



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

S E M I N A R A R B E I T

On optimal reinsurance treaties in cooperative game under heterogeneous beliefs

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Alexander Huber

Matrikelnummer: 11714016

Wien, am 27. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	kooperative Verhandlungstheorie	2
2.1	kooperative Nash-Lösung	3
2.2	Kalai/Smorodinsky-Lösung	5
3	Modellierung von Rückversicherungsverträgen	8
4	optimale Rückversicherung mit verhandelbarer Prämie	10
4.1	Berechnung Pareto-optimaler Verträge	10
4.2	Beispiele mit speziellen Nutzenfunktionen	13
4.2.1	Optimale Rückversicherung mit quadratischen Nutzenfunktionen . .	13
4.2.2	Optimale Rückversicherung mit exponentiellen Nutzenfunktionen . .	14
4.3	Numerische Darstellung	15
4.3.1	Pareto-Rand	16
4.3.2	Verhandlungslösung nach Nash	16
4.3.3	Verhandlungslösung nach Kalai/Smorodinsky	18
5	optimale Rückversicherung mit versicherungsmathematisch berechneter Prämie	20
5.1	Berechnung Pareto-optimaler Verträge	20
5.2	Optimale Rückversicherung mit quadratischen Nutzenfunktionen	23
5.3	Numerische Darstellung	24
5.3.1	Pareto-Rand	24
5.3.2	Verhandlungslösung nach Nash	25
5.3.3	Verhandlungslösung nach Kalai/Smorodinsky	27
5.3.4	Vergleich der Verlustabgabefunktionen: verhandelbare Prämien vs. versicherungsmathematisch berechnete Prämien	28
6	Zusammenfassung	29
	Literaturverzeichnis	30
	Abbildungsverzeichnis	31

1 Einleitung

Rückversicherung ist ein wesentlicher Bestandteil der Versicherungswirtschaft. Rückversicherer unterstützen Erstversicherer, indem sie einen Teil ihrer Schadenlast übernehmen und tragen damit zur Stabilisierung ihrer Ergebnisse bei. Als Gegenleistung für diese Verlustdeckung bezahlen Erstversicherer eine Prämie. Die Höhe dieser Prämie, sowie der Anteil des Verlustes, der vom Rückversicherer übernommen wird, muss jedoch vertraglich vereinbart werden, womit Erstversicherer und Rückversicherer vor einem Verhandlungsproblem stehen. Solche Verhandlungsprobleme lässt sich durch Modelle der kooperativen Verhandlungstheorie als Teilgebiet der Spieltheorie mathematisch modellieren. Anhand solcher Modellierungen kann man in weiterer Folge untersuchen, ob optimale Lösungen solcher Verhandlungen über Rückversicherungsverträge existieren, die beiden Verhandlungspartnern einen größtmöglichen wirtschaftlichen Nutzen garantieren.

In Kapitel 2 werden, basierend auf dem Buch 'Strategische Spiele' von Berninghaus, Ehrhart und Güth [1], die theoretischen Grundlagen zur kooperativen Verhandlungstheorie vorgestellt. Dabei wird auf die Modelle von John Nash [4] und Ehud Kalai/Meir Smorodinsky [3] eingegangen.

Darauf aufbauend werden in Kapitel 3 Rückversicherungsverträge mathematisch modelliert und die mathematischen Rahmenbedingungen und Annahmen für die folgenden Kapitel erläutert.

In den Kapiteln 4 und 5 werden, basierend auf den Resultaten von Jiang, Ren, Yang und Hong in [2], optimale Rückversicherungsverträge als Verhandlungslösungen eines kooperativen Verhandlungsspiels untersucht. Dabei werden zwei grundlegende Szenarien betrachtet: In Kapitel 4 wird angenommen, dass die Höhe der Rückversicherungsprämie verhandelt wird, wohingegen in Kapitel 5 die Prämie anhand versicherungsmathematischer Methoden berechnet wird. In beiden Fällen wird berücksichtigt, dass die Verhandlungspartner das Verlustrisiko unterschiedlich einschätzen, wie es in Realität oft der Fall ist. Nach Bestimmen der Menge aller Pareto-optimalen Verträge werden die optimalen Rückversicherungsverträge gemäß den Verhandlungslösungen von Nash und Kalai/Smorodinsky abgeleitet und untersucht. Aufbauend auf den allgemeinen Resultaten dieser Kapitel werden zudem spezifische Beispiele betrachtet, um die Ergebnisse zu veranschaulichen.

Anhand dieser Resultate lassen sich schlussendlich Rückschlüsse darüber ziehen, wie zwei Verhandlungspartner einen Rückversicherungsvertrag durch Verhandlungen so gestalten können, dass sowohl Erstversicherer und Rückversicherer den maximalen Nutzen aus dieser Kooperation gewinnen können.

2 kooperative Verhandlungstheorie

Bevor auf das Optimierungsproblem für Rückversicherungsverträge eingegangen wird, werden in diesem Kapitel, basierend auf [1], die wichtigsten Grundlagen der kooperativen Spieltheorie vorgestellt, die später für das Rückversicherungsmodell benötigt werden. Dabei wird speziell auf die kooperative Verhandlungstheorie eingegangen, deren Wurzeln beim US-amerikanischen Mathematiker John Forbes Nash liegen.

Ausschlaggebend für die kooperative Verhandlungstheorie ist folgende Situation: Man betrachtet im allgemeinen n Spieler, die durch gemeinsame Strategiewahl Ergebnisse erzielen wollen, die sie mit ihren Nutzensvorstellungen bewerten. Um ein Verhandlungsspiel für n Spieler zu definieren, betrachtet man zuerst die sogenannte *Verhandlungsmenge* $B \subseteq \mathbb{R}^n$, welche die Menge aller Nutzenvektoren (u_1, \dots, u_n) ist, die die Spieler gemeinsam erreichen können. Dabei muss die Verhandlungsmenge bestimmte Anforderungen erfüllen. Zusätzlich zur Menge B betrachtet man ein ausgezeichnetes Nutzentupel $d = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$, welches *Drohpunkt* genannt wird und diejenigen Nutzen beschreibt, welche die Verhandlungspartner im Nicht-Einigungsfall, also beim Scheitern der Verhandlungen erhalten. Damit kann man ein Verhandlungsspiel oder ein Verhandlungsproblem definieren:

Definition 2.1. Ein *Verhandlungsproblem* ist ein Tupel (B, d) mit

1. $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt und konvex
2. $d \in B$
3. $\exists b \in B : b > d$

Dabei sind Konvexität und Kompaktheit technische Annahmen, um etwa die formale Analyse zu vereinfachen. Konvexität wird dadurch motiviert, dass durch eine geeignete Wahl von Strategien der Spieler jede Konvexkombination von Auszahlungspunkten realisieren werden kann. Die Annahme der Kompaktheit impliziert unter anderem Beschränktheit, womit unbegrenzt hohe Auszahlungen oder Nutzen ausgeschlossen werden. Außerdem nimmt damit jede stetige Funktion der Nutzentupel auf B ein Maximum an (vgl. [4]).

Bezeichnet man nun mit \mathcal{B} die Menge aller Verhandlungsspiele (B, d) , so lässt sich eine kooperative Verhandlungslösung wie folgt definieren:

Definition 2.2. Die kooperative *Verhandlungslösung* von Verhandlungssituationen ist eine Abbildung

$$L : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit der Eigenschaft $L(B, d) \in B$.

Die wohl bekanntesten kooperativen Lösungskonzepte der kooperativen Verhandlungstheorie sind die Nash-Lösung und die Kalai/Smorodinsky-Lösung. Beide Konzepte leiten sich von mehreren Axiomen ab, welche spezielle Eigenschaften einer Verhandlungssituation postulieren, die in einem gewissen Sinne als vernünftig angesehen werden können.

2.1 kooperative Nash-Lösung

Entwickelt von John Nash [4] im Jahre 1950, baut die kooperative Nash-Lösung auf folgendem Axiomensystem auf:

Axiom 1. Für eine Verhandlungssituation (B, d) sei (B', d') daraus wie folgt abgeleitet:

$$B' := \{y \mid \exists u \in B : y_i = a_i u_i + b_i \text{ für } a_i > 0, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

$$d'_i := a_i d_i + b_i \text{ für } i = 1, \dots, n$$

Dann gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$L_i(B', d') = a_i L_i(B, d) + b_i$$

Nach diesem Axiom sollen affin lineare Transformationen der Verhandlungsmenge B zu äquivalent transformierten Lösungen führen. Hintergrund dieses Axioms ist die Neumann/Morgenstern-Nutzentheorie, denn der Erwartungsnutzen im Rahmen dieser Theorie ist nur eindeutig bis auf affin lineare Transformationen. Diese Transformationen der Nutzenfunktionen liefern keine zusätzlichen Informationen über das Verhandlungsproblem und sollen demnach auch die Lösung nicht beeinflussen.

Axiom 2 (Symmetriemaxiom). Ein Verhandlungsproblem (B, d) habe folgende Eigenschaften:

- $d_1 = \dots = d_n$
- $u = (u_1, \dots, u_n) \in B \Rightarrow \pi(u) \in B$ für alle Permutationen $\pi(\cdot)$ der Spieler

Dann gilt:

$$L_1(B, d) = \dots = L_n(B, d)$$

Das Symmetriemaxiom besagt, dass in Verhandlungssituationen, in denen die Spieler nicht zu unterscheiden sind, auch kein Spieler von der Verhandlungslösung bevorzugt werden soll. Symmetrische Probleme sollen also auch zu symmetrischen Lösungen führen.

Axiom 3 (Unabhängigkeitsaxiom). Gegeben seien zwei Verhandlungssituationen (B, d) und (B', d') mit den folgenden Eigenschaften:

- $B' \subseteq B$
- $L(B, d) \in B'$

Dann gilt:

$$L(B', d') = L(B, d)$$

Wenn also die Lösung des Problems (B, d) in einer kleineren Verhandlungsmenge B' liegt, wird dieselbe Lösung gewählt, wenn eben nur die kleinere Verhandlungsmenge B' betrachtet wird und zur Verfügung steht. Man entfernt in diesem Fall intuitiv nur die irrelevanten Alternativen. Diese plausible Annahme wird jedoch in der Praxis häufig kritisiert, da sie in Realität oft nicht zutrifft. Deshalb wurde sie im Modell von Kalai/Smorodinsky durch das sogenannte Monotonieaxiom ersetzt, wie wir in Abschnitt 2.2 sehen werden.

Axiom 4 (Effizienzaxiom). Für jedes Verhandlungsspiel (B, d) gilt:

$$(u, u' \in B) \wedge (u' > u) \Rightarrow L(B, d) \neq u$$

Dieses Axiom postuliert in gewissem Sinne kollektive Rationalität einer Verhandlungslösung. Wenn ein Nutzenvektor $u \in B$ durch einen anderen Nutzenvektor $u' \in B$ streng dominiert ist, kann u keine Lösung des Verhandlungsproblems sein. Salopp gesagt gibt es in diesem Fall eine Lösung u' des Problems, bei der alle Spieler eine höhere Auszahlung erhalten.

