SEMINARARBEIT

Arbitrage und Geometrie

ausgeführt am 31.07.2019

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Kim Bo Ram
Matrikelnummer: 01526890

Wien, am 31.07.2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Arbitrage ist in der Finanzmarkt ein sehr wichtiger Begriff. Die Arbitragemöglichkeit garantiert dem Investor einen Gewinn. Im tatsächlichen Finanzmarkt existieren solche Möglichkeiten nicht. Die Arbitragefreiheit ist also das Grundprinzip des Finanzmarkts.

Diese Arbeit stellt zuerst die Begriffe von Arbitrage und Auszahlungsmatrizen vor. Dann erklärt sie die Arbitrage Theorie und das Farkas Lemma mit ihren geometrische Bedeutungen. Wir zeigen danach die Äquivalenz zwischen der Arbitrage Theorie und dem Farkas Lemma. Und im 4ten Kapitel beschreiben wir geometrisch die Arbitragemöglichkeit. Dafür führen wir den Begriff der generischen Matrix ein. Im 5ten Kapitel erweitern wir auf die Zufallsmatrix und berechnen schließlich mit der Zufallsmatrix die Wahrscheinlichkeit der Arbitrage.

Diese Seminararbeit basiert hauptsächlich auf dem Artikel Arbitrage and Geometry von Daniel Q. Naiman und Edward R. Scheinerman.

2 Einführung

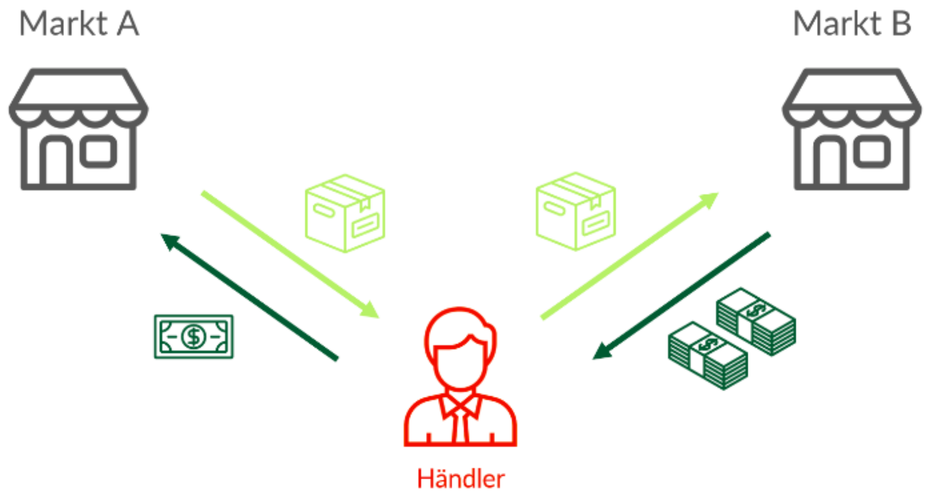
2.1 Auszahlungsmarix

In der Finanzmarkt kann man auf unterschiedliche Weise investieren. Zum Beispiel Aktien, Anleihen, Fremdwährungen, Optionen und Bankkonten.
Wenn wir annehmen, dass es n Investionsanlagen und endlich viele sich gegenseitig ausschließende m Szenarios gibt, dann können wir die Wertänderungen der Anlagen als n-dimensinalen Vektor darstellen und die Wertänderungen werden nach jedem Szenario zu einem Gewinn oder Verlust.
Wir wollen die Wertänderungen mit einer m*n Matrix darstellen. Jede Zeile entspricht dabei einem Szenario und jede Spalte entspricht einer Anlage.

Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{m*n}$

	I_1	I_2	$\cdots$	I_i	$\cdots$	I_n
Scenario$_1$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1i}	$\cdots$	a_{1n}
Scenario$_2$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2i}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Scenario$_j$	a_{j1}	a_{j2}	$\cdots$	a_{ji}	$\cdots$	a_{jn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Scenario$_m$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mi}	$\cdots$	a_{mn}

a_{ji} ist nämlich die Wertänderung am Ende der Periode der i-ten Anlage unter dem j-ten Szenario.
Man kann typischerweise annehmen, dass es eine risikolose Anlage gibt. Der Wert der risikolosen Anlage wird am Ende der Periode $1+r$. Wir drücken die Wertänderung in der Gegenwart aus, indem wir sie mit dem Diskontierungsfaktor $\frac{1}{1+r}$ multiplizieren. Zum Beispiel wenn man 1 in die i-te Anlage unter dem j-ten Szenario investiert und der Wert x wird, dann ist $a_{ji} = -1 + \frac{x}{1+r}$.



2.2 Arbitrage

Arbitrage ist das strategische Ausnutzen von Preisunterschieden. Zum Beispiel, kauft man ein Gut bei einem Händler für einen Euro. Gleichzeitig kennt man einen Ort bzw. Markt auf dem man das Gut für 2 Euro verkaufen kann, dann hat man ein Arbitragegeschäft durchgeführt. Die wirtschaftliche Leistung der Arbitrage besteht also darin, Preisunterschiede zu entdecken und sie geschickt auszunutzen.
Arbitrage ist theoretisch komplett risikolos: Man kauft ein günstiges Gut und verkauft es gleichzeitig zu einem höheren Preis. Also ist eine Arbitragemöglichkeit eine Kombination von Investitionen die garantierten Gewinn bringt.
Aber solche Situationen treten in der Praxis nicht auf: Beim Kauf und Verkauf kann es zu Verzögerungen kommen, weil mehrere Schtitte, zum Beispiel ein Vertragsabschluss, notwendig sind. Es besteht also ein gewisses Risiko, dass die Preise sich zwischendurch wieder ändern. Zum Beispiel, an der Börse, wo schnelle Transaktionen üblich sind, kann etwas dazwischenkommen.
Im Finanzmarkt nimmt man also die Arbitragefreiheit als ein Grundprinzip an.

