SEMINARARBEIT

Volatilität und Copulas

ausgeführt für das Studium

Finanz- und Versicherungsmathematik TU Wien
TU Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Brucker Theresa

Matrikelnummer: 01609010

Wien, am 17.1.2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Für ein Unternehmen ist es wichtig, die Volatilitäten der Marktvariablen (Zinssätze, Wechselkurse, Aktienkurse,...) zu überwachen, von denen der Wert seines Portfolios abhängt.

Außerdem bestehen bei Banken und Versicherungen heutzutage die Notwendigkeit mehrdimensionale Zusammenhänge adäquat zu modellieren. In der Praxis sind in der Vergangenheit oft multivariate Normalverteilungen verwendet worden. Diese haben das Defizit, dass sie das Auftreten von gemeinsamen Extremereignissen kaum berücksichtigen. Die Vergangenheit hat jedoch gezeigt, dass Börsencrashs, also gemeinsam starke Einbrüche der Rendite, in der Realität viel häufiger vorkommen als im Modell mit multivariaten Normalverteilungen. Daher ist es notwendig andere multivariate Verteilungen zu finden, welche zu zuverlässigerern Modellansätzen führen.

Bei der Konstruktion multivariater Verteilungen hat es lange Zeit Einschränkungen an die multivariaten Verteilungen gegeben. Oft sind diese multivariaten Verteilungen als Erweiterungen von univariaten Verteilungen gebildet worden, so dass nur gleiche Randverteilungen möglich gewesen sind, oder es hat starke Restriktionen an die Abhängigkeit der einzelnen Zufallsgrößen gegeben.
Abhilfe schaffen hier Copulas. Mithilfe von Coulas lassen sich multivariate Verteilungsfunktionen in zwei Teile zerlegen. Es werden dabei die univariaten Randverteilungen von der Copula-Funktion getrennt, welche die Abhängigkeitsstruktur der Zufallsvariablen beschreibt.

1.1 Aufbau der Arbeit

Zu Beginn beschäftigen wir uns mit den Grundlagen der Volatilität. Zwischendurch werden zum besseren Verständnis Beispiele gezeigt. Anschließend folgt ein Abschnitt über die Modellierung von Volatilität. Dabei wird auf zwei spezifische Modelle näher eingegangen: das GARCH(1,1)-Modell und das EWMA-Modell.Die Besonderheit an diesen Modellen ist ihre Erkenntnis, dass die Volatilität nicht konstant ist. In einigen Zeiträumen ist die Volatilität relativ gering, während sie in anderen Zeiträumen relativ hoch ist. Die Modelle versuchen, Schwankungen der Volatilität im Laufe der Zeit zu verfolgen.
Das darauffolgende Kapitel beschäftigt sich mit Korrelation, welches die Grundlage

für das letzte Kapitel über Copulas bildet. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Sinn von Copulas. Zusätzlich gibt es einen Abschnitt mit den bekanntesten Copulas und einem der wichtigsten Sätze für die Verwendung von Copulas, dem Satz von Sklar.

1.2 Verweise

Diese Arbeit orientiert sich am Werk *Risk Management and Financial Institutions* von John Hull. [2], wobei der Inhalt im Wesentlichen auf den Kapiteln *Volatilität* und *Korrelationen und Copulas* beruht. Desweiteren wird auch *An Introduction to Copulas* von Roger Nelson [3] als Literatur herangezogen. Daraus werden die wesentlichen Grundlagen für Copulas hergeleitet. Zusätzlich wird für das fünfte Kapitel eine Präsentation von Niels Friewald [1] für eine allgemein verständliche Formulierung des Satzes von Sklar verwendet.

2 Grundlagen der Volatiliät

2.1 Definition von Volatilität

Die Volatilität einer Variable ist definiert als die Standardabweichung der verhältnismäßigen Änderung einer Variable während einer Zeiteinheit.
Wird Volatilität für Option Pricing verwendet, so ist die Zeiteinheit üblicherweise ein Jahr. Daraus folgt, dass die Volatilität die Standardabweichung der kontinuierlich zusammengesetzten Rendite pro Jahr ist. Wird Volatilität hingegen für das Risiko Management benützt ist die Zeiteinheit normalerweise ein Tag. Also ist die Volatilität die Standardabweichung der stetigen zusammengesetzten Rendite pro Tag.
In dieser Arbeit wird der Fokus auf das Risiko Management gelegt, dadurch wird die Definition des Risiko Managements für Volatilität verwendet.
Wir definieren S_i als den Wert der Variable am Ende des Tages i. Die stetig zusammengesetzte Rendite pro Tag für die Variable an Tag i ist:

$$ln\frac{S_i}{S_{i-1}}.$$

Das ist fast das Gleiche wie:

$$\frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}.$$

Beweis. *Wir formen den Ausdruck als Erstes um*

$$ln\Big(\frac{S_1}{S_{i-1}}\Big) = ln\Big(\frac{S_i - S_{i-1} + S_{i-1}}{S_{i-1}}\Big) = ln\Big(1 + \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}\Big).$$

Nun verwenden wir die Potenzreihendarstellung von $ln(1+x)$

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

und erhalten dadurch für unsere Darstellung

$$ln\Big(1 + \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{S_i - S_{i-1}}{n}\Big)^n(-1)^{n+1}.$$

Verwenden wir die Konvergenz der Reihe für $x \in [0,1]$, erhalten wir

$$ln\Big(\frac{S_i}{S_{i-1}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{S_i - S_{i-1}}{n}\Big)^n(-1)^{n+1} \approx \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$

2.2 Umwandlung auf andere Zeiteinheiten

Falls man tägliche Volatilität betrachtet und daraus einen Rückschluss auf wöchentliche oder jährliche Volatilität schließen möchte, reicht es, die Standardabweichug mit der Quadratwurzel der jeweiligen Einheit zu multiplizieren.
Will man zum Beispiel von täglicher Volatilität auf wöchentliche kommen, so multipliziert man mit der Wurzel von 365 durch 7. Um auf jährliche Volatilität zu kommen, muss man zwei Fälle unterscheiden, Arbeitstage oder Nicht-Arbeitstage.
Da die Volatilität an Arbeitstagen viel höher als an Nicht-Arbeitstagen ist, neigen Analytiker dazu, die Wochenenden und Urlaubstage zu ignorieren, wenn sie Volatilität berechnen und verwenden. Die übliche Annahme ist, dass es 252 Tage pro Jahr gibt.

