



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

SEMINARARBEIT

The implied longevity curve

ausgeführt am Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von
Assist. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch
Stefanie Hattinger
Matr.-Nr. 01608054

29.07.2019
Wien

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Rentenpreis	5
3	Gompertz-Makeham Gesetz	6
4	Technische Vorgehensweise	9
4.1	Numerischer Vorgang	11
5	Datengewinnung	13
6	Analyse der Daten	14
6.1	Grafiken und Tabellen zur Datenanalyse	16
7	Conclusion	22
7.1	Zusammenfassung der Resultate	22
7.2	Praktische Auswirkungen	23

1 Einleitung

Ein wichtiger Punkt für effiziente Markthypothesen ist, dass in Marktpreisen zu jeder Zeit alle verfügbaren Informationen verarbeitet sind. Tatsächlich werden Optionen und Derivate oft verwendet, um Vorhersagen über Stocks, Rohstoffe, Zinsraten, Volatilität und sogar über das Wetter zu treffen.

Motiviert durch die Verwendung von Preisen zur Informationsgewinnung, verwenden wir in dieser Arbeit Rentenpreise, um Informationen herauszufiltern, wie hoch die Lebenserwartung einer Person ist und wie sich diese im Laufe der Jahre verändert.

In der Vergangenheit war dies schwer zu erreichen aufgrund fehlender vertrauenswürdiger Daten von Renten und Versicherungspreisen aus einer Querschnittszeitreihe. Heutzutage hat man Zugang zu zwei Millionen U.S Rentenangeboten, welche über 10 Jahre hinweg wöchentlich aufgezeichnet wurden. Diese Unmengen an Daten und Computerleistungen ermöglichen es uns, durch Preise die Lebenserwartung zu berechnen wie es zuvor nicht möglich war. Technisch ausgedrückt:

Wir invertieren das aktuarielle Model, welches die Sterbewahrscheinlichkeit und die Zinsrate miteinander verbindet und wenden dann den Levenberg-Marquardt-Algorithmus an um die implizierte Sterbewahrscheinlichkeit zu erhalten.

Normalerweise berechnet man die Marktpreise wie folgt:

Man trifft Annahmen über Zinsrate und Sterbewahrscheinlichkeit und berechnet daraus einen Modelpreis, welcher unter konkurrenzabhängigen Aspekten angepasst wird.

Für das Vorhaben dieser Arbeit beginnen wir mit dem Marktpreis und lösen dann nach implizierenden Tabellen und Parametern, um die Sterbewahrscheinlichkeit zu erhalten.

Die Seminararbeit hat folgende Gliederung: Im 2.Kapitel werden die Grundlagen der Leibrenten dargestellt, im 3.Kapitel wird das Gompertz-Makeham Gesetz erklärt. Es folgen Kapite 4 und 5, in denen näher auf die technische Vorgehensweise eingegangen wird. Den Abschluss bildet eine Analyse und die Conclusion.

Grundlage dieser Arbeit ist das Paper „The Implied Longevity curve: How long does the market think you are going to live.“(1). Im 4. Kapitel beziehe ich mich zusätzlich auf das Paper „The Term Structure of Mortality-Contingent Claims: Some Canadian

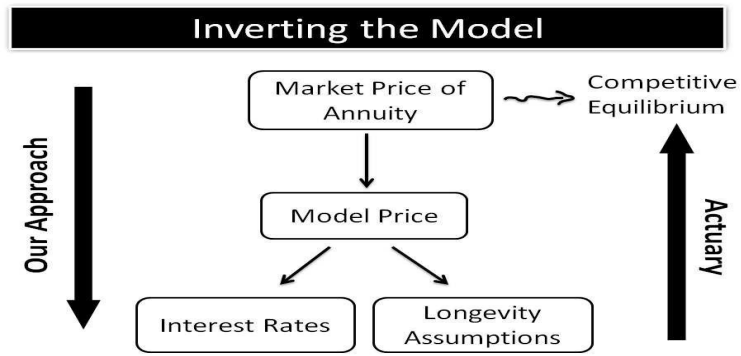


Abbildung 1.1: Aktuaries Model für Rentenpreis invertiert

Evidence“(2).

2 Rentenpreis

Der Preis einer Rente oder anders gesagt, das Einkommen, welches ein Rentner erwarten kann für eine gewisse Prämienzahlung, ist von dem konkurrenzabhängigen Markt bedingt und dem Zusammenspiel unzähliger Versicherungsunternehmen. Auch wenn am Ende der Preis von Angebot und Nachfrage dominiert wird, gibt es eine strikt mathematische Beziehung zwischen Mortalität und Zinsrate, um den Preis zu errechnen. Ähnlich zum Konzept von Arbitrage in Sicherheitsmärkten, wo der Marktpreis nicht zu stark vom Modelpreis abweichen darf.

Die einfachste Preisformel für eine Rente, welche einmal jährlich einen Dollar ausbezahlt, ist folgende:

$$a(x, T, R) = \sum_{i=1}^T \frac{1}{(1+R)^i} + \sum_{i=T+1}^{\omega-x} \frac{p(x, i)}{(1+R)^i} \quad (2.1)$$

a beschreibt hier den Barwert, wenn man bis zum Lebensende einen Dollar im Jahr ausbezahlt bekommt, beginnend im Alter x und garantiert für T Jahre. Die garantierte Summe sorgt dafür, dass, falls der Versicherungsnehmer vor dem $x+T$ -ten Jahr stirbt, trotzdem ein Dollar ausbezahlt wird. Bei der Lebenskontingentsumme wird bis zum Ende der Mortalitätstafel aufsummiert mit $\omega = 122$. Diese zuvor beschriebene Formel dient in dieser Arbeit nur Illustrationszwecken, da sie diskret ausbezahlt und die Zeitstruktur linear verläuft. Beides stimmt mit dem finalen Modell nicht überein.

Für $p(x, \cdot)$ könnte man in der Theorie jeden beliebigen absteigenden Überlebenswahrscheinlichkeitsvektor verwenden. In dieser Seminararbeit wird das Gompertz-Makeham-Gesetz für Sterbewahrscheinlichkeiten verwendet, welches oft in biologischen und demografischen Gebieten Anwendung findet. Man muss eine Annahme von der Struktur einer Sterbewahrscheinlichkeit treffen, da es sonst beinahe unmöglich ist, irgendwelche Vorhersagen zu treffen.