3 Arbitrage Theorie

3.1 Arbitrage Theorie

Sei eine Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{m*n}$ und ein beliebig n-dimensionaler Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei $\vec{a_i}$ der Spaltenvektor von A, $i = 1, 2, ..., n$.
Das Produkt

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$
$$= x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + \cdots + x_n\vec{a_n}$$

ist der m-dimensionale Auszahlungsvektor.
Also ist die j-te Komponente von Ax die Auszahlung, bei der man x_i in der i-ten Anlage für alle $i = 1, 2, \cdots, n$ unter dem Szenazio j investiert.
Der Spaltenraum von A

$$SR(A) = Lin(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}) = \{\sum_{i=1}^{m} x_i\vec{a_i} : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, .., m\}$$

ist die Menge von Auszahlungsvektoren aus allen möglichen Investitionskombinationen. Das ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$ mit meistens n Dimensionen.

Theorie 1(Arbitrage Theorie)
Sei eine Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{m*n}$ gegeben. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:
(A1) Alle Komponenten eines Auszahlungsvektors in SR(A) sind positiv, d.h. $Ax > 0$ für x $\in \mathbb{R}^n$

(A2) Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsvektor $p = [p_1, ..., p_m]^\top$ sodass dieser zu allen Spalten von A orthogonal ist, d.h. $p^\top A = 0$, wobei $p^\top \geq 0$ und $p^\top 1 = 1$.

Wie wir schon erwähnt haben, bringt die Arbitragemöglichkeit einen garantierten Gewinn. Also sind Auszahlungen aus einigen Vektoren x positiv bei der Arbitrage und (A1) entspricht dem.
Dagegen ist die Arbitragefreiheit äquivalent mit der Existenz einer Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu Szenarios, in denen jede Investition eine erwartete Auszahlung von Null hat.

3.2 Beispiele für Arbitragefreiheit

Betrachten wir noch zwei Beispiele.
Wir nehmen an, dass man in eine Aktie investiert, ihr Wert heute S ist, und der Wert morgen entweder Su mit Warscheinlichkeit p oder Sd mit Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ wird, wobei $d < 1 + r < u$.
Hier ist dann die Auszahlungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -S + \frac{Su}{1+r} \\ -S + \frac{Sd}{1+r} \end{pmatrix}$ und der Wahrscheinlichkeitsvektor $w = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.
Wenn der Markt keine Arbitrage zulässt, ist der Vektor w orthogonal zur Matrix A, d.h $w^\top A = 0$.
$\Leftrightarrow (-S + \frac{Su}{1+r})q + (-S + \frac{Sd}{1+r})q = 0$
Aus $p + q = 1$ folgt gleich $p = \frac{1+r-d}{u-d}$ und $p = 1 - p = \frac{u-1-r}{u-d}$.

Unter der Arbitragefreiheit und solchen Wahrscheinlichkeitszuordnungen zu Szenarios hat jede Investition eine erwartete Auszahlung von Null.
Nehmen wir an, dass der Wert einer Aktie heute P ist und morgen entweder x mit Wahrscheinlichkeit p1 oder y mit Wahrscheinlichkeit q1 wird, wobei $p1 + q1 = 1$ ist.

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -P + \frac{x}{1+r} \\ \\ -P + \frac{y}{1+r} \end{pmatrix}$$

Aus der Arbitragefreiheit folgt: $p1(-P + \frac{x}{1+r}) + q1(-P + \frac{y}{1+r}) = 0$.
$\Rightarrow$ Der arbitragefreie Preis $P = \frac{xp1+yq1}{1+r}$, wegen $p1 + q1 = 1$.
D.h. Der arbitragefreie Preis ist der Erwartungswert ihrer diskontierten Werte.

3.3 Farkas Lemma

Wir beweisen die Äquivalenz zwischen der Arbitrage Theorie und dem Farkas Lemma.
Dafür stelle ich das Lemma vor.

Lemma 2(Farkas Lemma)
Sei A eine m*n Matrix und sei b ein m-dimensionaler Vektor. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:
(1) Es existiert ein n-dimensionaler Vektor $x \geq 0$ sodass $Ax = b$.
(2) Es existiert ein m-dimensionaler Vektor y sodass $y^\top A \geq 0$ und $y^\top b < 0$.

Durch Negation von (2) formen wir das Lemma in zwei aq̈uivalente Aussagen um:
(F1) Es existiert ein n-dimensionaler Vektor $x \geq 0$ sodass $Ax = b$.
(F2) $y^\top A \geq 0 \Rightarrow y^\top b \geq 0$.

Definition 3
Der von $\vec{a_i} \in \mathbb{R}^m, i = 1, ..., n$ erzeugte polyedrische konvexe Kegel ist eine Untermenge von $\mathbb{R}^m$ definiert durch $\{\sum_{i=1}^n x_i \vec{a_i} : x_i \geq 0\}$.
Wir bezeichnen diese Untermenge mit $\mathscr{C}(\vec{a_i}, i = 1, ..., n)$ und nennen $\vec{a_i}, i = 1, ..., n$ Generatoren des Kegels.

Wir interpretieren kurz das Farkas Lemma:
Sei $\vec{a_i}, i = 1, ..., n$ die Spalte der Matrix A und $\mathscr{C}_A := \mathscr{C}(\vec{a_i}, i = 1, ..., n)$.
(F1) sagt $b \in \mathscr{C}_A$.
Betrachten wir die Formel $cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$, wobei $0 \leq \theta \leq \pi$.

Da $\| u \| \| v \| > 0$, haben $cos\theta$ und $u \cdot v$ gleiches Vorzeichen. Wenn $u \cdot v \geq 0$ ist, sind die zwei Vektoren nicht stumpfwinklig.
Wenn wir $b \neq 0$ annehmen, sagt (F2) dass wenn y mit jedem Generator $\vec{a_i}$ keinen stumpfen Winkel bildet, bildet y auch mit b keinen stumpfen Winkel.