Mit diesen vier Annahmen ist das Axiomensystem für das Modell von John Nash vollständig. Anhand dieser vier Axiome konnte Nash zeigen, dass eine Lösung eines solchen Verhandlungsproblems nicht nur existiert, sondern auch eindeutig ist und eine relativ einfache Form annimmt. Es ergibt sich folgender Satz: [1, 4]

Satz 2.1. Es gibt eine eindeutige Verhandlungslösung, bezeichnet mit $LN(\cdot)$, welche die Axiome 1-4 erfüllt. $LN(\cdot)$ ordnet jedem Verhandlungsspiel (B, d) den Nutzenvektor u^* mit der folgenden Eigenschaft zu:
 u^* ist eindeutige Lösung des Maximierungsproblems

$$\begin{aligned} \max \prod_{i=1}^n (u_i - d_i), \text{ sodass} \\ u \in B, \\ u \geq d \end{aligned}$$

Für den Fall $n = 2$ lässt sich die Lösung graphisch folgendermaßen darstellen:

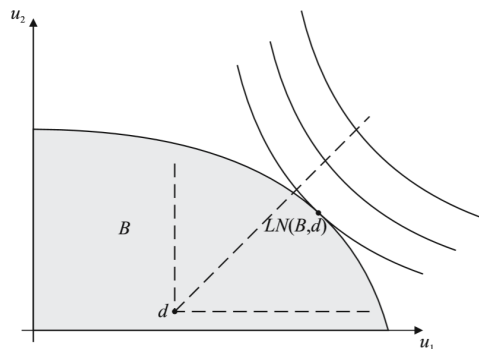


Abbildung 1: Illustration der Nash-Lösung [1]

Man kann die Lösung also berechnen, indem man den Drohpunkt d in den Ursprung des Koordinatensystems verschiebt und die Niveaulinien der Funktion $u_1 \cdot u_2$ betrachtet. Die Lösung liegt dann eben genau auf der Niveaulinie höchsten Niveaus, die die Verhandlungsmenge B tangiert. Dieser Punkt der Verhandlungsmenge maximiert dann auch das Produkt aus Satz 2.1.

2.2 Kalai/Smorodinsky-Lösung

Das zweite relevante Modell wurde 1975 von Ehud Kalai und Meir Smorodinsky [3] entwickelt und behandelt nur Verhandlungsprobleme mit zwei Spielern. Hintergrund des Modells ist die erwähnte Kritik des Unabhängigkeitsaxioms im Nash'schen Modell. Daher wird dieses Axiom im Modell von Kalai/Smorodinsky durch Monotonieaxiom ersetzt. Bevor dieses formuliert wird, widmen wir uns noch einmal der Definition eines Verhandlungsproblems, die in diesem Modell leicht abgeändert wird:

Definition 2.3. Ein *Verhandlungsproblem* ist ein Tupel (B, d) mit

1. $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt und konvex
2. $d \in B$
3. $\exists b \in B : b > d$
4. $\forall u \in B : u \geq d$

Es werden in diesem Fall alle Nutzenvektoren aus der Verhandlungsmenge entfernt, bei denen ein Spieler echt weniger als seinen Drohpunktnutzen erhält. Dies wird so argumentiert, dass solche Vektoren als Lösung ohnehin nicht infrage kämen, da mindestens ein Spieler aufgrund seines höheren Drohpunktnutzen widersprechen würde.

Zusätzlich zu dieser erweiterten Definition eines Verhandlungsproblems betrachten wir die maximal möglichen Nutzen B_1 und B_2 für die beiden Spieler:

$$B_1(B, d) := \max\{u_1 \in \mathbb{R} \mid \exists u_2 : (u_1, u_2) \in B\} \quad (2.1)$$

$$B_2(B, d) := \max\{u_2 \in \mathbb{R} \mid \exists u_1 : (u_1, u_2) \in B\} \quad (2.2)$$

Der Vektor

$$b := (B_1(B, d), B_2(B, d))$$

wird *blisspoint* oder *Utopiepunkt* genannt und bezeichnet die Kombination der beiden maximalen Nutzen. Der Utopiepunkt wird in der Regel keine zulässige Lösung sein, es gilt also $b \notin B$. Will ein Spieler seinen maximalen Nutzen realisieren, so muss der andere Spieler auf seine maximale Auszahlung verzichten.

Zudem sei noch der Pareto-Rand der Verhandlungsmenge definiert:

Definition 2.4. Ein Auszahlungsvektor $u \in B$ liegt auf dem *Pareto-Rand* (*Pareto-Grenze*) $P(B)$ der Verhandlungsmenge B genau dann, wenn für alle \tilde{u} mit $\tilde{u} \geq u$ und $\tilde{u} \neq u$ die Bedingung $\tilde{u} \notin B$ folgt.

Nun betrachten für alle $x \leq B_1(B, d)$ die Funktion $m_{2,B}(x)$, für die gilt:

$$m_{2,B}(x) = \begin{cases} y & \text{falls : } \exists y \text{ mit } (x, y) \in P(B) \\ B_2(B, d) & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion gibt also im Fall, dass der erste Spieler x erhält und auf diesem Niveau x ein Pareto-Rand existiert, den maximalen Nutzen auf diesem Pareto-Rand an, den Spieler 2 erreichen kann. Ansonsten erhält man den insgesamt maximalen Nutzen von Spieler 2. Mit diesen Vorbereitungen lässt sich nun das Monotonieaxiom für das Kalai-Smorodinsky-Modell formulieren:

Axiom 5 (Monotonieaxiom). *Gegeben seien zwei Verhandlungsprobleme (B, d) und (B', d') , wobei gilt:*

- $d = d'$
- $B_1(B, d) = B_1(B', d')$
- $\forall x \leq B_1(B, d) : m_{2,B}(x) \leq m_{2,B'}(x)$

Dann folgt daraus:

$$L_2(B, d) \leq L_2(B', d')$$

Analog kann man das für Spieler 1 formulieren.

Dieses Axiom besagt, dass sich der Nutzen für Spieler 2 einer Verhandlungslösung des Problems (B', d') gegenüber der Lösung von (B, d) nicht verschlechtern darf, falls der maximale Nutzen von Spieler 1 in beiden Verhandlungssituationen identisch ist und für jeden beliebigen Nutzen x von Spieler 1 der maximal erreichbare Nutzen von Spieler 2 größer wird oder zumindest gleich bleibt.

Damit ergibt sich die Lösung eines Verhandlungsproblems im Kalai/Smorodinsky-Modells ohne Berücksichtigung des Unabhängigkeitsaxioms aus dem Modell von John Nash:

Definition 2.5. Gegeben sei ein Verhandlungsproblem (B, d) . Die *Kalai/Smorodinsky Lösung (KS-Lösung)* - bezeichnet mit $LKS(B, d)$ - ist eine kooperative Verhandlungslösung, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $LKS(B, d) \in P(B)$
- $\frac{LKS_2(B, d) - d_2}{LKS_1(B, d) - d_1} = \frac{B_2(B, d) - d_2}{B_1(B, d) - d_1}$

Hier besagt die erste Bedingung, dass die Lösung am Pareto-Rand liegt und die zweite, dass die Kalai/Smorodinsky-Lösung auf der Verbindungsgeraden durch die beiden Punkte $d = (d_1, d_2)$ und $b = (B_1(B, d), B_2(B, d))$ liegt.

Kalai und Smorodinsky konnten zeigen, dass sich die Kalai/Smorodinsky-Lösung eindeutig aus dem Axiomensystem ihres Modells ableiten lässt und es gilt: [1, 3]

Satz 2.2. Die Kalai/Smorodinsky-Lösung $LKS(\cdot)$ ist für $n = 2$ die einzige Lösung, die die Axiome 1, 2, 4 und 5 erfüllt.

Die KS-Lösung wurde in Experimenten sehr häufig bestätigt und lässt sich durch Schneiden der Verbindungsgeraden des Drohpunkts d und des Utopiepunkts d mit dem Pareto-Rand finden. In Abbildung 2 ist die Kalai/Smorodinsky-Lösung für zwei Verhandlungsmengen B und B' illustriert:

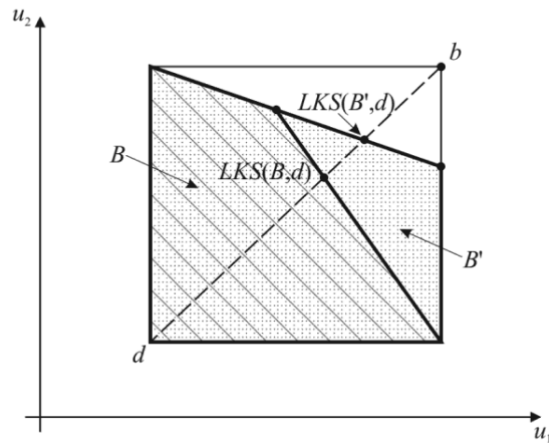


Abbildung 2: Illustration der Kalai/Smorodinsky-Lösung [1]

3 Modellierung von Rückversicherungsverträgen

In diesem Abschnitt werden die Annahmen für die Modellierung von Rückversicherungsverträgen vorgestellt, die wir zur Analyse von Verhandlungsproblemen in den nächsten Kapiteln benötigen.

Dafür sei X eine Zufallsvariable, die jenen Verlust des Versicherers beschreibt, der rückversichert werden soll. Es wird angenommen, dass X Werte im Intervall $[0, M]$ annimmt, wobei $M \in [0, +\infty)$. Weiteres sei \mathbb{P}_1 das subjektive Wahrscheinlichkeitsmaß des Versicherers für den Verlust X , mit zugehöriger Verteilungsfunktion F_1 und Dichtefunktion f_1 . Zudem bezeichnen wir mit \mathbb{P}_2 das subjektive Wahrscheinlichkeitsmaß des Rückversicherers für den Verlust X , mit Verteilungsfunktion F_2 und Dichtefunktion f_2 . Angenommen es gilt $f_1(x) > 0$ für alle $x \in [0, M]$, sodass der Likelihood-Quotient $f_2(x)/f_1(x)$ auf $[0, M]$ wohldefiniert ist. Im Fall $LR(x) \neq 1$ schätzen also beide Verhandlungspartner das Risiko unterschiedlich ein (engl: *heterogeneous beliefs*).

Die Nutzenfunktionen von Versicherer und Rückversicherer seien gegeben durch $u(\cdot)$ und $v(\cdot)$ mit Definitionsbereichen D_u beziehungsweise D_v . In diesem Modell werden beide Verhandlungspartner als risikoavers vorausgesetzt, demnach gelte für alle x in der Definitionsmenge

$$\begin{cases} u'(x) > 0 \\ u''(x) < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} v'(x) > 0 \\ v''(x) < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Zusätzlich wird angenommen, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_u} u'(x) = \lim_{x \rightarrow x_v} v'(x) = 0 \quad (3.2)$$

wobei x_u und x_v die Suprema von D_u und D_v bezeichnen.

