Seminararbeit

Accounting for Biases in Black-Scholes

Institut der Finanz- und Versicherungsmathematik TU Wien

30. Juli 2019

Author:
Benjamin Jukic

Supervisor:
Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Stefan Gerhold

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die Black-Scholes Formel ist ein essentieller Teil des Optionshandels und wird dementsprechend heute noch verwendet um Werte von verschiedenen Optionen zu bewerten.
Der Handel mit Optionen war vor dem Black-Scholes Modell kaum vorhanden und von relativ ungenauen Berechnungen geplagt. Erst 1900 hat Louis Bachelier höhere Mathematik angewendet um zu versuchen Optionspreise zu bewerten. Seine These, präsentiert in seiner Arbeit *"Theory of Speculation"*, basierte auf dem Konzept der Brown'schen Bewegung, oder Wiener Prozess. Das selbe Konzept wurde schon für viele Finanzmodelle verwendet sowie auch von Black und Scholes für ihr Modell. Bacheliers These wurde jedoch sehr lange ignoriert und erst in den 1960ern von anderen Mathematikern wiedergefunden und erweitert. Sein Modell ist sehr nah an das Black-Scholes Modell hingekommen, aber mit einigen Mangeln. So fehlte in seinem Modell das wichtige no-Arbitrage Prinzip. Außerdem arbeitete er mit einem normalverteilten Preis, wodurch angenommen wurde das Preise negative werden können. Hingegen verwendet das Black-Scholes Modell einen logarithmisch normalverteilten Preis. So hätte zum Beispiel in Bacheliers Modell eine Aktie mit einem Wert von 20€ die selbe Wahrscheinlichkeit auf -10€ zu Fallen wie auf 30€ zu steigen, was natürlich nicht der Fall sein kann.
Dann letztendlich im Jahr 1973 haben Fisher Black, Myron Scholes und Robert Merton ihr neues Black-Scholes Modell in ihrer gemeinsamen Arbeit *"The Pricing of Options and Corpurate Liabilities"* publiziert. Zwar ist Mertons Name nicht im Titel des Modells, aber sein Beitrag zu der Arbeit war gleich groß wie der der anderen beiden Mathematiker. 1997, 24 Jahre nach der ersten Publikation, haben alle drei Mathematiker einen Nobel Preis für ihre Arbeit an einer neuen Methode für die Bewertung des Wertes von Derivaten bekommen. Jedoch ist Fisher Black leider zwei Jahre davor an Krebs verstorben.

Die Formel ist aber leider nicht perfekt und es gibt einige falschen Annahmen die getroffen werden müssen um den Wert einer Option berechnen zu können. Dadurch kann man Tendenzen in den Werten von Optionen, die durch die Black-Scholes Formel berechnet wurden, erkennen. Um zu verstehen wie es zu solchen Tendenzen kommt und damit man vielleicht diese Tendenzen für die eigenen Investmentstrategien verwenden kann, muss man zuerst genau verstehen wie die Black-Scholes Formel funktioniert und welche Annehmen für Formel benötigt werden.

2 Grundlagen von Black-Scholes

2.1 Black-Scholes Formel

Die grundlegende Formel für Black-Scholes ist

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)$$

Wobei C das Call-Premium ist, also der tatsächliche Preis von der Call-Option, S der Spot Stock-Price, also der Preis von der Aktie der Option, $N(D_1)$ der Wert der Normalverteilungsfunkion an der Stelle d_1 und $N(d_2)$ an der Stelle d_2, K der Strike-Price, also der Wert für den man die Option zu dem Fälligkeitsdatum T kaufen kann und e^{-RT} der Diskontierungsfaktor mit dem Zinssatz R.

2.2 Einfaches Beispiel

Nehmen wir an, dass eine IBM Aktie 100 Dollar wert ist, das Fälligkeitsdatum in einem Jahr ist, der Strike-Price 100 Dollar beträgt und wir einen einen Zinssatz von 10% haben. Also setzten wir dann in unsere Formel $S = 100, K = 100, R = 0.1, T = 1$. Zu der Berechnung von $N(d_1)$ und $N(d_2)$ werden wir später noch kommen da diese etwas komplexer ist. In diesem Fall betragen sie $N(d_1) = 0.72575$ und $N(d_2) = 0.65542$. Wenn wir diese Werte nun in unsere Formel einsetzten bekommen wir den Wert $C = 13.27$.

Wenn wir nun die selben Werte nehmen, jedoch den Strike-Price auf 130 Dollar erhöhen bekommen wir den Wert $C = 2.546$, also eine deutlich billigere Option. An diesem einfach Beispiel kann man schon ein Gefühl dafür bekommen wie der Strike-Price auf den Wert der Option einwirken kann.

2.3 Approximation von zukünftigen Geschehen

Der wichtigste Teil der Formel und auch der Teil an dem Black und Scholes am längsten gearbeitet haben ist die Berechnung von den Werten für $N(d_1)$ und $N(d_2)$ da diese zukünftige Geschehen approximieren sollen. Das $N(d_1)$ wird auch oft "Delta" oder "Hedge Ratio" genannt und dass $N(d_2)$ wird oft "Probability to be called".

Mit diesen zwei Werten kommt man jedoch aber auch schon zu dem ersten Problem der Black-Scholes Formel. Für die Berechnung der Positionen d_1 und d_2 benötigt man die zukünftige Volatilität.
Grundsätzlich unterscheidet man zwischen drei Arten von Volatilität.

Historische Volatilität

Die historische Volatilität ist von diesen dreien die, am einfachsten zu berechnende und deshalb auch die früheste Art von Volatilität die man für den Optionshandel verwendet hat. Hierfür braucht man lediglich vergangene Wert einer Aktie für welche man dann die annualisierte Standardabweichung, also die vergangene Volatilität, mit basischen Wissen der Statistik, berechnet.
Diese wird beispielsweise auch oft von Brokern verwendet um ein Gefühl für eine bestimmtes Aktie zu erlangen und um sich dadurch bessere Investmentstrategien überlegen zu können.
Jedoch bleibt oft die große Frage ob man sich wirklich an vergangen Geschehen orientieren sollte. Oft sind hier Investoren verschiedener Meinunng. Auf der einen Seite sagen einige, dass zukünftige Geschehen komplett unabhängig von vergangenen Geschehen sind, wohingegen andere meinen, dass alles verbunden ist und Aktien immer einer sehr ähnlich Kurve folgen. Wenn man die Daten von Aktienkursen analysiert, scheinen sie eher unabhängige und unvorhersehbare Muster anzunehmen.