3 Gompertz-Makeham Gesetz

Aktuare und Demografen haben schon lange herausgefunden, dass die altersabhängige auf ein Jahr betrachtete Mortalitätsrate durchschnittlich mit 8% bis 10% jedes Jahr steigt für Personen im Alter zwischen 25 und 95. Anders ausgedrückt, eine Person mit dem Alter y hat eine $q\%$ Wahrscheinlichkeit, dass sie in diesem Jahr stirbt. Unter der Annahme einer 8-prozentigen Mortalitätsrate, steigt die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, die nun $y+1$ Jahre alt ist, im nächsten Jahr stirbt auf $q(1+0.08)\%$. Im Alter von $y+2$ erhöht sich diese Wahrscheinlichkeit auf $q(1+0.08)^2\%$, noch ein Jahr später auf $q(1+0.08)^3\%$ usw..

Eine Approximation erster Ordnung der Sterbewahrscheinlichkeit eines Erwachsenen, egal welche Sterbetafel man verwendet, ist eine exponentiell ansteigende Funktion mit zunehmendem Alter. Deswegen verwendet man den Logarithmus der Mortalitätsrate, da man sie so durch eine Gerade approximieren kann und sie somit mit ihrer Steigung und ihren Achsenabschnitt beschreiben kann.

Diese Feststellung wurde von dem britischen Demografen und Aktuar Benjamin Gompertz entdeckt und später weiter verfeinert von William Makeham (1890). Heute ist es als das Gompertz-Makeham (GM) Gesetz der Mortalität bekannt. Gompertz Anteil bezieht sich auf den exponentiellen Anstieg (welcher oben beschrieben wurde) und Makehams Anteil bezieht sich auf eine konstante Anzahl von Unfällen, die passieren können, welche jedoch unabhängig vom Alter sind.

Dieses Gesetz ermöglicht, ein wichtiges Werkzeug um die Überlebenswahrscheinlichkeit jedes Alters als eine Funktion mit nur 3 Parametern zu berechnen. Man kann das Gesetz folgendermaßen darstellen:

$$\ln p(x, t) = -\lambda_0 * t + (1 - e^{t/b} e^{(x-m)/b}) \tag{3.1}$$

In dieser Formel beschreibt x das Alter der Person, t steht für die Zeit, welche überlebt werden soll, λ_0 bezeichnet die Konstante, welche für die altersunabhängigen Unfälle eingerechnet wird. Der Parameter m steht für den Modalwert und b ist der Steuerungswert. Die letzten beiden Parameter werden beide in Zeiteinheiten gerechnet. Es ist anzumer-

ken, wenn man $\lambda_0 := 0$ definiert, dann kann man m weitestgehend als Mittelwert und b als Standardabweichung der verbleibenden zukünftigen Lebenszeit auffassen. Technisch ausgedrückt heißt das, dass der Modalwert des Lebens das Alter ist, in welchem es am wahrscheinlichsten ist, dass eine Person stirbt. Dieses Alter ist ein paar Jahre höher als der Median, was auf die Schiefe der Verteilung zurückzuführen ist. Trivialerweise erhält man die Überlebenswahrscheinlichkeit, indem man die rechte Seite der obigen Gleichung zum Exponenten nimmt.

Aufgrunddessen, dass das Gompertz-Makeham-Gesetz eine zentrale Rolle im Vorhaben dieser Seminararbeit spielt, folgt nun ein Beispiel, wie man die drei Parameter (m, b, λ_0) verwenden muss, um ein numerisches Ergebnis zu erhalten.

In unserem Beispiel betrachten wir eine 50-jährige Person und wir wollen die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass diese Person noch mindestens 40 Jahre lebt, also mindestens das Alter von 90 Jahren erreicht.

1.Szenario: $m = 80, b = 11, \lambda_0 = 0, t = 40$

Setzen wir die soeben festgelegten Parameter in unsere GM-Gleichung ein, erhalten wir, dass unsere betrachtete Person eine Überlebenswahrscheinlichkeit von 8,9% hat, ihren 90.Geburtstag zu erreichen bzw eine 91,1% Wahrscheinlichkeit davor zu sterben.

2a.Szenario: $m = 92, b = 11, \lambda_0 = 0, t = 40$

Betrachtet man wiederholt die GM-Gleichung mit unserem erhöhten Modalwert, sieht man, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit für die nächsten 40 Jahre auf 44,4% steigt. Als bei Erhöhung des Parameters m um 12 Jahre, steigt die Überlebenswahrscheinlichkeit um 35,5 Prozentpunkte.

2b.Szenario: $m = 92, b = 11, \lambda_0 = 0, t = 45$

In diesem Szenario erhalten wir eine Überlebenswahrscheinlichkeit von 27,5% das Alter von 95 zu erreichen.

2c.Szenario: $m = 92, b = 11, \lambda_0 = 0, t = 50$

Die Wahrscheinlichkeit das Alter von 100 Jahren zu erreichen liegt mit diesen Parametern bei 12,9%.

Durch empirische Beobachtungen hat sich gezeigt, dass das Gompertz-Makeham-Modell Mortalitätsraten gut approximiert im Bezug auf Leibrenten mit Personen im Alter von 55 bis 80 Jahren. Nun ersetzen wir die diskrete Leibrente durch eine stetige (durch

GAPM beschrieben). In diesem Fall ist es uns nämlich möglich, einen Ausdruck in geschlossener Form zu erhalten für den Rentenfaktor, wenn man die Mortalität mit Hilfe von GM bestimmt und die Zinsrate konstant wählt. Für diesen Ausdruck benötigen wir die unvollständige Gammafunktion:

$$\Gamma(a, b) = \int_b^{\infty} e^{-s} * s^{a-1} ds \quad (3.2)$$

Das GAPM (Gompertz Annuity Pricing Model) einer T-jährigen Rente wird wie folgt dargestellt:

$$\bar{a}(x, T, r) = \frac{1 - e^{-rT}}{r} + \frac{b\Gamma(-b(r + \lambda_0, e^{(x-m+T)/b})}{\exp((r + \lambda_0)(m - x) - e^{(x-m)/b})} \quad (3.3)$$

r ist definiert als die stetige zusammengesetzte Zinsrate ($r := \ln(1 + R)$)

Falls Zinsrate und Mortalitätsparameter konstant bleiben, dann würden sich die Preise über die Zeit nicht ändern und von dem GAPM beschrieben werden. Dies entspricht jedoch nicht der Realität, weswegen wir dieses Modell modifizieren müssen.