Das anfängliche Kapital des Versicherers und Rückversicherers wird mit ω_1 beziehungsweise ω_2 bezeichnet. Damit entspricht der erwartete Nutzen für den Versicherer ohne Rückversicherungsvertrag, also beim Scheitern der Verhandlungen, genau $\mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X)]$ und für den Rückversicherer $v(\omega_2)$.

Das Tupel $(\mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X)], v(\omega_2))$ entspricht den Modellen von Nash und Kalai/Smorodinsky nach genau dem Drohpunkt.

Ein Rückversicherungsvertrag ist einerseits charakterisiert durch eine Funktion des abgetretenen Verlustes $I(x)$, welche spezifiziert, wie viel der Rückversicherer dem Zedenten zahlt, wenn der Verlust genau x beträgt, und andererseits der Prämie P , die der Versicherer bereit ist, für die Verlustdeckung an den Rückversicherer zu zahlen. Formal kann man einen Rückversicherungsvertrag also als Tupel (I, P) auffassen.

Hier nehmen wir an, dass die Menge aller zulässigen Verlustabgabefunktionen gegeben ist mit

$$\mathcal{C} := \left\{ I : [0, M] \rightarrow [0, M] \mid I \text{ ist stetig, } I(0) = 0, 0 \leq I(x) \leq x \text{ für alle } x \geq 0 \right\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass \mathcal{C} konvex ist und mit einer Funktion $I \in \mathcal{C}$ auch die Selbstbehaltfunktion $R_I(x) = x - I(x)$ in \mathcal{C} liegt. Es gebe einen maximalen Betrag \bar{P} , den der Erstversicherer bereit ist, für Rückversicherung zu bezahlen, und da dieser als risikoavers angenommen wird, gilt $\bar{P} > \mathbb{E}_1[X]$.

Da ein Vertrag nur zustande kommen kann, wenn beide Parteien davon profitieren, sollten Rückversicherungsverträge stets folgende Rationalitätsanforderungen erfüllen:

$$\begin{cases} \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X + I(X) - P)] \geq \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X)] \\ \mathbb{E}_2[v(\omega_2 - I(X) + P)] \geq v(\omega_2) \end{cases} \quad (3.3)$$

Der erwartete Nutzen soll mit Rückversicherungsvertrag also für beide Verhandlungspartner nicht kleiner sein als ohne Vertrag.

Für das Modell benötigen wir noch den Begriff des Pareto-optimalen Rückversicherungsvertrags:

Definition 3.1. Ein Rückversicherungsvertrag (I^*, P^*) ist *Pareto-optimal*, wenn es keinen zulässigen Vertrag $(I, P) \neq (I^*, P^*)$ gibt, der

$$\mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X + I(X) - P)] \geq \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X + I^*(X) - P^*)]$$

und

$$\mathbb{E}_2[v(\omega_2 - I(X) + P)] \geq \mathbb{E}_2[v(\omega_2 - I^*(X) + P^*)]$$

mit zumindest einer strikten Ungleichung erfüllt.

Pareto-optimale Verträge entsprechen nach Definition 2.4 demnach genau den Vektoren auf dem Pareto-Rand. Ziel ist es nun, die Menge aller Pareto-optimalen Versicherungsverträge zu finden, die auch die Rationalitätsanforderungen (3.3) erfüllen. Dafür betrachten wir zwei Szenarien: Im nächsten Kapitel wird das Szenario behandelt, bei dem die Rückversicherungsprämie vollständig verhandelt wird, wohingegen in Kapitel 5 die Prämie mit versicherungsmathematischen Methoden berechnet wird.

4 optimale Rückversicherung mit verhandelbarer Prämie

Dieses Kapitel behandelt den Fall, bei dem die Rückversicherungsprämie zur Gänze von Versicherer und Rückversicherer verhandelt wird, basierend auf den Resultaten in [2]. In diesem Fall lässt sich die Menge aller Pareto-optimalen Rückversicherungsverträge durch Lösen folgenden Maximierungsproblems finden:

Problem 1. Für festes $k \geq 0$,

$$\max_{I \in \mathcal{C}, P \in [0, \bar{P}]} J(I, P) = \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X + I(X) - P)] + k\mathbb{E}_2[v(\omega_2 - I(X) + P)], \quad (4.1)$$

unter Berücksichtigung der Rationalitätsanforderungen (3.3).

Wir wollen in diesem Problem also den summierten Nutzen von Versicherer und Rückversicherer maximieren. In (4.1) beschreibt der Parameter $k \in [0, \infty)$ die relative Verhandlungsstärke des Rückversicherers. Bei $k \rightarrow 0$ verfügt der Rückversicherer über keine Verhandlungsstärke und seine Interessen werden in diesem Maximierungsproblem verhältnismäßig nicht stark gewichtet, wohingegen bei $k \rightarrow \infty$ die Interessen des Versicherers zunehmend ignoriert werden.

Um dieses Problem zu lösen, vernachlässigt man zuerst die Rationalitätsanforderungen (3.3) und betrachtet die Menge \mathcal{O} aller Pareto-optimalen Verträge durch Lösen von (4.1) mit festem $k \in [0, \infty)$.

Weiteres sei die Menge aller die Rationalitätsanforderungen erfüllenden Verträge, unabhängig davon, ob sie Pareto-optimal sind oder nicht, gegeben mit

$$\mathcal{M} := \left\{ (I, P) \in \mathcal{C} \otimes [0, \bar{P}] \mid \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X + I(X) - P)] \geq \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X)] \text{ und} \right. \\ \left. \mathbb{E}_2[v(\omega_2 - I(X) + P)] \geq v(\omega_2) \right\}.$$

Dann ist die Lösung zu Problem 1 gegeben mit $\mathcal{O} \cap \mathcal{M}$. Wenn diese Schnittmenge leer ist, gibt es keine Lösung des Problems.

4.1 Berechnung Pareto-optimaler Verträge

Wie schon erwähnt, gilt es zur Lösung von Problem 1 zuerst das Maximierungsproblem (4.1) zu lösen. Dafür sei $LR(x) := f_2(x)/f_1(x)$ der Likelihood-Quotient, welcher in unserem Fall ein Maß dafür ist, inwiefern sich die Einschätzungen des Versicherers und des Rückversicherers bezüglich des Schadens X unterscheiden.

Für einen festen Gewichtsparameter k kann man das Maximierungsproblem (4.1) in zwei Teilprobleme aufteilen.

Zuerst lösen wir

Problem 1a. Für eine feste Prämie $P \in [0, \bar{P}]$ und einen Gewichtsparameter $k \geq 0$,

$$\max_{I \in \mathcal{C}} J(I, P) = \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X + I(X) - P)] + k\mathbb{E}_2[v(\omega_2 - I(X) + P)].$$

Hier wird also eine Prämie fixiert und der summierte erwartete Nutzen von Versicherer und Rückversicherer wird über alle Verlustabgabefunktionen $I \in \mathcal{C}$ maximiert.

Im zweiten Schritt sei nun I_P^* die Lösung zu Problem 1a für eine feste Prämie P . Wir identifizieren nun die optimale Prämie P^* , welche die Lösung ist für

Problem 1b.

$$\max_{P \in [0, \bar{P}]} J(I_P^*, P).$$

Durch Lösen dieser beiden Teilprobleme erhalten wir die Lösung zu Problem 1.

Die Lösung I_P^* zu Problem 1a ergibt sich mithilfe folgenden Satzes:

Satz 4.1. Für eine feste Prämie P und einen Gewichtsparameter $k \geq 0$, sei

$$K(y, x) := u'(\omega_1 - x + y - P) - kv'(\omega_2 - y + P)LR(x)$$

und

$$d(P) := \inf\{x \geq 0 : K(0, x) \geq 0\}$$

mit der Konvention $d(P) = \infty$, falls diese Menge leer ist. Dann ist die Lösung zu Problem 1a gegeben durch

$$I_P^*(x) = 0, \text{ für } x < d(P)$$

und für $x \geq d(P)$,

$$I_P^*(x) = \min\left\{x, \max\{0, y_P(x)\}\right\}, \tag{4.2}$$

wobei $y_P(x)$ der Gleichung $K(y_P(x), x) = 0$ genügt.

Beweis. Für den Beweis sei auf [2] verwiesen. □

Satz 4.1 besagt unter anderem, dass ein optimale Rückversicherungsvertrag die Form eines Stop-Loss-Vertrages hat. Übersteigt also die Gesamtschadenlast des Erstversicherers während der Vertragsperiode einen bestimmten Betrag, welcher hier genau $d(P)$ entspricht, so hat der Rückversicherer den Betrag $\min\{x, y_P(x)\}$ zu leisten.

Nachdem sich durch Anwendung von Satz 4.1 die optimale Verlustabgabefunktion I_P^* für eine feste Prämie P identifizieren lässt, versuchen wir, die optimale Prämie P^* als Lösung von Problem 1b zu ermitteln. Da jedoch die Funktion I_P^* auch von P abhängt, lässt sich

P^* im Allgemeinen nur in speziellen Fällen analytisch darstellen. Für Fälle, bei denen das nicht möglich ist, lässt sich dieses Problem trotzdem numerisch lösen.

Nach Berechnung eines Pareto-optimalen Rückversicherungsvertrags $(I_{P^*}^*, P^*)$ für einen festen Gewichtsparameter k lässt sich der gesamte Pareto-Rand durch Variation von k ermitteln. Jene Verträge, die auf diesem Pareto-Rand liegen und zudem die Rationalitätsanforderungen (3.3) erfüllen, sind Lösungen für Problem 1. Hier sei angemerkt, dass sich durch direkte Substitution feststellen lässt, ob ein spezifischer Vertrag ebendiese Anforderungen erfüllt.

Aus der Menge von Verträgen auf dem Pareto-Rand wollen wir unter Betrachtung der Modelle von Nash und Kalai/Smorodinsky nun jenen eindeutigen Vertrag identifizieren, der den Nutzen des eingegangenen Rückversicherungsvertrages optimal zwischen den beiden Verhandlungspartnern aufteilt.

Wie schon in Abschnitt 2.1 nach [4] beschrieben, erhält man unter Betrachtung des Nash'schen Axiomensystems die Lösung eines Verhandlungsproblems durch Maximierung des Produktes der Nutzengewinne der Spieler (vgl. Satz 2.1). In diesem Kontext bedeutet das, dass sich der optimale Rückversicherungsvertrag nach dem Modell von Nash ergibt durch Lösen von

$$\max_{(I,P) \in \mathcal{M}} \left(\mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X + I(X) - P)] - \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X)] \right) \left(\mathbb{E}_2[v(\omega_2 - I(X) + P)] - v(\omega_2) \right) \quad (4.3)$$

Wie schon erwähnt, entspricht das Tupel $(\mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X)], v(\omega_2))$ in unserem Zusammenhang genau dem Drohpunkt, womit (4.3) genau dem Maximierungsproblem in Satz 2.1 entspricht.

