



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

S E M I N A R A R B E I T

## Election Predictions

ausgeführt am

Institut für  
Finanz- und Versicherungsmathematik  
TU Wien

unter der Anleitung von

**Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan  
Gerhold**

durch

**Elisabeth Bräuer**

Matrikelnummer: 11701244

Wien, am 19.2.2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wahlvorhersagen/Wahlumfragen</b>	<b>4</b>
1.1	Allgemeines . . . . .	4
1.2	Erstellung der Vorhersagen . . . . .	7
1.3	Mögliche Gründe für Trumps Sieg entgegen der Prognosen . .	12
<b>2</b>	<b>Binäre Optionen</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Kritik durch Nassim Nicholas Taleb</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Kritik an Taleb durch Clayton</b>	<b>17</b>
4.1	Volatilität . . . . .	17
4.2	Arbitragefreiheit . . . . .	19
4.3	Underlying . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Conclusio</b>	<b>22</b>

# Einleitung

Ein Ereignis, das die Welt und besonders die Europäische Welt überrascht hat, war der Wahlsieg von Donald Trump 2016. „Die Zeit“ schrieb dazu am 9. November 2016:

Der Sieg Trumps kommt überraschend, er gewann entgegen anderslautenden Annahmen die meisten Swing States. Eigentlich war Clinton als Favoritin in die Wahl gegangen. [...] Im Wahlkampf hatte es mehrfach so ausgesehen, als ob das Rennen für Trump gelaufen sei – zugunsten Clintons.[1]

Auch David Remnick, Chef des „New Yorker“, gestand dem „Magazin Esquire“: „Unser Team hatte nichts für einen Trump-Sieg vorbereitet“.[2]

Dies war aus dem Grund so überraschend, da die Wahlprognosen mehrheitlich Clinton als Siegerin vorhergesehen hatten. Jedoch waren das nur Prognosen gewesen und die bergen bekanntermaßen eine gewisse Unsicherheit in sich. Die bekannteste Seite, die eine Wahlvorhersage veröffentlichte, war FiveThirtyEight. Diese Seite rühmte sich damit, bei den beiden vorherigen Präsidentschaftswahlen richtig gelegen zu sein. Dies änderte sich bei der Wahl 2016, wo sie, wie viele andere, mit ihrer Prognose daneben lagen und Clinton als Wahlsiegerin prognostizierten.[3]

Das animierte den Finanzmathematiker und Forscher in den Bereichen Statistik und Zufall Nassim Nicholas Taleb dazu, die Erstellung dieser Vorhersagen zu kritisieren. Taleb arbeitete früher als Spezialist für komplexe Finanzderivate, widmete sich dann aber der Wissenschaft. Der breiteren Öffentlichkeit wurde er mit seinem Buch „Der schwarze Schwan: Die Macht höchst unwahrscheinlicher Ereignisse“ bekannt. In diesem Buch geht er auf unerwartete Ereignisse ein, die den Finanzmarkt erschüttern können.[4]

Er schrieb 2017 ein Paper mit dem Namen „Election Predictions as Martingales: An Arbitrage Approach“, in dem er Vorschläge dazu gibt, wie man die großen Schwankungen in den Vorhersagen eliminieren kann. Die Behauptung,

auf der er sein Paper aufbaut, ist ein Standardresultat der Option-Pricing Theorie. Jedenfalls behauptet das Taleb.[5]

Im Jahr 2019 reagierte der Mathematiker Aubrey Clayton in seinem Paper „Election predictions are arbitrage-free: response to Taleb“ auf dessen Aussagen. Darin zeigt er, dass Wahlvorhersagen entgegen Talebs Behauptungen arbitragefrei sind, und dass das Standardresultat auf dem Talebs Argumente basieren falsch ist. Stattdessen begründet er, wieso die Schwankungen in den Vorhersagen normal sind und dass man diese nicht durch mathematische Tricks beheben kann. Auch die im Titel von Talebs Paper angesprochene Arbitrage sei seiner Meinung nach nicht möglich.[6]

# Kapitel 1

## Wahlvorhersagen/Wahlumfragen

### 1.1 Allgemeines

Während im Englischen meist das Wort „election predictions“ verwendet wird, benutzt man im Deutschen eher „Wahlumfrage“ als „Wahlvorhersage“. Bereits bei diesen unterschiedlichen Wörtern sieht man, dass von beiden Dingen andere Sachen erwartet werden. Während bei Wahlumfragen nicht die Forderung gestellt wird, dass der Gewinner der Wahl bestimmt wird, ist bei Wahlvorhersagen genau das der Sinn. In Österreich werden Wahlumfragen daher meistens als sogenannte „Sonntagsfrage“ deklariert.

Wahlvorhersagen sind ein bedeutendes Mittel des politischen Journalismus. Sie zeigen die momentane politische Lage in einem Land. Daher werden sie von verschiedenen Instituten zu verschiedenen Zeitpunkten erstellt, um einen Trend im Laufe der Zeit festzustellen.[6]

Wie erstellen nun Institute wie zum Beispiel FiveThirtyEight ihre Wahlprognosen?

FiveThirtyEight hat drei verschiedene Arten von Vorhersagen produziert:

- Polls-plus
- Polls-only
- Now-cast.

Polls-plus Vorhersagen kombinieren Umfragen mit wirtschaftlichen und gesellschaftlichen Daten. Später wollen wir auf diesen Sachverhalt näher eingehen. Polls-only basieren allein auf den Umfragewerten, die Homepage von FiveThirtyEight betitelt sie als „What you see is what you get“. Eine Now-cast Vorhersage entspricht der Sonntagsfrage in Österreich. Der Nachteil an diesen Vorhersagen ist, dass diese sehr stark schwanken und aggressiv auf

Änderungen in Umfragen reagieren.[7]

Zuerst wollen wir uns die fertigen Polls-only Vorhersagen anhand der Präsidentenwahl 2016 ansehen. Wie in der nachfolgenden Abbildung ersichtlich, gab es in den letzten fünf Monaten vor der Wahl große Schwankungen bei den Wahrscheinlichkeiten. Während die Wahrscheinlichkeit von Hillary Clinton die Wahl zu gewinnen zwischen 53 und 89 Prozent schwankte, war die prognostizierte Chance, dass Donald Trump gewinnt, immer unter der 50-Prozent-Marke. Die Wahrscheinlichkeit des dritten Kandidaten Johnson, die Wahl zu gewinnen, blieb die ganzen fünf Monate lang konstant bei 0.1 Prozent. In der folgenden Grafik können wir den Verlauf der Prognosen betrachten. Offensichtlich waren die Prognosewerte im Laufe der Zeit ziemlich instabil.