2.3 Beispiel für Volatilität

Nehmen wir an, dass wir einen Vermögenspreis von 50 Euro haben und die tägliche Volatilität ist 2% . Das bedeutet, dass eine Standardabweichungsbewegung in dem Vermögenspreis über einen Tag $50\times 0,02$ oder 1 Euro wäre. Wir nehmen an, dass der Wechsel in dem Vermögenspreis normal verteilt ist mit Zufallsvariable W und gehen von einer 95-prozentigen Wahrscheinlichkeit aus, dass der Wert in einem bestimmten Intervall liegt. Dadurch wissen wir, dass

$$W \sim N(50, 1^2)$$

und es muss gelten

$$\mathbb{P}[-c \leq W \leq c] = 0,95.$$

Formen wir nun auf eine Standarnormalverteilung um, erhalten wir

$$Z := \frac{W - 50}{1} \sim N(0,1)$$

Mit der Symmetrie der Standardnormalverteilung können wir berechnen, dass für die Grenze c gelten muss

$$\varphi(c) = 0,975 \Rightarrow c = 1,96$$

Daraus folgt, dass der Vermögenspreis am Ende des Tages mit 95% Wahrscheinlichkeit zwischen $50 - 1,96 * 1 = 48,04$ Euro und $50 + 1,96 * 1 = 51,96$ Euro liegt.

2.4 Ursprung von Volatilität

Man geht davon aus, dass die Volatilität einer Aktie oder anderen Anlage verursacht wird durch neue Informationen, die den Markt erreichen. Diese neue Information veranlast Menschen dazu, ihre Meinung zu dem Wert einer Anlage zu ändern, wodurch sich dieser Wert ändert und Volatilität entsteht.

3 Modellierung der Volatilität

Um Volatilität zu modellieren, wird die Definition der Varianzrate (siehe 3.1) verwendet. Man kann dabei unterscheiden, ob die Werte einer Marktvariable an einem bestimmten Tag unterschiedlich gewichtet werden, oder es angenommen wird, dass alle gleichrelevant sind.

3.1 Modelle ohne Gewichtung

Wir defnieren σ_n als die Volatilität pro Tag von einer Marktvariable an Tag n, bestimmt am Ende des Tages n-1. Die Varianzrate ist definiert als das Quadrat der Volatilität σ_n.
Nehmen wir an, dass der Wert einer Marktvariable am Ende des Tages i S_i ist. Wir definieren u_i als die stetig zusammengesetzte Rendite während des Tages i (also zwischen Ende von Tag $i-1$ und Ende von Tag i), so dass

$$u_i = ln\frac{S_i}{S_{i-1}}.$$

Ein Weg um σ_n zu bestimmen, ist sie der Standardabweichung der u_i's gleichzusetzen. Mit den m kürzlichen Beobachtungen von den u_i in Verbindung mit der üblichen Formel für die Standardabweichung ergibt sich die Formel

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i} - \bar{u})^2, \tag{3.1}$$

wobei $\bar{u}$ dem Erwartungswert der u_i's entspricht:

$$\bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-1}.$$

Für das Risiko Management wird die Formel gewöhnlich durch drei Punkte verändert:

1. u_i wird diesmal definiert als die prozentuelle Änderung der Marktvariable zwischen dem Ende von Tag $i-1$ und dem Ende von Tag i:

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \tag{3.2}$$

   Beweis dazu siehe Seite 2.

2. Wir nehmen an, dass $\bar{u} = 0$ ist. Es wird damit begründet, dass die erwartete Änderung einer Variable an einem Tag sehr gering ist und dadurch vernachlässigt werden kann.

3. $m - 1$ wird ersetzt durch m. Dies führt uns von einer unvoreingenommenen Schätzung der Volatilität zu einer Maximum Likelihood Schätzung

Diese drei Änderungen vereinfachen die Formel für die Varianzrate zu

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} u_{n-i}^2, \tag{3.3}$$

wobei u_i gegeben ist durch (3.2).

3.2 Modelle mit Gewichtung

Da die Formel (3.3) alle $u_{n-1}^2, u_{n-2}^2, ..., u_{n-m}^2$ gleich gewichtet und das im Alltag wenig Sinn macht, kann die Formel so verändert werden, dass kürzlich geschehenen Werten mehr Gewicht verliehen wird. Ein Model für diese Anwendung ist:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2. \tag{3.4}$$

Die Variable $\alpha_i > 0$ definiert das Gewicht, das der Beobachtung vor i Tagen zugewiesen wird. Wenn wir die Gewichte so wählen, dass $\alpha_i < \alpha_j$ für $i > j$, dann wird weiter in der Vergangenheit liegenden Beobachtungen weniger Gewicht zugewiesen. Die α's sind positiv und die Summe aller Gewichte soll Eins ergeben:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

Eine Erweiterung für die Idee in Formel (3.4) ist es anzunehmen, dass es eine langfristige durchschnittliche Varianzrate gibt und diese gewichtet werden soll. Dies führt zu einem Model der Form

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-1}^2, \tag{3.5}$$

wobei V_L die langfristige durchschnittliche Varianzrate und γ das zugehörige Gewicht ist. Da die Gewichte gemeinsam Eins ergeben müssen, gilt

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

Dieses Modell ist als ARCH(m)-Modell bekannt. In den nächsten beiden Abschnitten werden die Ideen der Formeln (3.4) und (3.5) verwendet um Volatilität zu modellieren. Mit $\omega = \gamma V_L$ kann das Modell in (3.5) ausgedrückt werden als

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2.$$

Diese Version kommt bei der Schätzung von Parametern zur Anwendung (siehe Unterkapitel **Bestimmung der Parameter**).

3.2.1 EWMA-Modell

Das exponentially weighted moving average model (EWMA) ist ein spezieller Fall von Formel (3.4), wobei die Gewichte α_i exponentiell fallen je weiter man in der Zeit zurück geht. Speziell gilt $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$, wobei λ eine Konstante im Intervall $[0, 1]$ ist.
Mit diesem Gewichtungsschema können wir auf eine simple Formel für die Fortschreibung der Schätzer für die Volatilität kommen

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2. \tag{3.6}$$

Der Schätzer σ_n der Volatilität einer Variable für den Tag n (wird am Ende von Tag n-1 bestimmt) wird berechnet durch σ_{n-1} (diese Schätzung wird am Ende von Tag n-2 gemacht) und u_{n-1} (die neueste tägliche prozentuelle Änderung).
Um zu verstehen, warum (3.6) Gewichten, die exponentiell fallen, entspricht, ersetzen wir σ_{n-1}^2 und erhalten

$$\sigma_n^2 = \lambda[\lambda\sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda)u_{n-2}^2] + (1-\lambda)u_{n-1}^2,$$

oder

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2\sigma_{n-2}^2.$$

Ersetzt man nun in gleicher Weise σ_{n-2}^2, so erhält man

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2) + \lambda^3\sigma_{n-3}^2.$$

Setzt man das rekursiv fort, so erhält man als Ergebnis

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1}u_{n-i}^2 + \lambda^m\sigma_{n-m}^2.$$

Für hinreichend große m ist der Term $\lambda^m\sigma_{n-m}^2$ ausreichend gering, um ignoriert zu werden. Dadurch folgt, dass es sich um die gleiche Formel wie (3.4) mit Gewichten $\alpha_i = (1-\lambda)\lambda^{i-1}$ handelt. Die Gewichte für die u_i sinken mit Rate λ wenn wir in der Zeit zuüruckgehen. Jedes Gewicht ist λ mal das vorherige Gewicht.