Implizite Volatilität

Diese Volatilität wird grundsätzlich in der Black-Scholes Formel verwendet da diese die näheste Approximation der tatsächliche zukünftige Volatilität ergibt. Hierbei werden alle bekannten Werte, die für die Black-Scholes Formel benötigt werden, mit dem jetzigen Preis der Option in die Formel eingesetzt und umgeformt, sodass man die einzige Unbekannte in der Formel, nämlich die Volatilität, berechnen kann.

Die implizite Volatilität ist sehr wichtig da sie oft verwendet wird um abzuschätzen wie volatil der Markt ist. Ebenso wird sie oft verwendet um Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, dass eine Aktie zum Beispiel einen bestimmten Wert erreicht. Die implizite Volatilität deutet eigentlich die Meinung des Marktes von dem Wert einer Aktie. Wenn zum Beispiel eine Aktie hohe implizite Volatilität besitzt erwartet der Markt große Schwingungen im Wert dieser Aktie.

Für Broker ist dementsprechend auch die implizite Volatilität sehr viel wichtiger als die historische Volatilität. Bei der impliziten Volatilität werden nämlich alle zur Zeit bekannten Faktor einberechnet. So wird zum Beispiel die Volatilität höher sein wenn eine Firma vorhat die Quartalszahlen zu veröffentlichen, oder auch vielleicht vor Gericht muss. Dementsprechend kann die implizite Volatilität auch beschreiben wie viel Einfluss Nachrichten auf den Wert einer Firma haben können und dadurch auch auf den Wert der Aktie und der Option.

Zukünftige Volatilität

Die zukünftige Volatilität stellt den tatsächlichen zukünftige Wert der Volatilität dar und ist auch die Volatilität die in der Black-Scholes Formel benötigt wird um einen fairen Optionspreis berechnen zu können. Da dies jedoch Werte der Zukunft sind gibt es natürlich keine Art und Weise an die genauen Wert zu kommen und dementsprechend kann man mit der Black-Scholes Formel auch keinen echt fairen Preis erhalten.

2.4 Weitere Annahmen

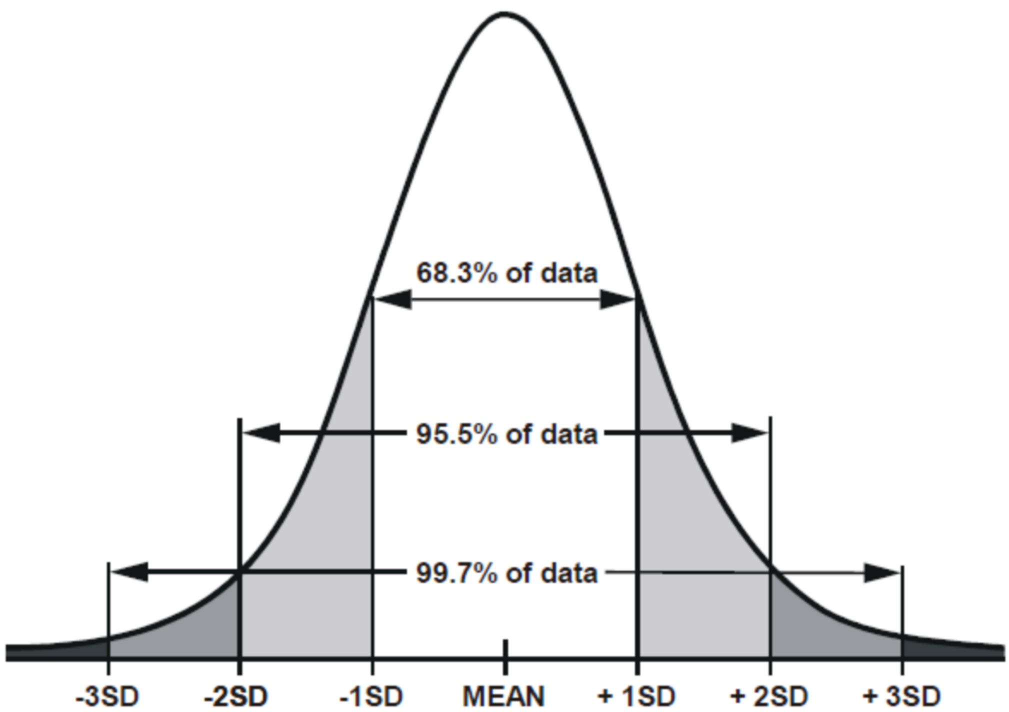
Die Annahme, dass die implizite Volatilität gleich der zukünftigen ist, ist jedoch nur eine von vielen Annahmen die tatsächlich nicht der Realität entsprechen, die jedoch generell angenommen werden und auch von Ökonomen akzeptiert werden, da es sonst kaum möglich wäre Modelle wie Black-Scholes zu erstellen. Weitere Annahmen die getroffen werden sind unter Anderen:

- die Volatilität bleibt konstant,
- der Zinssatz bleibt konstant,
- der Aktienkurs folgt einer Brown'schen Bewegung,
- der Leerverkauf bei Finanzinstrumenten ist uneingeschränkt möglich,
- es gibt keine Steuern oder Transaktionskosten,
- und der Aktienkurs kann mit der logarithmische Normalverteilung approximiert werden,

Die logarithmische Normalverteilung wird für die Approximation der Bewegung eines Aktienkurses verwendet da sie am nähesten zu den tatsächlichen Werten liegt. Man darf aber nicht vergessen, dass sie trotzdem noch eine sehr ungenau Approximation darstellt.