### How the forecast has changed

We'll be updating our forecasts every time new data is available, every day through Nov. 8.

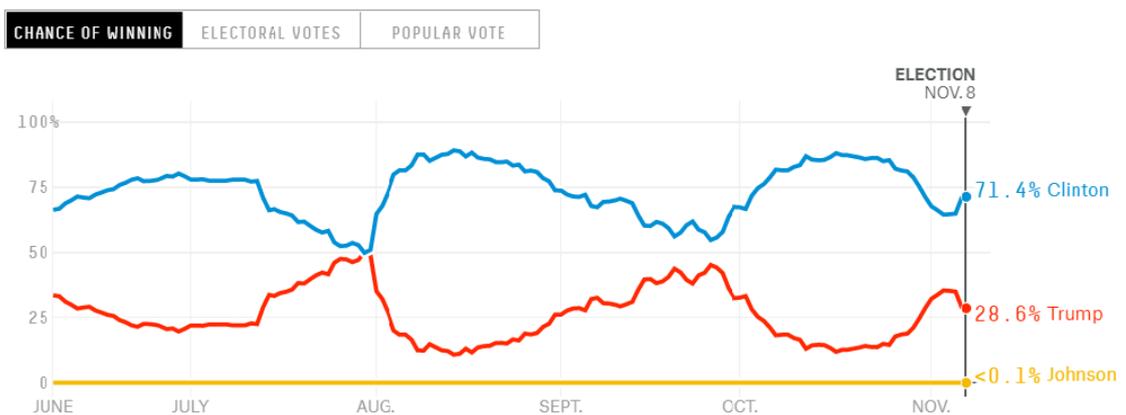


Abbildung 1.1: Wahrscheinlichkeit eines Kandidaten, die Wahl zu gewinnen Polls-only[3]

Nun kommen wir zu den Polls-plus Vorhersagen. Die Veränderungen der Vorhersagen, sichtbar in Abbildung 1.2, gleichen jenen der Polls-only, jedoch geben diese Clinton eine noch größere Chance, die Wahl zu gewinnen. Offensichtlich wurden hier also Anpassungsmethoden vorgenommen um die Prognosen zu glätten.

Definitiv einen Unterschied sowohl im Bezug auf die Polls-plus als auch auf die Polls-only Vorhersagen sieht man in der Grafik 1.3, die die Now-cast Vorhersagen beschreibt. Diese schwanken deutlich mehr. Anfang August liegt laut dieser die Chance Clintons zu gewinnen bei über 90 Prozent, wohingegen Trump gegen Ende Juli sogar in einem kurzen Zeitraum Clinton überholen kann.

### How the forecast has changed

We'll be updating our forecasts every time new data is available, every day through Nov. 8.

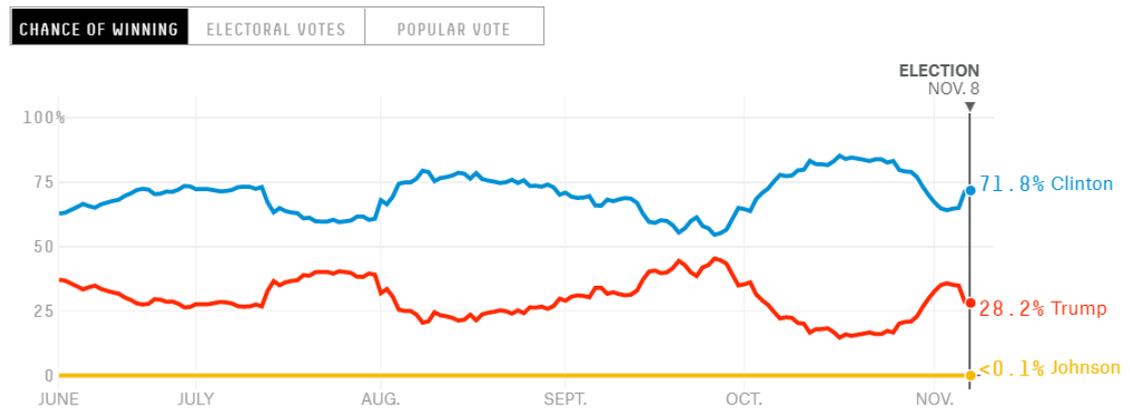


Abbildung 1.2: Wahrscheinlichkeit eines Kandidaten, die Wahl zu gewinnen  
Polls-plus[8]

### How the forecast has changed

We'll be updating our forecasts every time new data is available, every day through Nov. 8.

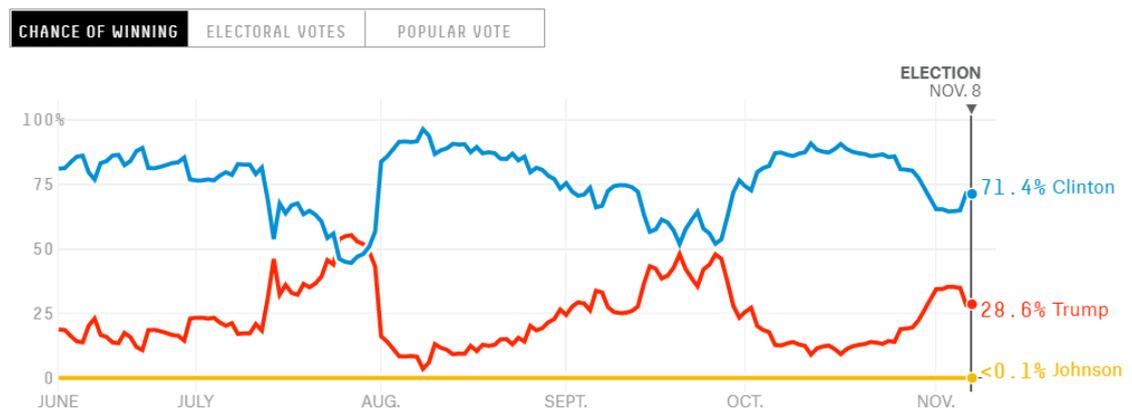


Abbildung 1.3: Wahrscheinlichkeit eines Kandidaten, die Wahl zu gewinnen  
Now-cast[9]

Nun kommen wir nochmal etwas genauer zu den Unterschieden zwischen den Prognosetypen. Polls-plus ziehen im Gegensatz zu Polls-only am Anfang der Wahlperiode der dritten Partei Stimmen ab. Sowohl Polls-plus als auch Polls-only berücksichtigen die Erkenntnisse aus den letzten Wahlen in der Vergangenheit, Polls-plus jedoch mehr. Je näher die Wahl rückte, desto stärker näherten sich die beiden Modelle einander an.[7]

## 1.2 Erstellung der Vorhersagen

Als nächstes wollen wir nun die Erstellung der Vorhersagen betrachten. Die Homepage von FiveThirtyEight gibt vier Schritte an, nach denen Vorhersagen erstellt werden.