Betrachtet man andererseits das Modell von Kalai/Smorodinsky, so erhält man den optimalen Rückversicherungsvertrag, bezeichnet mit (I_{KS}, P_{KS}) als Lösung von

$$D_{KS} := \frac{\mathbb{E}_2[v(\omega_2 - I_{KS}(X) + P_{KS})] - v(\omega_2)}{\mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X + I_{KS}(X) - P_{KS})] - \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X)]} - \frac{v_{max} - v(\omega_2)}{u_{max} - \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X)]} = 0, \quad (4.4)$$

wobei $u_{max} = u(\omega_1)$, was dem Fall entspricht, dass der Versicherer den ganzen Verlust abgibt und keine Prämien zahlt, und $v_{max} = v(\omega_2 + \bar{P})$, womit der Rückversicherer keine Verluste deckt, aber die höchstmögliche Prämie erhält (vgl. (2.1)). Hier entspricht (4.4) genau der zweiten Lösungsbedingung in Definition 2.5, wobei die erste Bedingung ebenfalls erfüllt ist, weil wir ohnehin nur Verträge auf dem Pareto-Rand betrachten.

In beiden Fällen sollte die Lösung auch in der Menge \mathcal{M} liegen, damit garantiert wird, dass beide Verhandlungspartner rational handeln.

Da nach Kapitel 2 sowohl die Nash-Lösung, als auch die Kalai/Smorodinsky-Lösung auf dem Pareto-Rand liegen, können die optimalen Rückversicherungsverträge gemäß der beiden Modelle gefunden werden, indem man überprüft, welcher Pareto-optimale Vertrag unter Berücksichtigung des Gewichtsparameters k (4.3) oder (4.4) löst.

4.2 Beispiele mit speziellen Nutzenfunktionen

In diesem Abschnitt werden die Resultate aus Abschnitt 4.1 angewendet auf zwei spezielle Fälle, wobei die Nutzenfunktionen in einem Fall als quadratische und einmal als exponentielle Funktionen gegeben sind.

4.2.1 Optimale Rückversicherung mit quadratischen Nutzenfunktionen

Seien die Nutzenfunktionen $u(x)$ des Versicherers und $v(x)$ des Rückversicherers gegeben mit

$$u(x) = -\frac{1}{2}\beta_1 x^2 + x, \quad \beta_1 > 0, \quad x \leq \frac{1}{\beta_1} \quad (4.5)$$

und

$$v(x) = -\frac{1}{2}\beta_2 x^2 + x, \quad \beta_2 > 0, \quad x \leq \frac{1}{\beta_2}. \quad (4.6)$$

Die Maxima $1/\beta_1$ und $1/\beta_2$ dieser Funktionen können interpretiert werden als die Sättigungspunkte, über die hinaus der Nutzen nicht durch zusätzliche finanzielle Gewinne erhöht wird. Hier werden wir sinnvollerweise voraussetzen, dass $\frac{1}{\beta_1} > \omega_1$ und $\frac{1}{\beta_2} > \omega_2 + \bar{P}$.

Mit den Nutzenfunktionen (4.5) und (4.6) erhalten wir gemäß Satz 4.1 bei fester Prämie P also

$$K(0, x) = \beta_1 x + \beta_1(P - \omega_1) + 1 - k(1 - \beta_2(\omega_2 + P))LR(x).$$

Damit ist der Punkt, ab dem der Rückversicherer Leistungen erbringt, gegeben mit

$$d(P) = \inf \left\{ x \geq 0 : \beta_1 x + \beta_1(P - \omega_1) + 1 = k(1 - \beta_2(\omega_2 + P))LR(x) \right\}. \quad (4.7)$$

Die Gleichung $K(y_P(x), x) = 0$ in Satz 4.1 nimmt unter diesen Voraussetzungen die Form

$$-\beta_1(\omega_1 - x + y_P(x) - P) + 1 = k(-\beta_2(\omega_2 - y_P(x) + P) + 1)LR(x)$$

an, aus welcher wir

$$y_P(x) = \frac{\beta_1 x + k(\beta_2 \omega_2 + \beta_2 P - 1)LR(x) + \beta_1(P - \omega_1) + 1}{\beta_1 + k\beta_2 LR(x)} \quad (4.8)$$

ableiten können. Also erhalten wir für gegebene Prämie P die optimale Verlustabgabefunktion mit $I_P^*(x) = \min \left\{ x, \max \{0, y_P(x)\} \right\}$.

Hier sei angemerkt, dass sich dafür im Fall $LR(x) = 1$, also in dem Fall, dass Versicherer und Rückversicherer das Risiko gleichermaßen einschätzen, genau

$$y_P(x) = \frac{\beta_1}{\beta_1 + k\beta_2} \cdot x + \underbrace{\frac{k(\beta_2 \omega_2 + \beta_2 P - 1) + \beta_1(P - \omega_1) + 1}{\beta_1 + k\beta_2}}_{=: C_{SB}} \quad (4.9)$$

ergibt. Also erhalten ein proportionales Verhältnis des abgegebenen Verlustes zum eingetretenen Verlust, sowie einen Selbstbehalt für den Versicherer in Höhe von C_{SB} . Berechnung der optimalen Prämie P^* , also Lösen von Problem 1b, führt zu

$$P^* = \min \left\{ \bar{P}, \max \left\{ 0, \frac{k(1 - \beta_2 \omega_2) + \beta_1 \omega_1 - 1}{\beta_1 + k\beta_2} \right\} \right\} \quad (4.10)$$

Da $1/\beta_2 > \omega_2 + P$ der größte Vermögensbetrag ist, den der Rückversicherer erreichen kann, sieht man mit (4.9), dass $y_P(x)$ monoton fallend in k ist. Je mehr Verhandlungsstärke der Rückversicherer also hat, desto weniger Schadensdeckung wird er für dieselbe Prämie P anbieten. Bei $k \nearrow \infty$ wird $y_P(x)$ sogar negativ und daher $I_P^*(x) = 0$, womit der Fall eintritt, dass der Rückversicherer zwar Prämie bekommt, aber keine Schäden bezahlt. Wegen unseren Annahmen zu den Nutzenfunktionen gilt sogar $P^* = \bar{P}$ und wir erhalten den optimalen Fall für den Rückversicherer.

Im Gegensatz dazu führt $k \searrow 0$ zu $y_P(x) > x$, womit $I_P^*(x) = x$ folgt. Zudem gilt dabei $P^* = 0$, also übernimmt der Rückversicherer alle Schäden ohne Prämie zu bekommen, was ideal für den Versicherer ist.

Trotz der Tatsache, dass diese beiden Fälle Pareto-optimale Verträge ergeben, können sie nicht als Lösung infrage kommen, da offensichtlich die Rationalitätsanforderungen (3.3) nicht erfüllt sind.

Durch Variation von k erhalten wir wie schon erwähnt die Menge aller Pareto-optimale Rückversicherungsverträge, unter welchen jenen, die (3.3) erfüllen, die Lösungen zu Problem 1 sind. Darauf wird in den numerischen Beispielen von Abschnitt 4.3 eingegangen.

4.2.2 Optimale Rückversicherung mit exponentiellen Nutzenfunktionen

Hier betrachten wir den Fall mit exponentiellen Nutzenfunktionen. Seien dafür

$$u(x) = \frac{1}{\lambda_1} \left(1 - e^{-\lambda_1 x} \right), \quad \lambda_1 \geq 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (4.11)$$

und

$$v(x) = \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - e^{-\lambda_2 x} \right), \quad \lambda_2 \geq 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (4.12)$$

Man erhält

$$K(0, x) = e^{-\lambda_1(\omega_1 - x - P)} - k \cdot e^{-\lambda_2(\omega_2 + P)} LR(x) \quad (4.13)$$

und der Punkt, ab dem der Rückversicherer Leistung erbringt, ist gegeben mit

$$d(P) = \inf \left\{ x \geq 0 : e^{-\lambda_1(\omega_1 - x - P)} = k \cdot e^{-\lambda_2(\omega_2 + P)} LR(x) \right\}.$$

Die Gleichung $K(y_P(x), x) = 0$ aus Satz 4.1 wird zu

$$e^{-\lambda_1(\omega_1 - x + y_P(x) - P)} = k \cdot e^{-\lambda_2(\omega_2 - y_P(x) + P)} LR(x) \quad (4.14)$$

woraus wir wiederum

$$y_P(x) = \frac{\lambda_1 x - \ln LR(x) - \lambda_1(\omega_1 - P) + \lambda_2(\omega_2 + P) - \ln k}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

ableiten können und mithilfe von Satz 4.1 die optimale Verlustabgabefunktion $I_P^*(x)$ erhalten.

Auch hier bemerken wir, dass man im Fall $LR(x) = 1$ genau

$$y_P(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot x + \frac{\lambda_2(\omega_2 + P) - \lambda_1(\omega_1 - P) - \ln k}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

erhält und die optimale Prämie P^* berechnet sich durch Lösen von Problem 1b mit

$$P^* = \max \left\{ 0, \frac{\lambda_1 \omega_1 - \lambda_2 \omega_2 + \ln k}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\}.$$

Ähnlich zum Fall mit den quadratischen Nutzenfunktionen sieht man, dass $y_P(x)$ monoton fallend in k ist. Für $k \nearrow \infty$ erhält man für endliche Werte von x damit $y_P(x) < 0$ und damit $I_P^*(x) = 0$. Im Gegensatz dazu führt $k \searrow 0$ zu $I_P^*(x) = x$ und der Rückversicherer übernimmt alle Schäden.

4.3 Numerische Darstellung

In diesem Abschnitt werden die bisher dargestellten Ergebnisse durch Beispiele mit fest gewählten Parametern illustriert, wobei hier der Fall mit quadratischen Nutzenfunktionen nach Abschnitt 4.2.1 behandelt wird. Den Annahmen in Abschnitt 4.2.1 folgend wählen wir $\omega_1 = 10000$, $\omega_2 = 30000$, $\beta_1 = 0.00002$ und $\beta_2 = 0.000015$. Nach dieser Wahl von β_1, β_2 ist der Versicherer risikoaverser als der Rückversicherer.

Den Annahmen des Versicherers entsprechend sei sein Verlust exponentialverteilt mit Dichtefunktion $f_1(x) = \theta_1 e^{-\theta_1 x}$, $x > 0$ mit $\theta_1 = 0.00005$. Den Ansichten des Rückversicherers entsprechend sei der Verlust des Versicherers ebenfalls exponentialverteilt mit Dichtefunktion $f_2(x) = \theta_2 e^{-\theta_2 x}$, $x > 0$.