Wenn man nun die Werte der logarithmischen Normalverteilung mit den exakten Werten eines Aktienkurses vergleicht gibt es zwei große Unterschiede die man betrachten kann. Nämlich gibt es im Aktienmarkt sowohl viel mehr Tage in denen der Markt stabil bleibt und die Werte der einzelnen Aktien kaum variieren, als auch mehr Tage in denen starke Kurssprünge vorhanden sind. Dies kann man an einem einfachen Beispiel beobachten:

In einer Studie wurden die Werte von dem Dow Jones Aktienkurs mit den Werten, die die logarithmische Normalverteilung für den Aktienkurs approximiert hat, verglichen. Wenn man nun den Kurs in den letzten 1000 Arbeitstage betrachtet sollte nach der Normalverteilung in dem Bereich von drei Standardabweichungen genau 99,74% der Tage liegen, also 997,4 Tage. Wenn man nun aber die echten Kurswerte der letzten vier Jahre von Dow Jones betrachtet sieht man, dass 11 Tage außerhalb von drei Standardabweichungen liegen. Dies scheint auf den ersten Blick kein all zu großer Unterschied zu sein, jedoch machen diese Tage, die außerhalb von drei Standardabweichungen liegen, einen sehr großen Unterschied für Investoren, da an diesen Tagen große Summen an Geld gewonnen und verloren werden können.



3 Tendenzen der Black-Scholes Formel

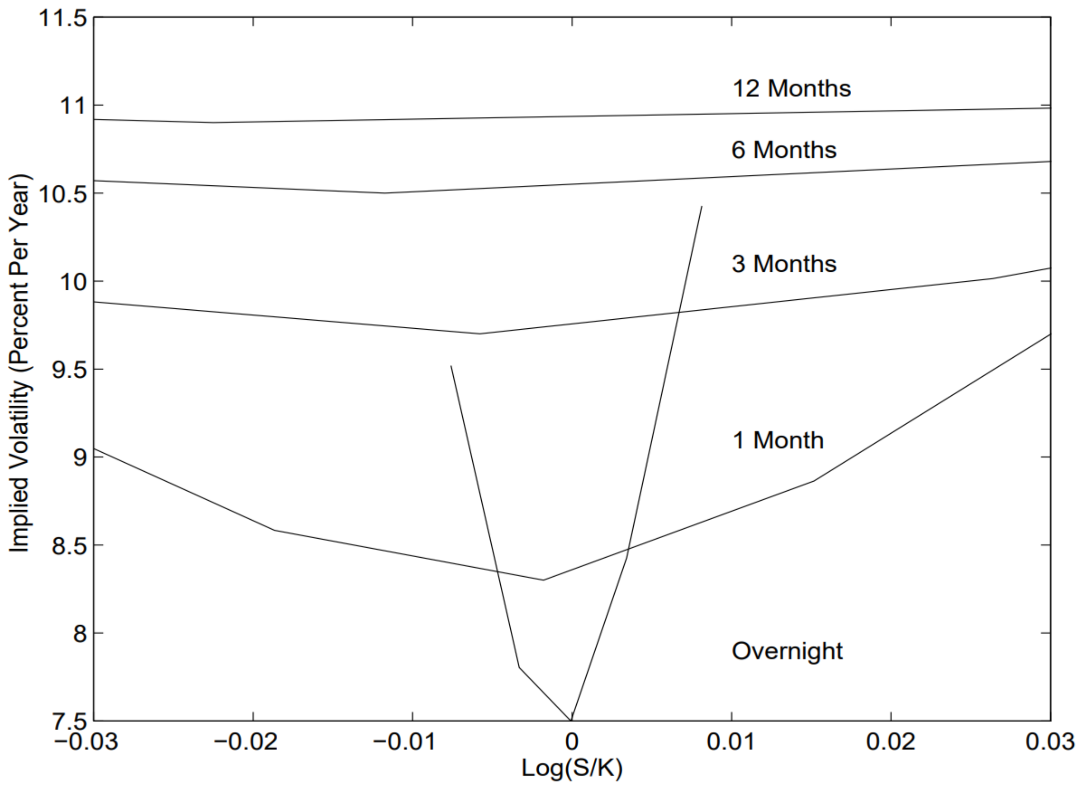
Wie schon erwähnt gibt es einige Tendenzen die man bei Black-Scholes Werten beobachten kann, jedoch werde ich in dieser Arbeit nur auf zwei der wichtigsten genauer eingehen. Die wären Tendenzen bezüglich des Fälligkeitsdatum und Tendenzen bezüglich dem Strike-Price. Dabei ist man auf diese Tendenzen gestoßen in dem man große Mengen an vorhandenen Daten aus der Vergangenheit analysiert hat und dadurch bestimmte wiederholte Abweichungen der Black-Scholes Werte von den tatsächlichen Werten erkennen konnte.

Für unseren Fall werden wir Optionen bezüglich Währungen genau analysieren. Die sind vom Prinzip her gleich zu den Optionen bezüglich Aktien, wobei man in diesem Fall das Recht besitzt, zu einem bestimmten Fälligkeitsdatum, eine Währung zu einem bestimmten Kurs zu kaufen. Bei Währungsoptionen ist "Moneyness" ein oft verwendeter und wichtiger Begriff. Moneyness beschreibt die Lage von dem aktuellen Wert einer Währung in Bezug zu dem Strike-Price.

$$Moneyness = \frac{Aktueller\ Basispreis}{Ausübungspreis}$$

4 Tendenzen bezüglich Moneyness

Eine bekannte Tendenz bezüglich Moneyness ist die Korrelation zwischen der impliziten Volatilität und Moneyness, welche aufgrund der Form oft ein "Smile" gennant wird.



Aus diesem einfachen Beispiel schließt man, dass die implizite Volatilität am niedrigsten ist je mehr der Logarithmus von Moneyness gegen Null geht, also dass der Wert der Währung gegen den Strike-Price konvergiert und dass die Volatilität steigt je weiter wir im Geld oder aus dem Geld liegen. Dabei bedeutet im Geld zu sein, dass der Basispreis der Aktie, oder in diesem Fall der Währung, höher als der Strike-Price ist und aus dem Geld dass der Basispreis unter dem Strike-Price liegt. An der Grafik kann man ebenso ablesen, dass die implizite Volatilität, über einen größeren Zeitraum sehr viel weniger variiert.

4.1 Schiefe und Wölbung

Weiteres kann man bei der Beobachtung von Schiefe und Wölbung ebenfalls erkennen, dass Tendenzen bezüglich Moneyness entstehen können.