Als Schritt 1 wird Umfragewerte sammeln, bewerten und Durchschnittswerte bilden genannt. Laut FiveThirtyEight werden fast alle Umfragen verwendet. Falls eine Umfrage nicht verwendet wird, hat das einen der folgenden Gründe:

- Die Umfrage ist so neu, dass es zeitlich noch nicht möglich war diese zu berücksichtigen.
- Die Umfrage gehört einer politischen Kampagne an und ist daher nicht objektiv.
- Die Firma, die diese Umfrage erstellt hat, ist auf einer „banned pollster list“, das ist eine Liste, die unseriöse Umfragenfirmen listet.
- Die Umfrage ist unter einem anderen Namen verwendet worden, aber sehr wohl berücksichtigt worden.

Es werden alle Umfragen, die die ganze USA betreffen, als auch Umfragen, die in einzelnen oder mehreren Staaten durchgeführt wurden, gesammelt. Dabei werden als unseriös bekannte Quellen ausgeschlossen. Weiters wird angegeben, welche Umfragen bevorzugt verwendet werden. Umfragen mit Johnson werden denen ohne vorgezogen, es wird die Zahl der Wähler genommen, die wahrscheinlich wählen gehen und nicht die wählen dürfen. Nun wird ein Durchschnittswert für jeden Staat berechnet, wobei die Umfragen nach drei Faktoren gewichtet werden. Zuerst nach einem Ranking der Meinungsforscher und Firmen, das von FiveThirtyEight erstellt wurde. Umfragen, die eine größere Personengruppe befragt haben, sind natürlich sicherer und werden daher stärker gewichtet. Der dritte Punkt ist das Datum der Umfrage. Neuere Umfragen sind aussagekräftiger und damit wichtiger.

Im zweiten Schritt werden die Umfragen angepasst, wobei eine oder mehrere von fünf möglichen Anpassungen durchgeführt werden. Diese heißen:

- Likely voter adjustment
- Convention bounce adjustment (kommt nur in Polls-plus vor)
- Omitted third-party candidate adjustment
- Trend line adjustment
- House effects adjustment

Wir werden uns jedoch zuerst die zwei wichtigsten ansehen, „trend line adjustment“ und „house effect adjustment“.

Beim „trend line adjustment“ wird, falls bei einem Kandidaten in den letzten Wochen beziehungsweise Monaten ein Trend festgestellt wurde, dieser auf die Prognose fortgesetzt. Wenn also zum Beispiel Donald Trump in den vorherigen Wochen jeweils pro Woche um einen Prozentpunkt bei den Umfragen zugelegt hat, ist es sehr wahrscheinlich, dass dies in der darauffolgenden Woche ebenso passieren wird. Der Vergleich derselben Umfragen zu verschiedenen Zeitpunkten wird für jeden Kandidaten separat durchgeführt. Dadurch kann es passieren, dass alle 3 Kandidaten an Prozentpunkten zulegen. Dies ist der Fall, wenn sich zum Beispiel die Menschen, die zum vorherigen Zeitpunkt noch nicht gewusst haben, wen sie wählen sollen, festlegen. Diese Anpassung glättet natürlich die Vorhersagen. Die Frage, die man sich dabei natürlich stellen kann, ist, in wie weit man diesen Trend glätten sollte. In der Vergangenheit hat man gesehen, dass man am Anfang der Wahlperiode stärker glätten sollte und umso näher der Wahltag rückt desto weniger.

Beim „house effect adjustment“ dagegen werden Umfragen, die von Parteihängern produziert wurden, ausgeschlossen, da diese subjektiv gefärbt sind. In manchen Umfragen gibt es nur die Möglichkeit zwischen Clinton und Trump zu wählen. Daher werden diese Umfragen mithilfe des „Omitted third-party candidate adjustment“ angepasst. Dabei wird angenommen, dass die Wähler von Johnson zu gleichen Teilen von Trump und Clinton stammen. Diese Anpassung wird für jeden Staat einzeln vorgenommen, so kann man zwischen „Johnson freundlichen“ und „Johnson unfreundlichen“ Staaten differenzieren und somit dementsprechend mehr oder weniger Prozentpunkte von Trump und Clinton abziehen.

Da, wie bereits vorher erwähnt, fast alle Umfragen verwendet werden, muss man die Umfragen, die von allen registrierten Wählern ausgehen und jene, die nur die Wähler betrachten, die wahrscheinlich wählen gehen werden, vergleichen können. Das bewirkt das „Likely voters adjustment“. Die Umfragen, die von allen registrierten Wählern ausgehen, werden in Umfragen verändert, die nur die wahrscheinlichen Wähler betrachten. Wie man laut FiveThirtyEight bereits aus der Vergangenheit weiß, schneiden die Republikaner bei

den Umfragen, die nur die wahrscheinlichen Wähler berücksichtigen, um ein bis zwei Prozentpunkte besser ab. Diesen Fakt berücksichtigt jedoch nur die Polls-plus Vorhersage. Scheinbar hat diese Anpassung jedoch bei der Wahl 2016 eine nicht signifikante Rolle gespielt, da Clinton in den Umfragen mit den wahrscheinlichen Wählern nur geringfügig besser abgeschnitten hat. Nun kommen wir zur letzten Anpassung, die vorgenommen wird, genannt „Convention bounce adjustment“. Unmittelbar nachdem eine Partei ihren Parteitag abgehalten hat, steigt ihr Kandidat kurzfristig um zirka drei bis vier Prozentpunkte in den Umfragen. Dies ist jedoch nicht dauerhaft, sondern klingt bald danach wieder ab. Früher war der Effekt noch größer, doch auch heute darf man ihn durchaus nicht vernachlässigen. Diese Anpassung wird nur bei der Polls-plus Vorhersage durchgeführt.