3.4 Beweis

Beweis der Arbirtage Theorie durch das Farkas Lemma
Sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m*n}$ gegeben.
i) Zeigen wir dass beide (A1) und (A2) wahr sein können.
Nehmen wir an, dass (A1) und (A2) beide wahr sind.
$\Rightarrow p^\top Av = 0v = 0$.
Aber $p^\top Av > 0$, da $Av > 0, p \geq 0$ und $\sum_{i=0}^{m} p_i = 1$.
$\Rightarrow$ (A1) und (A2) schließen sich gegenseitig aus.

ii) Zeigen wir dass beide (A1) und (A2) nicht falsch sein können.
Nehmen wir an, dass (A2) falsch ist.
Dann existiert keine Lösung von $\begin{bmatrix} A^\top \\ 1 \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ mit $p \geq 0$.
(1) in dem Farkas Lemma gilt dann nicht für $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A^\top \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$\Rightarrow$ (2) in dem Farkas Lemma gilt.
Es existiert also $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ sodass $y^\top \tilde{A} \geq 0$ und $y^\top \tilde{b} < 0$.
Schreiben wir $y = \begin{bmatrix} v \\ s \end{bmatrix}$, wobei $v = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^\top$ und $s \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow y^\top \tilde{A} = [\tilde{A}^\top y]^\top = \left(\begin{bmatrix} A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ s \end{bmatrix} \right)^\top = \begin{pmatrix} Av + 1s \end{pmatrix}^\top \geq 0$
Und $y^\top \tilde{b} = s < 0$.
$\Rightarrow Av > 0 \Rightarrow$ (A1) gilt.
Also wenn (A2) nicht gilt, gilt (A1).
Daraus folgt dass wenn (A1) falsch ist, ist (A2) wahr. $\square$

Beweis des Farkas Lemmas durch die Arbitrage Theorie

$(F1) \Rightarrow (F2)$: Nach der Voraussetzung existiert $x \geq 0$ sodass $Ax = b$. Wenn wir $y^\top A \geq 0$ annehmen, folgt gleich $y^\top b = y^\top Ax \geq 0$.

$(F2) \Rightarrow (F1)$: Wir definieren zuerst den spitzen Kegel und teilen für den Beweis in zwei Fälle auf.

Definition 4
Ein polyedrischer konvexer Kegel $\mathscr{C}$ ist spitz, wenn $\mathscr{L}(\mathscr{C}) := \mathscr{C} \cap -\mathscr{C} = \{0\}$, d.h. wenn aus $v, -v \in \mathscr{C}$ $v = 0$ folgt.

Der spitze Kegel besteht aus allen Geraden die sich im Ursprung schneiden(Figure 3,4).

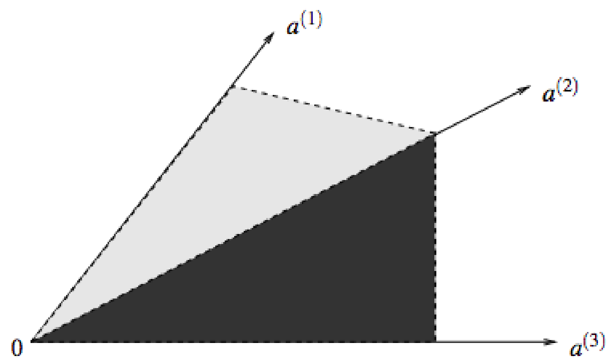


Figure 3: The vectors $a^{(i)}, i = 1,2,3$ generate a pointed cone in $\mathbb{R}^3$.

1. Fall) A ist eine m*n Matrix sodass $\mathscr{C}_A$ ein spitzer Kegel ist.
Wenn (F2) für eine Matrix A gilt, dann gilt es auch für die Matrix die durch Entfernung von Nullspalten von A erhalten wird. Wenn (F1) für die von Nullspalten entfernte Matrix gilt, gilt es auch für originale Matrix. Also können wir o.B.d.A. annehmen, dass alle Spalten von A ungleich Null sind.
Nach der Voraussetzung (F2) gilt für alle y, $\begin{bmatrix} A^\top \\ -b^\top \end{bmatrix} y \ngtr 0$.

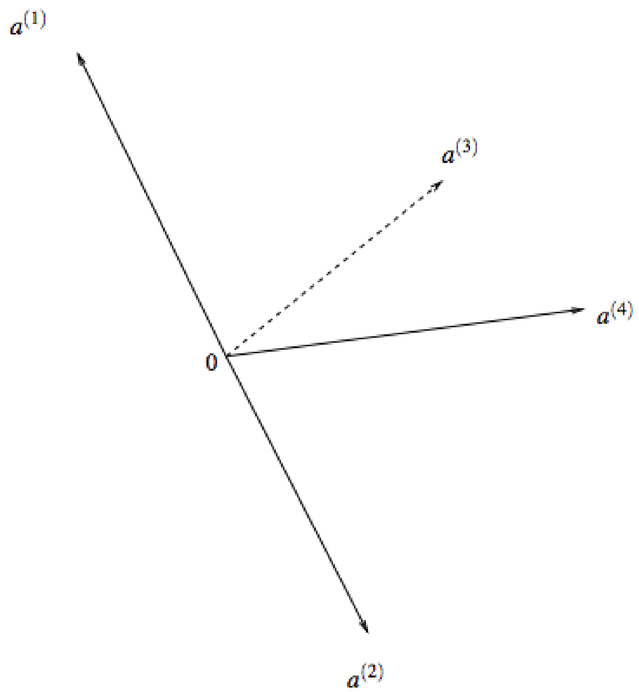


Figure 4: The vectors $a^{(i)}, i = 1,2,3,4$ generate a non-pointed cone in $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$ (A1) gilt nicht für $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A^\top \\ -b^\top \end{bmatrix}$ und $\tilde{v} = y$

$\Rightarrow$ (A2) gilt: Also existiert ein Wahrscheinlichkeitsvektor $\begin{bmatrix} u \\ s \end{bmatrix}$ mit $u = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^\top$

und $s \in \mathbb{R}$ sodass $\begin{bmatrix} u^\top & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^\top \\ -b^\top \end{bmatrix} = 0$.