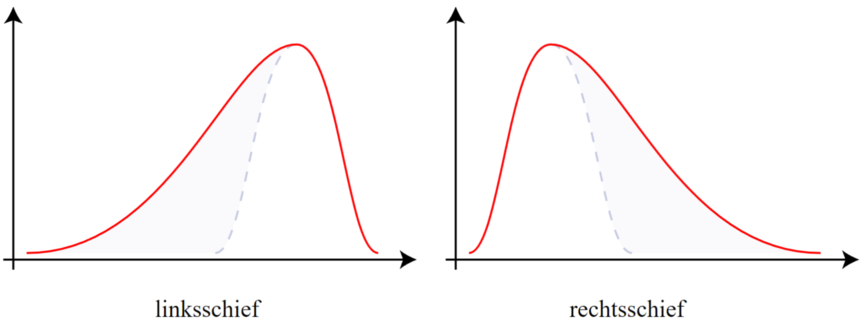


Abbildung 1: Schiefe

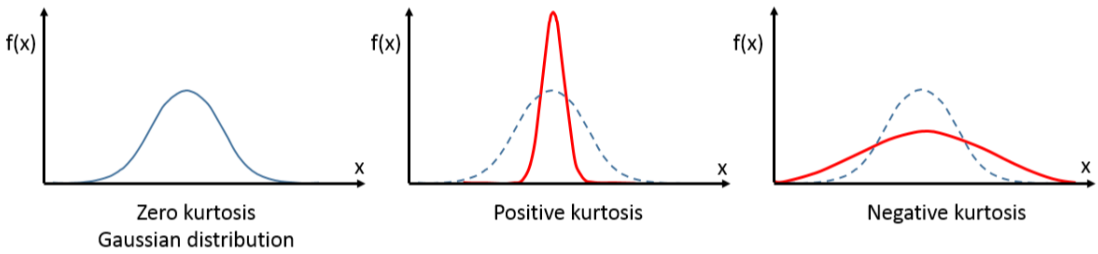


Abbildung 2: Wölbung

Schiefen und Wölbungen werden oft für genauere Approximationen eines Optionspreis verwendet. In unsrem Fall müssen wir zuerst die Abschreibungsrate

$$x_{t+1} = \log S_{t+1} - \log S_t$$

definieren, wobei S_t den Dollarpreis einer Fremdwährung darstellen soll. Für Schiefe-und Wölbungsvariablen brauchen wir noch Kumulanten κ_j der Zufallsvariable x,

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= E(x) \\
\kappa_2 &= E(x - \kappa_1)^2 \\
\kappa_3 &= E(x - \kappa_1)^3 \\
\kappa_4 &= E(x - \kappa_1)^4 - 3(\kappa_2)^2
\end{aligned}$$

wobei κ_1 der Erwartungswert ist, κ_2 die Varianz, κ_3 der dritte zentrale Moment und κ_4 der vierte zentrale Moment. Mit diesen Kumulanten können wir uns nun die Standardindikatoren γ_1 und γ_2 für Schiefe und Wölbung definieren:

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_3}{(\kappa_2)^{3/2}}$$
$$\gamma_2 = \frac{\kappa_4}{(\kappa_2)^2}$$

Diese Werte werden in späteren Approximationen noch eingesetzte.

4.2 Währungsoptionen

Als erstes werden wir die bedingte Verteilung des Wechselkurses betrachten indem wir den logarithmischen Preis des Wechselkurses hiermit definieren:

$$\begin{aligned} \log S_{t+n} &= \log S_t + \sum_{j=1}^{n} x_{t+j} \\ &= \log S_t + x_{t+j}^n \end{aligned}$$

Dadurch hängt dann die bedingte Verteilung von dem logarithmischen Preis von x_{t+1}^n ab. Der Preis einer europäischen Call-Option auf eine Währungen wird grundsätzlich durch diese Formel definiert,

$$C_{nt} = E_t[M_{t,t+n}(S_{t+n} - K)^+]$$

wobei $M_{t,t+n}$ einen mehr periodischen stochastischen Abzinsungsfaktor darstellt. Weiters nehmen wir noch an, dass M und S unabhängig sind, da wir sonst schwer unterscheiden können wie die beiden Werte auf unsere Ergebnisse einwirken. Dadurch hängt der Call-Preis dann nur von x_{t+1}^n ab also ist

$$\begin{aligned} C_{nt} &= e^{-r_{nt}n} E_t(S_{t+n} - K)^+ \\ &= e^{-r_{nt}n} \int_{\log(K/S_t)}^{\infty} (S_{t+n} - K)^+ f(x) dx \end{aligned}$$

wobei f die Dichtefunktion von x darstellt und r_{nt} den kontinuierlichen zusammengesetzten n-Periodenertrag. Wenn nun x_{t+1}^n bedingt Normalverteilt ist mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ, dann ist S_{t+n}

bedingt logarithmisch normalverteilt. Angewendet auf unsere Formel ergibt das

$$C_{nt} = S_t e^{-r^*_{nt} n} \Phi(d) - K e^{-r_{nt} n} \Phi(d - \sigma_n)$$

wobei für d gilt

$$d = \frac{\log(S_t/K) - (r^*_{nt} - r_{nt})n + \sigma_n^2/2}{\sigma_n}.$$

Nun können wir genauer auf die Tendenzen bezüglich Moneyness eingehen. Dafür fixieren wir das Fälligkeitsdatum und betrachten zu welchen Veränderungen eine Erhöhung oder Verminderung vom Strike-Price führen kann.

4.3 Gram-Charlier

Hierfür werden wir für die logarithmische Veränderung die Gram-Charlier Verteilung verwenden in der die normale Dichte mit weiteren Termen augmentiert wird, damit wir den Effekt der Schiefe und Wölbung beobachten können. Für unsere Zwecke definieren wir noch eine standardisierte Variable

$$w = \frac{x^n_{t+1} - \mu_n}{\sigma_n}$$

mit der Gram-Charlier Dichtefunktion

$$f(w) = \phi(w) - \gamma_{1n} \frac{1}{3!} D^3 \psi(w) + \gamma_{2n} \frac{1}{4!} D^4 \phi(w)$$