Um zu analysieren, inwiefern die Ansichten des Rückversicherers die optimalen Rückversicherungsverträge beeinflussen, betrachten wir drei Szenarios: In Szenario 1 ist der Rückversicherer optimistischer bezüglich des Verlustes ($\theta_2 = 0.00051$), in Szenario 2 schätzen beide Verhandlungspartner das Risiko gleich ein ($\theta_2 = 0.00005$) und in Szenario 3 ist der Rückversicherer pessimistischer ($\theta_2 = 0.000498$).

Wie wir in Abschnitt 4.2.1 gesehen haben, ergibt sich für feste Prämie P und festen Gewichtparameter k

$$y_P(x) = \frac{\beta_1 x + k(\beta_2 \omega_2 + \beta_2 P - 1)e^{(\theta_1 - \theta_2)x} \theta_2 / \theta_1 + \beta_1(P - \omega_1) + 1}{\beta_1 + k\beta_2 e^{(\theta_1 - \theta_2)x} \theta_2 / \theta_1} \quad (4.15)$$

und die optimale Verlustabgabefunktion erhalten wir mit $I_P^*(x) = \min \left\{ x, \max \{ 0, y_P(x) \} \right\}$. Die optimale Prämie P^* als Lösung von Problem 1b wird numerisch berechnet.

4.3.1 Pareto-Rand

Wie schon erwähnt, erhalten wir durch Variation des Gewichtsparameters k den Pareto-Rand als Menge der Pareto-optimalen Verträge. Abbildung 3 zeigt den Pareto-Rand mit Gewichtsparameter k im Intervall $[1.51, 1.54]$ für jedes der drei betrachteten Szenarien. Hier sei angemerkt, dass der numerische Wert des Nutzens hier keine praktische Bedeutung hat. Ein höherer Wert bedeutet nur ein höheres Nutzen für Versicherer bzw. Rückversicherer. Die Bereiche für k , für die die zugehörigen optimalen Rückversicherungsverträge die Rationalitätsanforderungen erfüllen, entsprechen für die drei Szenarien folgenden Intervallen:

- $\theta_1 = 0.0005$ und $\theta_2 = 0.00051$, $k \in [1.528, 1.531]$,
- $\theta_1 = \theta_2 = 0.0005$, $k \in [1.528, 1.53]$,
- $\theta_1 = 0.0005$ und $\theta_2 = 0.000498$, $k \in [1.528, 1.53]$.

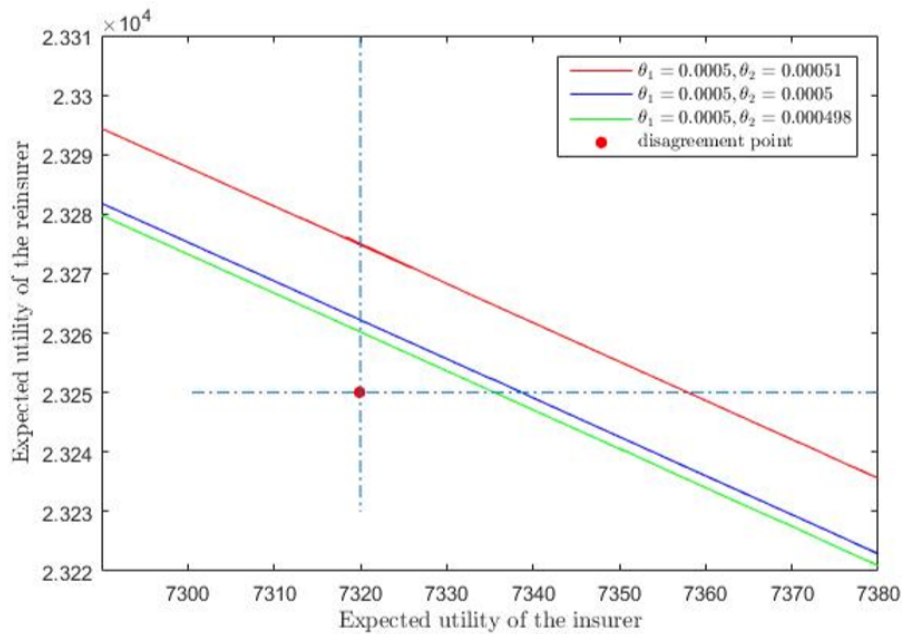


Abbildung 3: Pareto-Rand für die betrachteten Szenarien [2]

Man sieht, dass es mehr Raum für Kooperation gibt, wenn der Rückversicherer das Risiko optimistischer einschätzt als der Versicherer ($\theta_1 < \theta_2$). Andererseits kann man im gegenteiligen Fall einen vom Niveau her niedrigeren Pareto-Rand beobachten, was weniger Verhandlungsspielraum impliziert. Wenn also θ_2 viel kleiner wird als θ_1 , dann kann es vorkommen, dass keine Verträge mehr die Anforderungen (3.3) erfüllen und kein Verhandlungsergebnis erreicht werden kann.

4.3.2 Verhandlungslösung nach Nash

In diesem Abschnitt wollen wir aus der Menge der Pareto-optimalen Verträge die Verhandlungslösung gemäß dem Modell von Nash für die drei betrachteten Szenarien bestimmen.

Da die Lösungen in diesem Modell stets auf dem Pareto-Rand liegen, können sie identifiziert werden, indem man überprüft, welcher Pareto-optimale Vertrag unter Berücksichtigung des spezifischen Parameters k das Produkt in (4.3) maximiert.

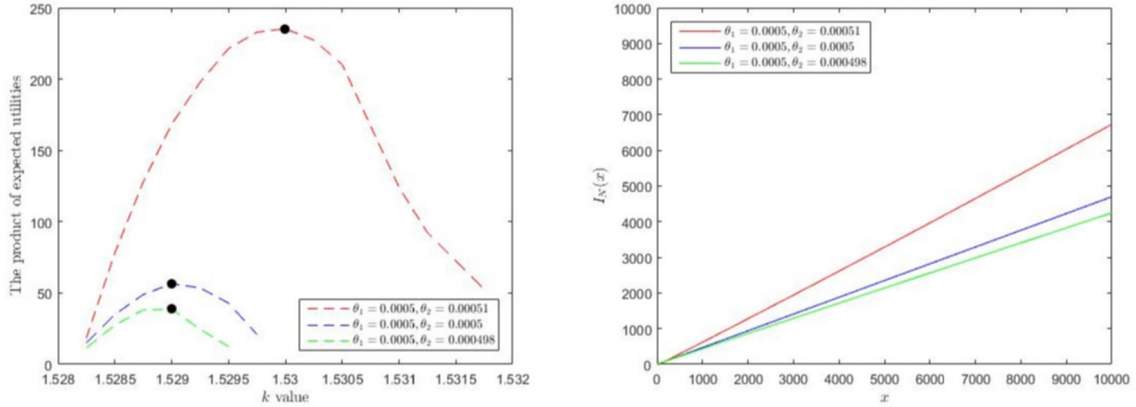


Abbildung 4: optimale Rückversicherungsverträge nach dem Modell von Nash [2]

Im linken Diagramm von Abbildung 4 sieht man das Produkt der Nutzengewinne von Versicherer und Rückversicherer in Abhängigkeit des Parameters k . Die Grafik im rechten Teil stellt die optimalen Verlustabgabefunktionen jener Pareto-optimalen Verträge dar, deren zugehörige Parameterwerte k die linken Graphen, also das Produkt der Nutzengewinne, maximieren. Damit sind sie genau die Verlustabgabefunktionen zur Verhandlungslösung nach Nash für jedes Szenario.

Speziell erhält man für die drei Szenarien folgende Lösungen:

- für $\theta_1 = 0.0005$ und $\theta_2 = 0.00051$, $k = 1.53$,

$$I_N(x) = \min \left\{ x, \max \left\{ 0, \frac{2 \cdot 10^{-5}x - 0.83e^{-10^{-5}x} + 0.83}{2 \cdot 10^{-5} + 2.3 \cdot 10^{-5}e^{-10^{-5}x}} \right\} \right\} \quad (4.16)$$

und $P_N = 1311$. Für nicht-extreme Werte des Verlustes x relativ zum mittleren Verlust von 2000 kann die Gleichung (4.16) approximiert werden durch

$$I_N(x) \approx 0.66x$$

- für $\theta_1 = \theta_2 = 0.0005$, $k = 1.529$,

$$I_N(x) = 0.47x$$

und $P_N = 936$.

- für $\theta_1 = 0.0005$ und $\theta_2 = 0.000498$, $k = 1.529$,

$$I_N(x) = \min \left\{ x, \max \left\{ 0, \frac{2 \cdot 10^{-5}x - 0.82e^{2 \cdot 10^{-6}x} + 0.82}{2 \cdot 10^{-5} + 2.29 \cdot 10^{-5}e^{2 \cdot 10^{-6}x}} \right\} \right\} \quad (4.17)$$

und $P_N = 886$. Gleichung (4.17) kann wiederum approximiert werden durch

$$I_N(x) \approx 0.43x$$

Diese Ergebnisse für die optimalen Verlustabgabefunktionen bestätigen auch die intuitiv klare Annahme, dass ein Rückversicherer, der das Risiko optimistischer einschätzt, auch bereit ist, höheren Verlustdeckungen zuzustimmen und umgekehrt.

4.3.3 Verhandlungslösung nach Kalai/Smorodinsky

Da auch die Verhandlungslösung im Modell von Kalai/Smorodinsky immer auf dem Pareto-Rand liegt, kann man sie ähnlich wie in Abschnitt 4.3.2 identifizieren, indem man überprüft, welcher Pareto-optimale Vertrag (4.4) erfüllt.