4 Technische Vorgehensweise

Als Grundlage dient das zuvor besprochene Gompertz-Makeham-Gesetz

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \frac{1}{b}e^{(x-m)/b} \quad (4.1)$$

Diese Gleichung ist nur von x abhängig und nicht vom Kalenderjahr. Ein Weg, um die Gleichung der veränderten Lebenserwartungen anzupassen abhängig von der Zeit, ist die beiden Parameter m und b abhängig von z (Zeitpunkt an dem die Rente gekauft wurde) zu machen. z beginnt mit der ersten Datenaufzeichnung vor 10 Jahren mit dem Startwert $z_0 = 0$ und wird in Wochen gemessen.

$$m(z) = m_0 + m_1(z - z_0) \quad (4.2)$$

$$b(z) = b_0 + b_1(z - z_0) \quad (4.3)$$

In der Theorie könnten wir auch λ_0 zeitabhängig machen, was wir im folgenden nicht vornehmen werden, da dafür unser Datenvolumen zu gering ist und wir uns nur auf die Schlüsselwerte konzentrieren werden. Durch unsere Modifikationen lautet die Überlebenswahrscheinlichkeit eines x -jährigen, die nächsten zehn Jahre zu überleben, nun abhängig vom Kaufzeitpunkt:

$$p(x, t|z) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s + x|z) ds\right) \quad (4.4)$$

Diese Formel ist sehr generell gehalten und soll somit für jegliche Modifikation der Konstanten vom GM-Gesetz gültig sein, wie auch für andere Arten von Sterbeintensitäten. Im momentanen GM-Gesetz vereinfacht sich das Integral zu folgender Gleichung:

$$p(x, t|z) = \exp\left(-\lambda_0 t + \exp\left(\frac{x - m(z)}{b(z)}\left(1 - \exp\left(\frac{t}{b(z)}\right)\right)\right)\right) \quad (4.5)$$

Die verbleibende Lebenserwartung einer x -jährigen Person ($\mathbb{E}[T_x|z]$) ist nun auch eine

Funktion, welche bedingt auf die Kaufwoche z ist. Diesen Erwartungswert kann man durch eine kontinuierliche Rente ausdrücken.

$$\mathbb{E}[T_x|z] = \bar{a}(x, T, r = 0)$$

\bar{a} ist die Gleichung von (3.3), wobei m und b durch $m(z)$ und $b(z)$ ersetzt wurden. Dieser Erwartungswert wird sich mit der Zeit verändern, da das individuelle Alter und die Langlebigkeit einer Erhöhung unterliegen.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T_x|z+1] > \mathbb{E}[T_x|z] \wedge \mathbb{E}[T_{x+1}|z+1] > \mathbb{E}[T_x|z] - 1$$

Im Versicherungsbereich gibt es einen Effekt, der als Selektion bekannt ist. Die Personen, welche in der Woche z eine Versicherung kaufen, haben andere Lebenserwartungsparameter und somit eine andere Lebenserwartung als Personen, welche eine Rentenversicherung in der Woche z' kaufen.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T_x|z] \neq \mathbb{E}[T_x|z'] \text{ wenn } z \neq z'$$

Diese Ungleichheit ist wichtig für die Interpretation am Ende.

Das in der Arbeit verwendete Modell gruppiert Personen nach dem Jahr, in dem sie eine Rentenversicherung abgeschlossen haben. Dies unterscheidet sich zur aktuariellen Einteilung, welche Personen aufgrund ihres Todesjahres sortiert, und zu kohorten Daten, welche vom Geburtsjahr abhängen.

Desweiteren unterscheiden Aktuarer auch zwischen der generellen Bevölkerung und der gesünderen Subbevölkerung, welche eine private Rente kauft. Diese Unterscheidung hat einen starken Einfluss auf die durchschnittliche Lebenserwartung, wohingegen sie sich weniger auf die Änderungsraten auswirken sollte. Die demografischen Daten in dieser Arbeit beziehen sich auf die ganze US-amerikanische Bevölkerung.

Zurück zur Rentenpreisberechnung an sich, wo der grundlegende Rentenvertrag charakterisiert werden kann durch das Startalter des Versicherten x und die Länge des Garantiezeitraums T . Der Ausdruck für den Rentenfaktor kann durch generelle Argumente wie durch das Gesetz der großen Zahlen erhalten werden und man erhält so einen deterministischen cash-flow.

Man kann den stetig ausbezahlten Rentenfaktor auch durch zero-coupon bonds beschrei-

ben:

$$\bar{a}(x, T|z) = \int_0^T B(s)ds + \int_T^\infty B(s)p(x, s|z)ds \quad (4.6)$$

$B(s)$ beschreibt hier den Marktpreis einer zero-coupon bond Anleihe mit Fälligkeit zum Zeitpunkt s . Diese Gleichung ist gültig, unabhängig von der Wahl einer spezifischen Termstruktur im Modell. In unserem einfachen Modell ist $B(s) := e^{-srz}$ und so erhalten wir die Gleichheit zwischen $\bar{a}(x, T|z) = \bar{a}(x, T, r_z)$. \bar{a} ist auch hier definiert wie in (3.3), wobei m und b durch die zeitabhängigen Parameter $m(z)$ und $b(z)$ ersetzt werden. Zu bemerken ist, dass $m(z)$ und $b(z)$ immer an dem Tag berechnet werden, an dem es auch der Rentenfaktor wird. Die Rentenfaktoren können berechnet werden, wenn die Werte $r_z, \lambda_0, b_0, b_1, m_0$ und m_1 geschätzt wurden.

Um ein realistischeres Modell für die Bewertung von Renten zu erhalten, optimieren wir unser Modell mit einem einseitigen CIR Zinsratenmodell. Diese Änderung gewährt uns einen adäquaten Weg, um die effektive Yield-Kurve zu beschreiben, welche Versicherungsunternehmen hypothetisch verwenden, um Preise für ihre Rentenverträge zu errechnen. Mit CIR erhalten wir unsere momentane Zinsrate R_t unter einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß durch folgende Gleichung:

$$dR_t = (\alpha - R_t\beta)dt + \sigma\sqrt{R_t}dW_t \quad (4.7)$$

α, β und σ sind nichtnegative Konstanten, W_t beschreibt eine eindimensionale Brownsche Bewegung und die Initialisierungsbedingung lautet $R_0 = r_z$. R_t , ist auch nichtnegativ und ein Mittelwert-Reversionsprozess. Der erste Teil der Gleichung ist gleich zum Vasicek-Modell und σ beschreibt hier die Volatilität. Im CIR Modell ist Bond-Preis $B(s)$ in geschlossener Form erhältlich. Theoretisch könnte man die drei neuen globalen Parameter auch zeitabhängig schätzen, was im Folgendem jedoch unterlassen wird. Obwohl man den Bond-Preis kennt, sind die beiden Integrale vom Ausdruck von $\bar{a}(a, T|z)$ nicht analytisch lösbar. Darum muss auf numerische Integration ausgewichen werden, um den Rentenfaktor unter den GM-Parametern und CIR-Parametern zu erhalten.