Die Vorangehensweise des EWMA-Modells hat die praktische Eigenschaft, dass die Anforderung für Datenspeicher gering ist. Zu jeder Zeit benötigen wir nur die jetzige Schätzung der Varianzrate und den letzten beobachteten Wert einer Marktvariable. Wenn wir eine neue Beobachtung erhalten, berechnen wir die neue tägiche prozentuelle Änderung und benützen die Formel (3.6) um die neueste Schätzung für die Varianzrate zu erstellen. Die alte Schätzung der Varianzrate und der alte Wert der Marktvariable werden nicht mehr benötigt und können somit gelöscht werden.
Die Vorangehensweise des EWMA-Modells ist designt, um Änderungen in der Volatilität zu verfolgen. Nehmen wir an, es gibt einen großen Sprung in der Marktvariable an Tag $n-1$, sodass u_{n-1}^2sehr groß wird. Durch Formel (3.6) bewirkt das die Steigung des Schätzers für die jetzige Volatilität. Der Wert λ bestimmt, wie sehr der Schätzer der täglichen Volatilität auf die Änderung des kürzlich bestimmten täglichen Prozentsatz reagiert. Ein niedriger Wert für λ führt zu einem großem Gewicht für den Wert u_{n-1}^2 wenn σ_n berechnet wird. In diesem Fall sind die an diesem Tag ermittelten Schätzer für die Volatilität an aufeinanderfolgenden Tagen selber sehr stark volatil. Ein hoher Wert für λ (d.h. ein Wert nahe 1) führt zu Schätzern für die tägliche Volatilität, die sehr langsam auf neue Informationen, die sich aus den täglichen prozentuellen Änderungen ergeben, reagieren.

3.2.2 CARCH(1,1)-Modell

Das GARCH(1,1)-Modell verwendet -im Unterschied zu EWMA-Modellen - als Basis die Formel (3.5). σ_n^2 wird durch eine langfristige durchschnittliche Varianrate berechnet, V_L ebenso durch σ_{n-1} und u_{n-1}. Die Formel für das GARCH(1,1)-Modell ist:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2, \tag{3.7}$$

wobei γ das zugehörige Gewicht zu V_L ist, α das zugehörige Gewicht zu u_{n-1}^2 und β das zugehörige Gewicht zu σ_{n-1}^2 ist. Gemeinsam müssen die Gewichte Eins ergeben:

$$\gamma + \beta + \alpha = 1$$

Das EWMA-Modell ist ein spezieller Fall des GARCH(1,1)-Modells, wobei $\gamma = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$ und $\beta = \lambda$ ist.
Das (1,1) in GARCH(1,1) indiziert, dass σ_n^2 auf der neuesten Beobachtung von u^2 und der neuesten Schätzung der Varianzrate beruht. Das generellere GARCH(p,q)-Modell berechnet σ_n^2 durch die p neuesten Beobachtungen von u^2 und den q neuesten Schätzern der Varianzrate. GARCH(1,1) ist mit Abstand das beliebteste von den GARCH-Modellen.
Setzt man $\omega = \gamma V_L$, kann das GARCH(1,1)-Modell auch als:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \tag{3.8}$$

geschrieben werden. In dieser Form wird das Modell normalerweise für die Bestimmung der Parameter verwendet (Vergleich siehe Unterkapitel **Bestimmung der Parameter**). Wurden erst einmal ω, α und β bestimmt, können wir γ durch $1-\alpha-\beta$ berechnen. Die langfristige Varianz V_L kann durch $\frac{\omega}{\gamma}$ berechnet werden. Für ein stabiles GARCH(1,1)-Modell benötigen wir die Bedingung, dass $\alpha+\beta<1$. Andernfalls ist das Gewicht für die langfristige Varianz negativ.
Ersetzt man das nun für σ_{n-1}^2 in Formel (3.8), so erhält man:

$$\sigma_n = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta(\omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta\sigma_{n-2}^2)$$

oder

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \beta^2\sigma_{n-2}^2.$$

Ersetzt man nun σ_{n-2}^2 erhält man

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \beta^2\omega\alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \alpha\beta^2 u_{n-3}^2 + \beta^3\sigma_{n-3}^2.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so können wir erkennen, dass das Gewicht von u_{n-i}^2 $\alpha\beta^{i-1}$ ist. Die Gewichte fallen exponentiell mit Rate β. Der Parameter β kann als die Zerfallsrate interpretiert werden. Er ist ähnlich zu dem Wert λ in EWMA-Modellen. Es definiert die relative Wichtigkeit der Beobachtungen der u_i in der Bestimmung der jetzigen Varianzrate.

Unterschied der Modelle

Das GARCH(1,1)-Modell ist gleich dem EWMA-Modell, außer in dem Punkt, dass das GARCH(1,1)-Modell auch Gewichte der langfristigen Varianzrate zuordnet. In der Praxis fallen Varianzraten tendenziell auf ein langfristiges Durchschnittsniveau zurück. Das ist bekannt als "Mean Reversion". Das GARCH(1,1)-Modell beinhaltet eine Mean Reversion, während das EWMA-Modell dies nicht tut. Dadurch ist das GARCH(1,1)-Modell beliebter als das EWMA-Modell. Ist hingegen der Parameter ω negativ, is das GARCH(1,1)-Modell nicht stabil und es ist daher sinnvoller, dass EWMA-Modell zu verwenden.

Bestimmung der Parameter

In diesem Teil beschäftigen wir uns damit, wie passend die Parameter α, β und ω für das GARCH(1,1)-Modell geschätzt werden können. Dafür wird die Maximum-Likelihood-Methode verwendet.