Der Schritt 3 besteht nun darin, die Umfragen mit demographischen und wirtschaftlichen Daten zu kombinieren. Dann werden damit die Vorhersagen erstellt. Dabei werden zuerst die Stimmen der dritten Partei angepasst, da einige Wähler, die in den Umfragen zwar angegeben haben, die 3. kleine Partei zu wählen, ihre Stimmen dann jedoch als „verloren“ sehen und sich somit doch für eine der zwei größeren Parteien entscheiden. Daher werden einige der Stimmen der 3. Partei abgezogen und zu den noch unentschlossenen Wählern gezählt. Die noch unentschlossenen Wähler wiederum werden auf die beiden Parteien aufgeteilt, und zwar nicht proportional, sondern einfach die Hälfte der Wähler zu Partei 1 und die andere Hälfte zu Partei 2. Das klingt auf den ersten Blick nicht logisch, doch FiveThirtyEight gibt als Grund für dieses Verfahren an, dass diese Methode aufgrund von Erfahrungswerten das Verhalten der unentschlossenen Wähler besser trifft. Ein kleiner Teil dieser Stimmen wird auch der 3. Partei zugerechnet. Die Anpassung der Stimmen der dritten Partei wird nur beim Polls-plus Modell vorgenommen, Polls-only und Now-cast verändern diese Stimmen nicht.

Auch die Wähler, die sich noch nicht entschieden haben, werden in gleichen Teilen auf die zwei großen Parteien aufgeteilt. Am Anfang werden der dritten kleinen Partei keine Stimmen zugerechnet. Das ändert sich je näher der Tag der Wahl kommt. In manchen Staaten gibt es noch weitere Kandidaten, auch für diese wird ein kleiner Teil der Stimmen der noch Unentschlossenen reserviert.[7] Nun muss das Ergebnis bestimmt werden.

Dazu müssen wir erst das Wahlsystem der USA verstanden haben. Das Wahlsystem zur Präsidentenwahl der USA weicht stark vom österreichischen ab. In Österreich gewinnt der Kandidat mit den meisten Stimmen. Gezählt wird also die absolute Zahl an Stimmen. In der USA gibt es ein Abkommen zwischen den Bundesstaaten, genannt „National Popular Vote Interstate Compact“. Die Wahl des Präsidenten erfolgt nicht direkt, sondern indirekt, indem

zuvor ein Wahlkollegium, genannt „Electoral College“ gewählt wird. Dieses wiederum wählt den Bundespräsidenten. Je mehr Einwohner ein Staat hat, desto mehr Wahlmänner wählt dieser Staat ins Wahlkollegium. Ein oft kritischer Punkt ist, dass in den meisten Staaten nach dem Mehrheitsprinzip entschieden wird, welche Wahlmänner dorthin kommen. Das heißt: Gewinnt eine Partei die Wahl in einem gewissen Staat, so bekommt diese Partei alle diesem Staat zustehende Wahlmänner. Dieses Prinzip wenden 48 von 50 Staaten der USA an. Nur Maine und Nebraska schicken die Wahlmänner proportional zu der Prozentzahl ins Kollegium.[10]

Wie bereits vorhin erwähnt bevorzugt FiveThirtyEight bei der Erstellung der Prognose die Umfragen der einzelnen Staaten. Es gibt nun zwei Varianten wie die Prognose erstellt wird:

- top-down, das heißt man geht von den nationalen Umfragen aus und betrachtet dann erst die Umfragen der einzelnen Staaten
- bottom-up, hier wird das nationale Ergebnis mithilfe der Prognosen für die einzelnen Staaten erstellt.

Bei den letzten Präsidentschaftswahlen hat sich gezeigt, dass bottom-up genauere Ergebnisse erzielt. Five-Thirty-Eight verwendet beide und vermischt diese, gewichtet jedoch die bottom-up Prognose stärker. Wie werden dann die nationalen Umfragen noch verwendet? Um das trend line adjustment und house effects adjustment zu berechnen. Es werden noch weitere Anpassungen vorgenommen, doch auf die wollen wir hier nicht mehr genauer eingehen.

In Schritt 4 wird die Wahl tausende Male simuliert und damit die Unsicherheit der Prognose bestimmt. Die Unsicherheit der Prognose wird klarerweise immer kleiner je näher der Tag der Wahl rückt. Eine Sache, die oftmals vergessen wird, ist, dass das Ergebnis in den Staaten nicht unkorreliert ist. Gewinnt Donald Trump entgegen der Umfragen in einem bestimmten Staat, so ist es wahrscheinlicher als vorher, dass er auch entgegen anderer Umfragen in anderen Staaten gewinnt. Es ist aber sehr schwer diese Korrelation zu bestimmen. Falls eine Prognose diesen Fakt nicht berücksichtigt, wird sie die Chancen der Kandidaten zu gewinnen, falsch einschätzen. Es gibt drei mögliche Fehler beziehungsweise Unsicherheiten in den Prognosen:

- National error
- Demographic and regional error
- State-specific error.

Die Größe des nationalen Fehlers hängt von einigen Faktoren ab. Je größer die Zahl derer, die sich noch nicht entschieden haben, wen sie wählen werden,

desto größer wird der nationale Fehler sein. Dasselbe gilt für die Menschen, die die dritte Partei wählen wollen, aus dem vorher genannten Grund, nämlich, dass sich diese oft noch für eine der größeren Parteien entscheiden. Der letzte Punkt, der den nationalen Fehler maßgeblich beeinflusst ist, wie weit die Wahl entfernt ist. Der Fehler nimmt ab je näher der Tag der Wahl kommt. Da laut FiveThirtyEight die Nummer der Wähler, die noch nicht wissen wen sie wählen, und der Wähler, die Johnson wählen wollen, bei der Präsidentschaftswahl 2016 ungewöhnlich hoch war, ist auch der nationale Fehler sehr hoch gewesen.

Kommen wir demografischen und regionalen Fehler. Manche Staaten sind stärker korreliert als andere. Dies darf nicht unterschätzt werden. Hierzu hat FiveThirtyEight Korrelationsmatrizen erstellt. Eine Beispiel für so eine Korrelationsmatrix sieht man in der Grafik unterhalb.[7] Für jeden einzelnen