wobei

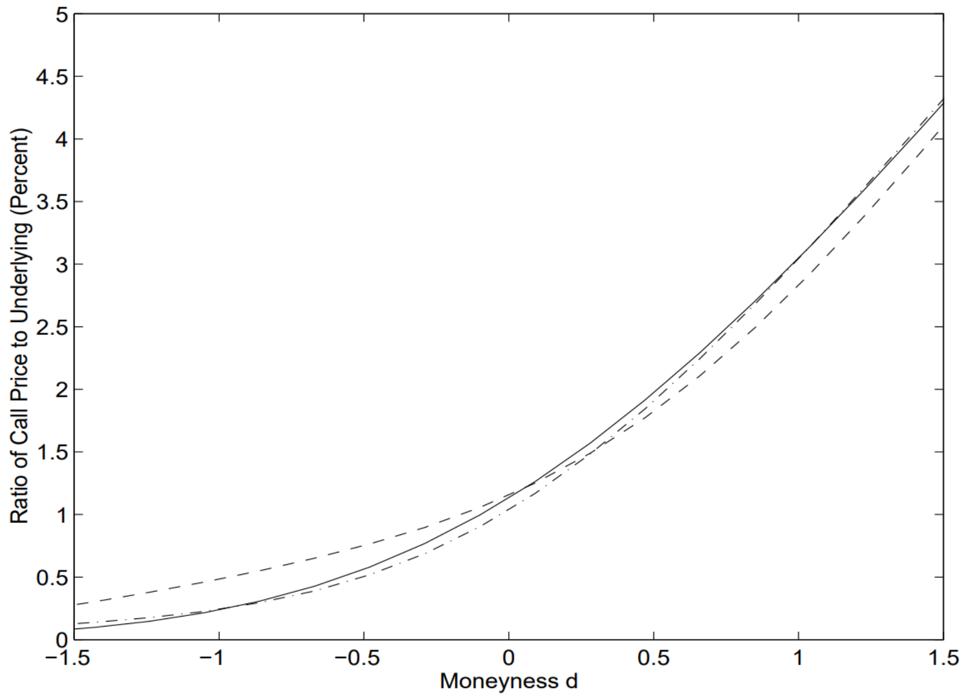
$$\phi(w) = (2\pi)^{-1/2} exp(-w^2/2)$$

die Dichte der Standardnormalverteilung ist. Wenn wir nun Annehmen, dass M und S unabhängig sind, mit der Bewertung des Wechselkurses durch w und mit der Dichtefunktin von Gram-Charlier bekommen wir für den Preis der Call-Option die approximierte Formel

$$C_{nt} \cong S_t e^{-r^*_{nt} n}\Phi(d) - K e^{-r_{nt} n}\Phi(d-\sigma_n)$$
$$+ S_t e^{-r^*_{nt} n}\phi(d)\sigma_n[\frac{\gamma_{1n}}{3!}(2\sigma_n - d) - \frac{\gamma_{2n}}{4!}(1-d^2+3d\sigma_n-3\sigma_n^2)]$$

Diese Formel stellt die normale Formel für Call-Optionen von Währungen dar, jedoch berücksichtigt sie auch noch die Schiefe und Wölbung. Mit dieser Formel können wir dann schon sehen, dass die Wölbung für Optionen am Geld, also mit $d = 0$, den Preis senkt und für Optionen weit im Geld oder aus dem Geld den Preis erhöht. Das liegt an dem Effekt den die Wölbung auf die Dichtefunktion hat. Dementsprechend bekommen wir mit dieser Formel einen kleineren oder größeren Preis als den von Black-Scholes.

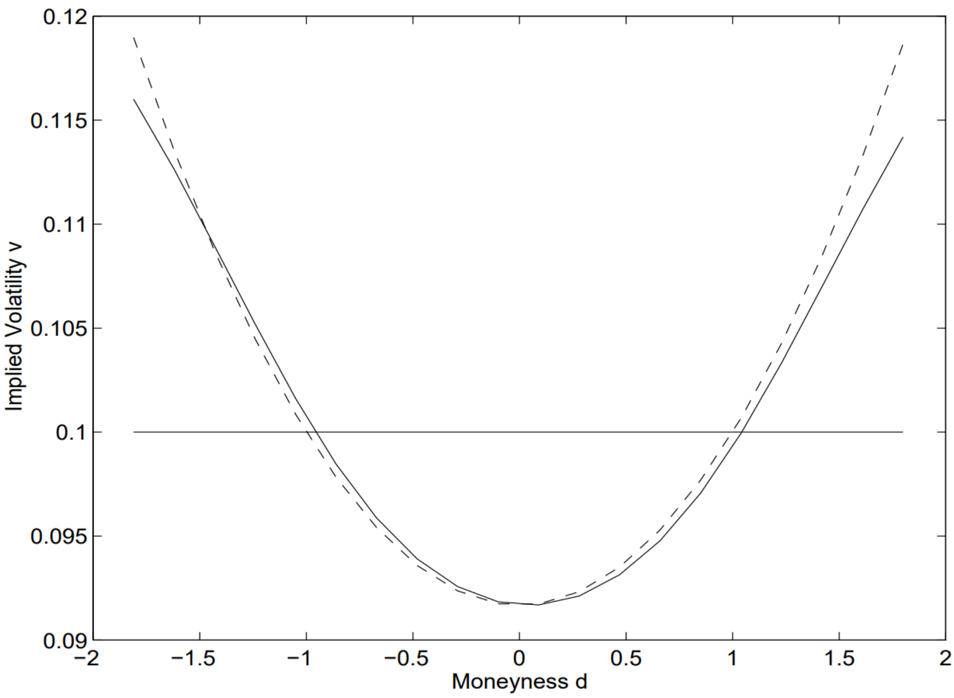
In der Folgenden Grafik sehen wir das Verhältnis zwischen dem Call-Preis der Währung und Moneyness d.
Dabei repräsentiert die volle Linie die Werte der standardmäßigen Black-Scholes Formel, die strichlierte Linie repräsentiert den Gram-Charlier Call-Preis, wobei sie den Term für Schiefe einbezieht und die strichliert-gepunktete Linie ist der Gram-Charlier Call-Preis mit dem Term für Wölbung. Für dieses Beispiel wurde in beiden Fällen $n = 260.6/12$, nämlich ein Monat, $\sigma_n = 0.10(1/12)^{1/2}$ und $r_{nt} = r^*_{nt} = 0$ gewählt.