Als Erstes betrachten wir das Problem eine Varianz für eine Variable X von m Beobachtungen von X, wenn die zugrundelegende Verteilung normal verteilt ist, zu berechnen. Wir nehmen an, die Beobachtungen sind $u_1, u_2, u_3, ...$ und dass der Erwartungswert der zugrunde liegenden Normalverteilung Null ist. Wir beschreiben die Varianz als v. Die Wahrscheinlichkeit, dass u_i beobachtet wird, ist der Wert der Dichtefunktion für X, wenn $X = u_i$ gilt. Das ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} exp\Big(\frac{-u_i^2}{2v}\Big).$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass m Beobachtungen in der Reihenfolge auftreten, in der sie beobachtet werden, ist

$$\prod_{i=1}^{m} \Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} exp\Big(\frac{-u_i^2}{2v}\Big)\Big]. \tag{3.9}$$

Bei Verwendung der Maximum-Likelihood-Methode ist die beste Schätzung von v der Wert, der diesen Ausdruck maximiert. Die Maximierung eines Ausdrucks ist äquivalent zu der Maximierung des Logarithmus des Ausdrucks. Nehmen wir den Logarithmus von dem Ausdruck in (3.9) und ignorieren konstante multiplikative Faktoren, dann reicht es, folgenden Ausdruck zu maximieren:

$$\sum_{i=1}^{m} \Big[- ln(v) - \frac{u_i^2}{v}\Big] \tag{3.10}$$

oder

$$-mln(v) - \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i^2}{v}.$$

Leiten wir diesen Ausdruck nach v ab und setzen das Ergebnis gleich Null, so sehen wir, dass der Maximum likelihood Schätzer von v

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_i^2$$

ist. Dieser Maximum likelihood Schätzer ist jener, den wir in Formel (3.3) verwendet haben. Der entsprechende unverzerrte Schätzer ist der gleiche mit m statt $m-1$.
Wir überlegen nun, wie wir die Maximum-Likelihood-Methode verwenden können, um die Paramter zu bestimmen, wenn GARCH(1,1) oder andere Modelle zur Bestimmung der Volatilität verwendet werden. Wir definieren $v_i = \sigma_i^2$ als den Schätzer für die Varianz an Tag i. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der von der Varianz abhängigen u_i normal ist. Eine ähnliche Analyse wie oben erwähnt, zeigt, dass die besten Parameter die sind, die

$$\prod_{i=1}^{m} \Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi v_i}} exp\Big(\frac{-u_i^2}{2v_i}\Big)\Big]$$

maximieren. Verwenden wir den Logarithmus, sehen wir, dass dies äquivalent zur Maximierung von

$$\sum_{i=1}^{m}\Big[-ln(v)-\frac{u_i^2}{v_i}\Big] \tag{3.11}$$

ist. Das ist der gleiche Ausdruck wie (3.10), mit Ausnahme, dass v durch v_i ersetzt wurde. Wir suchen iterativ, um die Parameter für das Modell zu finden, die den Ausdruck (3.11) maximieren.
Ein alternativer Ansatz zur Schätzung von Parametern in dem GARCH(1,1) Verfahren ist als "Variance-Targeting"bekannt.Dies beinhaltet das Gleichsetzen der langfristigen durchschnittlichen Varianzrate V_L und der aus den Daten berechneten Stichprobenvarianz (oder eines anderen Wertes, der als angemessen erachtet wird). Der Wert ω entspricht $V_L(1-\alpha-\beta)$ und es müssen nur mehr zwei Parameter bestimmt werden.
Wenn das EWMA-Modell benützt wird ist der Berechnungsprozess relativ simpel. Wir setzen $\omega = 0$, $\alpha = 1-\lambda$ und $\beta = \lambda$ und dadurch muss nur mehr ein Wert berechnet werden.
Sowohl die GARCH(1,1) als auch EWMA-Methode können mithilfe der Solver-Routine in Excel implementiert werden, um nach den Werten der Parameter zu suchen, die die Maximum-likelihood Funktion maximieren. Für EWMA-Modelle ist das Schätzen der Parameter einfacher. Wir setzen $\omega = 0$, $\alpha = 1-\lambda$ und $\beta = \lambda$. Dadurch muss nur ein Parameter ermittelt werden.

GARCH-Modell für die Zukunft

Die Varianzrate, die am Ende des Tages $n-1$ für den Tag n geschätzt wird, wenn GARCH(1,1) benützt wird, ist

$$\sigma_n^2 = (1-\alpha-\beta)V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2,$$

sodass

$$\sigma_n^2 - V_L = \alpha(u_{n-1}^2 - V_L) + \beta(\sigma_{n-1}^2 - V_L)$$

ist. An Tag $n+t$ in der Zukunft haben wir

$$\sigma_{n+t}^2 - V_L = \alpha(u_{n+t-1}^2 - V_L) + \beta(\sigma_{n+t-1} - V_L).$$

Der erwartete Wert für u_{n+t-1}^2 ist σ_{n+t-1}^2. Daher gilt

$$\mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha+\beta)\mathbb{E}[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L].$$

Verwenden wir diese Gleichung wiederholt, ergibt das

$$\mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha+\beta)^t(\sigma_n^2 - V_L),$$

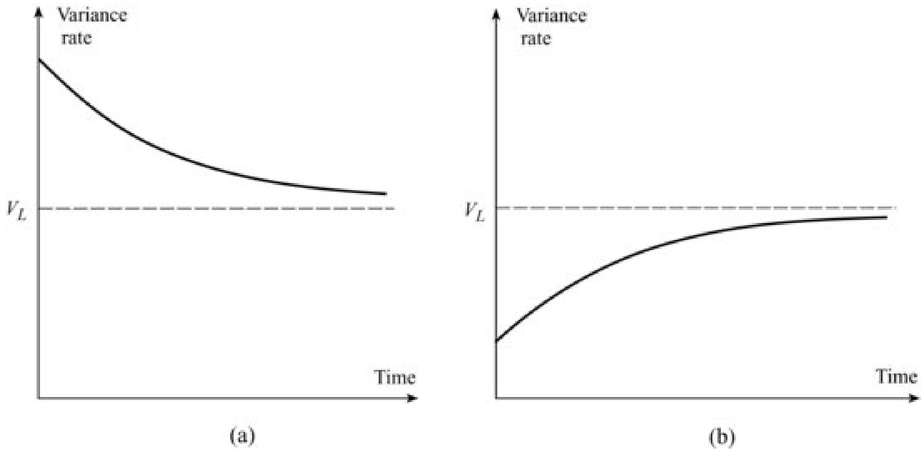
oder

$$\mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2] = V_L + (\alpha+\beta)^t(\sigma_n^2 - V_L). \tag{3.12}$$

Diese Gleichung sagt die Volatilität für Tag $n+t$ voraus, wobei sie die Information benützt, die am Ende von Tag n-1 verfügbar ist.
Ist in der Gleichung (3.12) $\alpha+\beta = 1$, zeigt das GARCH(1,1)-Modell, dass die zukünftige langfristige Varianzrate der jetzigen Varianzrate entspricht. Für den Fall $\alpha+\beta < 1$ wird der Endterm in der Gleichung mit steigendem t zunehmend kleiner.