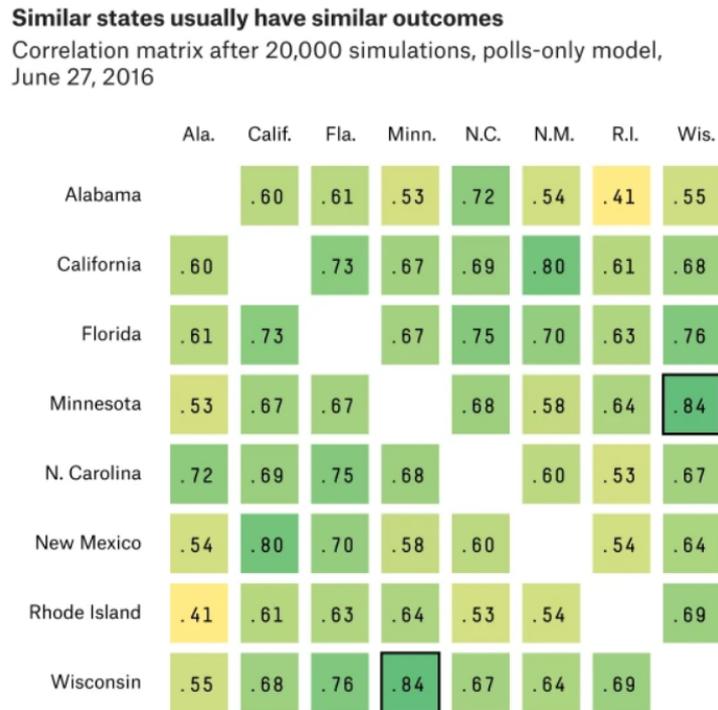


Abbildung 1.4: Korrelationsmatrix für einige Staaten der USA[7]

Staat wird ein Fehler ermittelt. Dieser hängt ab von der Anzahl der Umfragen, die für diesen Staat verfügbar sind. Es gilt: Je größer die Anzahl der Umfragen, desto kleiner der Fehler. Falls die demografischen Daten signifikant von den Umfragewerten abweichen, ist der Fehler größer. Doch der Fehler wird auch von der Bevölkerungsgröße des Staates beeinflusst. Je mehr Einwohner ein Staat hat, desto geringer ist der Fehler.[7]

### 1.3 Mögliche Gründe für Trumps Sieg entgegen der Prognosen

Der Chefredakteur und Gründer von FiveThirtyEight Nate Silver gibt in dem Artikel „The Real Story Of 2016“, der am 19. Jänner 2017 erschienen ist mögliche Gründe für den Sieg Donald Trumps entgegen der Prognosen an. Er spricht zuerst an, dass FiveThirtyEight Trump in der Vorhersage im Gegensatz zu anderen, die auch Prognosen erstellt haben, eine vergleichsweise hohe Chance gegeben hat, die Wahl zu gewinnen. Auch wenn es auf den ersten Blick so aussähe, haben die Umfragen nicht gänzlich daneben gelegen. Trump lag am Wahltag nur ein bis zwei Prozentpunkt über den nationalen Umfragen. In den sogenannten Swing Staaten, das sind Staaten, die noch nicht vor der Wahl klar entschieden waren, hat er die vorherigen Umfragewerte um durchschnittlich zwei bis drei Prozentpunkte getoppt. Wenn man das so betrachtet, stellt sich natürlich die Frage, wieso sich dann jeder so sicher war, dass Clinton gewinnt. An den Umfragen kann es, wie vorher beschrieben, nicht gelegen haben. FiveThirtyEight gab Trump auch eine reelle Chance, denn in einem von 4 Fällen, wäre er Präsident. Das Problem im Bezug auf Wahlkollegium war auch, dass Clintons Wähler sich überproportional nicht in den Swing Staaten befanden, diese Staaten also schon vorher entschieden war und die Stimmen dann sozusagen „verloren“ waren.[11]

# Kapitel 2

## Binäre Optionen

Zuerst wollen wir die Definition einer binären Option betrachten:

Eine binäre Option ist eine Option mit einer diskontinuierlichen Auszahlung, das heißt eine Geld-oder-Nichts Option oder eine Anlage-oder-Nichts Option. Dabei gibt es im Allgemeinen vier verschiedenen Varianten dieser Option:

- cash-or-nothing call
- cash-or-nothing put
- asset-or-nothing call
- asset-or-nothing put

Zuerst wollen wir nochmals die Definitionen einer Call beziehungsweise Put Option wiederholen.

Unter einer Call Option versteht man das Recht, ein gewisses Underlying an einem bestimmten Tag zu einem bestimmten Preis zu kaufen.

Bei einer Put Option erwirbt man hingegen das Recht, das Underlying an einem bestimmten Tag zu einem gewissen Preis zu verkaufen. Die Unterscheidung in europäische und amerikanische Optionen lassen wir hier beiseite.

Ein wichtiger Begriff ist auch der des Strike Preises.

Der Strike Preis ist der Preis, zu dem das Underlying in einem Optionsschein verkauft oder gekauft werden würde. Eine cash-or-nothing Call Option zahlt nichts aus, wenn der Preis des Underlyings unter dem Strike Preis zum Zeitpunkt  $T$  liegt. Sie zahlt einen fixen vorher vereinbarten Betrag  $Q$  aus, falls der Preis des Underlyings über dem Strike Preis liegt. Falls dies nicht der Fall ist, wird gar nichts ausgezahlt.

Analog wird bei einer cash-or-nothing Put Option  $Q$  ausgezahlt, falls der Preis des Underlyings unter dem Strike Preis liegt, sonst nichts.

Bei einer Asset-or-nothing Call Option wird nichts ausgezahlt, falls der Preis

des underlying Assets unter dem Strike Preis liegt, und einen zum Preis des Assets äquivalenten Geldbetrag falls der Preis über dem Strike Preis liegt. Die Asset-or-nothing Put Option zahlt nicht aus, falls der Preis des Underlyings über dem Strike Preis liegt, und einen zum Preis des Assets äquivalenten Geldbetrag falls der Preis unter dem Strike Preis liegt.[12]

Die Bewertung dieser Option erfolgt risikoneutral. Dafür müssen zwei Voraussetzungen gegeben sein:

- Der Kapitalmarkt ist vollständig.
- Es gibt keine Arbitragemöglichkeit.[13]

Wir bezeichnen nun die Wahrscheinlichkeit, dass der Preis des Underlyings über dem Strike Preis zum Zeitpunkt der Optionsausübung ist, mit  $N(d_2)$ . Der Wert einer cash-or-nothing Call Option ist daher laut den bereits bekannten Formeln aus dem Black Schooles Modell  $Qe^{-rT}N(d_2)$ . Dabei bezeichnet  $r$  den risikofreien Zinssatz und  $T$  die Laufzeit der Option. Der Wert der cash-or-nothing Put Option ist  $Qe^{-rT}N(-d_2)$ . Hier ist  $N(-d_2)$  die Wahrscheinlichkeit, dass der Preis des Underlyings unter dem Preis dem Strike Preis liegt.