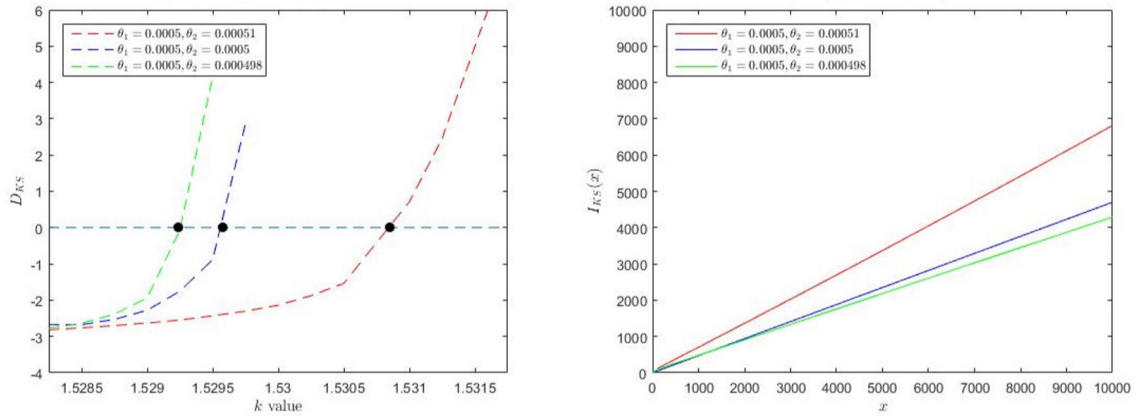


Abbildung 5: optimale Rückversicherungsverträge nach dem Modell von Kalai/Smorodinsky [2]

Im linken Abschnitt von Abbildung 5 sind Werte von D_{KS} in Abhängigkeit vom Gewichtungsparameter k illustriert, während die rechte Grafik die optimalen Verlustabgabefunktionen korrespondierend zur Kalai/Smorodinsky-Lösung für alle drei Szenarien darstellt. Für die Kalai/Smorodinsky-Lösungen erhalten wir folgende Ergebnisse:

- für $\theta_1 = 0.0005$ und $\theta_2 = 0.00051$, $k = 1.531$,

$$I_{KS}(x) = \min \left\{ x, \max \left\{ 0, \frac{2 \cdot 10^{-5}x - 0.83e^{-10^{-5}x} + 0.83}{2 \cdot 10^{-5} + 2.3 \cdot 10^{-5}e^{-10^{-5}x}} \right\} \right\} \quad (4.18)$$

mit Approximation

$$I_{KS}(x) \approx 0.66x$$

und Prämie $P_{KS} = 1311$.

- für $\theta_1 = \theta_2 = 0.0005$, $k = 1.5295$,

$$I_{KS}(x) = 0.47x$$

und Prämie $P_{KS} = 936$.

- für $\theta_1 = 0.0005$ und $\theta_2 = 0.000498$, $k = 1.529$,

$$I_{KS}(x) = \min \left\{ x, \max \left\{ 0, \frac{2 \cdot 10^{-5}x - 0.82e^{2 \cdot 10^{-6}x} + 0.82}{2 \cdot 10^{-5} + 2.29 \cdot 10^{-5}e^{2 \cdot 10^{-6}x}} \right\} \right\} \quad (4.19)$$

und $P_{KS} = 886$ und Approximation der Verlustabgabefunktion

$$I_{KS}(x) \approx 0.43x$$

Man sieht sofort, dass die den Lösungen zugrundeliegenden Gewichtsparameter k der Nash-Lösungen und der Kalai/Smorodinsky-Lösungen sehr nahe aneinanderliegen und man daher in beiden Fällen sogar dieselben optimalen Rückversicherungsverträge erhält. Diese Tatsache bestätigt auch, dass in Fall von Verhandlungsproblemen für Rückversicherungsverträge sowohl das Unabhängigkeitsaxiom im Modell von Nash, als auch das Monotonieaxiom im Modell von Kalai/Smorodinsky vernünftige Annahmen sind und zu ähnlichen Ergebnissen führen.

5 optimale Rückversicherung mit versicherungsmathematisch berechneter Prämie

In diesem Abschnitt wird angenommen, dass die Rückversicherungsprämie nicht wie in Kapitel 4 verhandelt wird, sondern nach dem versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzip berechnet wird. Basierend auf [2] betrachten wir hier also folgendes Problem:

Problem 2. Für festes $k \geq 0$,

$$\max_{I \in \mathcal{C}, P \in [0, P_m]} J(I, P) = \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X + I(X) - P)] + k\mathbb{E}_2[v(\omega_2 - I(X) + P)], \quad (5.1)$$

$$\text{sodass } (1 + \theta)\mathbb{E}_2[I(x)] = P, \quad \theta \geq 0 \quad (5.2)$$

wobei $P_m = (1 + \theta)\mathbb{E}_2[X]$ die höchstmögliche Prämie und θ ein nicht-negativer Sicherheitszuschlag für den Rückversicherer ist.

Um Problem 2 zu lösen, teilen wir es ähnlich wie in Kapitel 4 in zwei Maximierungsprobleme auf. Im ersten Problem fixieren wir eine Prämie P und leiten die optimale Verlustabgabefunktion \tilde{I}_P^* für diese Prämie ab. Wir betrachten also

Problem 2a. Für eine fixe Prämie P und einen Gewichtsparameter $k \geq 0$,

$$\max_{I \in \mathcal{C}} J(I, P) = \mathbb{E}_1[u(\omega_1 - X + I(X) - P)] + k\mathbb{E}_2[v(\omega_2 - I(X) + P)],$$

$$\text{sodass } (1 + \theta)\mathbb{E}_2[I(X)] = P, \quad \theta \geq 0$$

Im zweiten Schritt suchen wir die Prämie $P \in (0, P_m)$ als Lösung von

Problem 2b.

$$\max_{P \in [0, P_m]} J(\tilde{I}_P^*, P) \quad (5.3)$$

Auch in diesem Fall gilt, dass die als Lösung infrage kommenden Verträge die Rationalitätsanforderungen (3.3) erfüllen müssen. Dies lässt sich wieder durch direktes Einsetzen überprüfen.

5.1 Berechnung Pareto-optimaler Verträge

Die Lösung von Problem 2a erfolgt unter Anwendung von Lagrange-Multiplikatoren. Dafür schreiben wir

$$M(x, I(x), P) := u(\omega_1 - x + I(x) - P) + kv(\omega_2 - I(x) + P)LR(x) \quad (5.4)$$

und damit für die Lagrange-Funktion

$$N(x, I(x), P, \lambda) := M(x, I(x), P) + \lambda[(1 + \theta)I(x)LR(x) - P] \quad (5.5)$$

Mit dieser Notation erhalten wir

Lemma 5.1. Eine Verlustabgabefunktion $\tilde{I}_P^* \in \mathcal{C}$ löst Problem 2a, wenn ein $\lambda_P \in \mathbb{R}$ existiert, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $I \in \mathcal{C}$, die (5.2) erfüllen, gilt $N(x, \tilde{I}_P^*(x), P, \lambda_P) \geq N(x, I(x), P, \lambda_P)$ für alle $x \in [0, M]$
- 2.

$$(1 + \theta)\mathbb{E}_2[\tilde{I}_P^*(X)] = P. \quad (5.6)$$

Beweis. Wenn $N(x, \tilde{I}_P^*(x), P, \lambda_P) \geq N(x, I(x), P, \lambda_P)$ für jede beliebige Lösung $I \in \mathcal{C}$ gilt, die (5.2) erfüllt, so erhalten wir mit (5.5) für alle $x \geq 0$

$$M(x, \tilde{I}_P^*(x), P) - M(x, I(x), P) \geq \lambda(1 + \theta)LR(x)(\tilde{I}_P^*(x) - I(x)).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} J(\tilde{I}_P^*, P) - J(I, P) &= \int_0^M \left(M(x, \tilde{I}_P^*(x), P) - M(x, I(x), P) \right) dF_2(x) \\ &\geq \lambda(1 + \theta) \left(\mathbb{E}_2[\tilde{I}_P^*(X)] - \mathbb{E}_2[I(X)] \right) = 0 \end{aligned}$$

□

Lemma 5.1 besagt, dass Problem 2a durch punktweise Maximierung von $M(\cdot)$ durch die Lagrange-Methode gelöst werden kann. Um $\tilde{I}_P^*(x)$ tatsächlich zu finden, betrachten wir das Problem

$$\max_{y \in [0, x]} N(x, y, P, \lambda) \quad (5.7)$$

für festes x und beliebiges λ . Wir benutzen im Folgenden die Notation $N_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ und $N_{22}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ für die erste und zweite partielle Ableitung der Funktion N nach ihrem zweiten Argument.

Da die Nutzenfunktionen $u(\cdot)$ und $v(\cdot)$ als konkav vorausgesetzt wurden, erhalten wir

$$N_{22}(x, y, P, \lambda) = u''(\omega_1 - x + y - P) + kv''(\omega_2 - y + P)LR(x) < 0$$

Also ist $N(x, y, P, \lambda)$ strikt konkav in y und (5.7) muss eine eindeutige Lösung haben, welche wir mit $I^*(x, \lambda)$ bezeichnen.

Mithilfe der folgenden beiden Lemmata kann man ebendiese Lösung $I^*(x, \lambda)$ bestimmen:

Lemma 5.2. Die Lösung zu (5.7) ist gegeben durch

$$I^*(x, \lambda) := \min \left\{ y, \max \{0, y(x, \lambda)\} \right\}, \quad (5.8)$$

wobei $y(x, \lambda)$ die Lösung ist zu

$$N_2(x, y, P, \lambda) = 0. \quad (5.9)$$

Beweis. Ableiten von $N(x, y, P, \lambda)$ nach der zweiten Variable liefert

$$N_2(x, y, P, \lambda) = u'(\omega_1 - x + y - P) - kv'(\omega_2 - y + P)LR(x) + \lambda(1 + \theta)LR(x).$$

Die Ableitung ist stetig in y und erfüllt wegen der Eigenschaften (3.1) und (3.2) der Nutzenfunktionen

$$\lim_{y \rightarrow \infty} N_2(x, y, P, \lambda) = u'(\infty) - kv'(-\infty) \leq 0$$

und

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} N_2(x, y, P, \lambda) = u'(-\infty) - kv'(\infty) \geq 0.$$

Also folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es immer eine Lösung von (5.9) in $(-\infty, \infty)$, welche wir mit $y(x, \lambda)$ bezeichnen wollen. Wenn nun

$$N_2(x, y, P, \lambda)|_{y=0} = u'(\omega_1 - x - P) - \left(kv'(\omega_2 + P) - \lambda(1 + \theta) \right) LR(x) < 0,$$

dann folgt $y(x, \lambda) < 0$ und die Lösung für Problem (5.7) ist gegeben durch $I^*(x, \lambda) = \max(0, x(x, \lambda)) = 0$.

Gilt andererseits

$$N_2(x, y, P, \lambda)|_{y=x} = u'(\omega_1 - P) - \left(kv'(\omega_2 - x + P) - \lambda(1 + \theta) \right) LR(x) > 0,$$

so gilt $y(x, \lambda) > x$ und $I^*(x, \lambda) = \min(x, y(x, \lambda)) = x$. Wenn also $y(x, \lambda) \in [0, x]$, so folgt $I^*(x, \lambda) = y(x, \lambda)$ und damit die Behauptung. □

Lemma 5.3. Für ein beliebiges $P \in (0, (1 + \theta)\mathbb{E}_2(X))$ existiert ein $\lambda_P \in \mathbb{R}$, sodass

$$(1 + \theta)\mathbb{E}_2[I^*(X, \lambda_P)] = P$$

Beweis. Für beliebiges λ , definiere

$$\phi(\lambda) := \mathbb{E}_2[I^*(X, \lambda)]$$

Wir beweisen das Lemma, indem wir zeigen, dass $\phi(\lambda)$ stetig und nicht-fallend in λ ist und dass

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \phi(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi(\lambda) = \mathbb{E}_2[X]. \quad (5.10)$$

Für ein beliebiges x ist $I^*(x, \lambda)$ stetig in λ . Da nach Definition $|I^*(x, \lambda)| \leq x$ gilt, folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz, dass auch $\phi(\lambda) = \mathbb{E}_2[I^*(x, \lambda)]$ stetig in λ ist. Um zu zeigen, dass $\phi(\lambda)$ nicht-fallend ist, zeigen wir, dass für beliebiges x $I^*(x, \lambda)$ nicht-fallend in λ ist. Da $I^*(x, \lambda) = \min \left\{ y, \max \{0, y(x, \lambda)\} \right\}$, reicht es sogar zu zeigen, dass $y(x, \lambda)$ nicht-fallend in λ ist. Ableiten beider Seiten von Gleichung (5.9) nach λ liefert

$$\frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial \lambda} = - \frac{(1 + \theta)LR(x)}{u''(\omega_1 - x + y(x, \lambda) - P) + kv''(\omega_2 - y(x, \lambda) + P)LR(x)} \geq 0,$$

womit $y(x, \lambda)$ und somit $\phi(\lambda)$ nicht-fallend in λ ist.

