Seminararbeit

Ausgleich im Kollektiv für das Markowmodell

Richard Berzé

Februar 2019

Betreut durch Stefan Gerhold

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Arbeit Beschäftigt sich mit der Frage, welche Anforderungen an einen Versicherungsbestand, der aus Verträgen nach dem Markowmodell besteht, gestellt werden muss, damit von einem Ausgleich im Kollektiv ausgegangen werden kann. Dazu führen wir in Kapitel 2 die Grundlagen des Markowmodells ein. In Kapitel 3 klären wir, was wir mathematisch betrachtet mit dem Ausgleich im Kollektiv meinen. In Kapitel 4 wird ein kurzer Überblick über die Theorie großer Abweichungen gegeben. Im letzten Kapitel führen wir die Kapitel davor zusammen und stellen Anforderungen auf, unter denen, wie wir zeigen werden, ein Versicherungsbestand sowohl einem Gesetz großer Zahlen als auch einem Prinzip großer Abweichungen genügt.

2 Grundlagen des Markowmodells

Das Markowmodell wird in der Versicherungsmathematik vor allem in der Lebens- und Gesundheitsversicherung eingesetzt. Ein wesentlicher Vorteil gegenüber klassischen Versicherungsmodellen ist die Flexibilität, die dieses Modell erlaubt.Beispielsweise bietet es eine Möglichkeit, eine gesamte Krankheitshistorie adäquat abzubilden, was mit anderen Methoden schwieriger ist oder aber mathematisch nicht so einfach handhabbar. Mit der zunehmenden Relevanz von privaten Gesundheits- und Pflegeversicherungen steigt auch die des Markowmodells für Versicherungsunternehmen. Wir betrachten daher in diesem Kapitel zunächst grundlegende Definitionen und wichtige Sätze aus der Theorie des Markowmodells. Sämtliche Punkte dieses Kapitels stammen aus [2, Kapitel 4].
Das gesamte Modell wird von einer Markowkette gesteuert:

Definition 2.1 (Markowkette)
Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in T}$*,* $T \subseteq \mathbb{N}_0$*, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *mit abzählbarem Zustandsraum* S *heißt Markowkette, falls für* $n \geq 1$*,* $t_1 < t_2 < ... < t_{n+1} \in T$*,* $i_1, ..., i_{n+1} \in S$ *mit* $\mathbb{P}[X_{t_1} = i_1, ..., X_{t_n} = i_n] > 0$ *gilt:*

$$\mathbb{P}[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_1} = i_1, ..., X_{t_n} = i_n] = \mathbb{P}[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n] \qquad (1)$$

Bem. :(1) wird auch $Markoweigenschaft$ genannt. Für die Anwendung in der Versicherungsmathematik ist S sogar endlich. Die Gedächtnislosigkeit kann aber dazu führen, dass der Zustandsraum groß wird. Beispielsweise kann die Reaktivierungswahrscheinlichkeit bei einer Berufsunfähigkeitsversicherung abgesehen von dem Grund sehr wohl auch davon abhängen, wie lange ein Individuum bereits berufsunfähig ist. Eine mögliche Modellierung des Zustandsraumes könnte etwa $S = \{*, \diamond_{j,k}, \dagger\}$ sein, wobei $\diamond_{j,k}$ die Zustände "Berufsunfähig seit j Jahren aufgrund der Ursache k"beschreibt. Auch in der Gesundheitsversicherung werden die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Krankheitsstadienspielen von aus vorherigen Stadien resultierenden Faktoren beeinflusst. All das muss bei der Modellierung des Zustandsraumes beachtet werden.

Die versicherte Person befindet sich zu jedem Zeitpunkt in genau einem Zustand unseres Zustandraumes und hat in jeder Periode die Chance, diesen Zustand zu wechseln. Die Wahrscheinlichkeit dafür halten wir in der Übergangsmatrix fest.

