SEMINARARBEIT

Paul Wilmott
introduces
QUANTITATIVE FINANCE

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Peidong Cao

Abstract

Diese Seminararbeit befasst sich mit dem Buch "Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance". Weil das Buch sehr umfangreich ist, fokussiert sich die Arbeit auf das erste Kapitel („Products and Markets“) und das sechste Kapitel („The Black-Scholes Model“). Im ersten Kapitel „Products and Markets“ werden einige allgemeine Definitionen und Normen vorgestellt, die an den Finanzmärkten üblich sind. Hier gibt es wenig technisches Wissen, und das einzige technische Konzept ist der „Zeitwert des Geldes“. Als erstes Beispiel wird "No-Arbitrage"behandelt. Dies ist wichtig, da es Teil der Grundlagen der Derivatentheorie ist.

Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit der Black-Scholes Gleichung. Das ist ein finanzmathematisches Modell zur Bewertung von Finanzoptionen, das von Fischer Black und Myron Samuel Scholes 1973 (nach zweimaliger Ablehnung durch renommierte Zeitschriften) veröffentlicht wurde und als ein Meilenstein der Finanzwirtschaft gilt.

Der Grundgedanke ist, aus dem Derivat und der Aktie ein risikoloses Portfolio zu konstruieren. „Risikolos“ meint in diesem Zusammenhang, dass der Wert des Portfolios für kurze Zeiträume, gleichbedeutend mit kleinen Änderungen des Aktienkurses, nicht vom Kurs der Aktie abhängt.

Diese Gleichung ist unter den gegebenen Annahmen für alle Derivate gültig, die sich auf Grundlage des Preisprozesses für S definieren lassen. Die Art des Derivats, für das die Gleichung gelöst werden soll, bestimmt die Randbedingungen für die Differentialgleichung.

Inhaltsverzeichnis

1 Products and Markets

1.1 Aktien

Die zugrunde liegenden Finanzinstrumente sind Eigenkapital und Aktien. Die sind ein kleiner Teil des Eigentums eines Unternehmens. Wenn Sie ein neues Produkt entwickeln oder eine neue Dienstleistung anbieten möchten, können Sie die zukünftigen Vorteile des Projekts durch den Verkauf von Unternehmensanteilen bekommen. Der Investor des Unternehmens gibt Ihnen Bargeld und Sie geben ihm im Gegenzug einen Vertrag, in dem angegeben ist, wie viel von dem Unternehmen er besitzt. Die Aktionäre, denen das Unternehmen gehört, haben dann ein Mitspracherecht bei der Geschäftsführung, und technisch gesehen sollen die Direktoren des Unternehmens im besten Interesse der Anteilseigner handeln.

Sobald aus dem kleinen Unternehmen ein großes Unternehmen geworden ist, können Anteile des Unternehmens an mehrere Investoren oder sogar an die Öffentlichkeit verkauft werden. Der letzte Punkt für das Wachstum des Unternehmens ist die Notierung von Aktien an einer regulierten Börse, damit Aktien frei gekauft oder verkauft werden können und das Kapital effizient und zu den niedrigsten Kosten umgesetzt werden kann.

Dividenden Der Eigentümer der Aktie besitzt theoretisch einen Teil der Firma. Dieser Besitz kann nur in Bargeld umgewandelt werden, wenn er so viele Aktien besitzt, dass er das Unternehmen übernehmen und alle Gewinne für sich behalten kann. Das ist für die meisten von uns unrealistisch. Für den durchschnittlichen Anleger ergibt sich der Wert des Aktienbesitzes aus den Dividenden und dem Wertzuwachs der Aktie. Dividenden sind Kapitalzahlungen, die vierteljährlich oder halbjährlich an den Inhaber der Aktie ausgezahlt werden.

1.2 Wirtschaftsgut

Darunter verstehen wir in der Regel Edelmetalle, Öl, Lebensmittel usw. Die Preise dieser Produkte sind nicht vorhersehbar, zeigen jedoch häufig saisonale Schwankungen. Knappheit des Produktes führt zu höheren Preisen. Waren werden in der Regel von Menschen gehandelt, die den Rohstoff nicht benötigen. Der meiste Handel findet auf der Terminbörse statt und es werden Deals zum Kauf oder Verkauf der Ware zu einem späteren Zeitpunkt abgeschlossen. Das Geschäft wird dann abgeschlossen, bevor die Ware geliefert werden soll.

1.3 Währungen

Ein anderer finanzieller Begriff, der diskutiert wird, ist der Wechselkurs (zu dem eine Währung gegen eine andere ausgetauscht werden kann), den man auf dem Devisenmarkt (foreign exchange oder Forex genannt) verwendet. Einige Währungen sind aneinandergebunden, andere dürfen frei schwanken. Unabhängig davon, welche zwei Währungen ausgetauscht werden, muss der Wechselkurs immer konsistent sein. Wenn es möglich ist, Dollar gegen Pfund und dann die Pfund gegen Yen zu tauschen, impliziert dies eine Beziehung zwischen dem Wechselkurs Dollar / Pfund, Pfund / Yen und Dollar / Yen. Wenn diese Gleichheit unterbrochen ist, können Arbitrage-Gewinne erzielt werden, indem die Fehlbewertung ausgenutzt wird. Obwohl die Wechselkursschwankungen nicht vorhersehbar sind, besteht ein Zusammenhang zwischen den Wechselkursen und den Zinssätzen in beiden Ländern. Wenn der Zinssatz für US-Dollar angehoben wird, während der Zinssatz für Pfund unverändert bleibt, erwarten wir, dass das

Pfund für eine Weile gegenüber dem Dollar abwertet. Die Zentralbanken können die Zinssätze zu einem gewissen Grad als Instrument zur Manipulation der Wechselpreise verwenden.