4.1 Numerischer Vorgang

Es wird das Problem der Rentenberechnung invertiert und der beste Schätzer für die Modellparameter von den Daten, welche durch CANNEX bereitgestellt wurden, gesucht. Dafür werden wir die Levenberg-Marquardt nicht-lineare Methode des kleinsten Quadrates verwenden. Es ist eine stepping-Methode und man benötigt dazu Wissen über die

Ableitungen der Gleichung unter Beachtung der gesuchten Parameter und Initialisierungsvermutungen für die Parameter selbst. Im Falle des einfachen Modells ist dies ein Prozess, der straightforward möglich ist, und die Ableitungen können semi-analytisch bestimmt werden. Für das CIR Modell kann man dies auch semi-analytisch lösen, jedoch ist dies viel rechenintensiver, weshalb auf die drei und fünf Punkt Methode zur Berechnung der Ableitung verwendet wird. Diese Methode ist numerisch gesehen ähnlich genau, jedoch effizienter.

Die Daten der Frauen und der Männer wurden separat berechnet, womit zwei Sets von Lebenserwartungsparameter entstanden sind und zwei beinahe idente r_z -Kurven. Sollte es jedoch zu dem unplausiblen Fall kommen, dass Männer und Frauen unterschiedliche Zinssätze erhalten, werden in dieser Arbeit alle r_z -Kurven und Yields gemittelt. Die minimalen Unterschiede zwischen den zwei erhaltenen r_z -Kurven kann man vermutlich auf numerische Störungen zurückführen oder was wahrscheinlicher ist auf einen Kuppungseffekt zwischen der Lebenserwartung und der Zinsrate. Dieser Effekt ist vor allem im einfachen Modell dominant, weil der LM-Algorithmus versucht die nicht vorhandene Struktur zu kompensieren, indem er den Parametern andere Werte zuweist als diesen mit einer Termstruktur.

Im Prinzip verursacht der LM-Schätzer Varianzen von den geschätzten Parametern. In unserem Fall ist die Jacobimatrix groß und fast ausschließlich mit Nullen besetzt, weil wir für jede Woche ein neues r_z berechnen wird. Daraus folgt, dass die Jacobimatrix keinen vollen Rang besitzt und die Spalten von J beinahe linear abhängig sind. Somit ist die Varianz-Kovarianz-Matrix $(J^T J)^{-1}$ beinahe singulär, was uns das numerische Resultat zeigt und die Hauptdiagonalen können nicht den Hauptanteil der Schuld am Rechenfehler tragen. Trotzdem ist es aufgrund der folgenden drei Gründe sehr wahrscheinlich, dass die Ergebnisse stimmen. 1.) Leichte Manipulationen der Initialisierungen der Parameter führten zu ähnlichen Ergebnissen. 2.) Der Fakt, dass die Parameter b_0 und m_0 mit den aktuariellen Projektionen aus anderen Literaturen ident sind und 3.) die Tatsache, dass die r_z -Kurven und Yields vertrauenswürdige Repräsentanten des Verhaltens von Zinsraten in dem betrachteten Zeitraum sind.

5 Datengewinnung

Die Rohdaten in dieser Analyse erhalten wir durch einen 3-Stufen-Prozess.

Schritt 1: „survey“ Service von CANNEX Financial Exchanges, dies ist ein Anbieter von Daten und Analysen, welcher Beziehungen zu den meisten U.S Versicherungen hat, welche Leibrenten verkaufen und vermarkten. CANNEX hat die Möglichkeit, sich mit den internen Servern der Versicherungen zu verbinden und filtert Parameter wie Alter, Geschlecht, Zeitraum,... aus den vorher festgelegten Leibrentenangeboten. Finanzberater, Versicherungsmakler und Vermögensberater verwenden CANNEX, um aktuelle Angebote zu erhalten. Es ist die am weitest verbreitetste und umfassendste Quelle für aktuelle Leibrentenangebote. Das Unternehmen verrechnet einen kleine Beitrag für jede Umfrage von ihren Systemabonnenten, wodurch es sich finanziert. In den USA kann man Renten mit qualifizierten (Q) oder nicht-qualifizierten (NQ) Geldern kaufen. Bei CANNEX kann man beides einsehen, wobei in dieser Arbeit NQ verwendet wird aufgrund von Dateneinheiten und aus Verlässlichkeitsgründen. Aus der Sicht der Versicherungsunternehmen sind diese Angebote die Preise, zu welchen sie ihre Leibrenten obligatorisch anbieten sollten. Das CANNEX System sammelt alle Rentenangebote zur exakt selben Zeit von jeder Versicherung, wodurch wir keine hypothetischen Zahlen erhalten.

Schritt 2: CANNEX sendet wöchentlich ein File mit Daten von Alter/ und Gewährleistungsangeboten an eine Softwarefirma (QweMA Group), welche diese Firma kontrolliert, diese auf interne Konsistenz prüft und dann in einer großen Datenbank archiviert. Diese Datenbank besteht aus mehr als 2 Millionen Angeboten. The QweMA Group hat verschiedene Indizes für Rentenpreise, konstruiert mit dem Durchschnitt der erhaltenen Angebote als Grundlage. Das Unternehmen stellt Zusammenfassungen und unzählige Zeitreihen für Wissenschaftler zur Verfügung.

Schritt 3: Die Autoren erhalten wöchentlich Daten von QweMA Group für einen Zeitraum von 478 Wochen, beginnend am 15.11.2004 (inklusive 9 Wochen für welche keine Daten vorhanden sind). Die Daten bestehen aus einer durchschnittlichen Rentenquote (Durchschnitt über alle Unternehmen, wobei der kleinste und größte Wert ausgeschlossen werden) für jedes von 7 verschiedenen Atern (50-80Jahre), 6 Gewährleistungszeiträumen (0-25 Jahren) und zwei Geschlechtern.