Die nachstehende Abbildung 3.1 zeigt den erwarteten Pfad der Varianz für Situationen, in denen sich die aktuelle Varianzrate von V_L unterscheidet.
Graphik a) zeigt den erwarteten Pfad der Varianzrate, wenn die jetzige Varianzrate über der langfristigen durchschnittlichen Varianzrate ist und Graphik b) zeigt de Fall, wenn sie unter der langfristigen durchschnittlichen Varianzrate ist.
Wie zuvor erwähnt, zeigt die Varianzrate eine Mean Reversion mit einem Niveau von V_L und einer Intensität von $1-\alpha-\beta$. Unsere Prognose für die zukünftige Varianzrate tendiert in Richtung V_L, wenn wir weiter in die Zukunft schauen.

Abbildung 3.1: erwartete Weg der Varianzrate, wenn die jetzige Varianzrate a) über der langfristigen Varianzrate ist oder b) darunter ist.



Diese Analyse unterstreicht den Punkt, dass wir $\alpha+\beta < 1$ für einen stabilen GARCH(1,1)-Prozess brauchen. Wenn $\alpha+\beta < 1$ gilt, ist das Gewicht der langfristigen durchschnittlichen Varianz negativ und der Prozess bewegt sich vom Mittelwert weg anstatt sich diesem anzunähern.

Struktur der Volatilität

Nehmen wir an, es ist Tag n. Wir definieren:

$$V(t) = \mathbb{E}(\sigma_{n+t}^2)$$

und

$$a = ln\frac{1}{\alpha + \beta}.$$

Damit können wir die Gleichung (3.3) umformen zu:

$$V(t) = V_L + e^{-at}[V(0) - V_L].$$

$V(t)$ ist in dieser Formel eine Schätzung der momentanen Varianzrate in t Tagen. Die durchschnittliche Varianzrate zwischen dem Tag heute und Zeitpunkt T ist

$$\frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt = V_L + \frac{1 - e^{-aT}}{aT}[V(0) - V_L].$$

Je länger die Laufzeit T der Option, desto näher ist dies an V_L. Wir definieren $\sigma(T)$ als die jährliche Volatilität, die verwendet werden soll, um eine T-Tage Option unter GARCH(1,1) zu bewerten. Nehmen wir an, dass es 252 Tage pro Jahr gibt(siehe Unterkapitel **Umwandlung zu anderen Zeiteinheiten**), so ist $\sigma(T)$ 252-mal die durchschnittliche Varianzrate pro Tag, sodass:

$$\sigma(T)^2 = 252\Big\{V_L + \frac{1 - e^{-aT}}{aT}[V(0) - V_L]\Big\} \tag{3.13}$$

Liegt die jetzige Volatilität über der langfristigen durchschnittlichen Volatilität, so ermittelt das GARCH(1,1)-Modell eine fallende Laufzeitstruktur der Volatilität. Liegt die jetzige Volatilität hingegen unter der langfristigen durchschnittlichen Voltatilität, so bestimmt es eine steigende Laufzeitstruktur der Volatilität.

4 Korrelation

4.1 Einleitung

Um besser zu verstehen, was Korrelation bedeutet, nehmen wir an, dass eine Firma von zwei verschiedenen Marktavariablen abhängig ist. Für beide Variablen gilt, dass wir 15 Mio. Euro einnehmen, wenn eine Erhöhung der Standardabweichung geschieht, und wir verlieren 15 Mio. Euro, wenn eine Verminderung der Standardabweichung geschieht. Je nach Korrelation können wir zwischen 3 verschiedenen Fällen unterscheiden.
Im ersten Fall haben beide Variablen eine hohe positive Korrelation. Dadurch ist das Risiko der Firma sehr groß, da bei dem Verlust der einen Variable wahrscheinlich auch ein Verlust der anderen Variable folgt. Sind die beiden Variablen hingegen unkorreliert (das bedeutet, dass die Korrelation gleich Null ist), so ist das Risiko der beiden Variablen unabhängig, aber doch vorhanden. Im dritten Fall haben die Variablen eine hohe negative Korrelation haben. Daraus folgt, dass das Risiko sehr gering ist, da der Verlust einer Variable häufig einen Gewinn der Anderen verursacht. Dieses Beispiel zeigt, wie wichtig es für einen Risiko Manager ist, Korrelationen zwischen den Änderungen in Marktvariablen zu berechnen.

4.2 Definition der Korrelation

Der Korrelation ρ zwischen zwei Variablen V_1 und V_2 ist definiert als

$$\rho = \frac{\mathbb{E}[V_1, V_2] - \mathbb{E}[V_1]\mathbb{E}[V_2]}{SD[V_1]SD[V_2]},$$

wobei $\mathbb{E}[\cdot]$ den Erwartungswert und $SD[\cdot]$ die Standardabweichung beschreibt. Wenn keine Korrelation besteht ist $\mathbb{E}[V_1, V_2] = \mathbb{E}[V_1]\mathbb{E}[V_2]$ und dadurch $\rho = 0$. Falls $V_1 = V_2$ steht im Zähler und im Nenner ein äquivalenter Begriff für die Varianz, und dadurch ist $\rho = 0$.
Die Kovarianz zwischen zwei Variablen V_1 und V_2 ist definiert als:

$$cov(V_1, V_2) = \mathbb{E}[V_1, V_2] - \mathbb{E}[V_1]\mathbb{E}[V_2] \tag{4.1}$$

Dadurch kann die Korrelation als

$$\rho = \frac{cov(V_1, V_2)}{SD[V_1]SD[V_2]}$$

dargestellt werden. Obwohl es einfacher ist, eine Aussage über die Bedeutung einer Korrelation zu formulieren als eine Kovarianz, werden sich Kovarianzen als grundlegende Variablen unserer Analyse herausstellen. Eine Analogie hierbei ist, dass Varianzraten die grundlegenden Variablen für die EWMA- und GARCH-Methoden in Kapitel 3 waren, obwohl es einfacher ist, eine Aussage über Volatilitäten zu finden.