1.4 Indizes

Um zu messen, wie sich die Börse insgesamt entwickelt, wurden die Aktienindex generiert. Ein typischer Index setzt sich durch Gewichtung ausgewählter Aktien oder durch einen Korb repräsentativer Aktien zusammen. Diese ausgewählten Aktien können den gesamten Markt darstellen. Beispielweise die Standard & Poor's 500 in den USA oder the Financial Times Stock Exchange index im UK.

1.5 Die zeitliche Wert des Geldes

Das grundlegendste Konzept im Finanzwesen ist der Zeitwert des Geldes. 1000 Dollar sind heute wertvoller als 1000 Dollar ein Jahr später, weil wir mit 1000 Dollar jetzt viel mehr als ein Jahr später anfangen können. Wir können in Aktien oder neue Unternehmen investieren. Wenn diese immer noch zu riskant sind, dann können wir das Geld an jemanden leihen, der bereit ist, das Risiko einzugehen und uns den Dollar mit ein wenig zusätzlichem Zins zurückgibt. Das ist genau, was die Bank tut. Sie leiht ihr Geld aus und investiert es auf mehrere Arten und Weisen. Indem sie jedoch ihr Risiko auf viele Anlagen verteilt, wird ihr Gesamtrisiko reduziert. Die Bank kann sich von vielen Menschen Geld leihen, deshalb kann sie auf eine Weise investieren, die einzelne Personen normalerweise nicht können. Die Banken konkurrieren um das Geld der Kunden, indem sie hohe Zinssätze anbieten.

1.6 Festverzinsliche Wertpapiere

Wenn Sie Geld an eine Bank leihen, können Sie wählen, wie lange Sie Ihr Geld binden und welche Art von Zinssatz Sie erhalten. Wenn Sie sich für eine befristete Einzahlung entscheiden, bietet die Bank an, einen festen Zinssatz für die Dauer der Einzahlung festzulegen, beispielsweise einen Monat, sechs Monate oder ein Jahr. Der Zinssatz muss nicht für jeden Zeitraum gleich sein, und im Allgemeinen ist der Zinssatz umso höher, je länger das Geld gebunden ist. Es gibt zwei Möglichkeiten, die Zinsen für Finanzanleihen zu berechnen: fest und variabel. Verzinsliche Staatsanleihen zahlen normalweise alle sechs Monate oder jedes Jahr einen Betrag aus. Dies ist der Kupon und wird häufig mit einem festen Zinssatz verzinst. Am Ende ihrer festen Laufzeit erhält der Inhaber noch letztmalig Zinsen und den zur Berechnung der Zinsen herangezogenen Kapitalbetrag. Ein Zinsswap ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien über den Austausch unterschiedlicher Zinszahlungen während eines im Vertrag fixierten Zeitraums. Die Höhe der Zinszahlung ergibt sich aus dem der jeweiligen Zinsperiode zugrunde liegenden Zinssatz und dem Kapitalbetrag, der nicht ausgetauscht wird.

1.7 Forwards und Futures

Forward contract Ein Forward contract ist eine Vereinbarung, bei der eine Partei verspricht, einen Vermögenswert zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft und zu einem bestimmten Preis von einer anderen Partei zu kaufen. Bis zum Abrechnungsdatum oder Vertragsablauf gibt es keine Geldtransaktionen. Die Vertragsbedingungen verpflichten dazu, den Asset zum Abrechnungsdatum zu kaufen. Der Asset kann eine Aktie, eine Ware oder eine Währung sein. Der Betrag, der zum Zeitpunkt des Abrechnungsdatums für den Asset gezahlt wird, wird als Abrechnungspreis bezeichnet. Dieser Preis wird zum Zeitpunkt des Abschlusses des Forward contracts festgesetzt, und verleiht dem Forward contract zunächst den Wert Null. Vor Ablauf des Vertrages ändert sich jedoch der Wert des Forward contracts. Der Wert zum Anfangszeitpunkt beträgt Null, und der Wert am Fälligkeitsdatum ist die Differenz zwischen dem Abrechnungspreis des Vertrags und dem aktuellen Wert des Vermögenswerts.

Futures contract Ein Futures contract ist ähnlich wie ein Forward contract. Futures contracts werden in der Regel über eine Börse gehandelt, die die Vertragsbedingungen vereinheitlicht. Der Gewinn oder Verlust aus dem Futures contract wird täglich berechnet und die Differenz dieses Wertes wird von einer Partei an die andere gezahlt. Daher erfolgt bei Futures contracts eine schrittweise Auszahlung der Mittel von der Initiierung bis zur Fälligkeit. Da die Wertänderung täglich abgerechnet wird, beträgt der Wert eines Futures contracts zu jedem Zeitpunkt seiner Laufzeit Null. Der Futures Preis ändert sich jeden Tag, muss aber jedoch bis zum Fälligkeitsdatum mit dem gekauften Vermögenswert identisch bleiben.

Forwards und Futures haben zwei Hauptnutzungen: Spekulation (speculation) und Absicherung (hedging). Wenn man optimistisch ist, könnte man einen Forward contract oder einen Futures contract kaufen, um einen Gewinn zu erzielen. Wenn die Vorhersage richtig ist, wird man jeden Tag oder am Fälligkeitsdatum eine Menge Geld verdienen. Das ist Spekulation und ist sehr riskant. Hedging ist das Gegenteil, es ist Risikovermeidung. Zum Beispiel, wenn man nach sechs Monaten eine Auszahlung in Yen erwartet, man sich aber in den USA befindet, könnte man einen Futures contract abschließen, um einen garantierten Wechselkurs für die Höhe des Yen-Einkommens festzulegen. Sobald der Wechselkurs gesperrt ist, wird das Einkommen nicht mehr von den Schwankungen des USD / Yen Wechselkurses beeinflusst, aber gleichzeitig verliert man den Gewinn, der durch die Aufwertung des Yen erzielt werden könnte.

1.8 More about futures

Futures werden normalweise über eine Börse gehandelt. Dies bedeutet, dass es sich um hochliquide Finanzinstrumente handelt, die zahlreichen Regeln und Vorschriften unterliegen. Hier sind einige Anmerkungen zu Futures contracts.