6 Analyse der Daten

Die vorhandenen Rentendaten garantieren eine monatliche Zahlung, welche wir durch eine stetige approximieren. Für Angebote in der Woche z nehmen wir eine Zinrate von r_z an und unsere drei zuvor beschriebenen Gompertz-Makeham (GM) Parameter, welche wir mit λ_0 , $b(z)$ und $m(z)$ bezeichnet haben. Wie schon beschrieben, nehmen wir an, dass $b(z)$ und $m(z)$ linear in z sind. Insgesamt kommen wir so auf fünf Parameter. Wir invertieren das modifizierte Modell unserer zu lösenden Gleichungen und lösen dann nach der Zinrate und den Gompertz-Makeham-Parametern, wodurch wir zu den ISP (implizierte Überlebenswahrscheinlichkeit) und ILE (implizierte Lebenserwartung) auf wöchentlicher Basis kommen. Zu betonen ist, dass die Zinsraten von den gegebenen Rentenpreisen impliziert und nicht aus anderen Datenreihen bezogen werden.

Theoretisch könnte man Zinsraten auf dem Markt beobachten und für die Berechnungen verwenden. Zur Verfügung würden zum Beispiel die U.S Treasury bond curve und die Corporate bond curve stehen, aber es ist unklar, welche Kurve man am besten für Renten verwenden sollte, vor allem, da wir Rentenangebote von verschiedenen Versicherungsunternehmen bezogen haben, welche die Zinssätze verschieden festgesetzt haben könnten. Aus diesem Grund ist auch keine exogene Zinskurve die eine absolute richtige für diese Berechnungen.

Das letzte, was wir also für unsere Modellierungen wissen müssen, ist also, wie die Zinsstrukturen in unsere Rentenpreise eingehen. Anders ausgedrückt müssen wir spezifizieren, welche Annahmen Versicherungsunternehmen über die künftige Entwicklung der Zinsstrukturen angenommen haben. Dazu gibt es zwei Herangehensweisen. Die erste ist ein einfaches Modell und die zweite ein Realistisches. Für das einfache Modell nehmen wir an, dass Versicherungen eine flat-term Struktur verwenden. Das soll heißen, dass wenn einmal die wöchentlichen Parameter geschätzt wurden, wir nur noch in Formel (3.3) einsetzen müssen. Dies nennen wir ab sofort unser einfaches Modell. Dieses Modell soll einen groben Einblick geben, wie sich die implizierende Lebenserwartung verhält.

Im zweiten, vielversprechenderen Modell (=komplexes Modell) nehmen wir an, dass Versicherungsunternehmen eine funktionale Form verwenden, bekannt als Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Modell. Dieses gibt uns zusätzliche drei Parameter (α , β , σ), welche wir

als konstant über die betrachteten zehn Jahre annehmen. Diese Parameter schätzen wir ebenfalls aus unseren Datensätzen mit Rentenpreisen, gleichzeitig mit unseren GM-Parametern und unserer wöchentlichen Zinsrate.

Abbildungen 6.6 und 6.7 geben eine Zusammenfassung von unseren 5 Parametern unter dem einfachen und dem komplexen Modell. In den Tabellen sind λ_0 (= die Rate der Unfälle), die Modal- und Skalierungsparameter m_0 und b_0 , sowie die Änderungsraten der beiden zuvor genannten Parameter, m_1 und b_1 zu finden, angegeben mit ihren Punktschätzern. Also zum Beispiel im einfachen Modell (6.6) ist der implizierte Modalwert im Jahr 2004 gegeben durch 93 Jahre bei Frauen und 88 Jahren bei Männern.

Abbildung 6.7 gibt die Punktschätzungen des komplexen Modells an. In diesem Modell ist der Modalwert bei Männern gegeben durch 89 Jahre und bei Frauen durch 93 Jahre. Anzumerken ist, dass wenn einmal ein realistischeres Modell in den Preisprozess miteinbezogen wird, dann steigt der Modalwert für Männer höher an als dies für Frauen der Fall ist. Dies stimmt mit demografischen Daten überein. Wenn man die beiden Modelle miteinander vergleicht, fällt zu aller erst auf, dass im realistischeren Modell die Lebenserwartungen geringer sind als im einfachen. Desweiteren sieht man, dass auch der unfallbedingte Tod im komplexeren Modell niedriger ist als im zweiten Modell. Die Parameter b_0 , b_1 und m_1 verhalten sich in beiden Varianten ähnlich und es ist ein fallender Trend von m und b mit steigender Wochenzahl zu verzeichnen. Auffallend ist auch, dass die Varianz bei Männern höher ist als beim weiblichen Geschlecht.

Im komplexen Modell, in dem wir eine CIR-Struktur annehmen, schätzen wir zusätzlich zur momentanen Zinsrate r_z drei Parameter, welche in Tabelle 2 aufgezeichnet sind. Man kann feststellen, dass es hier keinen nennenswerten Unterschied zwischen den Geschlechtern gibt und es sich nicht auswirkt, ob ein Mann oder eine Frau eine bessere Rate bekommt. Es spiegelt eher die numerischen Störungen wider und das unser Modell nicht perfekt zwischen Zinsrate und Mortalität trennt. In Abbildung 6.1 ist das wöchentlich geschätzte Yield r_z im einfachen Modell dargestellt. Diese Zahlen sollte man als Durchschnittswerte betrachten, welche Versicherungsunternehmen verwendet haben zur Rentenberechnung. Im Zeitraum von 2004-2013 war die höchste Rate mit 5.5% im Oktober 2008 und die niedrigste mit 2.5% in der zweiten Hälfte von 2012 zu verzeichnen. Abbildung 6.2 zeigt die implizierte Zinsrate an diversen Punkten auf der Yield-Kurve für unseren betrachteten Zeitraum. Wir rufen uns in Erinnerung, dass im CIR Modell, welches unseren Schätzungen unterliegt (für jede Woche in unseren Datensätzen), die momentane Zinsrate zusammen mit den drei globalen Parametern α , β und σ eine ganze Yield-curve beschreibt. Die Raten sind für die Dauer von 1 Jahr, 10 Jahren und 30 Jahren gezeichnet. Die Abbildung 6.1 kann man als einen gewichteten Durchschnitt dieser