4.2.1 Korrelation und Unabhängigkeit

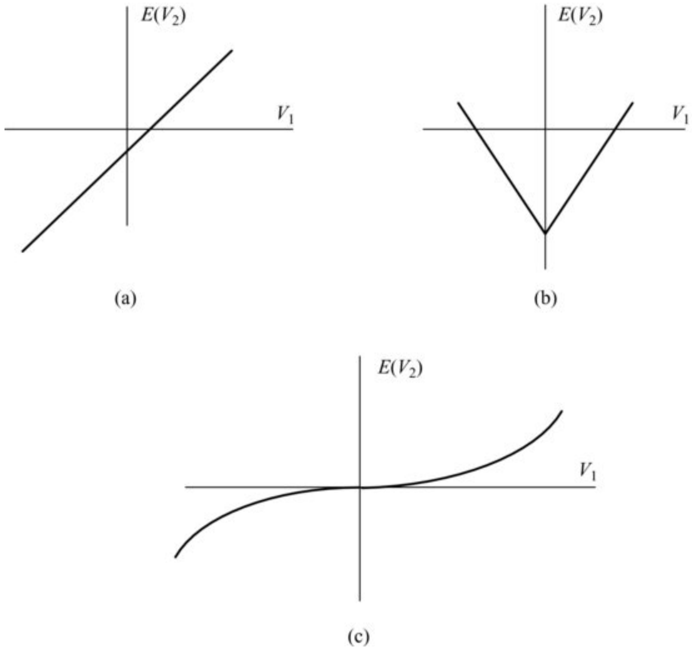
Zwei Variablen werden als statistisch unabhängig definiert, wenn das Wissen über eine davon die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die andere nicht beeinflusst. Formal sind V_1und V_2 unabhängig, wenn:

$$f(V_2|V_1 = x) = f(V_2)$$

für alle x gilt, wobei $f(\cdot)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschreibt.
Wenn der Korrelationskoeffizient zwischen zwei Variablen Null ist, bedeutet dies jedoch nicht, dass die beiden Variablen auch unabhängig sind. Wir können dies an einem einfachen Beispiel zeigen.
Angenommen, es gibt drei gleich wahrscheinliche Werte für V_1: −1, 0 und +1. Wenn $V_1 = -1$ oder $V_1 = +1$ dann ist $V_2 = 1$. Wenn $V_1 = 0$, dann ist $V_2 = 0$. In diesem Fall besteht eindeutig eine Abhängigkeit zwischen V_1 und V_2. Wenn wir den Wert von V_1 beobachten, kennen wir den Wert von V_2. Auch eine Kenntnis des Wertes von V_2 veranlasst uns, unsere Wahrscheinlichkeitsverteilung für V_1 zu ändern. Der Korrelationskoeffizient zwischen V_1 und V_2 ist jedoch Null.
Dieses Beispiel unterstreicht, dass der Korrelationskoeffizient eine bestimmte Art der Abhängigkeit zwischen zwei Variablen misst. Es gibt viele andere Möglichkeiten, wie zwei Variablen in Beziehung gesetzt werden können.
Wir können die Art der Abhängigkeit zwischen V_1 und V_2 durch Plotten von $\mathbb{E}(V_1)$ gegen V_1 charakterisieren. Drei Beispiele sind in Abbildung (4.1) dargestellt. Abbildung 4.1(a) zeigt die lineare Abhängigkeit, wobei der erwartete Wert von V_2 linear von V_1 abhängt. Abbildung 4.1(b) zeigt eine V-förmige Beziehung zwischen dem erwarteten Wert von V_2 und V_1 (dies ähnelt dem Beispiel, das wir gerade betrachtet haben). Eine symmetrische V-förmige Beziehung, auch wenn sie stark ist, führt zu einem Korrelationskoeffizienten von Null. Abbildung 4.1(c) zeigt eine Art von Abhängigkeit, die häufig auftritt,wenn V_2 und V_1 prozentuelle Änderungen in finanziellen Variablen sind. Für die normalerweise angetroffenen Werte V_1 gibt es nur eine sehr geringe Beziehung zwischen V_1 und V_2. Extremwerte von V_1 führen jedoch tendenziell zu Extremwerten von V_2 (dies könnte aufgrund zunehmenden Korrelationen

unter angespannten Marktbedingungen sein).

Abbildung 4.1: Beispiele für die Abhängigkeit von V_2 zu V_1



4.2.2 Untersuchen der Korrelation

In Kapitel 3 haben wir uns damit beschäftigt, wie wir EWMA- und GARCH-Modelle verwenden können, um die Varianzrate einer Variable zu modellieren. Nun können wir einen ähnlichen Ansatz verwenden, um die Kovarianzrate zwischen zwei Variablen zu modellieren. Die tägliche Varianzrate einer Variable ist die Varianz der täglichen Renditen. In ähnlicher Weise wird die Kovarianzrate pro Tag zwischen zwei Variablen als die Kovarianz zwischen den täglichen Erträgen der Variablen definiert.
Nehmen wir an, dass X_i und Y_i die Werte von zwei Variablen X und Y am Ende von Tag i sind. Die Rendite der Variablen an Tag i sind:

$$x_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}} \qquad\qquad y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}$$

Die Kovarianrate zwischen X und Y an Tag n ist durch Gleichung (3.1)

$$cov_n = \mathbb{E}[x_n y_n] - \mathbb{E}y_n$$

gegeben. Wie schon in Abschnitt 3.1 erklärt, gehen Risikomanager davon aus, dass die erwartete Änderung einer Variable an einem Tag annähernd Null ist und dadurch bei der Berechnung vernachlässigt werden kann. Dies bedeutet, dass die Kovarianzrate pro Tag zwischen Xund Y an Tag n angenommen wird als

$$cov_n = \mathbb{E}[x_n y_n]$$

Verwenden wir nun für die letzten m Beobachtungen die gleichen Gewichte für x_i und y_i, so erhalten wir die Schätzung

$$cov_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_{n-i} y_{n-i} \tag{4.2}$$

Ein ähnliches Gewichtungsschema für Varianzen gibt einen Schätzer für die Varianzrate an Tag n für die Variable X als

$$var_{x,n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_{n-i}^2$$

und für die Variable Y als

$$var_{y,n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_{n-i}^2$$

Der Schätzer für die Korrelation an Tag n ist

$$\frac{cov_n}{\sqrt{var_{x,n} var_{y,n}}}$$

EWMA

Die meisten Risikomanager stimmen darin überein, dass Beobachtungen von vor langer Zeit nicht so viel Gewicht haben sollten wie die jüngsten Beobachtungen. In Kapitel 3 haben wir die Verwendung des EWMA-Modells (Exponential Weighted Moving Average) für Varianzen erörtert. Wir haben gesehen, dass es zu Gewichten führt, die exponentiell abnehmen, wenn wir uns in der Zeit zurück bewegen. Ein ähnliches Gewichtungsschema kann für Kovarianzen verwendet werden. Die Formel zur Schätzung der Kovarianz im EWMA-Modell ähnelt der in Gleichung (3.6) für Varianzen:

$$cov_n = \lambda cov_{n-1} + (1-\lambda) x_{n-1} y_{n-1}$$

Eine ähnliche Analyse wie die für das EWMA-Volatilitätsmodell zeigt, dass das $x_{n-i} y_{n-i}$ zugewiesene Gewicht mit zunehmendem i abnimmt (d. h. Wenn wir in der Zeit zurückgehen). Je niedriger der Wert von λ, desto höher ist das Gewicht, das den jüngsten Beobachtungen beigemessen wird.