Available asset Ein Futures contract gibt den Asset an, in den investiert wird. Dies ist besonders interessant, wenn es sich bei dem Asset um ein Naturprodukt handelt, da Art und Qualität des zu liefernden Assets unterschiedlich sein können. Öl, Zucker, Orangensaft, Weizen usw. Futures contracts stellen strenge Bewertungsstandards für diese Waren dar.

Margin Der Wert von Futures contracts wird täglich abgerechnet, was auch als „marking to market" bezeichnet wird. Um einen Ausfall zu vermeiden, der durch Zahlungsunfähigkeit oder -unwilligkeit einer Partei verursacht wird, müssen beide Parteien einen bestimmten Betrag einzahlen, um die Wertänderung ihrer Positionen auszugleichen. Dieses Geld wird auf ein Margin Konto eingezahlt. Da die Position täglich zum Marktpreis bewertet wird, wird Geld in diesem Margin Konto eingezahlt oder davon abgezogen. Margin gibt es in Zwei Formen, den Initial Margin und den Maintenance Margin. Der Initial Margin ist der bei Vertragsbeginn eingezahlte Betrag. Der als Margin gehaltene Gesamtbetrag muss über einem vorgeschriebenen Maintenance Margin bleiben. Sollte dieser Wert jemals unterschritten werden, muss mehr

Geld (oder gleichwertig in Anleihen, Aktien usw.) eingezahlt werden. Die Höhe dieses Margins variiert von Markt zu Markt.

Commodity futures Wenn es sich um Verbrauchsartikel wie Öl handelt, kann der Inhaber bei jedem Produktionsprozess, an dem er beteiligt ist, sofort davon profitieren. Dies kann man bei der Berechnung des Futures Preises nicht ignoriert werden. Das bringt den Futures Preis wieder nach unten. Der Gewinn, der von denjenigen erziehlt wird, die solche Produkte halten, kann als Convenience Yield c gemessen werden.

$$F = S(t)e^{(r+s-c)(T-t)}$$

Hier sieht man, wie sich die Lagerkosten und der Convenience Yield auf den Preis auswirken. Markt heißt Backwardation:

$$F < S(t)e^{r(T-t)}$$

Markt heißt Contango:

$$F > S(t)e^{r(T-t)}$$

FX Futures Es gibt keine Probleme mit der Lagerung, wenn der Vermögenswert eine Währung ist. Wir müssen das No-Arbitrage Ergebnis ändern, um die Zinsen für die Fremdwährung r_f zu berücksichtigen.

$$F = S(t)e^{(r-r_f)(T-t)}$$

Index Futures Futures contracts auf Aktienindizes werden in bar abgerechnet. Auch hier gibt es kein Lagerproblem, aber jetzt sind Dividenden zu bewältigen. Da die Dividenden eine ähnliche Rolle wie die Zinsen für die Fremdwährung in FX Futures spielt, lässt sich die Formel so darstellen.

$$F = S(t)e^{(r-q)(T-t)}$$

Hier ist q die Dividendenrendite.

2 The Black-Scholes Model

2.1 Einführung

In diesem Kapitel werden die Grundbausteine der Derivatentheorie beschrieben und erklärt. Diese Bausteine sind Delta-Hedging und No-Arbitrage. Sie bilden eine mäßig solide Grundlage für das Thema und haben sich seit 1973, als die Ideen veröffentlicht wurden, gut bewährt.

Wir beginnen in diesem Kapitel mit dem stochastischen Differentialgleichungsmodell für das Gleichungsmodell für Aktien. Und nutzen die Korrelation zwischen diesem Vermögenswert und seiner Option, um ein perfekt risikofreies Portfolio zu erstellen. Wir erzählen dann No-Arbitrage, die Rendite aller risikofreien Portfolios mit dem risikofreien Zinssatz gleichzusetzen, dem sogenannten "no free lunchÄrgument.

Dieses Kapitel ist mehr theoretisch, aber alle hier enthaltenen Ideen werden regelmäßig in die Praxis umgesetzt. Auch wenn gezeigt werden kann, dass alle Annahmen mehr oder weniger problematisch sind, ist das Black-Scholes-Modell sowohl in der Theorie als auch in der Praxis von grundlegender Bedeutung.

2.2 Ein ganz besonderes Portfolio

Der Wert einer Call-Option wird eindeutig von verschiedenen Parametern im Vertrag abhängen, z.B. dem Ausübungspreis E und der Verfallszeit $T–t$; T ist das Verfallsdatum und t ist die aktuelle Zeit.

Der Wert hängt auch von den Eigenschaften des Vermögenswerts selbst ab, wie z. B. dem Preis, seiner Drift und seiner Volatilität sowie dem risikofreien Zinssatz. Der Optionswert wird geschrieben als:

$$V(S, t; \sigma, \mu; E, T; r)$$

Es ist zu beachten, dass die Semikolons verschiedene Arten von Variablen und Parametern trennen.

- S und t sind Variablen.
- σ und μ sind Parameter, die mit dem Preis des Basiswerts verbunden sind.
- E und T sind mit dem Vertragsinhalt verbundene Parameter.
- r ist der Parameter, der der Asset-Quotierungswährung zugeordnet ist.

Den Optionswert wird durch $V(S, t)$ bezeichnet. Eine einfache Beobachtung ist, dass der Wert der Call-Option ebenfalls steigt, wenn der Preis des Assets steigt, und das Gegenteil trifft auch zu. Dies ist klar, denn je höher der Fälligkeitswert des Assets ist, desto länger wird die Call-Option profitabler. Dies ist ein Beispiel für die Korrelation zwischen zwei Finanzinstrumenten. In diesem Fall ist die Korrelation positv. Ein Put-Option und der Asset haben eine negative Korrelation. Diese Zusammenhänge können genutzt werden, um ein ganz besonderes Portfolio aufzubauen.