Zahlen sehen. Kommen wir zu den Hauptresultaten. Betrachten wir zu aller erst die implizierenden Überlebenswahrscheinlichkeitsgrafiken von Frauen (Abbildung 6.4) und Männern (Abbildung 6.5). Diese Abbildungen werden unter der Verwendung der Mortalitätsparameter der Gompertz-Makeham-Modell gewonnen. Die beiden zuvor genannten Grafiken zeigen ähnliche Ergebnisse. Die Kurven zeigen uns, wie lange der Markt denkt, dass ein Rentenbezieher leben wird bezüglich der implizierenden wöchentlichen Überlebenswahrscheinlichkeit, basierend auf dem komplexen Modell. Beide Kurven zeigen eine steigende Lebenserwartung im Laufe der Zeit und veranschaulichen, dass je älter man wird, desto wahrscheinlicher ist, dass man das 90. Lebensjahr erreicht. Auch hier sieht man wieder deutlich, dass Frauen bessere Erwartungen haben als Männer. Für konkrete Zahlen im Bezug auf die steigende Lebenserwartung betrachten wir nun Abbildung 6.9, welche die implizierende Lebenswahrscheinlichkeit bis zum Alter 90 behandelt, beginnend mit den Altern 55, 65 und 75 zu ausgewählten Zeitpunkten. Besondere Beachtung sollte man dem Anstieg von September 2004 bis November 2013 schenken. Zum Beispiel hatte ein 75-jähriger 2004 eine 40.1% Wahrscheinlichkeit, das Alter von 90 Jahren zu erreichen. Im Jahr 2013 ist dieser Wert auf 46.1% angestiegen. Wenn man den aktuellen Trend auf das Jahr 2020 hochrechnet, dann hat ein 75-jähriger Mann eine 49.7% Chance 90 zu werden. Frauen im gleichen Alter haben sogar eine 54.3% Wahrscheinlichkeit, dies zu schaffen. In Abbildung 6.10 wiederholen wir die Berechnungen für die implizierende Lebenserwartung wieder für das Alter von 55, 65 und 75 Jahren. Sehen wir uns dazu den September 2004 an, wo ein 75-jähriger Mann eine verbleibende Lebenserwartung von 13.09 Jahren hatte. Im September 2013 ist diese auf 14.28 Jahre angestiegen. Dies ist ein durchschnittliches Wachstum von 6.78 Wochen/Jahr. In Abbildung 6.11 vergleichen wir den marktbasieren Anstieg mit demografischen Daten, welche grob übereinstimmen. In Abbildung 6.12 sehen wir, dass, wenn die Zinsrate auf dem Niveau vom September 2004 geblieben wäre, die Rentenfaktoren gestiegen und in weiterer Folge die Auszahlungen gesunken wären aufgrund der steigenden Lebenserwartung. Zum Beispiel hätte ein 65-jähriger Mann 13.15\$ 2013 bezahlt, um lebenslang einen Dollar ausbezahlt zu bekommen. Dies vergleichen wir mit dem Jahr 2004, in welchen er nur 12.73\$ gezahlt hätte. Somit haben wir einen Anstieg von 3,3% zu verzeichnen.

6.1 Grafiken und Tabellen zur Datenanalyse



Abbildung 6.1: Geschätzte Werte für r_z im einfachen Modell



Abbildung 6.2: Yields unterschiedlicher Dauer mit CIR-Struktur

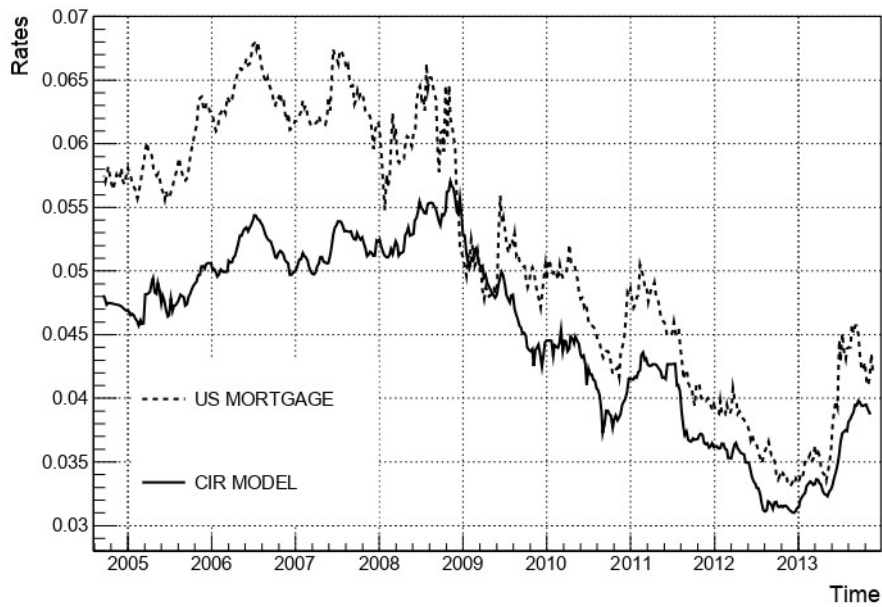


Abbildung 6.3: Vergleich von implizierten 30 jährigen Yield und 30 jähriger Hypothekens-
rate in den USA

