheren Theorie bedürfen ist es für die Realität, in der nicht nur Risiko vorliegt, wichtig diese Modelle zu verallgemeinern.

Literaturverzeichnis

[fig, 2015] (2015). *Ellsberg Urn 2 color*. Wikipedia.

[Aliprantis and Border, 1999] Aliprantis, C. and Border, K. (1999). Infinite dimensional analysis (second eddition).

[Araujo et al., 2018] Araujo, A., Chateauneuf, A., and Faro, J. H. (2018). Financial market structures revealed by pricing rules: Efficient complete markets are prevalent. *Journal of Economic Theory*, 173:257–288.

[Burzoni et al., 2017] Burzoni, M., Riedel, F., and Soner, H. M. (2017). Viability and arbitrage under knightian uncertainty.

[Dolinsky and Soner, 2014] Dolinsky, Y. and Soner, H. M. (2014). Martingale optimal transport and robust hedging in continuous time. *Probability Theory and Related Fields*, 160(1-2):391–427.

[Dolinsky and Soner, 2015] Dolinsky, Y. and Soner, H. M. (2015). Martingale optimal transport in the skorokhod space. *Stochastic Processes and their Applications*, 125(10):3893–3931.

[Ellsberg, 1961] Ellsberg, D. (1961). Risk, ambiguity, and the savage axioms. *The quarterly journal of economics*, pages 643–669.

[Gilboa and Schmeidler, 1989] Gilboa, I. and Schmeidler, D. (1989). Maxmin expected utility with a non-unique prior", journal of mathematical economics, 18: 141-153.(working paper, 1986.)———(1993). *Updating Ambiguous Beliefs", Journal of Economic Theory*, 59:33–49.

[Harrison and Kreps, 1979] Harrison, J. M. and Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, 20(3):381–408.

[Harrison and Pliska, 1981] Harrison, J. M. and Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic processes and their applications*, 11(3):215–260.

[Jouini and Kallal, 1995] Jouini, E. and Kallal, H. (1995). Martingales and arbitrage in securities markets with transaction costs. *Journal of Economic Theory*, 66(1):178–197.

[Knight, 1921] Knight, F. H. (1921). *Risk, uncertainty and profit.* Library of Economics and Liberty.

[Kreps, 1981] Kreps, D. M. (1981). Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities. *Journal of Mathematical Economics*, 8(1):15–35.

[LeRoy and Werner, 2014] LeRoy, S. F. and Werner, J. (2014). *Principles of financial economics.* Cambridge University Press.

[Luttmer, 1996] Luttmer, E. G. (1996). Asset pricing in economies with frictions. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1439–1467.

[Schmeidler, 1989] Schmeidler, D. (1989). Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 571–587.