Π wird verwendet, um den Wert eines Portfolios aus einer Option und Δ-mal Asset zu bezeichnen:

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S \tag{1}$$

Wobei $V(S,t)$ ist die Option und ΔS ist der Asset. Die Menge Δ wird im Moment eine konstante Menge unserer Wahl sein. Wir gehen davon aus, dass der Asset einem logarithmischen Random Walk folgt

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX. \tag{2}$$

Die Änderung des Portfoliowerts ist einerseits auf die Änderung des Optionswerts und anderseits auf die Änderung des Assets zurückzuführen:

$$d\Pi = dV - \Delta dS. \tag{3}$$

Dabei ist zu beachten, dass sich Δ während des Zeitschritts nicht geändert hat; wir haben die Änderung in S nicht erwartet. Mit Itō Lemma erhält man für die Änderungen des Wertes V eines Derivats die Formel:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt. \tag{4}$$

Somit ändert sich das Portfolio:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS. \tag{5}$$

2.3 Beseitigung des Risikos: Delta Hedging

Die rechte Seite von (5) enthält zwei Arten von Begriffen, den deterministischen und den zufälligen. Die deterministischen Terme sind diejenigen mit dem dt, und die zufälligen Terme sind diejenigen mit dem dS. Wenn wir für den Moment so tun, als ob wir V und seine Ableitungen kennen, dann wissen wir alles über die rechte Seite von (5) außer dem Wert von dS. Und diese Menge können wir nie im Voraus wissen.

Diese zufälligen Begriffe sind das Risiko in unserem Portfolio. Gibt es eine Möglichkeit, dieses Risiko zu verringern oder sogar zu beseitigen? Dies kann theoretisch (und auch fast in der Praxis) durch sorgfältige Auswahl von Δ erfolgen. Die zufälligen Terme in (5) sind:

$$(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta)dS \tag{6}$$

Wenn wir wählen

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \tag{7}$$

dann wird die Zufälligkeit auf Null reduziert.

Eine Verringerung der Zufälligkeit wird im Allgemeinen als Absicherung bezeichnet, unabhängig davon, ob diese Zufälligkeit auf Schwankungen an der Börse oder auf das Ergebnis eines Pferderennens zurückzuführen ist. Die perfekte Eliminierung des Risikos durch Ausnutzung der Korrelation zwischen zwei Instrumenten (in diesem Fall einer Option und ihrem Basiswert) wird allgemein als Delta Hedging bezeichnet.

Delta Hedging ist ein Beispiel für eine dynamische Absicherungsstrategie. Von einem Zeitschritt zum nächsten ändert sich die Größe $\frac{\partial V}{\partial S}$, da sie wie V eine Funktion der sich ständig ändernden Variablen S und t ist. Dies bedeutet, dass die perfekte Absicherung kontinuierlich neu ausbalanciert werden muss.

2.4 No-Arbitrage

Nach Auswahl der oben vorgeschlagenen Menge Δ halten wir ein Portfolio, dessen Wert sich um den Betrag ändert:

$$d\Pi = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt. \tag{8}$$

Diese Änderung ist völlig risikolos. Wenn sich der Wert unseres Portfolios Π risikofrei ändert, muss dies dem Wachstum entsprechen, das wir erzielen würden, wenn wir einen gleichen Geldbetrag auf ein risikofreies verzinsliches Konto einzahlen würden:

$$d\Pi = r\Pi dt. \tag{9}$$

Dies ist ein Beispiel für das No-Arbitrage Prinzip.

Um zu sehen, warum dies so sein sollte, überlegen wir, was passieren könnte, wenn die Rendite des Portfolios zuerst höher und danach niedriger als der risikofreie Zinssatz wäre. Wenn wir garantiert eine Rendite von mehr als r aus dem Delta-hedged Portfolio erzielen würden, könnten wir Kredite bei der Bank aufnehmen, Zinsen zum Zinssatz r zahlen, in das risikofreie Options-/ Aktienportfolio investieren und einen Gewinn erzielen. Wenn andererseits die Rendite unter dem risikofreien Zinssatz läge, sollten wir die Option kündigen. Das Geld, das wir durch Delta Hedging erzielen, können wir in die Bank investieren. In beiden Fällen erzielen wir einen risikolosen Gewinn, der über dem risikofreien Zinssatz liegt. Die Aktion von Investoren, die kaufen und verkaufen, um die Arbitrage-Gelegenheit zu nutzen wird gleichen Bedingungen dazu führen, dass sich der Marktpreis der Option in die Richtung bewegt, in der die Arbitrage beseitigt wird.

2.5 Die Black-Scholes Gleichung

Wir substituieren (1),(7) und (8) in (9) und bekommen:

$$(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt = r(V - S\frac{\partial V}{\partial S})dt. \tag{10}$$

Beim Teilen durch dt und Neuanordnen erhalten wir

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{11}$$

Das ist die Black-Scholes Gleichung. Die Gleichung wurde erstmals 1969 niedergeschrieben, aber einige Jahre später wurde sie erst nach erneuter Überprüfung durch Fischer Black und Myron Scholes bekannt gemacht. Die Ableitung der Gleichung wurde schließlich 1973 veröffentlicht, obwohl die Call-and-Put-Formel ein Jahr zuvor veröffentlicht worden war.

Die Black-Scholes Gleichung ist eine lineare parabolische partielle Differentialgleichung. Tatsächlich haben fast alle partiellen Differentialgleichungen im Finanzbereich eine ähnliche Form. Sie sind fast immer linear, was bedeutet, dass, wenn man zwei Lösungen der Gleichung hat, die Summe dieser selbst auch eine Lösung ist. Finanzgleichungen sind normalerweise auch parabolisch, was bedeutet, dass sie mit der Wärme- oder Diffusionsgleichung der Mechanik zusammenhängen. Eines der guten Dinge dabei ist, dass solche Gleichungen relativ einfach numerisch zu lösen sind.