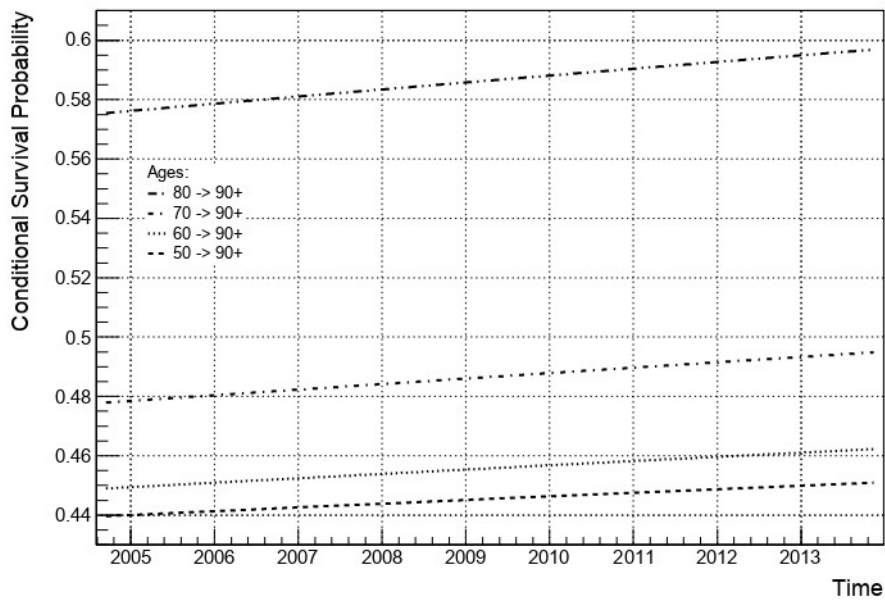


Abbildung 6.4: ISP berechnet im komplexen Modell für Frauen

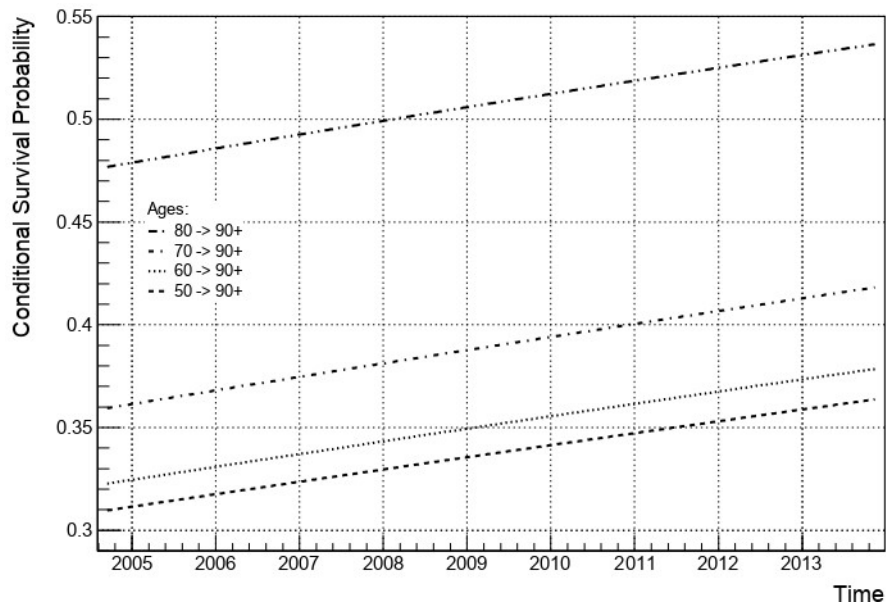


Abbildung 6.5: ISP berechnet im komplexen Modell für Männer

	λ_0	b_0	b_1	m_0	m_1
female	1.622×10^{-3}	9.058	4.716×10^{-3}	92.60	1.044×10^{-3}
male	4.578×10^{-4}	10.84	4.268×10^{-3}	88.47	2.322×10^{-3}

Abbildung 6.6: Punktschätzer für GM-Parameter im einfachen Modell

	λ_0	b_0	b_1	m_0	m_1
female	6.724×10^{-10}	9.174	1.467×10^{-3}	91.68	8.201×10^{-4}
male	2.376×10^{-10}	10.37	1.127×10^{-3}	88.13	3.061×10^{-3}

Abbildung 6.7: Punktschätzer für GM-Parameter im komplexen Modell

	α	β	σ
female	1.804×10^{-3}	7.210×10^{-3}	4.093×10^{-2}
male	1.731×10^{-3}	3.731×10^{-3}	4.341×10^{-2}

Abbildung 6.8: Punktschätzer für CIR-Parameter im komplexen Modell

Date	55		65		75	
	Female	Male	Female	Male	Female	Male
September 2004	0.443	0.315	0.460	0.336	0.512	0.401
November 2013	0.455	0.369	0.474	0.393	0.531	0.461
January 2020 (projected)	0.463	0.404	0.484	0.423	0.543	0.497

Abbildung 6.9: Implizierende Überlebenswahrscheinlichkeit bis zum Alter 90 im komplexen Modell

THE IMPLIED LONGEVITY CURVE

35

Date	55		65		75	
	Female	Male	Female	Male	Female	Male
September 2004	32.13	28.72	23.10	20.30	15.08	13.09
November 2013	32.36	29.98	23.48	21.56	15.61	14.28
January 2020 (projected)	32.51	30.83	23.72	22.41	15.94	15.09

Abbildung 6.10: Implizierende Überlebenserwartung bis zum Alter 90 im komplexen Modell

Methodology	Female			Male		
	55	65	75	55	65	75
market price	1.31	2.16	3.02	7.18	7.18	6.78
demographic	4.44	3.61	2.64	7.78	5.98	3.52

Abbildung 6.11: Wochenverbesserung der Lebenserwartung im komplexen Modell

Date	55		65		75	
	Female	Male	Female	Male	Female	Male
September 2004	0.443	0.315	0.460	0.336	0.512	0.401
November 2013	0.455	0.369	0.474	0.393	0.531	0.461
January 2020 (projected)	0.463	0.404	0.484	0.423	0.543	0.497

Abbildung 6.12: Implizierende Überlebenswahrscheinlichkeit bis zum Alter 90 im komplexen Modell

Date	55		65		75	
	Female	Male	Female	Male	Female	Male
September 2004	16.42	15.44	13.87	12.73	10.56	9.47
November 2013	16.39	15.71	13.93	13.15	10.76	10.05
January 2020 (projected)	16.38	15.88	13.97	13.42	10.89	10.42

Abbildung 6.13: Rentenpreis (\$) im komplexen Modell

7 Conclusion

7.1 Zusammenfassung der Resultate

Über die Jahre sind die Rentenauszahlungsraten im Mittel gefallen in den USA. Dazu ein Beispiel: Eine 65-jährige Person erhält 2008 ein Einkommen von 680\$ im Monat an Leibrente (garantiert für 10 Jahre), basierend auf einer Nettoeinmalprämie von 100.000\$. Betrachtet man die Rente 2013 (wobei die gleiche NEP gezahlt wurde), dann erhält der Versicherungsnehmer nur mehr 550\$ pro Monat. Dies ist eine Verminderung von 19%. In Wirklichkeit ist dies noch ein viel größerer Verlust für den Versicherten, da die Lebenserhaltungskosten in den letzten Jahren gestiegen sind. Somit wird eine sichere Rente immer teurer. Die konventionelle Erklärung dafür ist, dass zum einen die Zinsraten sich ähnlich verhalten. Betrachtet man die Langzeit-Zinssätze über die letzten Jahre hinweg, sieht man, dass diese von 5% auf 8% stiegen, um wieder auf 3% zu fallen.