An dieser Grafik kann man sehen, dass unsere Approximation durch die Gram-Charlier Verteilung relativ nah, an die Werte des Call-Preises der standardmäßigen Black-Scholes Formel kommt. Die bekannte Smile Form würden wir wieder bekommen wenn wir Moneyness mit der Volatilität vergleichen.
Wenn wir nun die Formel zur Berechnung von Call-Preisen durch die Gram-Charlier Verteilung nehmen, bekommen wir daraus diese Formel für die Volatilität,

$$v_n(d) \cong \sigma_n[1 - \frac{\gamma_{1n}}{3!}d - \frac{\gamma_{2n}}{4!}(1 - d^2)]$$

wobei wir hier wieder dieselbe normale Formel für Volatilität mit Termen für Schiefe und Wölbung haben.Diese Formel ist sehr praktisch da man damit die Tendenzen des Call-Preises anhanden der schon bekannten impliziten Volatilität analysieren kann. Ebenso kann man mit dieser Approximation für Investmentstrategien auch teilweise vorher sehen wie stark die Schiefe-und Wölbungsterme auf die implizite Volatilität einwirken werden.
Wenn wir die Werte der impliziten Volatilität aus der Black-Scholes Formel mit den Werten dieser Formel vergleichen, sehen wir das die Abweichung kleiner ist solang Moneyness nahe Null ist. Jedoch steigt die Approximation schneller an wenn Moneyness größer 1.5 oder kleiner -1.5 wird.



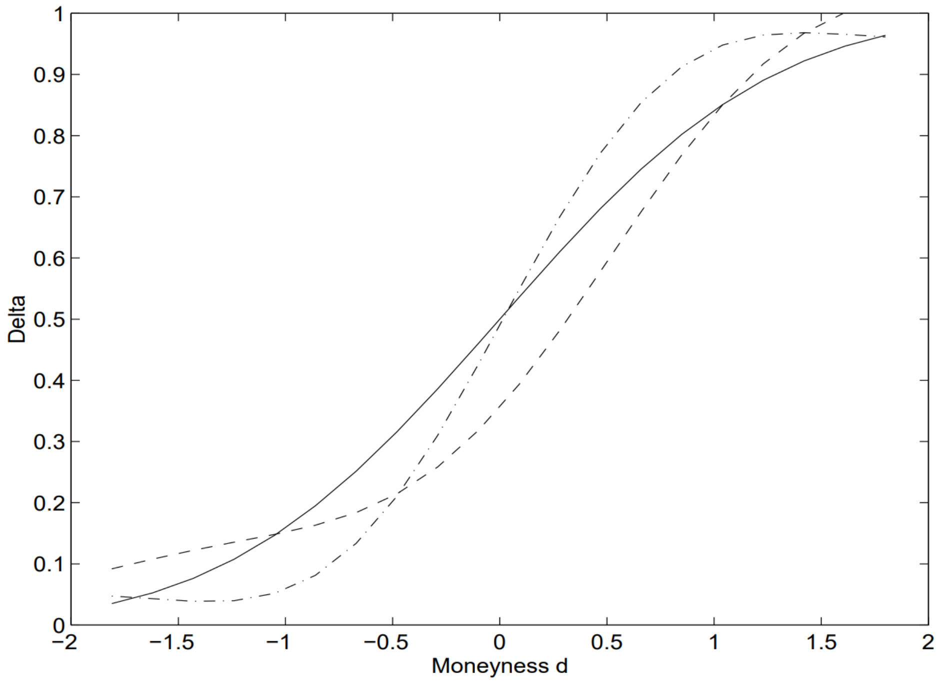
Weiters können wir damit auch noch betrachten welche Auswirkung Schiefe und Wölbung auf das Delta von unserem Optionspreis haben kann. Grundsätzlich ist das Delta einer Option die Beziehung der Optionspreisänderung und der Veränderung des Basispreises, also

$$Delta = \frac{Optionspreisänderung}{Basispreisänderung}.$$

Die Berechnung des Deltas ist oft wichtig da man dadurch gute Vorhersagen treffen kann, wie eine Option sich noch verändern könnte.
Bei dem Gram-Charlier Call-Preis ist das Delta

$$\begin{aligned}
e^{r^*_{nt}}\Delta(d) &\equiv \frac{\delta C_{nt}}{\delta(S_t e^{-r^*_{nt}n})} \\
&= \Phi(d) - \frac{\gamma_{1n}}{3!}\phi(d)(1 - d^2 + 3d\sigma_n - 2\sigma_n^2) \\
&+ \frac{\gamma_{2n}}{4!}\phi(d)[3d(1+2\sigma_n^2) + 4d^2\sigma_n - d^3 - 4\sigma_n + 3\sigma_n^3]
\end{aligned}$$

ebenfalls mit Termen für Schiefe und Wölbung. Wenn wir dies nun wieder mit dem Delta von der Black-Scholes Formel vergleichen sehen wir, dass das Delta am Geld relativ simpel bleibt. Die Wölbung hat auf das Delta von Call-Optionen am Geld wenig Einfluss da das σ_n meist klein ist.



Dabei stell hier wieder die volle Linie die Werte von Black-Scholes dar und die strichlierte und gepunktet-strichlierte, die Gram-Charlier Approximation mit je Termen für Schiefe und für Wölbung.

Als wiederholendes Schema bei all diesen Vergleichen können wir sehen, dass die Approximation mit Schiefe und Wölbung, durch die Gram-Charlier Verteilung, meist sehr ähnlich zu den Black-Scholes wert bleibt solange Moneyness nahe bei Null bleibt.

5 Tendenzen bezüglich dem Fälligkeitsdatum

Bei den Fälligkeitsdatum ist das erste und wichtigste Erkenntnis, dass die implizite Volatilität je kleiner wird, desto näher wir am Fälligkeitsdatum sind.
Um diesen Effekt zu beobachten muss man einen stochastische Prozess für die Veränderung des logarithmischen Preises definieren.
Dafür kann man zwei Prozesse anwenden. Entweder können wir annehmen das die n-periodische logarithmische Veränderung aus ein-periodischen unabhängig-identisch-verteilten Komponenten besteht, oder wir können die Möglichkeit einer durch Zeitabhängigkeit induzierten stochastische Volatilität annehmen.
Jedenfalls geht in beiden Fällen die Abweichung von Black-Scholes mit einem größeren Fälligkeitsdatum gegen Null.