Die Black-Scholes Gleichung enthält alle offensichtlichen Variablen und Parameter wie Basiswert, Zeit und Volatilität, die Driftrate μ wird jedoch nicht erwähnt. Die Abhängigkeit von der Drift fält gleichzeitig mit der Eliminierung der dS Komponente des Portfolios ab. Das wirtschaftliche Argument dafür ist, dass wir nicht dafür belohnt werden sollten, unnötige Risiken einzugehen, da wir die Option perfekt mit dem Basiswert absichern können. Diese Gleichung enthält nur eine risikofreie Rendite. Wenn zwei Personen die gleiche Volatilität eines Vermögenswerts schätzen, ist der Wert seiner Derivate gleich, auch wenn sich die Schätzungen der Driftrate unterscheiden.

Eine andere Sichtweise auf das Absicherungsargument besteht darin zu fragen, was passiert, wenn wir ein Portfolio halten, das nur aus der Aktie in einer Menge Δ und Bargeld besteht. Wenn Δ die partielle Ableitung eines Optionswerts ist, ergibt ein solches Portfolio bei Ablauf einen Betrag, der einfach die Auszahlung dieser Option darstellt. Mit anderen Worten, wir können dasselbe Black-Scholes Argument verwenden, um eine Option zu replizieren, indem wir nur den zugrunde liegenden Vermögenswert kaufen und verkaufen. Dies führt zur Idee eines vollständigen Marktes. In einem vollständigen Markt kann eine Option mit dem Basiswert repliziert werden, wodurch Optionen überflüssig werden.

2.6 Die Black-Scholes Annahmen

- Der Basiswert folgt einem logarithmischen Random Walk. Das ist aber nicht unbedingt nötig. Um explizite Lösungen zu finden, benötigen wir den zufälligen Term S in der stochastischen Differentialgleichung, damit er proportional zu S ist. Der „Faktor“ σ muss nicht konstant sein, um Lösungen zu finden, sondern muss nur zeitabhängig sein. In Bezug auf die Gültigkeit der Gleichung spielt es keine Rolle, ob die Volatilität auch vom Vermögenspreis abhängig ist, aber dann hat die Gleichung entweder sehr chaotische explizite Lösungen, wenn überhaupt, oder muss numerisch gelöst werden. Dann ist da noch die Frage nach dem Driftterm μS. Brauchen wir diesen Begriff, um diese Form anzunehmen, schließlich erscheint er nicht einmal in der Gleichung? Es gibt hier eine technische Besonderheit, dass unabhängig von der stochastischen Differentialgleichung für den Vermögenswert S die Domäne, über die der Vermögenswert reichen kann, Null bis unendlich sein muss. Dies ist eine Technik, auf die hier nicht eingehen wird, die jedoch eine weitere Beseitigung der Arbitrage darstellt. Es ist möglich, die Drift so zu wählen, dass der Vermögenswert auf einen Bereich beschränkt ist. Eine solche Drift wäre aber nicht erlaubt.

- Der risikofreie Zinssatz ist eine bekannte Funktion der Zeit. Diese Einschränkung soll uns nur helfen, wieder explizite Lösungen zu finden. Wenn r konstant wäre, wäre diese Arbeit noch einfacher. In der Praxis wird der Zinssatz häufig als zeitabhängig angesehen, ist jedoch im Voraus bekannt. Für die Preise einfacher Verträge existieren noch explizite Formeln. In der Realität ist die Rate r nicht im Voraus bekannt und selbst stochastisch. Wir sind auch davon ausgegangen, dass die Kreditzinsen und die Kreditzinsen gleich sind.

- Es gibt keine Dividenden für den Basiswert.
- Delta Hedging erfolgt kontinuierlich. Dies ist aber definitiv unmöglich. Die Absicherung (Hedging) muss in diskreter Zeit erfolgen. Oft hängt die Zeit zwischen den Rehedges von der Höhe der Transaktionskosten auf dem Markt für den Basiswert ab. Je niedriger die Kosten, desto häufiger erfolgt die Nachbearbeitung.
- Für den Basiswert fallen keine Transaktionskosten an. Das dynamische Geschäft der Delta-Absicherung ist in Wirklichkeit teuer, da auf den meisten Basiswerten ein Bid-Offer-Spread besteht. In einigen Märkten ist dies wichtig und in anderen nicht.
- Es gibt keine Arbitrage-Möglichkeiten. Das stimmt so nicht. Natürlich gibt es Arbitrage-Möglichkeiten, viele Leute verdienen viel Geld damit sie zu finden. Es ist äußerst wichtig zu betonen, dass wir modellabhängige Arbitrage ausschließen. Dies ist höchst zweifelhaft, da es davon abhängt, dass wir überhaupt das richtige Modell haben, und das ist unwahrscheinlich.

Es gibt noch viel mehr Annahmen, aber die oben genannten sind die wichtigsten.

2.7 Endbedingungen

Die Black-Scholes Gleichung (11) weiß nichts darüber, welche Art von Option wir bewerten, ob es sich um einen Call oder einen Put handelt, noch um den Strike und den Ablauf. Mit diesem Punkte befasst sich die Endbedingung. Wir müssen den Optionswert V als Funktion des Basiswerts zum Ablaufdatum T angeben. Das heißt,dass wir die Auszahlung $V(S,T)$ vorschreiben müssen.

Wenn wir zum Beispiel eine Call-Option haben, wissen wir, dass

$$V(S,T) = \max(S-E,0)$$

Für einen Put haben wir:

$$V(S,T) = \max(E-S,0)$$

Für einen binären Call:

$$V(S,T) = \mathcal{H}(S-E)$$

Und für einen binären Put:

$$V(S,T) = \mathcal{H}(E-S)$$

Dabei ist $\mathcal{H}(.)$ die Heaviside-Funktion, die Null ist, wenn das Argument negativ ist, und Eins, wenn es positiv ist.