Definition 2.2 (Übergangsmatrix)
$P(s,t)$ *heißt Übergangsmatrix, wobei* $P(s,t) = (p_{ij}(s,t))_{i,j\in S}$ *mit*

$$p_{ij}(s,t) = \mathbb{P}[X_t = j | X_s = i], \qquad i, j \in S, s \leq t \in T$$

In Abhängigkeit von dem Zustand, in dem sich die versicherte Person befindet, können Zahlungen geleistet werden.

Definition 2.3 (Auszahlungsfunktionen)
Für die Periode $[t, t+1)$ sind zwei Zahlungen möglich:

1. *Die vorschüssige Zahlung $a_i(t)$, die geleistet wird, falls $X_t = i$*
2. *Die Nachschüssige Zahlung $a_{ij}(t)$, die geleistet wird, falls $X_t = i \wedge X_{t+1} = j$*

Die Auszahlungsfunktionen $a_i(t), a_{ij}(t)$ sind deterministisch.

Der Barwert, also der abgezinste Wert aller möglichen zukünftigen Zahlungen, ist in diesem Fall eine diskrete Zufallsvariable, die von dem stochastischen Prozess, der Zinsintensität und den Auszahlungsfunktionen abhängt.

Definition 2.4 (Diskontfaktor)
Der Diskontfaktor (vom Zeitpunkt t auf den Zeitpunkt 0) ist

$$v(t) = \exp\Big(- \int_0^t \delta(s) ds \Big),$$

wobei die Zinsintensität δ deterministisch und stetig ist. Diskont von $\tau \geq t$ auf t:

$$\frac{v(\tau)}{v(t)} = \exp\Big(- \int_t^\tau \delta(s) ds \Big).$$

Definition 2.5 (Stochastischer Barwert)
Der stochastische Barwert $V(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, besteht aus vorschüssigen Zahlungen

$$V(t,j) = \sum_{\tau \geq t} \frac{v(\tau)}{v(t)} \mathbf{1}_{\{X_\tau = j\}} a_j(\tau)$$

und nachschüssigen Zahlungen

$$V(t,j,k) = \sum_{\tau \geq t} \frac{v(\tau+1)}{v(t)} \mathbf{1}_{\{X_\tau = j, X_{\tau+1} = k\}} a_{jk}(\tau), \quad t \in \mathbb{N}_0 \, j,k \in S$$

mit

$$V(t) = V^{\text{stoch}}(t) = \sum_{j \in S} V(t,j) + \sum_{j,k \in S} V(t,j,k). \tag{2}$$

Die Entsprechenden Erwartungswerte, gestützt auf den Zustand i sind:

$$\begin{aligned}
V_i(t,j) &= \mathbb{E}[V(t,j)|X_t = i], \\
V_i(t,j,k) &= \mathbb{E}[V(t,j,k)|X_t = i], \\
V_i(t) &= \mathbb{E}[V(t)|X_t = i] \\
&= \sum_{j \in S} V_i(t,j) + \sum_{j,k \in S} V_i(t,j,k), \quad i \in S.
\end{aligned} \tag{3}$$

Die Thielesche Differenzengleichung erlaubt es, diese Erwartungswerte rekursiv mit einer passenden Endbedingung zu berechnen. Diese Endbedingung hängt von dem zu modellierenden Tarif ab.

Satz 2.1 (Thielesche Differenzengleichung)
Für $t \in \mathbb{N}_0$ und $i \in S$ gilt

$$V_i(t) = a_i(t) + \frac{v(t+1)}{v(t)} \sum_{j \in S} p_{ij}(t,t+1)\big(a_{ij}(t) + V_j(t+1)\big). \tag{4}$$

3 Ausgleich im Kollektiv

Der Ausgleich im Kollektiv ist der fundamentale Gedanke, der hinter dem Versicherungsgeschäft steckt - jeder Versicherungsnehmer bezahlt eine Prämie, die bei dem Versicherungsnehmen gebündelt wird und erhält bei Realisation des versicherten Risikos einen Schadenausgleich. Die Versicherungsnehmer, bei denen sich das Risiko nicht realisiert, kommen also mit für den Schaden auf. Dazu müssen natürlich einige Rahmenbedingungen erfüllt sein.
(Vgl.[3]: "Das Wesen der Versicherung besteht in einem Risikotransfer vom Versicherungsnehmer auf den Versicherer gegen Zahlung einer Prämie. Es handelt sich dabei um
– die gegenseitige Deckung
– eines im Einzelnen zufälligen,
– im ganzen aber schätzbaren Geldbedarfs
– durch eine Vielzahl gleichartig bedrohter Wirtschaftseinheiten (Unternehmen und Privatpersonen)")