Wir betrachten nun mal nur den ersten Fall. Wir nehmen also an dass unsere n-periodische logarithmische Veränderung aus ein-periodischen unabhängig-ident-verteilten Komponenten besteht. Dafür definieren wir uns nun diese Formel für die Abschreibungsrate

$$\begin{aligned}\log S_{t+1} - \log S_t &= x_{t+1} \\ &= \mu_{t+1} + \sigma \epsilon_{t+1}\end{aligned}$$

wobei das ϵ_t hier unabhängig-ident-verteilt ist. Über n Perioden bekommen wir dann die Formel

$$\begin{aligned}\log S_{t+n} - \log S_t &= x_{t+1}^n \\ &= \mu_n + \sigma \sum_{j=1}^{n} \epsilon_{t+j}\end{aligned}$$

Nun können wir das Verhalten von Kumulanten und Momenten über verschiedene Zeitintervalle betrachten. Dafür benötigen wir eine kumulantenerzeugende Funktion eines beliebigen ϵ mit endlichen Kumulanten κ_j

$$\phi(s;\epsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\kappa_j s^j}{j!}.$$

Da gilt, dass die kumulantenerzeugende Funktion der Summe unabhängiger Zufallsvariablen, die Summe der Erzeugendenfunktionen der einzelnen Zufallsvariablen ist, besitzt dann

$$\epsilon_{t+1}^{n} \equiv \sum_{j=1}^{n} \epsilon_{t+j}$$

die kumulantenerzeugende Funktion

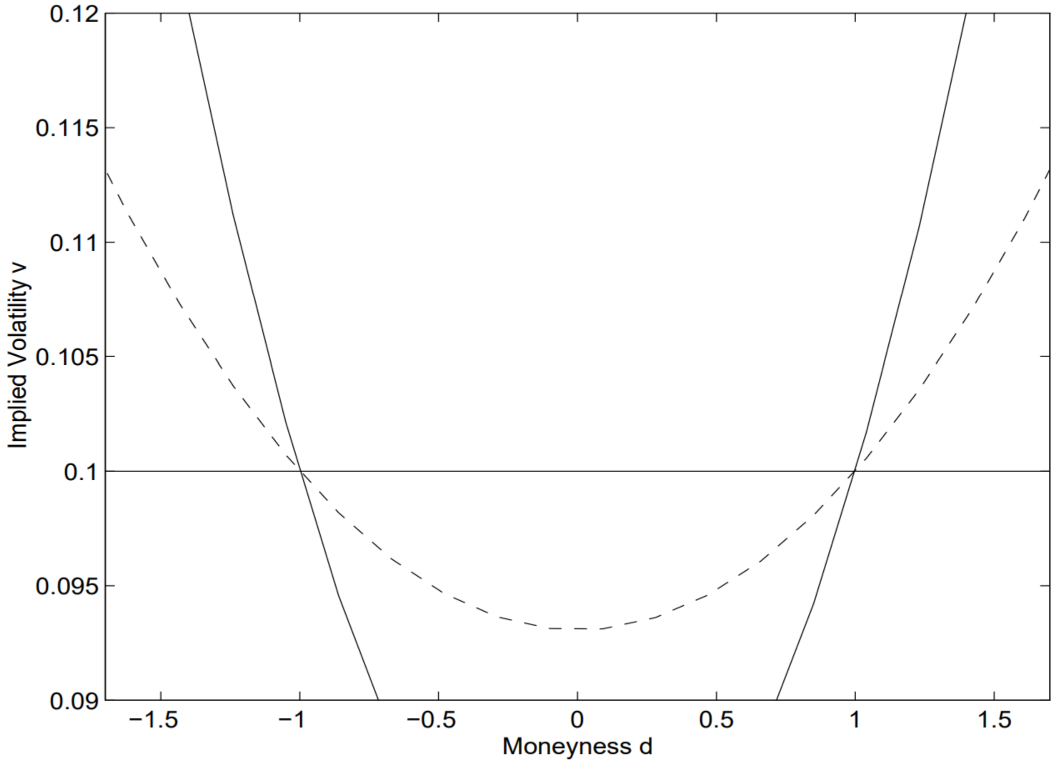
$$\phi(s;\epsilon_{t+1}^{n}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n\kappa_j s^j}{j!}$$

und hat damit die Kumulanten $n\kappa_j$. Dementsprechend werden die Schiefe- und Wölbungsindikatoren, mit einem wachsenden n, fallen

$$\begin{aligned} \gamma_{1n} &= \frac{n\kappa_3}{(n\kappa_2)^{3/2}} = \frac{\gamma_{11}}{n^{1/2}}, \\ \gamma_{2n} &= \frac{n\kappa_4}{(n\kappa_2)^2} = \frac{\gamma_{21}}{n}. \end{aligned}$$

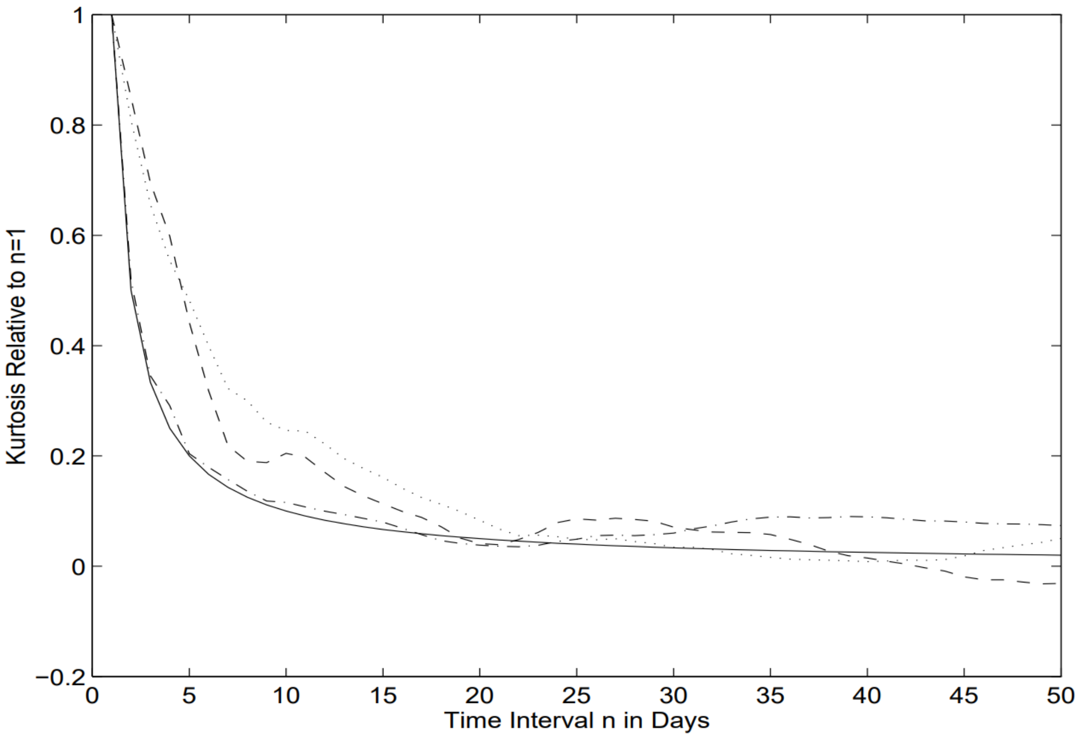
Wenn wir das nun in unsere Formel für den Call-Preis einsetzen bekommen wir dadurch eine genauere Approximation und dementsprechend auch eine geringere Abweichung von Black-Scholes. Ebenso werden die Terme von Schiefe und Wölbung mit einem gegen unendlich konvergierendem Fälligkeitsdatum, gegen Null gehen und somit auch gegen die Black-Scholes Formel konvergieren.