Zuletzt sieht man durch Nachrechnen, dass $N_2(x, y, P, \lambda) < 0$ gilt für $\lambda \rightarrow -\infty$, woraus $I^*(x, -\infty) = 0$ für alle x folgt. Wenn hingegen $\lambda \rightarrow \infty$, so gilt $N_2(x, y, p, \lambda) > 0$ und damit $I^*(x, \infty) = x$ für alle x . Also gilt (5.10) und die Behauptungen sind gezeigt. \square

Kombiniert man die Lemmata 5.1, 5.2 und 5.3, so erhalten wir das Hauptergebnis für diesen Abschnitt:

Satz 5.1. Die Lösung zu Problem 2a ist gegeben durch

$$\tilde{I}_P^*(x) = I^*(x, \lambda_P) = \min \left\{ y, \max \{0, y(x, \lambda_P)\} \right\},$$

wobei λ_P bestimmt wird durch $(1 + \theta)\mathbb{E}_2[I^*(x, \lambda_P)] = P$.

Wenn wir mithilfe dieses Satzes die optimale Verlustabgabefunktion \tilde{I}_P^* für eine feste Prämie P bestimmt haben, suchen wir nun gemäß Problem 2b die optimale Prämie P^* . Analog zu Abschnitt 4.1 hängt die optimale Verlustabgabefunktion \tilde{I}_P^* auch von P ab, womit eine analytische Darstellung von P^* im Allgemeinen nicht existieren muss. Auch hier kann man aber auf numerische Berechnungen zurückgreifen, um das Problem zu lösen. Hat man nun also einen Pareto-optimalen Rückversicherungsvertrag, so erhält man durch Variation des Gewichtsparameters k den gesamten Pareto-Rand und kann für Verträge auf dem Pareto-Rand durch direkte Substitution prüfen, ob sie die Rationalitätsanforderungen (3.3) erfüllen.

5.2 Optimale Rückversicherung mit quadratischen Nutzenfunktionen

Wir betrachten in diesem Abschnitt wieder ein Beispiel, bei dem die Nutzenfunktionen als quadratische Funktionen modelliert werden:

Angenommen die Nutzenfunktionen von Versicherer und Rückversicherer sind gegeben mit (4.5) und (4.6) aus Abschnitt 4.2. Für Gleichung (5.9) erhalten wir damit

$$-\beta_1(\omega_1 - x + y(x, \lambda) - P) + 1 = \left(-k\beta_2(\omega_2 - y(x, \lambda) + P) + k - \lambda(1 + \theta) \right) LR(x),$$

und es folgt

$$y(x, \lambda) = \frac{\beta_1 x + \left(k\beta_2(\omega_2 + P) - k + \lambda(1 + \theta) \right) LR(x) + 1 - \beta_1(\omega_1 - P)}{\beta_1 + k\beta_2 LR(x)}.$$

Mit $y(x, \lambda)$ kann man durch Anwendung von Satz 5.1 leicht die optimale Verlustabgabefunktion bestimmen.

Betrachtet man den Fall $LR(x) = 1$, bei dem Versicherer und Rückversicherer das Risiko gleich einschätzen, so sieht man auch hier, dass man für $LR(x)$ eine direkt proportionale Abhängigkeit zu x mit Proportionalitätsfaktor $\frac{\beta_1}{\beta_1 + k\beta_2} \in [0, 1]$ erhält. Zudem tritt auch hier, analog zu Abschnitt 4.2.1, ein Selbstbehalt für den Versicherer auf. Es fällt auf, dass man hier sogar denselben Proportionalitätsfaktor erhält wie im Fall, bei dem die Prämie vollständig verhandelt wird und nicht nach versicherungsmathematischen Methoden berechnet wird. Dieser Proportionalitätsfaktor spielt auch die Bedeutung des Gewichtsparameters k wider: Für große k , also im Fall verhandlungsstarker Rückversicherer, wird der Proportionalitätsfaktor kleiner, was bedeutet, dass der Rückversicherer pro Geldeinheit Schaden weniger an den Versicherer leisten muss.

5.3 Numerische Darstellung

Wir verwenden hier dieselben Annahmen wie in Abschnitt 4.3, abgesehen von der Tatsache, dass hier die Prämie nicht verhandelt wird, sondern bestimmt wird durch

$$P = (1 + \theta)\mathbb{E}_2[I(X)].$$

Der Sicherheitszuschlag für die Prämie beträgt $\theta = 0.05$. Unter Anwendung von Satz 5.1 erhalten wir

$$I^*(x, \lambda_P) = \min \left\{ y, \max\{0, y(x, \lambda_P)\} \right\}$$

und damit analog zu (4.15)

$$y(x, \lambda_P) = \frac{\beta_1 x + \left(k\beta_2(\omega_2 + P) - k + \lambda_P(1 + \theta) \right) e^{(\theta_1 - \theta_2)x} \theta_2 / \theta_1 + 1 - \beta_1(\omega_1 - P)}{\beta_1 + k\beta_2 e^{(\theta_1 - \theta_2)x} \theta_2 / \theta_1}.$$

Wir bestimmen λ_P durch die Gleichung $\mathbb{E}_2[I^*(X, \lambda_P)] = \frac{P}{1 + \theta}$.

5.3.1 Pareto-Rand

Abbildung 6 zeigt den Pareto-Rand für jedes der betrachteten Beispiele mit $k \in [0, 99]$. Zu Vergleichszwecken ist hier auch der Pareto-Rand des Falles, bei dem die Prämie verhandelt wird, in gestrichelten Linien eingeblendet. Für den Bereich des Gewichtsparameters k , für den auch die Rationalitätsanforderungen erfüllt sind, erhalten für jeden der betrachteten Szenarien folgende Ergebnisse:

- $\theta_1 = 0.005$, $\theta_2 = 0.0051$, $k \in [0.4, 1.6]$,

- $\theta_1 = \theta_2 = 0.005$, $k \in [0, 1.4]$,
- $\theta_1 = 0.005$, $\theta_2 = 0.00498$, $k \in [0, 1.3]$.

Ähnlich wie in Abschnitt 4.3 sieht man auch bei versicherungsmathematisch berechneten Prämien, dass mehr Verhandlungsspielraum zur Verfügung steht, wenn der Rückversicherer das Risiko optimistischer einschätzt, und umgekehrt. Zudem kann beobachtet werden, dass der Pareto-Rand bei verhandelbarer Prämie den Pareto-Rand bei versicherungsmathematisch berechneter Prämie dominiert und im letzteren Fall die Verhandlungsmenge damit etwas kleiner ist.

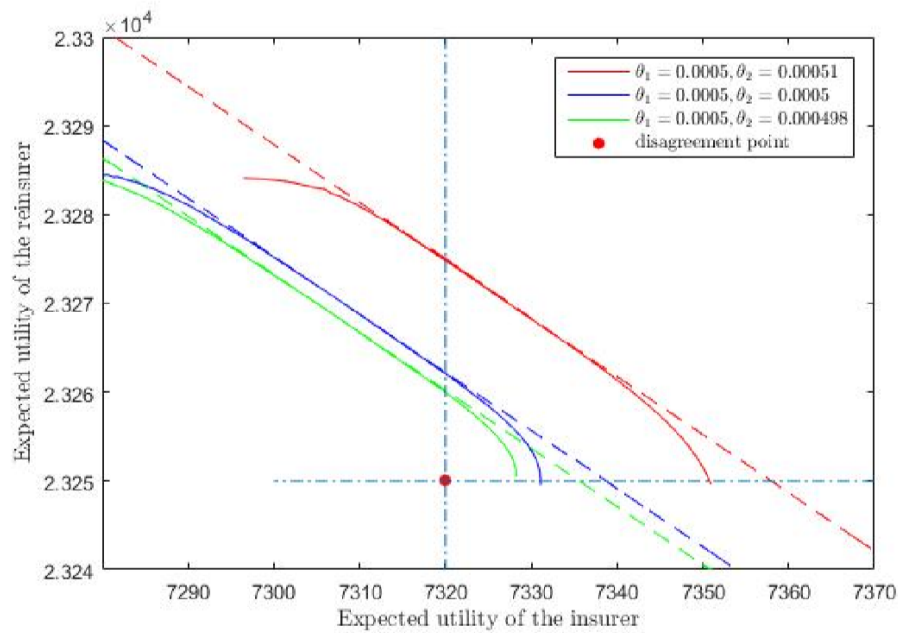


Abbildung 6: Pareto-Rand für die betrachteten Szenarien [2]

5.3.2 Verhandlungslösung nach Nash

Jener Versicherungsvertrag, der dem optimalen Vertrag gemäß der Verhandlungslösung nach dem Modell von Nash entspricht, lässt sich analog zu Abschnitt 4.3.2 als jener Pareto-optimale Vertrag identifizieren, der das Produkt in (4.3) maximiert. Im rechten Teil von Abbildung 7 ist das Produkt der Nutzengewinne dargestellt. Insbesondere sind jener Werte von k hervorgehoben, an denen dieses Produkt sein Maximum annimmt. Die zugehörigen Verlustabgabefunktionen zu diesen maximierenden Werten von k sind in der rechten Grafik zu sehen.