$\Rightarrow u^\top A^\top = sb^\top \in \mathbb{R}^{1*m}$

$\Rightarrow Au = sb$

Wenn wir $s = 0$ annehmen, $Au = \sum_{i=0}^{n} u_i \vec{a_i} = 0$.

Da $\sum_{i=1} nu_i$ also gleich 1 ist, existiert $k \in \{1, .., n\}$ sodass $u_k \vec{a_k} \neq 0$ gilt.

$-u_k \vec{a_k} = \sum_{i \neq k} u_i \vec{a_i} \in \mathscr{C}_A$. Aber auch $u_k \vec{a_k} \in \mathscr{C}_A$.

Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme von spitzen Kegel.

Also ist s größer als 0. $\Rightarrow A(\frac{1}{s}u) = b$.

Da $\frac{1}{s}u > 0$ ist, haben wir es gezeigt.

2. Fall) A ist eine m*n Matrix sodass $\mathscr{C}_A$ kein spitzer Kegel ist.

Idee: Man kann einen Kegel als direkte Summe eines linearen Unterraums und eines spitzen Schnitts des Kegels darstellen(Figure 5).

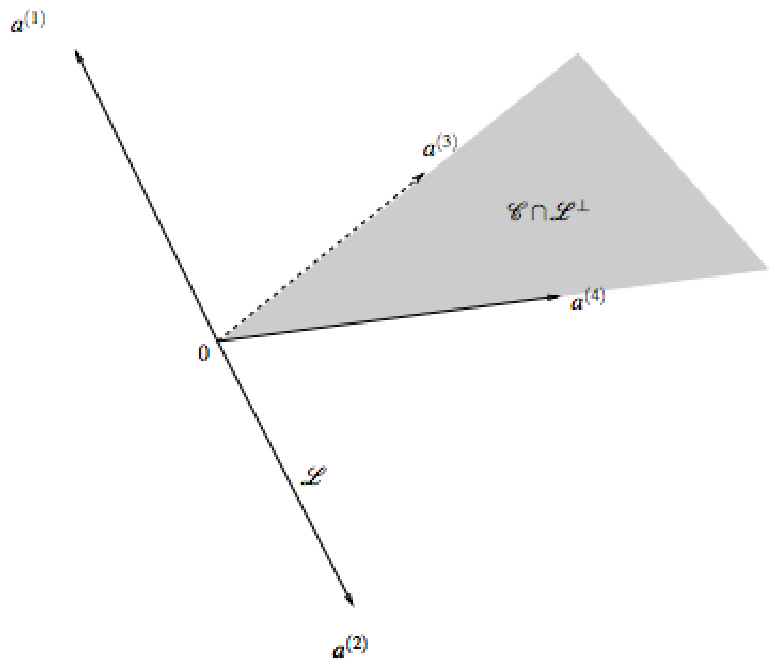


Figure 5: Slicing the cone in Figure 4 yields a pointed cone.

Lemma 5

Sei $\mathscr{C} := \mathscr{C}(\vec{a_i}, i = 1, ..., n) \subseteq \mathbb{R}^m$ ein polyedrischer konvexer Kegel, $\mathscr{L} := \mathscr{L}(\mathscr{C})$ und $\mathscr{L}^{\perp}$ sein Orthogonales Komplement.

Dann existiert für alle $x \in \mathscr{C}$ eine eindeutige Darstellung $x = u + v$ mit $u \in \mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp}$ und $v \in \mathscr{L}$. In Zeichen, $\mathscr{C} = (\mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp}) \oplus \mathscr{L}$.

Wenn man noch $\tilde{\vec{a_i}}$ als die orthogonale Projektion von $\vec{a_i}$ auf $\mathscr{L}^{\perp}$ für alle $i = 1, ..., n$ betrachtet, d.h. $\tilde{\vec{a_i}} := P_{\mathscr{L}^{\perp}}(\vec{a_i})$, dann gilt $\mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp} = \mathscr{C}(\tilde{\vec{a_i}}, i = 1, ..., n)$ und die Scheibe $\mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp}$ ist ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel.

Beweis des Lemmas

i) $\mathscr{C} = (\mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp}) \oplus \mathscr{L}$

($\Leftarrow$) Aus $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{C}$ folgt $(\mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp}) + \mathscr{L} \subseteq \mathscr{C}$.

($\Rightarrow$) Sei $x \in \mathscr{C}$. Dann existiert genau eine Darstellung $x = u + v$ mit $u \in \mathscr{L}^{\perp}$ und $v \in \mathscr{L}$.

Da $v \in \mathscr{L} \subseteq \mathscr{C}$, haben wir $-v \in \mathscr{C}$, also $u = x - v \in \mathscr{C}$ und $u \in \mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp}$.

ii) $\mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp} = \mathscr{C}(\tilde{\vec{a_i}}, i = 1, ..., n)$
($\Leftarrow$) Nach dem obigen Beweis i) haben wir $\tilde{\vec{a_i}} - \vec{a_i} = v \in \mathscr{L} \subseteq \mathscr{C}$. Also $\tilde{\vec{a_i}} = \vec{a_i} + v \in \mathscr{C}$ und wir haben $\tilde{\vec{a_i}} \in \mathscr{L}^{\perp} \cap \mathscr{C}$ für alle $i \in 1, ..., n$.
Daraus folgt $\mathscr{C}(\tilde{\vec{a_i}} : i = 1, ..., n) \subseteq \mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp}$.
($\Rightarrow$) Sei $x \in \mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp}$. Dann existiert $\lambda_1, ...\lambda_n \geq 0$ mit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i}$ und haben wir mit der Linearität $x = P_{\mathscr{L}^{\perp}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{\vec{a_i}} \in \mathscr{C}(\tilde{\vec{a_i}} : i = 1, ..., n)$.

iii) Die Scheibe $\mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp}$ ist der spitze polyedrische konvexe Kegel.
Wenn $v, -v \in \mathscr{C} \cap \mathscr{L}^{\perp}$, dann $v \in \mathscr{L}$, aber dann $v \perp v$ und daraus folgt $v = 0$. □

Mit diesem Lemma und der Arbitrage Theorie können wir jetzt die Richtung (F2) $\Rightarrow$ (F1) für den nicht spitzen Kegel $\mathscr{C}_A$ beweisen.