Um diese, nun bekannte Tendenz bezüglich dem Fälligkeitsdatum zu verbildlichen, können wir folgende Grafik betrachten. Hier können wir die unterschiedlichen Wölbungen der Smiles sehen die durch verschiedene Fällligkeitsdaten entstehen können. In der folgenden Grafik betrachten wir wieder die implizite Volatilität bezüglich Moneyness, wobei hier bei der vollen Linie eine Call-Option mit einem Fälligkeitsdatum von einem Monat vorliegt und ein dreimonatiges Fälligkeitsdatum bei der Vergleichs-kurve. Die Wölbung bei der dreimonatigen Call-Option ist drei mal so klein wie die der einmontigen Call-Option was zu einem nicht so starken Smile führt. Daraus folgt, dass die implizite Volatilität für Optionen am Geld höher wird je länger die Option dauert.



Hiermit wird deutlich, dass es eine direkte Korrelation zwischen dem Fälligkeitsdatum und der Wölbung eines Smiles gibt.

Interessant ist auch folgende Grafik da man in dieser die tatsächlichen Werte für die Wölbung betrachten kann. Hierfür wurde die Wölbung von verschiedenen Werten von n genommen. Alle Linien repräsentieren Schätzungen von γ_{2n}, wobei die volle Linie $1/n$ darstellte, und die anderen Linien je Schätzungen für den kanadischen Dollar mit der gepunkteten Linie, die deutsche Mark mit der strichlierten Linie und der japanische Yen mit der strichliert-gepunkteten Linie.



5.1 Tendenzen von Black-Scholes zusammengefasst

Zusammenfassend kann man mit den nun bearbeiteten Tendenzen bezüglich der Black-Scholes Formel schon einige Aussagen über die implizite Volatilität treffen. Da die implizite Volatilität, aber auch direkten und klaren Einfluss auf den Wert einer Option besitzt, kann man mit diesem Wissen schon sehr viel bessere Investmententscheidungen treffen.

Wir wissen nun, dass implizite Volatilität bezüglich Moneyness eine Smile Form annimmt, was bedeutet das die Volatilität am Geld immer am kleinsten sein sollte und die Volatilität aus dem Geld oder im Geld immer am höchsten sein sollte. Da der Wert einer Option mit höherer Volatilität steigt, können wir daraus schließen, dass eine Option ebenfalls am billigsten sein sollte wenn sie am Geld ist, und teurer je weiter aus dem Geld oder in dem Geld liegt.

Ebenso wissen wir durch die Tendezen bezüglich dem Fälligkeitsdatum, dass die Wölbung von unserem Smile je kleiner wird, desto größer das Fälligkeitsdatum ist. Damit können wir dann erwarten, dass eine Call-Option am Geld höhere Volatilität haben wird, solange wir ein größeres Fälligkeitsdatum wählen. Also können wir damit auch schließen, dass eine Call-Option am Geld teurer sein wird wenn sie eine längeres Fälligkeitsdatum besitzt. Doch mit

einer kleineren Wölbung sollte eine Call-Option weit im Geld oder aus dem Geld billiger sein da unser Smile dadurch schwächer wird.
Mit diesen bekannten Tendenzen können wir nun ein paar mögliche Investmentstrategien betrachten.

6 Investmentstrategien

Nun zu ein paar Anwendungsmöglichkeiten im echten Leben. Auch ohne eine bestimmte Strategie anzuwenden kann das nun erworbene Wissen sehr nützlich für bessere Investmentscheidung sein. So können wir zum Beispiel, aus den nun bekannten Tendenzen schließen, dass der Kauf einer Call-Option am billigsten sein wird wenn wir sie am Geld erwerben, da in diesem Fall die Volatilität am niedrigsten sein sollte und dementsprechend auch der Preis. Ebenso sollte man eine Call-Option immer verkaufen wenn sie weit im Geld liegt, da dadurch die Volatilität am höchsten sein wird, dementsprechend auch der Wert der Call-Option und so auch unser Gewinn.

Grundsätzlich wird Moneyness einen großen Einfluss auf die implizite Volatilität haben, jedoch gibt es natürlich auch noch andere Faktoren die Volatilität verändern können. So hat zu Beispiel natürlich auch die unterliegende Aktie oder Währung einen starken Einfluss auf Volatilität. Falls zum Beispiel der Wert einer Firma oder Währung im Moment sehr viel variiert wird dies oft zu einer größeren Volatilität führen was natürlich dann den Besitzer einer Call-Option motivieren sollte seine Option zu verkaufen, da sie in diesem Moment wahrscheinlich zu teuer verkauft wird und man damit ein größeren Gewinn machen kann.

Literatur

[1] David Backus, Silverio Foresi, Liuren Wu: Accounting for Biases in Black-Scholes (2004)

[2] Options and Options Trading : A Simplified Course That Takes You from Coin Tosses to Black-Scholes; Robert W. Ward

[3] https://www.macroption.com/black-scholes-history/

[4] https://finanzderivate.info/optionen/bewertung-von-optionen/die-greeks/das-delta-einer-option/

[5] https://community.plm.automation.siemens.com/t5/Testing-Knowledge-Base/Kurtosis/ta-p/412017

[6] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/a/a8/Schiefe_Statistik.svg

[7] http://my.ilstu.edu/ gjin/hsc204-hed/Module-5-Summary-Measure-2/Module-5-Summary-Measure-28.html