GARCH

GARCH-Modelle können auch zu Schätzungen von Kovarianzraten und zu Vorhersagen des zukünftigen Niveaus von Kovarianzraten verwendet werden. Zum Beispiel das GARCH (1,1) -Modell zum Aktualisieren einer Kovarianzrate zwischen X und Y ist

$$cov_n = \omega + \alpha x_{n-1} y_{n-1} + \beta cov_{n-1}$$

Diese Formel gibt, wie ihr Gegenstück in Gleichung (3.8) eine Schätzung der neuesten Varianz an. Dabei verteilt sie Gewichte an eine langfristige durchschnittliche Kovarianz, an einige der neuesten Kovarianzschätzung und an einige der neuesten Beobachtung zur Kovarianz. Die langfristige durchschnittliche Kovarianzrate beträgt $\omega/(1-\alpha-\beta)$. Gleiche Formeln wie in den Gleichungen (3.12) und (3.13) können entwickelt werden, um zukünftige Kovarianzraten vorherzusagen und die durchschnittliche Kovarianzrate für einen zukünftigen Zeitpunkt zu berechnen.

Stabilitätsbedingungen für Kovarianzen

Nachdem die Varianz- und Kovarianzraten für eine Reihe von Marktvariablen berechnet wurden, kann eine Varianz-Kovarianz-Matrix erstellt werden. Wenn $i \neq j$ zeigt das (i, j)-te Element dieser Matrix die Kovarianzrate zwischen Variable i und Variable j. Wenn $i = j$ zeigt es die Varianzrate der Variablen. Nicht alle Varianz-Kovarianz-Matrizen sind intern stabil. Die Bedingung für eine $N \times N$ Varianz-Kovarianz-Matrix Ω intern stabil zu sein, ist

$$\omega^T \Omega \omega \geq 0, \tag{4.3}$$

wobei ω ein $N \times 1$ Vektor ist und ω^T die Transponierte von ω ist. Eine Matrix, die diese Bedingung erfüllt, ist auch als positiv semidefinit bekannt. Um zu verstehen, warum die Bedingung in (4.3) gelten muss, nehmen wir an, dass ω der Spaltenvektor $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_N)$ ist. Der Ausdruck $\omega^T \Omega \omega$ ist die Varianzrate von $\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2 + ... + \omega_n z_N$ ist, wobei z_i den Wert der Variable i beschreibt. Dadurch folgt, dass es nicht negativ sein kann.

Um sicherzustellen, dass eine positiv-semidefinite Matrix erzeugt wird, sollten Varianzen und Kovarianzen konsistent berechnet werden. Wenn zum Beispiel Varianzraten berechnet werden, indem den letzten Datenelementen das gleiche Gewicht gegeben wird, sollte dasselbe für Kovarianzraten gemacht werden. Wenn Varianzraten unter Verwendung eines EWMA-Modells mit $\lambda = 0.89$ aktualisiert werden, sollte dasselbe für Kovarianzraten durchgeführt werden. Die stabile Aktualisierung einer Varianz-Kovarianz-Matrix mithilfe eines GARCH-Modells ist schwieriger und erfordert ein multivariates GARCH-Modell.

4.2.3 Multivariate Nomalverteilung

Wir beginnen mit der Betrachtung einer bivariaten Normalverteilung, bei der es nur zwei Variablen V_1 und V_2 gibt. Angenommen wir wissen V_1. Als Voraussetzung wählen wir, dass der Wert von V_2 normal mit Mittel

$$\mu_2 + \rho\sigma_2 \frac{V_1 - \mu_1}{\sigma_1}$$

und Standardabweichung

$$\sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}$$

ist. Hier sind μ_1 und μ_2 das unbedingte Mittel von V_1 und V_2, σ_1 und σ_2 sind ihre unbedingten Standardabweichungen, und ρ ist der Korrelationskoeffizient zwischen V_1 und V_2.

Zufallsstichproben aus Normalverteilungen generieren

Wir unterscheiden nun einige Fälle.
Wenn Stichproben ϵ_1 und ϵ_2 aus einer bivariaten Normalverteilung (bei der beide Variablen einen Mittelwert von Null und eine Standardabweichung von Eins haben) erforderlich sind, wird wie folgt vorgegangen. Es werden unabhängige Stichproben z_1 und z_2 aus einer univariaten standardisierten Normalverteilung gegeben. Die benötigten Stichproben ϵ_1 und ϵ_2 werden dann wie folgt berechnet

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= z_1 \\ \epsilon_2 &= \rho z_1 + z_2 \sqrt{1 - \rho^2}, \end{aligned}$$

wobei ρ der Korrelationskoeffizient in der bivariaten Normalverteilung ist.
Als nächstes betrachten wir die Situation, in der wir Stichproben aus einer multivariaten Normalverteilung benötigen (wobei alle Variablen einen Mittelwert von Null und eine Standardabweichung von Eins haben) und der Korrelationskoeffizient zwischen Variable i und Variable j ρ_{ij} ist. Zunächst werden n unabhängige Variablen $z_i (1 \leq i \leq n)$ aus univariaten standardisierten Normalverteilungen untersucht. Die benötigten Stichproben sind $\epsilon_i (1 \leq i \leq n)$, wobei