Mathematisch wird das durch Gesetze der Großen Zahl gerechtfertigt. Für identisch verteilte, unabhängige Risiken gilt:

Satz 3.1 (Starkes Gesetz der großen Zahlen, Kolmogorow 1930)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren iid Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \mathbb{E}[X_1] \quad \textit{f.s.}$$

Der entstandene Schaden stimmt also asymptotisch mit den eingehobenen, fair berechneten Prämien überein. Problematisch ist hier allerdings, dass der Bestand eines Versicherungsunternehmens nicht so groß ist, dass diese Grenzwertbetrachtung verlässlich ist. Es ist daher äußerst interessant, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Verlust entsteht, falls eine Prämie $a > \mathbb{E}[X_n]$ verrechnet wird. Darüber gibt der Satz von Cramér Aufschluss:

Satz 3.2 (Satz von Cramér, 1938) *Es sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von iid Zufallsvariablen mit*

$$\phi(u) := \mathbb{E}[e^{uX_1}] < \infty, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Dann gilt für alle $a > \mathbb{E}[X_1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq a\Big] = -I(a), \tag{6}$$

wobei

$$I(z) := \sup_{u\in\mathbb{R}}(uz - \log\phi(u)), \quad z \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

($I(z)$ *wird Legendre-Transformierte der Funktion* $\phi(z)$ *genannt)*

Die Wahrscheinlichkeit in (6) *fällt also exponentiell:*

$$\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq a\Big] = \exp(-I(a)n + o(n)), \quad n \to \infty.$$

Die Voraussetzung, dass die Risiken gleich verteilt sind, ist für viele Versicherungsbereiche allerdings eine zu große Vereinfachung. Oft wird daher auch mit diesem Gesetz, ebenfalls von Kolmogorow, gearbeitet:

Satz 3.3 (Starkes Gesetz der Großen Zahlen, Kolmogorow 1930) *Es sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}[X_n] < \infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \big(X_k - \mathbb{E}[X_k]\big) = 0 \quad \textit{f.s.}$$

Wieder interessiert uns, wie schnell diese Konvergenz passiert und wie hoch die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust bei gegebener Bestandsgröße $n < \infty$ ist. Die Antworten auf diese Fragen gibt das Gebiet der großen Abweichungen, mit dem wir uns in Kapitel 3 beschäftigen werden.

4 Große Abweichungen

Die Theorie der Großen Abweichungen ist ein Teilgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie, das sich mit der Asymptotik der Wahrscheinlichkeiten sehr selten auftretender Ereignisse befasst. Als Pioniere auf diesem Gebiet zählen Cramér (dessen wichtigen Satz wir bereits kennengelernt haben) sowie Sanov in den 1930er Jahren. In den 1970er Jahren formulierten Donsker und Varadhan bzw. Freidlin und Wentzell abstraktere Versionen des Prinzips Großer Abweichungen, die schnell Anwendung in der statistischen Mechanik fanden. Seitdem wächst das Gebiet stetig weiter und hat Anwendungen in beispielsweise Statistik, Ergodentheorie und Informationstheorie. Auch der Finanzmathematik ist die Theorie nicht nur für unser Problem relevant, unter anderem findet sie im Kreditrisikomanagement Anwendung (vgl. [6]).
In diesem Kapitel führen wir die notwendigen Definitionen ein, um ein Prinzip großer Abweichungen und einen der bedeutendsten Sätze aus diesem Gebiet, den Satz von Gärtner-Ellis, formulieren zu können. Diese stammen alle aus dem Skriptum von Wolfgang König ([1]).