Nebenbei ist zu beachten, dass sowohl der Vermögenswert S als auch „das Geld in der Bank“, e^{rt}, die Black-Scholes Gleichung erfüllen.

2.8 Optionen

2.8.1 Optionen auf dividendenausschüttende Aktien

Die erste Verallgemeinerung, die diskutieren werden sollen, ist die Bewertung von Optionen auf Aktien, die Dividenden zahlen. Dies ist nur die einfachste Verallgemeinerung des Black-Scholes-Modells. Um die Dinge einfach zu halten, nehmen wir an, dass der Vermögenswert eine kontinuierliche und konstante Dividendenrendite D erhält. Somit erhält jeder Vermögenswert in einer Zeit dt einen Betrag $DSdt$. Dies muss bei der Ableitung der Black-Scholes-Gleichung berücksichtigt werden. Wir greifen das Black-Scholes-Argument an dem Punkt auf, an dem wir die Wertänderung des Portfolios betrachten:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS - D\Delta S dt.$$

Der letzte Term auf der rechten Seite ist einfach die Höhe der Dividende pro Vermögenswert, $DSdt$, multipliziert mit der Anzahl der gehaltenen Vermögenswerte, $-\Delta$. Das Δ ist immer noch durch die Änderungsrate des Optionswerts in Bezug auf den Basiswert gegeben, aber nach einigen einfachen Substitutionen erhalten wir jetzt:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

2.8.2 Währungsoptionen

Währungsoptionen werden genauso behandelt. Beim Halten der Fremdwährung erhalten wir Zinsen zum Fremdzins r_f. Dies ist wie eine kontinuierliche Dividende.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - r_f)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

2.8.3 Warenoptionen

Das relevante Merkmal von Waren, die eine Anpassung der Black-Scholes-Gleichung erfordern, ist, dass sie Carry-Kosten haben. Das heißt, die Lagerung von Waren ist nicht ohne Kosten. q stellt den Bruchteil des Wertes einer Ware da, der zur Zahlung der Transportkosten beiträgt. Dies bedeutet, dass das bloße Halten der Ware zu einem allmählichen Vermögensverlust führt, selbst wenn der Rohstoffpreis fest bleibt. Um genau zu sein, wird für jede Einheit der gehaltenen Ware während der kurzen Zeit dt ein Betrag $qSdt$ benötigt, um den Bestand zu finanzieren. Dies ist wie eine negative Dividende und so bekommen wir

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r + q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

2.8.4 Erwartungen und Black-Scholes

In der Black-Scholes Gleichung wird die Driftrate des zugrunde liegenden Vermögenswerts μ nicht erwähnt. Es scheint, dass der Wert einer Option keinen Einfluss darauf hat, ob der Vermögenswert langfristig steigt oder fällt. Gleichzeitig mit dem Hedging gegeüber Zufälligkeiten sichern wir die Exposition gegenüber der Richtung ab.

Ein Optionswert kann als besondere Erwartung angesehen werden:

Der beizulegende Zeitwert einer Option ist der Barwert der erwarteten Auszahlung bei Ablauf unter einem risikoneutralen Random Walk für den Basiswert.

Wir können schreiben

$$\text{option value} = e^{-r(T-t)}E[\text{payoff}(S)]$$

Die Erwartung hier bezieht sich auf den risikoneutralen Random Walk, nicht auf den realen.

Real: bezieht sich auf den tatsächlichen zufälligen Random Walk. Es hat eine bestimmte Volatilität σ und eine bestimmte Driftrate μ. Wir können diesen zufälligen Random Walk in einer Tabelle sehr einfach simulieren und beispielsweise die erwarteten zukünftigen Optionsauszahlungen berechnen.

Risikoneutral: bezieht sich auf einen künstlichen Random Walk, der wenig mit dem Weg zu tun hat, dem ein Vermögenswert tatsächlich folgt. Dies ist nicht unbedingt der Fall, da sowohl der reale als auch der risikoneutrale Zufallspfad die gleiche Volatilität aufweisen. Der Unterschied liegt in den Driftraten. Der risikoneutrale Random Walk weist eine Drift auf, die dem risikofreien Zinssatz r entspricht. Wenn man theoretische Optionswerte erarbeiten will, muss man risikofreie Random Walks simulieren, um die Erwartungen zu berechnen.

2.9 Einige Andere Wege zur Ableitung der Black-Scholes Gleichung

Die Ableitung der obigen Black-Scholes Gleichung ist die klassische und ähnelt der ursprünglichen Black- und Scholes-Ableitung. Es gibt andere Möglichkeiten, um zum gleichen Ergebnis zu gelangen.

2.9.1 Der Martingalansatz

Es kann gezeigt werden, dass der Wert einer Option eine Erwartung ist, keine echte Erwartung, sondern eine besondere, risikoneutrale. Dies ist ein nützliches Ergebnis, da es die Grundlage für die Preisgestaltung durch Simulation bildet. Die Konzepte der Absicherung (Hedging) und No-Arbitrage werden in dieser Ableitung offensichtlich noch verwendet. Der Hauptnachteil dieses Ansatzes besteht darin, dass eine probabilistische Beschreibung der Finanzwelt erforderlich ist.

2.9.2 Das Binomialmodell

Das Binomialmodell ist ein diskretes Zeit- und ein diskretes Asset-Preismodell für Basiswerte und verwendet wiederum Absicherung (Hedging) und No-Arbitrage, um einen Preisalgorithmus für Optionen abzuleiten. Wenn wir das Limit nehmen, wenn der Zeitschritt auf Null schrumpft, erhalten wir die zeitkontinuierliche Black-Scholes Gleichung.