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} z_k$$

ist, und die α_{ik} die gewählten Parameter sind, um die korrekte Varianz und die korrekte Korrelation für die ϵ_i zu bestimmen. Für $i \leq j \leq i$ muss

$$\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik}^2 = 1$$

gelten und für alle $j < i$

$$\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \rho_{ij}.$$

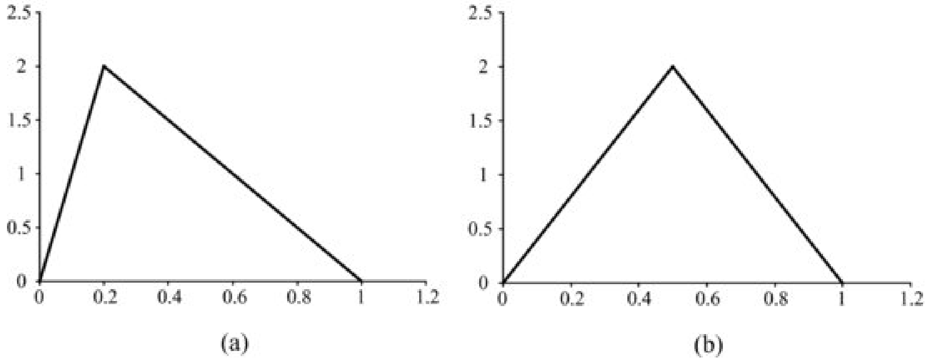
Die erste Stichprobe ϵ_1 wird gleich z_1 gesetzt. Diese Gleichungen können so gelöst werden, dass ϵ_2 durch z_1 und z_2 berechnet wird, ϵ_3 wird durch z_1, z_2 und z_3 berechnet, und so weiter. Das Verfahren ist als Cholesky-Zerlegung bekannt.

5 Copulas

5.1 Einleitung

Um besser zu verstehen können, welchen Sinn Copulas haben, betrachten wir zwei korrelierte Variablen, V_1 und V_2. Die Randverteilung von V_1 (manchmal auch als bedingungslose Verteilung bezeichnet) ist ihre Verteilung, vorausgesetzt, wir wissen nichts über V_2; In ähnlicher Weise ist die Randverteilung von V_2 ihre Verteilung, vorausgesetzt, wir wissen nichts über V_1. Angenommen, wir haben die Randverteilungen von V_1 und V_2 geschätzt. Wie können wir eine Annahme über die Korrelationsstruktur zwischen den beiden Variablen treffen, um ihre gemeinsame Verteilung zu definieren? Wenn die Randverteilungen von V_1 und V_2 normal sind, ist eine bequeme und einfach zu handhabende Annahme, dass die gemeinsame Verteilung der Variablen eine bivariate Normalverteilung ist.(Die Korrelationsstruktur zwischen den Variablen ist dann wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben.) Ähnlich Annahmen sind für einige andere Randverteilungen möglich. Oft gibt es jedoch keine natürliche Möglichkeit, eine Korrelationsstruktur zwischen zwei Randverteilungen zu definieren. Hier kommen die Copulas ins Spiel.

Abbildung 5.1: Dreiecksverteilungen für V_2 und V_1



Nehmen wir als Beispiel für die Anwendung von Copulas an, dass die Variablen V_1 und V_2 die in Abbildung 5.1 gezeigten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen haben. Beide Variablen haben Werte zwischen 0 und 1. Die Dichtefunktion für V_1 hat die Spitze bei 0,2. Die Dichtefunktion für V_2 hat die Spitze bei 0,5. Für beide Dichtefunktionen beträgt die maximale Höhe 2,0. Um eine sogenannte Gaußsche Copula zu

verwenden, bilden wir V_1 und V_2 in neue Variablen U_1 und U_2 ab, die Standardnormalverteilungen haben. (Eine Standardnormalverteilung ist eine Normalverteilung mit dem Mittelwert Null und der Standardabweichung Eins). Die Zuordnung erfolgt auf Perzentil-zu-Perzentil-Basis. Der Ein-Perzentil-Punkt der Verteilung von V_1 wird dem Ein-Perzentil-Punkt der Verteilung von U_1 zugeordnet. Der 10-Perzentil-Punkt der Verteilung von V_2 wird dem 10-Perzentil-Punkt der Verteilung von U_2 zugeordnet und wird auf ähnliche Weise abgebildet.
Die Variablen U_1 und U_2 haben Normalverteilungen. Wir gehen davon aus, dass sie gemeinsam bivariat normal sind. Dies impliziert wiederum eine gemeinsame Verteilung und eine Korrelationsstruktur zwischen V_1 und V_2. Das Wesentliche an Copulas ist daher, dass wir, anstatt eine Korrelationsstruktur zwischen V_1 und V_2 direkt zu definieren, dies indirekt tun. Wir bilden V_1 und V_2 in andere Variablen ab, die „gut verhaltene" Verteilungen haben und für die es einfach ist, eine Korrelationsstruktur zu definieren.
Die Korrelation zwischen U_1 und U_2 wird als Copula-Korrelation bezeichnet. Dies ist im Allgemeinen nicht dasselbe wie die Korrelation zwischen V_1 und V_2. Da U_1 und U_2 bivariat normalverteilt sind, ist der bedingte Mittelwert von U_2 linear abhängig von U_1 und die bedingte Standardabweichung von U_2 ist konstant. Ein ähnliches Ergebnis gilt jedoch im Allgemeinen nicht für V_1 und V_2.

5.2 Beispiele für Copulas

5.2.1 Produktcopula

Die einfachste Copula ist die Unabhängigkeitscopula, oder auch Produktcopula genannt: [4]

$$C(u_1, u_2, ..., u_n) = \prod_{i=1}^{n} u_i = u_1 * u_2 * ... * u_n$$

5.2.2 Gaußcopula

Die Normal- oder auch Gaußcopula wird durch die Standardnormalverteilung $\Phi()$ definiert:

$$C(u_1, u_2, ..., u_n) = F\Big(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), ..., \Phi^{-1}(u_n)\Big)$$

wobei F die gemeinsame Verteilungsfunktion des Zufallsvektors beschreibt. [4]

5.2.3 Gumbelcopula

Die Gumbelcopula wird über die Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus definiert: [3]

$$C_\lambda(u_1, u_2) = exp\Big(- \big((-lnu_1)^\lambda + (-lnu_2)^\lambda\big)^{\frac{1}{\lambda}}\Big)$$

5.3 Satz von Sklar

Satz. *Sei $F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ eine n-dimensionale Verteilungsfunktion mit eindimensionalen Randverteilungen $F_1, ..., F_n : \mathbb{R}^n \to [0,1]$. Dann existiert eine n-dimensionale Gauß-Copula C, sodass für alle $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n)).$$

Sind alle F_i stetig, so ist die Copula eindeutig. [1]

Literatur

[1] Niels Friewald. www.uni-muenster.de/Physik.TP/ lemm/seminarSS08/copula0506.pdf.

[2] John Hull. *Risk management and financial institutions*. Bd. 733. John Wiley & Sons, 2012.

[3] Roger B Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media, 2007.

[4] Wikipedia. de.wikipedia.org/wiki/Copula(Mathematik).

Abbildungsverzeichnis