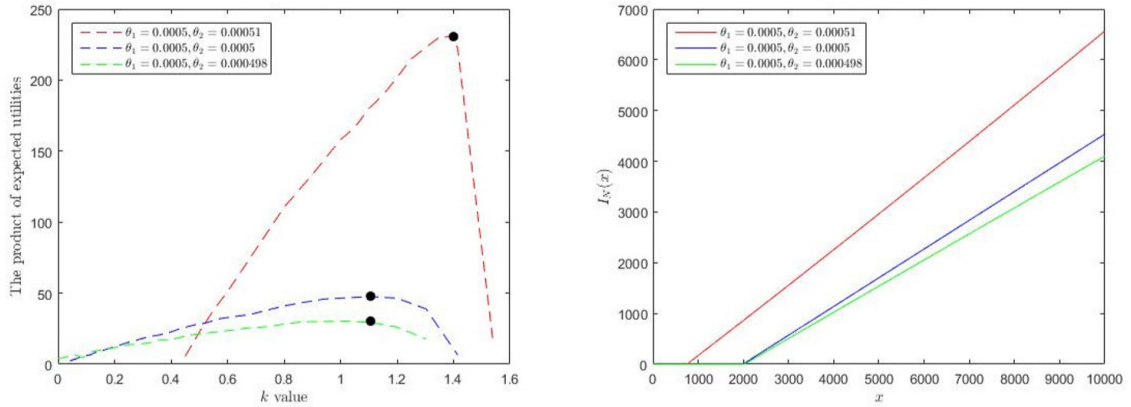


Abbildung 7: optimale Rückversicherungsverträge nach dem Modell von Nash [2]

Im Speziellen erhalten wir für die von uns betrachteten Fälle folgende optimale Rückversicherungsverträge:

- für $\theta_1 = 0.0005$ und $\theta_2 = 0.00051$, $k = 1.39$,

$$I_N(x) = \min \left\{ x, \max \left\{ 0, \frac{2 \cdot 10^{-5}x - 0.84e^{-10^{-5}x} + 0.82}{2 \cdot 10^{-5} + 2.14 \cdot 10^{-5}e^{-10^{-5}x}} \right\} \right\}, \quad (5.11)$$

und $P_N = 979$. Wir können in diesem Fall Gleichung (5.11) approximieren durch

$$I_N(x) \approx \max\{0, 0.69x - 483\}$$

- für $\theta_1 = \theta_2 = 0.0005$, $k = 1.11$,

$$I_N(x) = \max\{0, 0.57x - 1127\}$$

und $P_N = 418$.

- für $\theta_1 = 0.0005$ und $\theta_2 = 0.000498$, $k = 1.11$,

$$I_N(x) = \min \left\{ x, \max \left\{ 0, \frac{2 \cdot 10^{-5}x - 0.85e^{2 \cdot 10^{-6}x} + 0.81}{2 \cdot 10^{-5} + 1.53 \cdot 10^{-5}e^{2 \cdot 10^{-6}x}} \right\} \right\} \quad (5.12)$$

und $P_N = 398$. Gleichung (5.12) kann wiederum approximiert werden durch

$$I_N(x) \approx \max\{0, 0.52x - 1050\}$$

Wir sehen wieder erwartungsgemäß, dass ein Rückversicherer mehr Schäden deckt, wenn er das Risiko optimistischer einschätzt als der Versicherer.

5.3.3 Verhandlungslösung nach Kalai/Smorodinsky

Wir bestimmen den optimalen Rückversicherungsvertrag als Verhandlungslösung des Kalai/Smorodinsky-Modells wie in Abschnitt 4.3.3, indem wir jenen Pareto-optimalen Vertrag bestimmen, der (4.4) erfüllt. Hier jedoch werden die maximalen Nutzen u_{max} und v_{max} bestimmt, indem man Problem 2 jeweils einmal für $k = 0$ und einmal für $k = \infty$ löst. Die Werte von D_{KS} in Abhängigkeit von k sind für jedes der drei Beispiele in der rechten Grafik von Abbildung 8 zu sehen, während im linken Teil die optimalen Verlustabgabefunktionen zu jenen Rückversicherungsverträgen dargestellt sind, die den Verhandlungslösungen gemäß Kalai/Smorodinsky entsprechen.

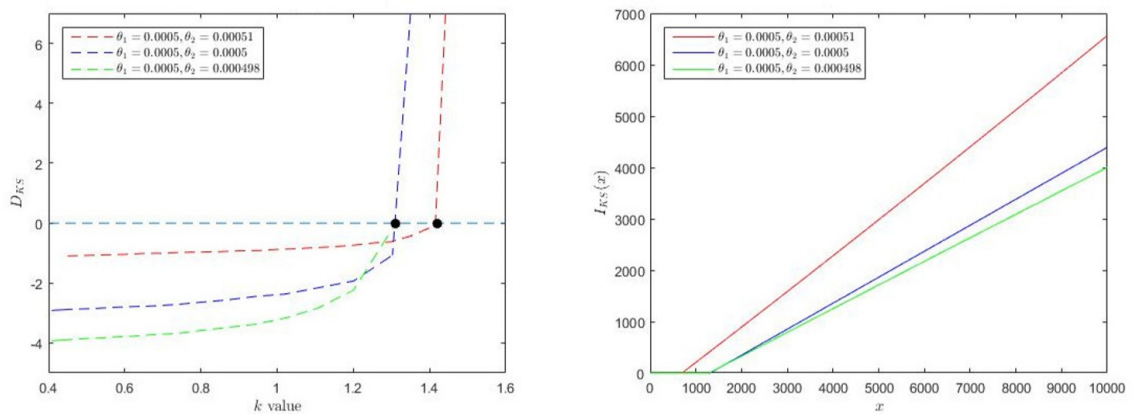


Abbildung 8: optimale Rückversicherungsverträge nach dem Modell von Kalai/Smorodinsky [2]

Man erhält für die Kalai/Smorodinsky-Lösungen:

- für $\theta_1 = 0.0005$ und $\theta_2 = 0.00051$, $k = 1.41$,

$$I_{KS}(x) = \min \left\{ x, \max \left\{ 0, \frac{2 \cdot 10^{-5}x - 0.84e^{-10^{-5}x} + 0.82}{2 \cdot 10^{-5} + 2.17 \cdot 10^{-5}e^{-10^{-5}x}} \right\} \right\}, \quad (5.13)$$

mit zugehöriger Prämie $P_{KS} = 973$. Gleichung (5.13) kann in diesem Fall approximiert werden durch

$$I_{KS}(x) \approx \max\{0, 0.68x - 456\}$$

- für $\theta_1 = \theta_2 = 0.0005$, $k = 1.31$,

$$I_{KS}(x) = \max\{0, 0.51x - 665\}$$

und $P_{KS} = 534$.

- für $\theta_1 = 0.0005$ und $\theta_2 = 0.000498$, $k = 1.31$,

$$I_{KS}(x) = \min \left\{ x, \max \left\{ 0, \frac{2 \cdot 10^{-5}x - 0.83e^{2 \cdot 10^{-6}x} + 0.81}{2 \cdot 10^{-5} + 1.95 \cdot 10^{-5}e^{2 \cdot 10^{-6}x}} \right\} \right\} \quad (5.14)$$

und $P_{KS} = 398$ und Approximation

$$I_{KS}(x) \approx \max\{0, 0.46x - 608\}$$

5.3.4 Vergleich der Verlustabgabefunktionen: verhandelbare Prämien vs. versicherungsmathematisch berechnete Prämien

Vergleicht man die Verlustabgabefunktionen der drei Fälle in Abschnitt 4.3.2 und Abschnitt 4.3.3 mit den Verlustabgabefunktionen, die wir in diesem Kapitel erhalten haben, so fällt auf, dass bei Prämien, die vollständig verhandelt werden, die Leistungen des Rückversicherers proportional zum eingetretenen Verlust ist, jedoch in keinem Fall ein Selbstbehalt für den Versicherer auftritt. Wird die Prämie jedoch nach dem versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzip berechnet, so sind die Rückversicherungsleistungen zwar ebenfalls proportional zum Verlust, aber in allen drei Fällen gibt es einen Selbstbehalt und der Rückversicherer leistet erst, sobald der Verlust einen bestimmten Betrag übersteigt. Diese Tatsache lässt sich auch graphisch durch Vergleich der Abbildungen 4 und 5 mit den Abbildungen 7 und 8 feststellen.

6 Zusammenfassung

Verhandlungen über Rückversicherungsverträge lassen sich mathematisch als ein kooperatives Verhandlungsproblem modellieren. Hier kann auch berücksichtigt werden, dass Versicherer und Rückversicherer das dem Vertrag zugrundeliegende Risiko unterschiedlich einschätzen, wie es in Realität häufig der Fall ist.

Wir haben hier zwei grundlegende Szenarien betrachtet: Im ersten Szenario wird die Prämie, die der Rückversicherer für seine Leistungen erhält, zwischen den beiden Partnern verhandelt, während diese Prämie im zweiten Szenario mithilfe des versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzips berechnet wurde. Für beide Szenarien konnten wir im ersten Schritt die Menge aller Pareto-optimalen Verträge bestimmen und anhand dieses Resultats die kooperative Verhandlungslösung, also den eindeutigen, optimalen Rückversicherungsvertrag, gemäß der spieltheoretischen Modelle von Nash und Kalai/Smorodinsky bestimmen. In beiden Szenarien lassen sich zudem explizite Darstellungen der Verlustabgabefunktionen finden, welche spezifizieren, wie viel des eingetretenen Verlustes vom Rückversicherer übernommen wird. Die zugehörige Rückversicherungsprämie eines optimalen Vertrages lässt sich in speziellen Fällen ebenfalls geschlossen darstellen. Ist dies nicht möglich, greift man auf numerische Lösungsmöglichkeiten zurück.

Zudem konnten wir beobachten, dass die Verhandlungslösungen der zwei Modelle in den betrachteten spezifischen Beispielen sehr nahe aneinander liegen. Dies bestätigt, dass für Rückversicherungsverhandlungen sowohl das Unabhängigkeitsaxiom im Modell von Nash, als auch das Monotonieaxiom im Modell von Kalai/Smorodinsky geeignete Annahmen sind, um die Verhandlungen zu modellieren.

Literaturverzeichnis

- [1] S. Berninghaus, W. Güth, and K. Erhart. *Strategische Spiele*. Springer-Verlag Berlin, 2010.
- [2] W. Jiang, J. Ren, C. Yang, and H. Hong. On optimal reinsurance treaties in cooperative game under heterogeneous beliefs. *Insurance: Mathematics and Economics*, 85:173–184, 2019.
- [3] E. Kalai and M. Smorodinsky. Other solutions to nash’s bargaining problem. *Econometrica*, 43(3):513–518, 1975.
- [4] John F. Nash. The bargaining problem. *Econometrica*, 18(2):155–162, 1950.

Abbildungsverzeichnis

1	Illustration der Nash-Lösung [1]	4
2	Illustration der Kalai/Smorodinsky-Lösung [1]	7
3	Pareto-Rand für die betrachteten Szenarien [2]	16
4	optimale Rückversicherungsverträge nach dem Modell von Nash [2]	17
5	optimale Rückversicherungsverträge nach dem Modell von Kalai/Smorodinsky [2]	18
6	Pareto-Rand für die betrachteten Szenarien [2]	25
7	optimale Rückversicherungsverträge nach dem Modell von Nash [2]	26
8	optimale Rückversicherungsverträge nach dem Modell von Kalai/Smorodinsky [2]	27