2.9.3 CAPM (Capital Asset Pricing Model])

Es ist ein Modell für das Verhalten riskanter Vermögenswerte sowie ein Prinzip und ein Algorithmus, um optimale Wege zu definieren und zu finden, um Vermögen auf die Asset aufzuteilen. Portfolios werden hinsichtlich ihres Risikos (Standardabweichung der Renditen) und ihres Ertrags (erwartetes Wachstum) beschrieben. Wenn Sie Optionen in dieses Framework aufnehmen, werden die möglichen Kombinationen von Risiko und Ertrag nicht erhöht. Dies liegt daran, dass Optionen in gewissem Sinne nur Funktionen ihrer Basis sind. Dies ist Marktvollständigkeit. Das Risiko und der Ertrag einer Option und ihres Basiswerts hängen zusammen und die Black-Scholes Gleichung folgt.

2.10 No-Arbitrage in den Binomial-, Black-Scholes- und änderen" Welten!!!

Mit dem zeitkontinuierlichen Black-Scholes Modell wie mit dem zeitdiskreten Binomialmodell konnten wir durch eine vernünftige Auswahl einer Absicherung (Hedging) Unsicherheiten im Wert eines Portfolios beseitigen. In beiden Fällen stellen wir fest, dass es keine Rolle spielt, wie sich der zugrunde liegende Vermögenswert bewegt, der resultierende Wert des Portfolios ist der gleiche. Dies wird besonders im Binomialmodell deutlich. Diese Absicherung (Hedging) ist nur bei diesen beiden einfachen, beliebten Modellen möglich. Betrachten wir eine banale Verallgemeinerung, den trinomialen Random Walk.

In Abbildung 1 sehen wir eine Darstellung eines trinomialen Random Walks. Nach einem Zeitschritt δt. könnte der Vermögenswert auf uS gestiegen, auf vS gefallen oder nicht von S verschoben worden sein.

Was passiert, wenn wir versuchen, eine Option in diesem Szenario abzusichern? Nach wie vor können wir uns mit $-\Delta$ des Basiswerts 'absichern', aber dieses Mal möchten wir Δ so wählen, dass der Wert des Portfolios (einer Option und $-\Delta$ des Vermögenswerts) zum Zeitpunkt $t + \delta t$ gleich ist, unabhängig davon nach welchem Wert sich der Asset bewegt. Mit anderen Worten, wir möchten, dass das Portfolio für alle drei möglichen Ergebnisse den gleichen Wert hat (siehe Abbildung 2). Leider können wir keinen Wert für Δ wählen, der dies sicherstellt. Dies entspricht der Lösung von zwei Gleichungen (erster Portfoliowert = zweiter Portfoliowert = dritter Portfoliowert) mit nur einer Unbekannten (Δ). Eine Absicherung (Hedging) ist in der Trinomwelt nicht möglich. In der Tat ist eine perfekte Absicherung (Hedging) und damit die Anwendung des „No-Arbitrage-Prinzips“ nur in den beiden Sonderfällen möglich, der Black-Scholes-Welt für kontinuierliche Zeit/kontinuierliche Vermögenswerte und der Binomialwelt. In der weitaus komplexeren „realen“ Welt ist eine Delta Hedging nicht möglich.

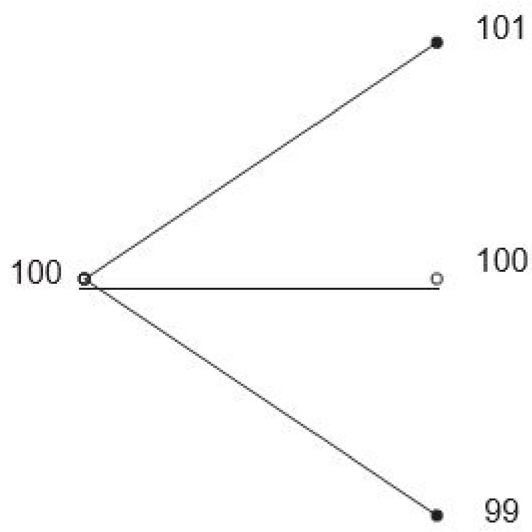

Abbildung 1: Der Trinomialbaum

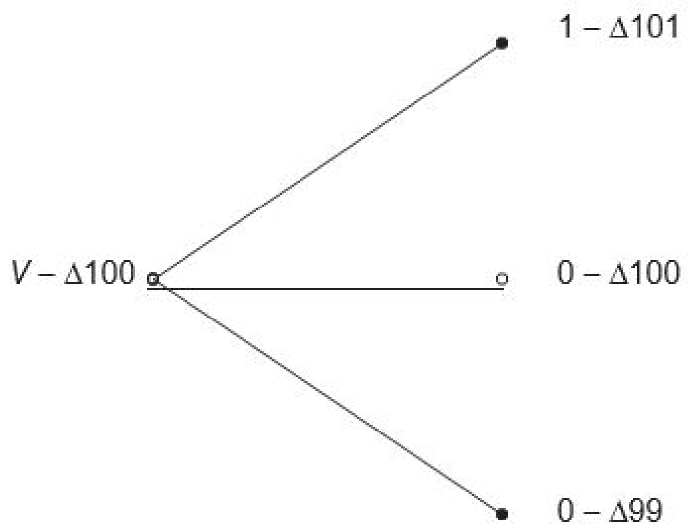

Abbildung 2: Ist Hedging möglich?

2.11 Forwards und Futures

Können wir Werte für Forward und Future contracts finden? Wie passen sie in das Black-Scholes-Framework? Wir schauen uns zunächst den einfacheren Forward Contract an.

2.11.1 Forward Contracts

$V(S,t)$ ist der Wert des Forward contracts zu jedem Zeitpunkt während seiner Laufzeit auf dem Basiswert S und wird zum Zeitpunkt T fällig. Wir gehen davon aus, dass der Lieferpreis bekannt ist und ermitteln dann den Wert des Forward contracts.

Wir richten das Portfolio aus einem Long-Forward-Contract und einem Short Δ des zugrunde liegenden Vermögenswerts ein

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S.$$

Dies ändert sich um einen Betrag

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS.$$

von t bis $t + dt$. Wir wählen

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

um das Risiko auszuschließen. Durch Anwendung des No-Arbitrage Arguments erhalten wir wieder genau die partielle Black-Scholes Differentialgleichung.