Nun zu den Werten der asset-or-nothing Optionen: die binäre Call Option dieses Typs hat den Wert  $S_0e^{-qT}N(d_1)$ . Wieder ist  $N(d_1)$  die Wahrscheinlichkeit, dass der Preis des Underlyings unter dem Preis dem Strike Preis liegt und  $T$  die Laufzeit der Option. Die Rendite des Underlyings wird mit  $q$  bezeichnet und  $S_0$  ist der aktuelle Preis des Underlyings. Analog zu oben kann man den Wert der asset-or-nothing Put Option mit der Formel  $S_0e^{-qT}N(-d_1)$  berechnen.[12]

# Kapitel 3

## Kritik durch Nassim Nicholas Taleb

Die offensichtliche Instabilität der Prognosen bewegte Nassim Taleb dazu, an der Methode der Erstellung der Vorhersagen Kritik zu üben. Er behauptete, dass dabei starke Verletzungen der Standardresultate der quantitative Finance, speziell no-arbitrage-pricing, gemacht wurden. Dies stellte sich jedoch im Nachhinein als falsch heraus.

Nun werden wir die Hauptschritte seiner Argumentation näher betrachten: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kandidat gewinnt, wird im ersten Schritt als Preis einer binären Option gesehen. Dieser nimmt den Wert 1 an, falls ein Kandidat Wahlsieger wird, andernfalls ist dieser 0. Dies kann nun als derivatives Finanzinstrument gesehen werden, das von einer underlying asset Variable  $Y_t$  abhängt. Dabei entspricht  $Y_t$  zum Beispiel der Nummer der Unterstützer in der Bevölkerung zum Zeitpunkt  $t$ . Der Wert von  $Y_t$  zum Zeitpunkt der Wahl  $T$  bestimmt daher das Ergebnis dieser. Wenn nämlich  $Y_T$  ein gewisses Limit  $l$  überschreitet, so gewinnt dieser Kandidat die Wahl. Laut Taleb wird dann die Arbitrage pricing Theorie Limits für die Preise beziehungsweise Wahrscheinlichkeiten in den Monaten vor der Wahl vorgeben.

Im zweiten Schritt wird ein „shadow process“  $X_t$  konstruiert. Mithilfe dessen soll  $Y_t$  ein durch  $L$  nach unten und  $H$  nach oben beschränktes Martingal werden. Da  $X_t$   $Y_t$  beeinflusst, wird  $Y_t = S(X_t)$  gesetzt, wobei  $S$  eine Funktion ist, die den Prozess  $Y_t$  von den reellen Zahlen in das Intervall  $[L, H]$  bringt. Um den Anforderungen gerecht zu werden muss  $X_t$  die Differentialgleichung  $dX_T = \sigma^2 X_t dt + \sigma dW_t$  erfüllen. Bei  $S(x)$  fällt die Wahl schlussendlich auf  $S(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(x)$ , wobei  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ . Unter diesen Voraussetzungen kann man zeigen, dass  $Y_t$  ein beschränktes

Martingal ist, was hier jedoch nicht gezeigt wird, da  $Y_t$  auch ohne diese spezielle Konstruktion bereits ein Martingal ist. Das werden wir in einem späteren Kapitel sehen.

Schritt 3 behandelt die Frage, wie man nun den Preis von  $Y_t$  bestimmt. Da der Prozess  $X_t$  von Bachelier-Style Modell ist und der Preis von diesem bereits bekannt ist, kann man den Preis von  $Y_t$  leicht berechnen. Durch Substitution von  $x = S^{-1}(y)$  in der option pricing Formel erhält man den Preis von  $Y_t$ . Taleb argumentiert nun, dass man dadurch, dass  $Y_t$  ein Martingal ist, vom Preis der binären Option auf die Wahrscheinlichkeit, dass  $Y_T$  das Limit am Wahltag überschreitet, schließen kann.

Schlussendlich werden in Schritt 4 Aussagen zum Thema Volatilität getroffen. Laut Taleb besagt eine Heuristik, dass je größer die Volatilität vom underlying asset ist, desto näher der Preis der binären Option an 0,5 ist. Ein numerisches Beispiel zeigt dabei, dass in Talebs Modell die Wahrscheinlichkeit nahe bei 0,5 ist und sich das erst am Wahltag ändert und zu fast 1 springt. Da das aber bei den Umfragen von FiveThirtyEight nicht der Fall ist, glaubt Taleb, dass ein Fehler unterlaufen sei. Er sagt dazu: „They violated arbitrage boundaries“.[6]

# Kapitel 4

## Kritik an Taleb durch Clayton

### 4.1 Volatilität

Aubrey Clayton kritisiert Taleb in seinem Paper „Election predictions are arbitrage-free: response to Taleb“ einige Punkte. Zuerst geht er auf eine laut Taleb Heuristik der Finanzmathematik ein. Diese lautet:

A standard result in quantitative finance is that when the volatility of the underlying security increases, arbitrage pressures push the corresponding binary option to trade closer to 50%, and become less variable over the remaining time to expiration.

Diese Heuristik ist aber nur partiell richtig.[6]

Zuerst wollen wir uns den Begriff der Volatilität näher anschauen. Unter Volatilität versteht man das Ausmaß der Schwankungen von Preisen oder Aktienkursen innerhalb einer kurzen Zeitspanne.[12] In gewissen Fällen ist diese Heuristik nun richtig, nämlich falls der „Marktpreis“  $Y_t$  und der Schwellenwert  $l$  gegeben sind. Mit steigender Volatilität konvergiert nun die Wahrscheinlichkeit, dass  $Y_t$  am Wahltag  $T$  das Limit  $l$  überschreitet, gegen 0,5.

Ein Beispiel, das Clayton in seinem Paper anführt, ist folgendes:

Sei  $Y_t$  eine einfache brownische Bewegung mit Drift  $\mu$  und Volatilität  $\sigma$ . Also gilt  $dY_t = \mu dt + \sigma dW_t$ .

Die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $Y_T$  gegeben  $Y_t$  ist  $N(Y_t, \sigma^2(T-t))$ , wobei  $N$  die Normalverteilung ist. Daraus folgt nun, dass der Preis der binären Option für den Strike Preis  $l$  zum Zeitpunkt  $t$

$$1 - \Phi\left(\frac{l - Y_t - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Dabei ist  $\Phi$  die Standardnormalverteilungsfunktion. Nun folgt da  $\Phi(0) = 0,5$

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left( 1 - \Phi\left(\frac{l - Y_t - \mu(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) \right) \\ &= 1 - \Phi\left(\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{l - Y_t - \mu(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) \\ & \qquad \qquad \qquad = 1 - \Phi(0) \\ & \qquad \qquad \qquad = 1 - 0,5 \\ & \qquad \qquad \qquad = 0,5 \end{aligned}$$

In diesem Fall trifft die Behauptung also zu. Andere Prozesse, die auch von der Volatilität abhängen, werden dasselbe Verhalten aufweisen.