Nehmen wir an, dass (F2) für gegebene m*n Matrix A mit Column $\vec{a_i}, i = 1, ..., n$ und für den Vektor b gilt. Nehmen wir noch $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\vec{a_i}, i = 1, ..., n)$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathscr{C})$, $\mathscr{L}^{\perp}$ und $\tilde{\vec{a_i}} = P_{\mathscr{L}^{\perp}}(\vec{a_i}), i = 1, ..., n$ wie im obigen Lemma.
Dann haben wir die Darstellung $\vec{a_i} = \tilde{\vec{a_i}} + \hat{\vec{a_i}}$ mit $\hat{\vec{a_i}} \in \mathscr{L}$.
Und wir definieren $\tilde{b} = P_{\mathscr{L}^{\perp}}(b)$ und haben die Darstellung $b = \tilde{b} + \hat{b}$ mit $\hat{b} \in \mathscr{L}$.
Nehmen wir $y \in \mathscr{L}^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^m$ und $y^{\top} \tilde{\vec{a_i}} \geq 0$ für $i = 1, ..., n$ an.
Dann $y^{\top} \vec{a_i} = y^{\top} \tilde{\vec{a_i}} + y^{\top} \hat{\vec{a_i}} = y^{\top} \tilde{\vec{a_i}} \geq 0$ für alle $i = 1, ..., n$.
Mit (F2) erhalten wir $y^{\top} b \geq 0$ und daraus folgt $y^{\top} \tilde{b} = y^{\top} b - y^{\top} \hat{b} = y^{\top} b \geq 0$.
Also haben wir gezeigt dass
$y \in \mathscr{L}^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^m$ und $y^{\top} \tilde{\vec{a_i}} \geq 0$ für $i = 1, ..., n \Rightarrow y^{\top} \tilde{b} \geq 0$.
Da $\tilde{\vec{a_i}}, i = 1, ..., n$ einen spitzen Kegel in $\mathscr{L}^{\perp}$ erzeugt und $\tilde{b} \in \mathscr{L}^{\perp}$, erhalten wir mit dem Lemma 5 $\tilde{b} \in \mathscr{C}(\tilde{\vec{a_i}}, i = 1, ..., n)$.
D.h. es existiert $x_1, ..., x_n \geq 0$ mit $\tilde{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{\vec{a_i}}$.
Mit $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{C}$ daraus folgt:
$b = \tilde{b} + \hat{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{\vec{a_i}} + \hat{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i (\vec{a_i} - \hat{\vec{a_i}}) + \hat{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a_i} + \left\{ - \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{\vec{a_i}} + \hat{b} \right\} \in \mathscr{C}$.□

4 Geometrie generischen Auszahlungsmatrizen

Für eine gegebene m*n Auszahlungsmatrix A existiert die Arbitragmöglichkeit, wenn es eine strikt positive linear Kombination der Spalten dieser Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{m*n}$ gibt. D.h. $\exists\ x \in \mathbb{R}^n : Ax > 0$.
Damit erreichen wir, dass der Spaltenraum von A den positiven Orthant
$O^+ := \{x \in \mathbb{R}^m : x_j > 0 \ \forall\ j = 1, ..., m\}$ schneidet.
In Zeichen, $SR(A) \cap O^+ \neq \emptyset$.
Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit dass eine zufällige Auszahlungsmatrix eine Arbitragemöglichkeit zeigt gleich der Wahrscheinlichkeit dass ihr Spaltenraum den positiven Orthant trifft, also die Wahrscheinlichkeit dass der zufällige n-dimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^m$ O^+ schneidet.

Wir wollen wissen, wie viele Orthanten der n-dimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^m$ schneidet.

Definition 6
Sei V ein n-dimensioneller Unterraum von $\mathbb{R}^m$
V heißt generisch, wenn für manche (und deshalb für jede) Basen $\{v_1, ..., v_n\}$ von V und für jede $m-n$ Standardbasisvektoren $e_{i_1}, ..., e_{i_{m-n}}$ die Vektoren $\{v_1, ..., v_n, e_{i_1}, ..., e_{i_{m-n}}\}$ linear unabhängig sind.
Ebenso heißt eine m*n Matrix A generisch, wenn SR(A) ein generischer Unterraum von $\mathbb{R}^m$ ist.

Wir stellen dann eine Notation für die Orthanten von $\mathbb{R}$. Sei $\prod_j := e_j^{\perp}$ für alle $j = 1, ..., m$.
Dann sind die Unterräume $\prod_j$ die Koordinatenhyperebenen und sie trennen $\mathbb{R}^m$ in

die Orhanten, d.h. die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R} - \bigcup_{j=1}^{m} \prod_j$. Zwei Vektoren u und v in $\mathbb{R}^m$ sind im gleichen Orthant, wenn für alle $i = 1, ..., m$ $v_i u_i = 1$ ist.
Wir definieren symbolisch den Orthant: $O_\delta = \{x \in \mathbb{R}^m : \delta_i x_i > 0, \forall i = 1, ..., m\}$, wobei $\delta \in \mathscr{S}_m = \{(\delta_1, ..., \delta_m) : \delta_i \in \{+1, \text{-}1\}\ \forall i = 1, ..., m\}$.
Der generische Unterrraum V von $\mathbb{R}^m$ schneidet sich auch mit einigen Untermengen der Orthanten von $\mathbb{R}^m$. Zwei Vektoren in V stehen in unterschiedlichen Orthanten, genau dann wenn sie von einigen Koordinantenhyperebenen $\prod_j$ getrennt werden. Also gibt es einen bijektiven Zusammenhang zwischen den von V geschnittenen Orthanten und den Zusammenhangskomponenten von $V - \bigcup_{j=1}^{m} \prod_j$.