Die Endbedingung für die Gleichung ist einfach die Differenz zwischen dem Vermögenspreis S und dem festen Lieferpreis $\overline{S}$.

$$V(S,T) = S - \overline{S}$$

Die Lösung der Gleichung mit dieser Endbedingung ist

$$V(S,t) = S - \overline{S}e^{-r(T-t)}.$$

Dies ist der Wert des Forward contracts während seiner Laufzeit.

Wie hängt dies mit der Festlegung des Lieferpreises an erster Stelle und des in der Zeitung notierten Terminkurses zusammen?

Der Lieferpreis wird zunächst auf $t = t_0$ als der Preis festgelegt, der dem Forward contract den Wert Null gibt. Wenn der Basiswert zum Zeitpunkt t_0 S_0 ist, dann

$$0 = S_0 - \overline{S}e^{-r(T-t_0)}$$

oder

$$\overline{S} = S_0 e^{r(T-t_0)}.$$

Und welche ist der Forward Preis, wie angegeben? Dies ist der Lieferpreis, der von Tag zu Tag variiert. Der Terminkurs für den bei T fälligen Contract beträgt also

$$\text{Forward price} = Se^{r(T-t)}.$$

2.11.2 Futures Contracts

Wir versuchen nun den Futures Preis zu berechnen. Wir verwenden $F(S,t)$, um den Futures Preis zu bezeichnen.

Wir bedenken, dass der Wert des Forward contracts während seiner Laufzeit immer Null ist, da die Wertänderung täglich abgerechnet wird. Dieser Cashflow muss in unserer Analyse berücksichtigt werden.

Wir richten ein Portfolio aus einem Long-Futures-Contract und einem Short Δ des Basiswerts ein:

$$\Pi = -\Delta S.$$

Das ist kein Fehler. Da er keinen Wert hat, scheint er nicht in der Portfolio-Bewertungsgleichung auf. Wie verändert sich der Wert des Portfolios?

$$d\Pi = dF - \Delta dS.$$

dF repräsentiert den Cashflow aufgrund der kontinuierlichen Abrechnung. Indem wir Itō's Lemma anwenden,

$$d\Pi = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}dt - \Delta dS$$

wählen wir

$$\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}$$

um das Risiko auszuschließen. Wir setzen

$$d\Pi = r\Pi dt$$

und bekommen

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + rS\frac{\partial F}{\partial S} = 0.$$

Wir sehen, dass die Gleichung nur drei Terme enthält, sie ist nicht dasselbe wie die Black-Scholes Gleichung.

Die endgültige Bedingung ist

$$F(S,T) = S$$

Der Futures-Preis und der Basiswert müssen bei Fälligkeit den gleichen Wert haben. Die Lösung ist einfach

$$F(S,t) = Se^{r(T-t)}.$$

2.11.3 Option auf Futures

Die letzte Änderung des Black-Scholes-Modells in diesem Kapitel besteht darin, Optionen auf Futures zu bewerten. Das Verhältnis zwischen dem Futures Preis dividendenfreier Aktien F und dem aktuellen Preis ist:

$$F = e^r T_f - tS$$

Dabei ist T_f das Fälligkeitsdatum des Futures contracts. Wir können leicht Variablen ändern und nach einer Lösung $V(S,t) = \mathcal{V}(F,t)$ suchen. Wir finden

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial F^2} - r\mathcal{V} = 0$$

Die Gleichung für eine Futures-Option ist tatsächlich einfacher als die Black-Scholes Gleichung.

3 Fazit

Seit der Veröffentlichung des Black-Scholes Modells im Jahr 1973 im Journal of Political Economy erkannten Händler an der Chicago Board Options Exchange sofort seine Bedeutung und wandten den programmatischen Eingabecomputer des BS-Modells schnell auf die kürzlich eröffneten Chicago-Optionen an. Die Anwendung dieser Formel hat sich mit der Weiterentwicklung der Computer- und Kommunikationstechnologie erweitert. Bis heute wurden dieses Modell und einige seiner Varianten von Optionshändlern, Investmentbanken, Finanzmanagern, Versicherern usw. häufig verwendet. Der Ausbau von Derivaten hat die internationalen Finanzmärkte effizienter gemacht, aber auch die globalen Märkte volatiler gemacht. Die Schaffung neuer Technologien und neuer Finanzinstrumente hat die gegenseitige Abhängigkeit von Märkten und Marktteilnehmern gestärkt, nicht nur innerhalb eines Landes, sondern auch unter Einbeziehung anderer Länder oder sogar mehrerer Länder. Das Ergebnis ist, dass die Volatilität oder Finanzkrise eines Marktes oder eines Landes sehr wahrscheinlich schnell auf andere Länder und sogar die gesamte Weltwirtschaft übertragen wird.

Finanzmärkte werden nicht von Mathematik angetrieben, sondern von Menschen, und Menschen sind die unvorhersehbarsten Variablen. Bisher haben wir keine universelle Theorie, die systematisch menschliches Verhalten und Motivation untersucht, die von Mathematikern ignoriert werden. Das Black-Scholes Modell kann ein sehr nützliches Instrument für das Risikomanagement sein, aber keine Kristallkugel, die die Zukunft vorhersagen kann. Finanzinvestitionen ähneln eher einem Komplex von Natur- und Geisteswissenschaften. Neben nützlichen wissenschaftlichen Instrumenten sind menschliche Erfahrung, Urteilsvermögen und Intuition unersetzlich.

Literaturverzeichnis

- Wilmott Paul, Paul Wilmott introduces quantitative finance, 2nd ed.
- https://de.wikipedia.org/wiki/Black-Scholes-Modell
- https://www.oberbank.at/documents/20373/28034
- https://baike.baidu.com
- https://www.zhihu.com/question/36828182