Normalerweise wird sich der Preis nicht bei 0,5 stabilisieren, da mit wachsender Volatilität die Verteilung des Prozesses  $Y_t$  bei jedem gegebenen  $t$  weiter wird. Somit ist die vorher zitierte Heuristik falsch.

Wir setzen nun

$$B(t, T) = 1 - \Phi\left(\frac{l - Y_t - \mu(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right).$$

Als nächsten Schritt betrachten wir das obere Beispiel mit  $Y_0 = 0$ . Nun gilt, dass

$$\begin{aligned} P[B(t, T) < x] &= P\left[1 - \Phi\left(\frac{l - Y_t - \mu(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) < x\right] \\ &= P\left[-\Phi\left(\frac{l - Y_t - \mu(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) < x - 1\right] \\ &= P\left[\Phi\left(\frac{l - Y_t - \mu(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) > 1 - x\right] \\ &= \Phi\left(\frac{l - \mu(T - t) - \sigma\sqrt{T - t}\Phi^{-1}(1 - x) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{l - \mu T}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{\mu t - \mu t - \sigma\sqrt{T - t}\Phi^{-1}(1 - x)}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{l - \mu T}{\sigma\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{T}{t}} - 1\Phi^{-1}(1 - x)\right). \end{aligned}$$

Wenn nun wir nun  $\sigma$  gegen unendlich gehen lassen, wird die Verteilung von  $B(t, T)$  stabil, aber nicht unbedingt im Punkt 0,5. Wenn wir in der Mitte,

als zum Zeitpunkt  $t = T/2$   $l = \mu t$  setzen, dann folgt, dass

$$\begin{aligned}
 P[B(t, T) < x] &= \Phi\left(-\sqrt{\frac{T}{t}} - 1\Phi^{-1}(1-x)\right) \\
 &= \Phi\left(-\sqrt{\frac{T}{T/2}} - 1\Phi^{-1}(1-x)\right) \\
 &= \Phi\left(-\sqrt{\frac{2T}{T}} - 1\Phi^{-1}(1-x)\right) \\
 &= \Phi\left(-\Phi^{-1}(1-x)\right) \\
 &= 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1-x)) \\
 &= 1 - 1 - x = x.
 \end{aligned}$$

Wir sehen jetzt, dass  $B(t, T)$  unabhängig von  $\sigma$  immer gleichverteilt auf  $[0, 1]$  ist.

Aus diesem Beispiel kann man ableiten, dass Talebs Aussage, wenn die Volatilität des Underlyings steigt, dass dann der Preis der binären Option weniger variabel bis zum Zeitpunkt der Ausübung der Option, also dem Zeitpunkt der Wahl, wird, nicht stimmt. Stattdessen ist die Schwankung des Preises der binären Option komplett unabhängig von der Volatilität des Underlyings.[6]

## 4.2 Arbitragefreiheit

Zuerst wollen wir den Begriff Arbitragefreiheit wiederholen. Ein Marktmodell  $(\bar{\pi}, \bar{S})$  ist arbitragefrei, falls keine Arbitragemöglichkeit besteht. Was ist eine Arbitragemöglichkeit?

Unter einer Arbitragemöglichkeit versteht man ein Portfolio  $\bar{\xi}$ , das folgende drei Punkte erfüllt:

- $\bar{\xi} * \bar{\pi} \leq 0$
- $\bar{\xi} * \bar{S} \geq 0$ ,  $P$ -fast sicher
- $P[\bar{\xi} * \bar{S} > 0] > 0$

Salopp gesagt ist eine Arbitragemöglichkeit also eine Möglichkeit mit einem bestimmten Portfolio einen risikolosen Gewinn zu machen.[14]

Das erste Fundamental Theorem of Asset Pricing besagt nun, dass ein Markt arbitragefrei ist, falls die Menge der äquivalenten Martingalmaße ungleich

null ist. Es gibt also mindestens ein äquivalentes Martingalmaß. Dieser Satz impliziert nun, dass wenn wir den Zinssatz  $r = 0$  setzen, alle Assets Martingale unter dem äquivalenten Martingalmaß sind. Der Wert der Option zu jedem Zeitpunkt kann dann sehr einfach berechnet werden. Man nimmt einfach die zukünftigen möglichen Werte der Option und multipliziert diese mit den Wahrscheinlichkeiten, dass diese eintreten. Diese Werte werden dann addiert und ergeben den Wert der Option zu diesem Zeitpunkt. Für eine binäre Option, die zum Zeitpunkt der Ausübung entweder den Wert 1 oder 0 hat, ergibt sich der Wert in der Zeit dazwischen einfach aus der Wahrscheinlichkeit, dass 1 ausgezahlt wird. [6] Eine Sache, die Taleb nicht wirklich berücksichtigt hat, ist, dass die Aufgabe bei Vorhersagen nicht darin besteht, den Preis einer Option zu bestimmen, sondern echte Wahrscheinlichkeiten. Wir bezeichnen nun mit  $F_t$  die Menge aller Informationen, die einem Forecaster zum Zeitpunkt  $t$  zur Verfügung stehen. Nun soll  $Y_t$  ein  $F_t$  Martingal unter „real-world“ Maßen sein. Im folgenden werden wir die Martingaleigenschaft von  $Y_t$  zeigen. Dazu bezeichne

$$B(t, T) = P[Y_T > l | F_t],$$

also die Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat die Wahl gewinnt. Nun folgt durch die Turmeigenschaft und die Definition der bedingten Erwartung, dass

$$E[B(t, T) | F_s] = E[E[1_{Y_T > l} | F_t] | F_s] = E[1_{Y_T > l} | F_s] = B(s, T) \text{ für } s < t.$$

Damit ist  $B(t, T)$  in jedem Fall ein  $F_t$  Martingal. Somit ist die ganze Konstruktion von  $Y_t$  durch  $X_t$  überflüssig. Taleb braucht in seinem Paper auch die Funktion  $S$ , mit der er schlussendlich die Preise der Option berechnen kann. Diesen Schritt hätte er einfach überspringen können. Nachdem nun die Wahrscheinlichkeiten für jeden Forecaster bezüglich der Information, die ihm zur Verfügung steht, automatisch Martingale sind, gibt es keine Arbitragemöglichkeit. Was man zu diesem Thema noch anmerken sollte ist, dass natürlich jeder Forecaster eine andere Einschätzung von gewissen Dingen hat und ihm auch andere Informationen zur Verfügung stehen als einem anderen Forecaster und damit Vorhersagen auch teilweise subjektiv gefärbt sind. Damit eine Arbitragemöglichkeit besteht, müsste der Forecaster einem unmöglichen Ereignis eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnen, beziehungsweise einem möglichen Ereignis die Wahrscheinlichkeit 0. [6]

### 4.3 Underlying

Auch bei der Definition des Underlyings gibt es Probleme in Talebs Paper. Durch mangelnde Genauigkeit wurde  $Y_t$  sowohl als Nummer der Wähler am

Wahltag  $T$  als auch als Zwischenstand der potentiellen Wähler des Kandidaten für  $t < T$  bezeichnet.