Wir machen eine kurze Einführung der Kodimension. Sei U ein Unterraum von einem Vektorraum V. Dann wird die Kodimension von U bezüglich V durch $codim_V U := dim(V/U)$ definiert. Und wir erhalten für $dimV < \infty$ nach dem Dimensionssatz die Gleichung $codim_V U = dimV - dimU$.

Die Schnittpunkte von V mit den Koordinatenhyperebenen $\prod_j$ sind der Unterraum von V mit zwei Eigenschaften: Diese Schnittpunkte haben Kodimension von 1, d.h. Dimension von $n - 1$, und sind in allgemeiner Position.
Wir werden die Eigenschaften zeigen.

Definition 7
Die Unterräume $H_1, ..., H_m$ mit Kodimension von 1 in einem n-dimensionalen Vektorraum sind in allgemeiner Position, wenn dim $(\bigcap_{j \in J} H_j) = n - |J|$ für alle $J \subseteq \{1, ..., m\}$ mit $1 \leq |J| \leq n$.

Zum Beispiel, wenn $n = 2$ ist, sind alle Menge unterschiedlicher Geraden die durch den Ursprung gehen in allgemeiner Position.
Wenn $n = 3$ ist, sind alle Menge unterschiedlicher Ebenen die durch den Ursprung gehen in allgemeiner Position, wenn keine aus drei dieser Ebenen sich in einer Geraden scheiden.

Für einen Unterraum H mit Kodimension von 1 im Vektorraum V besteht das Komplement V - H aus einem Paar von Halbräumen, die wir als H^+ und H^- zeichnen.

Zum Verständnis sehen wir uns ein Beispiel zu Halbräumen an: Die Hyperebenen des Raumes $\mathbb{R}^3$ sind genau die Ebenen, und ein Halbraum ist eine durch eine Ebene begrenzte dreidimensionale Teilmenge des Raumes.
Wenn m Unterräume $H_1, ..., H_m$ mit Kodimension von 1 und Halbräumen ${H_j}^+$ und ${H_j}^-$ gegeben sind, können wir allen Punkte im Komplement $V - \bigcup_{j \in J} H_j$ einem m-dimensionalen Vektor $\delta(x) = (\delta_1(x), ..., \delta_m(x))$ aus ± 1 zuordnen, wobei $\delta_i(x)$ impliziert in welchem Halbraum, ${H_j}^+$ oder ${H_j}^-$, x liegt. Für jeden Vektor $\delta \in \mathscr{S}_m$ ist die Menge $\bigcap_{i=1}^m \{x \in V : x \in {H_i}^{\delta_i}\}$ der Durchschnitt aus offenen Halbräumen. Also ist sie die leere Menge oder das Innere eines konvexen Polyeders. Also trennen die Unterräume $H_1, ..., H_m$ $V - \bigcup_{i=1}^m H_i$ in Zusammenhangskomponenten, die wir Zellen nennen.

Lemma 8
Sei A eine generische $m * n$ Matrix und $H_i := SR(A) \cap \prod_i$ für $i = 1, ..., m$. Dann sind $H_1, ..., H_m$ Unterräume mit Kodimension von 1 in allgemeiner Position in $SR(A)$. Zusätzlich entsprechen die Zusammenhangskomponenten von $SR(A) - \bigcup\limits_{j=1}^{m} H_j$ den Orthanten die $SR(A)$ schneiden.

Beweis
Sei $\dim(SR(A)) =: k \leq n$ und $J \subseteq \{1, ..., m\}$ mit $1 \leq |J| \leq k$.
Dann $|J^c| \geq m - k$ und existiert $i_1, ..., i_{m-k} \in J^c$.
Daraus folgt $\bigcap\limits_{j \in J} \prod_j = \bigcap\limits_{j \in J} e_j^\perp = span\{e_i : i \in J^c\} \supseteq span\{e_{i_1}, ..., e_{i_{m-k}}\}$
und $SR(A) + \bigcap\limits_{j \in J} \prod_j \supseteq SR[A, e_{i_1}, ..., e_{i_{m-k}}]$.
Da $SR(A) + \bigcap\limits_{j \in J} \prod_j$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$ ist und wir A als generische Matrix angenommen haben, gilt $dim(SR(A) + \bigcap\limits_{j \in J} \prod_j) = m$.
Zeigen wir zuerst dass $H_1, ..., H_m$ die Unterräume mit einer Kodimension von 1 sind:
Da $\dim(SR(A)) = k < \infty$ ist,

$$\begin{aligned}
\operatorname{codim}(H_i) &= \dim(SR(A)) - \dim(H_i) \\
&= \dim(SR(A)) - \dim(SR(A) \cap \textstyle\prod_i) \\
&= \dim(SR(A)) - \{\dim(SR(A)) + \dim(\textstyle\prod_i) - \dim(SR(A) + \textstyle\prod_i)\} \\
&= -(m-1) + m = 1
\end{aligned}$$

Zeigen wir noch dass $H_1, ..., H_m$ in allgemeiner Position sind:

$$\begin{aligned}\dim(\bigcap_{j\in J} H_j) =& \dim(SR(A) \cap \bigcap_{j\in J} \prod_j) \\ =& \dim(SR(A)) + \dim(\bigcap_{j\in J} \prod_j) - \dim(SR(A) + \bigcap_{j\in J} \prod_j) \\ =& \, k + (m - |J|) - m = k - |J|,\end{aligned}$$

also sind die Unterräume $H_1, ..., H_m$ in allgemeiner Position in SR(A).
Die zweite Behauptung ist elementar. □

Dehalb ist die Anzahl an Orthanten die von einem generischen n-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^m$ geschnitten werden, gleich der Anzahl an Zellen die von m Unterräumen mit einer Kodimension von 1 in allgemeiner Position von $\mathbb{R}^n$ festgelegt werden.