Zum anderen ist die Langlebigkeit der Rentenbezieher ein wichtiger Teil der Erklärung. Dadurch, dass ein höheres Alter erreicht werden kann, müssen Renten länger gezahlt werden, was in zu einem niedrigeren cash flow führt. Manche Laien denken, dass Sterbetafeln, welche in Versicherungen Verwendung finden, nicht durch neue Studien modifiziert und nur alle paar Jahre angepasst werden. Diese hier beschriebene Studie zeigt etwas anderes, da sie sich auf Marktpreise bezieht und kleine, subtile Änderungen von Woche zu Woche feststellen kann. Methodisch kann man die wöchentliche Änderung der Rentenauszahlungen auf zwei Komponenten aufteilen. Zum einen auf die Zinsratenänderungen und zum anderen auf die biologischen und demografischen Änderungen. Dies ermöglicht, den relativen Einfluss von beiden Komponenten festzustellen.

Unsere Methoden erlauben es uns festzustellen, dass der Markt 2004 erwartete, dass ein durchschnittlicher 75-jähriger Mann ein Alter von 88 Jahren und 1 Monat erreichen wird. Vergleichsweise wurde von einem gleichaltrigen Mann 2013 erwartet, erst mit 89 Jahren und 3 Monaten zu sterben, was eine Steigerung von 1,5 Jahren darstellt innerhalb von 10 Jahren.

Setzt sich dieser Trend fort, dann würde im Jahr 2020 ein 75 Jahre alter Mann, der in diesem Jahr eine Rente kauft, 90 Jahre alt werden und dies ist unabhängig von der

Zinssituation zu diesem Zeitpunkt. In den Abbildungen 6.9 und 6.10 werden ähnliche Ergebnisse gezeigt für diverse Alter, aber die Kernaussage bleibt auch hier die gleiche: Die Rentenpreise implizieren einen Anstieg der Lebenserwartung im Laufe der Jahre. Festzuhalten ist auch, dass das CIR Modell gut verwendet werden kann, um den latenten Zinsprozess zu kontrollieren, wenn man versucht die implizierte Langlebigkeit zu lösen. Weiters ist anzumerken, dass die Lebenserwartung von Männern sich mehr verbessert als die der Frauen. Anders ausgedrückt sagen uns Rentenpreise, dass obwohl die Sterblichkeit bei Männern nach wie vor höher ist als die der Frauen, sie bei beiden sinken werden und die Verbesserung beim männlichen Geschlecht höher ist als die beim weiblichen.

7.2 Praktische Auswirkungen

Es gibt zwei Gruppen, die im Pensionsbereich tätig sind, für welche die Ergebnisse dieser Arbeit besonders wichtig sind, aufgrund ihrer Resultate und Methodik.

Zu aller erst ist zu erwähnen, dass es einen wachsenden Markt gibt für Pensionen buy-outs und buy-ins, wo DB-plan Sponoren (defined benefit pension plan) ihre Verbindlichkeiten reduzieren durch bulk annuities und Lebensversicherungsarrangments. Diese Deals hängen offensichtlich von Mortalität und Lebenserwartung ab und Aktuare bestimmen diesen Prozess. Also können in dieser Seminararbeit verwendeten Methodiken von Finanzanalytikern als eine unabhängige Quelle verwendet werden, um herauszufinden, was unterschiedliche Preise über die Lebenserwartungen aussagen.

Die zweite Gruppe bilden die Vermögensverwalter. Finanzberater/Vermögensverwalter müssen ihre Klienten in umfassender beraten, als nur in dynamischen Assets-Veranlagungen oder einem Mix von Stocks und Bonds in einem vielfältigen Portfolio. Wenn die Klienten nach einer Pension verlangen, dann brauchen sie einen Rat für ein optimale Produktauswahl, was eine Mischung aus Pensionsrenteninstrumenten und konventionellen Lösung ohne Versicherung ist. Sie brauchen auch eine Beratung bezüglich des optimalen Zeitpunkts, bedingt auf Alter und draw-down Rate, zu dem sie investieren sollen. All diese Entscheidungen in Punkto Rente sind eng mit der Lebenserwartung verknüpft. Ein Kunde, welcher ein hohes Alter erwarten kann, sollte später in Pension gehen, sich ein größeres nest egg“ aufbauen und weniger in Renten und Versicherungen investieren. Das sind die normativen Implikationen der ökonomischen Lebenszyklustheorie. Allgemein sollte der Kauf von Renten vermieden werden in einer Zeit, in welcher niedrige Zinsraten herrschen. Personen, die ihre Rentenauszahlung zum Beispiel um fünf Jahre verschieben (also die Auszahlungen erst mit 73 anstatt 68 beginnen lassen) schwimmen

so gegen die steigenden Lebenserwartungen. Zwar ist es wahrscheinlich, dass aufgrund der Niedrigzinslage und der momentanen Wirtschaft Zinsraten wieder steigen werden und somit die Rentenzahlungen, doch sind dies reine Spekulationen, dass die erhöhten Zinsraten die verbesserte Mortalität ausgleichen können. Alles in allem lässt sich festhalten, dass der Aufschub vom Kauf einer Rente einen Gesundheitsvorteil hat, aber sich schlecht auf den Wohlstand auswirkt.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Aktuarielles Model für Rentenpreis invertiert	4
6.1	Geschätzte Werte für r_z im einfachen Modell	17
6.2	Yields unterschiedlicher Dauer mit CIR-Struktur	17
6.3	Vergleich von implizierten 30 jährigen Yield und 30 jähriger Hypotheks- rate in den USA	18
6.4	ISP berechnet im komplexen Modell für Frauen	18
6.5	ISP berechnet im komplexen Modell für Männer	19
6.6	Punktschätzer für GM-Parameter im einfachen Modell	19
6.7	Punktschätzer für GM-Parameter im komplexen Modell	19
6.8	Punktschätzer für CIR-Parameter im komplexen Modell	19
6.9	Implizierende Überlebenswahrscheinlichkeit bis zum Alter 90 im komple- xen Modell	20
6.10	Implizierende Überlebenserwartung bis zum Alter 90 im komplexen Modell	20
6.11	Wochenverbesserung der Lebenserwartung im komplexen Modell	20
6.12	Implizierende Überlebenswahrscheinlichkeit bis zum Alter 90 im komple- xen Modell	21
6.13	Rentenpreis (\$) im komplexen Modell	21

Literaturverzeichnis

- [1] Moshe A. Milevsky, Thomas S. Salisbury and Alexander Chigodaev *The implied longevity curve: How long does the market think you are going to live?*.
J. Investment Consulting 17, 2016

- [2] George Jiang, Moshe A. Milevsky and S. David Promislow *The Term Structure of Mortality-Contingent Claims: Some Canadian Evidence*
York University, 2001