Das ist aber falsch, da die Werte für  $t < T$  nur Schätzwerte sind und nicht der exakten Zahl entsprechen. Dies wäre nur möglich, wenn man die Meinung von allen potentiellen Wählern der USA kennen würde, was aber praktisch unmöglich durchzuführen ist. Das Problem ist nämlich, dass der Forecaster nicht genau weiß, was jede einzelne Person denkt, und dies aus Umfragen schätzen muss. Nun ist nicht nur die Vorhersage unsicher, denn sowohl in den Umfragen als auch in der Schätzung, wie viele Leute wirklich am Wahltag wählen werden, liegt ein gewisses Maß an Unsicherheit. Taleb schreibt einmal, dass  $Y_t$  die geschätzte Zahl an Wählern ist. Clayton reagiert darauf, indem er sagt, dass dann natürlich der Wahlausgang am Wahltag auch nicht von  $Y_t$  bestimmt wird. Denn das Ergebnis der Wahl wird von der wirklichen Zahl der Wahlstimmen bestimmt. Das wiederum bedeutet, dass  $Y_t$  nicht sowohl ein Underlying als auch zur Filtration  $F_t$  adaptiert sein kann.[6]

# Kapitel 5

## Conclusio

Talebs Kritik an der Erstellung der Vorhersagen der Wahl ist schlicht und einfach falsch. Er glaubt die Schwankungen in den Prognosen sind nicht nötig beziehungsweise sogar falsch. Daher sagt er, dass man diese mathematisch beseitigen kann, indem man Erkenntnisse der Finanzmathematik verwendet. Wie jedoch Clayton zeigt, sind diese Schwankungen kein Fehler, sondern ergeben sich aus den Umfragewerten. Taleb hat ein Modell erstellt um diese „Fehler“ auszumerzen. Er hat dabei einen Prozess konstruiert und diesen durch komplizierte mathematische Funktionen ein Martingal werden lassen. Wie Clayton in seinem Paper zeigt ist dieser Prozess im Bezug auf die Filtration der Information, die einem Forecaster zur Verfügung steht, sowieso ein Martingal.

Auch die Behauptung, dass Arbitrage möglich ist, stimmt nicht, falls die Wahrscheinlichkeiten des Forecasters und des Investors übereinstimmen. Die Heuristik, dass sich die Preise mit wachsender Volatilität bei 0,5 stabilisieren ist falsch. Wie wir vorher in dem Beispiel gesehen haben, lässt sich für jeden Punkt in  $[0,1]$  ein Prozess konstruieren, der unabhängig von der Volatilität gleichverteilt in diesem Punkt ist.

Zu guter Letzt kommt auch Verwirrung auf, was genau  $Y_t$  jetzt bezeichnen soll. Man muss anmerken, dass Talebs Paper die ganze Sache wesentlich verkompliziert und eine Theorie verwendet, die Option Pricing Theorie, die auf dieses Problem in dieser Art und Weise nicht angewandt werden kann. In Wirklichkeit gibt es kein Problem mit den Schwankungen der Prognosen. Die Schwankungen der Prognosen ergeben sich einfach aus Meinungsänderungen von gewissen Leuten und es ist unmöglich diese mathematisch auszumerzen.[6]

# Literaturverzeichnis

- [1] Die Zeit. Donald trump wird us-präsident. <https://www.zeit.de/politik/ausland/2016-11/donald-trump-wird-us-praesident>, November 2016.
- [2] Matthias Kolb. Weil es einfach nicht sein durfte. <https://www.sueddeutsche.de/politik/us-praesident-donald-trump-weil-es-einfach-nicht-sein-durfte-1.3738748>, November 2017.
- [3] FiveThirtyEight. Who will win the presidency? <https://projects.fivethirtyeight.com/2016-election-forecast/>, 2016.
- [4] Wikipedia. Nassim nicholas taleb. <https://projects.fivethirtyeight.com/2016-election-forecast/>, February 2020.
- [5] Nassim Nicholas Taleb. Election predictions as martingales: An arbitrage approach. *Quantitative Finance*, October 2017.
- [6] Aubrey Clayton. Election predictions are arbitrage-free: response to taleb. *Quantitative Finance*, July 2019.
- [7] Nate Silver. A user's guide to fivethirtyeight's 2016 general election forecast. <https://fivethirtyeight.com/features/a-users-guide-to-fivethirtyeights-2016-general-election-forecast/>, June 2016.
- [8] FiveThirtyEight. Who will win the presidency? <https://projects.fivethirtyeight.com/2016-election-forecast/#plus>, 2016.
- [9] FiveThirtyEight. Who will win the presidency? <https://projects.fivethirtyeight.com/2016-election-forecast/#now>, 2016.
- [10] Wikipedia. National popular vote interstate compact. [https://de.wikipedia.org/wiki/National\\_Popular\\_Vote\\_Interstate\\_Compact](https://de.wikipedia.org/wiki/National_Popular_Vote_Interstate_Compact), December 2019.

- [11] Nate Silver. The real story of 2016. <https://fivethirtyeight.com/features/the-real-story-of-2016/>, January 2017.
- [12] John Hull. *Options, futures, and other derivatives*. 2011.
- [13] Wikipedia. Risikoneutrale bewertung. [https://de.wikipedia.org/wiki/Risikoneutrale\\_Bewertung](https://de.wikipedia.org/wiki/Risikoneutrale_Bewertung), June 2018.
- [14] Thilo Meyer-Brandis. Finanzmathematik 1. [https://www.fm.mathematik.uni-muenchen.de/teaching/teaching\\_ws1213/lectures/finanzmath\\_eins/fm1\\_skript.pdf](https://www.fm.mathematik.uni-muenchen.de/teaching/teaching_ws1213/lectures/finanzmath_eins/fm1_skript.pdf), 2012.