Wir wollen jetzt zeigen dass die Anzahl durch $Q(m,n) := 2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{m-1}{i}$ gegeben ist. Davor schauen wir uns kurz den Wert Q(m,n) für m und n von kleinen Werten an (Figure 6):

	n							
m	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	4	4	4	4	4	4	4
3	2	6	8	8	8	8	8	8
4	2	8	14	16	16	16	16	16
5	2	10	22	30	32	32	32	32
6	2	12	32	52	62	64	64	64
7	2	14	44	84	114	126	128	128
8	2	16	58	128	198	240	254	256

Figure 6: A table of $Q(m,n)$ values.

Proposition 9
Für positive Ganzzahlen m und n gilt:
(1) $Q(m,1) = 2$.
(2) $Q(m,2) = 2m$.
(3) $Q(m,n) = 2^m$ für $m \leq n$, so insbesondere $Q(1,n) = 2$.
(4) $Q(m,n) = Q(m-1,n) + Q(m-1,n-1)$ für $m,n \geq 2$.

Beweis der Proposition
Die Behauptungen (1)-(3) sind elementar und wir zeigen nun (4).
$Q(m-1,n) + Q(m-1,n-1) = 2\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{m-2}{j} + 2\sum\limits_{j=0}^{n-2}\binom{m-2}{j}$
$= 2\binom{m-2}{0} + 2\sum\limits_{j=0}^{n-2}[\binom{m-2}{j+1} + \binom{m-2}{j}]$, da $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
$= 2\binom{m-1}{0} + 2\sum\limits_{j=0}^{n-2}\binom{m-1}{j+1}$
$= 2\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{m-1}{j} = Q(m,n)$ □

Lemma 10
Seien m Unterräume $H_1, ..., H_m$ mit Kodimension von 1 in allgemeiner Position in einem Vektorraum V mit der Dimension von n gegeben, dann ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $V - \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$ gegeben durch $Q(m,n)$.

Vor dem Beweis sehen wir uns noch ein Beispiel an(Figure 7):

Beweis durch VI:
$n = 1 : Q(m,1) = 2$
$n = 2 : Q(m,2) = 2m$
$m = 1 : Q(1,n) = 2$
Nehmen wir an dass die Behauptung für $m-1$ und für beliebiges n gilt.
Nach dieser Annahme schneiden die ersten $m-1$ Unterräume $H_1, ..., H_{m-1}$
V in $Q(m-1,n)$ Teile.
Wir betrachten $\tilde{H}_i := H_i \cap H_m \quad \forall i = 1, ..., m-1$.
Da $\tilde{H}_1, ..., \tilde{H}_{m-1}$ eine Kodimension von 1 haben und in allgemeiner Position in H_m sind, wird H_m in $Q(m-1,n-1)$ Regionen unterteilt.

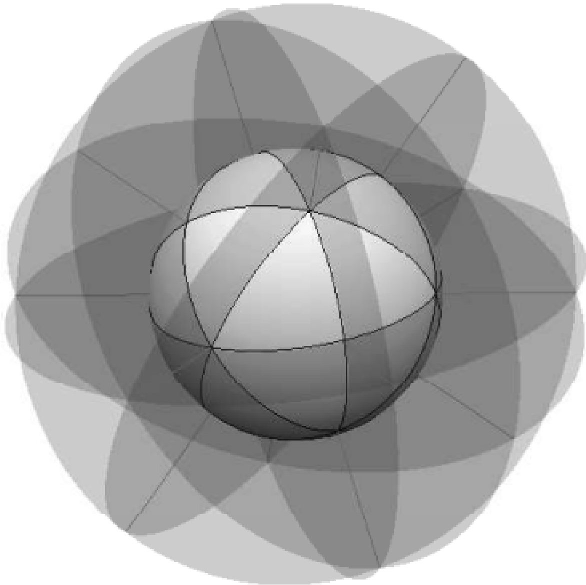


Figure 7: Slicing $\mathbb{R}^3$ with 4 codimension-1, general-position subspaces gives $Q(4,3) = 14$ regions.

Die ersten $m-1$ Unterräume H_i unterteilen also V in $Q(m-1,n)$ Regionen und die vorigen $Q(m-1,n-1)$ Regionen werden durch das dazuzählen von H_m nochmals unterteilt.
Also insgesamt $Q(m-1,n)+Q(m-1,n-1) = Q(m,n)$ □

Korollar 11
Sei A eine generische $m*n$ Auszahlungsmatrix. Dann ist die Anzahl der Orthanten die vom $SR(A)$ geschnitten werden $Q(m,n)$.

Beweis
Da eine generische m*n Auszahlungsmatrix vollen Rang mit $n \leq m$ hat, ist die Di-

mension von SR(A) n. Nach dem Lemma 8 sind $SR(A)\bigcap\prod_1,...,SR(A)\bigcap\prod_m$ in allgemeiner Posiotion und haben eine Kodimension von 1 in SR(A). Und es gibt einen bijektiven Zusammenhang zwischen den Orthanten die SR(A) schneidet und den nicht leeren Zellen die von $SR(A)\bigcap\prod_1,...,SR(A)\bigcap\prod_m$ definiert sind. Mit dem Lemma 10 ist die Anzahl von solchen Zellen durch Q(m,n) gegeben. □

5 Zufällige Auszahlungsmatrizen und die Wahrscheinlichkeiten von Arbitrage

In diesem Kapitel berücksichtigen wir mathematisch praktische zufällige Auszahlungsmatrizen und berechnen damit die Wahrscheinlichkeit der Arbitrage.
Wie wir schon vorher gesehen haben, können wir intuitiv sagen, dass der n-dimensionale SR(A) einer zufälligen Matrix A, Q(m,n) viele Orthanten schneidet. Da alle Orthanten gleich aussehen, sehen wir auch, dass die Wahrscheinlichkeit dass SR(A) O^+ schneidet zu $Q(m,n)/2^m$ wird.

Wir können eine Zufallsmatrix als eine matrixwertige Zufallsvariable betrachten dabei achten wir nur auf die Auszahlungsmatrizen die generisch mit Wahrscheinlichkeit 1 sind.

Lemma 12
Sei $n \leq m$ und A eine zufällige m*n Auszahlungsmatrix gegeben, dessen Einträge kontinuierliche gemeinsame Verteilungen haben. Dann ist A generisch mit Wahrscheinlichkeit 1.

Beweis
Betrachten wir m*n Auszahlungsmatrizen als Punkte in $\mathbb{R}^{m*n}$.
Nach der Voraussetzung gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m*n} \longrightarrow [0, \infty)$ sodass
$P[A \in G] = \int_G f(x)\, dx$ für $G \subseteq \mathbb{R}^{m*n}$.
Wenn $det[A, e_{i_1}, ..., e_{i_{m-n}}] = 0$ ist, ist A nicht generisch.
Also müssen wir zeigen dass jede Menge $\{A \in \mathbb{R}^{m*n} : det[A, e_{i_1}, ..., e_{i_{m-n}}] = 0\}$ ein

Lebesgue Maß von 0 hat. Es esixtieren nur endlich viele Indexe $e_{i_1}, ..., e_{i_{m-n}}$ mit $det[A, e_{i_1}, ..., e_{i_{m-n}}] = 0$.
Da $det[A, e_{i_1}, ..., e_{i_{m-n}}]$ in der Form eines nicht konstanten Polynoms aus den Komponenten A_{ij} ist, folgt gleich das Ergebnis. □

Korollar 13
Sei $n \leq m$ und A eine zufällige m*n Auszahlungsmatrix, dessen Spalten identisch und unabhängig verteilte m-dimensionale Zufallsvektoren mit kontinuierlicher Verteilungen haben. Dann ist A generisch mit Wahrscheinlichkeit 1.

Definition 14
Eine $m * n$ zufällige Auszahlungsmatrix heißt invariant unter der Spiegelung, wenn ihre Verteilung gleich bleibt, wenn eine beliebige der Zeilen mit -1 multipliziert wird.

Für $\delta \in \mathscr{S}_m$ zeichnen wir eine m*m diagonale Matrix, dessen Diagonale δ ist, als R_δ.

Lemma 15
Wenn eine $m * n$ zufällige Auszahlungsmatrix A invariant under der Spiegelung ist, dann schneidet $SR(A)$ jede der 2^m Orthanten in $\mathbb{R}^m$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

Beweis
Sei $\omega, \delta \in \mathscr{S}_m$ und R_ω eine $m * m$ Diagonalmatrix mit der Diagonale ω.
$P[SR(A) \cap O_\delta \neq \emptyset] = P[SR(R_\omega A) \cap O_{\omega\delta} \neq \emptyset]$, da $Ax \in O_\delta \iff R_\omega Ax \in O_{\omega\delta}$.
Wegen der Invariante unter der Spiegelung gilt
$P[SR(R_\omega A) \cap O_{\omega\delta} \neq \emptyset] = P[SR(A) \cap O_{\omega\delta} \neq \emptyset]$.
$\Rightarrow P[SR(A) \cap O_\delta \neq \emptyset] = P[SR(A) \cap O_{\omega\delta} \neq \emptyset]$.
Also schneidet $SR(A)$ O_δ und $O_{\omega\delta}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit.
Da ω, δ beliebig sind wurde dies schon gezeigt. □

Theorie 16
Sei A eine zufällige $m * n$ Auszahlungsmatrix die mit Wahrscheinlichkeit 1 generisch ist und invariant unter der Spiegelung ist.
Dann schneidet $SR(A)$ die Orthante O_δ mit Wahrscheinlichkeit $Q(m, n)/2^m$ für ein

beliebiges $\delta \in \mathscr{S}_m$.
Besonders lässt solch eine Matrix die Arbitragemöglichkeit mit Wahrscheinlichkeit $Q(m,n)/2^m$ zu.

Beweis
Sei $N(A)$ die Anzahl der Orthanten die $SR(A)$ schneiden.
Da A generisch ist wenden wir den Korollar 11 an, was uns $E[N(A)] = Q(m,n)$ gibt.
Und es gilt auch $N(A) = \sum\limits_{\delta \in \mathscr{S}_m} I\{SR(A) \cap O_\delta \neq \emptyset\}$.
$Q(m,n) = E[N(A)]$
$= \sum\limits_{\delta \in \mathscr{S}_m} E[I\{SR(A) \cap O_\delta \neq \emptyset\}]$
$= \sum\limits_{\delta \in \mathscr{S}_m} P[SR(A) \cap O_\delta \neq \emptyset]$
$= |\mathscr{S}_m| P[SR(A) \cap O^+]$,wegen Lemma 15.
$= 2^m P[SR(A) \cap O^+]$
$\Rightarrow P[SR(A) \cap O^+] = Q(m,n)/2^m$. $\square$

6 Quellenverzeichnis

[1] https://arxiv.org/pdf/1709.07446.pdf

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Halbraum

[3] https://www.modu-learn.de/verstehen/investition-finanzierung/arbitrage-bedeutung/

[4] http://www.mathe.tu-freiberg.de/ bernstei/HMI/Rang.pdf

[5] https://pdfs.semanticscholar.org/e4f2/5dbea6a42bdcf8f7699360b8cec00afea21c.pdf

[6] [Havlicek, 2006] Hans Havlicek. Lineare Algebra für Technische Mathematiker.Heldermann Verlag, Lemgo, Deutschland, 2006.

[7] https://de.wikipedia.org/wiki/Zufallsmatrix