Definition 4.1 (Unterhalbstetig)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt halbstetig von unten, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \tag{8}$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist halbstetig von unten genau dann wenn die Niveaumengen $\Phi(s) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq s\} = f^{-1}((-\infty, s]), s \in \mathbb{R}$ abgeschlossen sind.

Definition 4.2 (Ratenfunktion)
Sei (E, d) ein metrischer Raum, $\mathcal{B}_E$ die Borel-σ-Algebra auf E. Dann heißt eine Funktion $I : E \to [0, \infty]$ mit $I \not\equiv \infty$ Ratenfunktion

Eine Ratenfunktion heißt *gut*, falls ihre Niveaumengen kompakt sind.

Definition 4.3 (Prinzip großer Abweichungen)
Sei (E, d) ein metrischer Raum, $\mathcal{B}_E$ die Borel-σ-Algebra auf E, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(E, \mathcal{B}_E)$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$, I eine Ratenfunktion. Man sagt die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genügt einem Prinzip großer Abweichungen, falls gilt:

i) I ist eine gute Ratenfunktion, ihre Niveaumengen sind also kompakt.

ii) $\forall$ $G \subset E$, G offen: $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \ln \mu_n(G) \geq -\inf_{x\in F} I(x)$

iii) $\forall$ $F \subset E$, F abgeschlossen: $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \ln \mu_n(F) \leq -\inf_{x\in F} I(x)$

Wir sagen eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von E-wertigen Zufallsgrößen erfüllt ein Prinzip großer Abweichungen, wenn die Folge ihrer Verteilungen eines erfüllt.

Bem. : Ein Prinzip großer Abweichungen sagt im Wesentlichen aus, dass für "nette" Mengen A ⊂ E gilt:

$$\mu_n(A) = \exp(-\gamma_n(\inf_A I + o(1))) \tag{9}$$

Ist $\inf_{A^\circ} I = \inf_{\overline{A}} I$, dann wird dies durch das Prinzip großer Abweichungen impliziert. Für stetiges I gilt $\inf_{A^\circ} I = \inf_{\overline{A}} I$ zumindest für alle Mengen A mit $A \in \overline{A^\circ}$, also mindestens für alle offenen Mengen.

Die schwache Variante eines Prinzips Großer Abweichungen lässt die Kompaktheit der Niveaumengen fallen (aber nicht die Abgeschlossenheit) und fordert die obere Schranke nur für kompakte Mengen.

Definition 4.4 (Exponentielle Straffheit)
Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf E heißt exponentiell straff auf der Skala γ_n, wenn zu jedem s>0 eine kompakte Menge $K \subset E$ existiert, sodass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \ln \mu_n(K^C) \leq -s \tag{10}$$

Wir nennen eine Folge von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von E-wertigen Zufallsgrößen exponentiell straff, wenn ihre Verteilungen das sind.

Bem. : Die exponentielle Straffheit ermöglicht den Schritt von abgeschlossenen zu kompakten Niveaumengen. Es gilt:

Lemma 4.1 *Falls $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein schwaches Prinzip großer Abweichungen erfüllt und exponentiell straff ist, so erfüllt $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch ein Prinzip großer Abweichungen.*

In den folgenden Absätzen sei E ein hausdorffscher topologischer Vektorraum, die Addition und skalare Multiplikation sind also stetig und je zwei unterschiedliche Punkte können durch disjunkte offene Umgebungen getrennt werden. E^* sei der Dualraum von E, also der Raum aller stetigen linearen Funktionale von E nach $\mathbb{R}$. Wir verwenden die Notation $\langle F, x\rangle = F(x)$ für $x \in E$,$F \in E^*$.

Definition 4.5 (Kumulantenerzeugende Funktion)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge E-wertiger Zufallsgrößen mit Verteilungen μ_n. Dann ist die Kumulantenerzeugende Funktion von μ_n definiert als

$$\Lambda_n(F) = \ln \mathbb{E}[\mathrm{e}^{F(X_n)}] \tag{11}$$

Definition 4.6 (Fenchel-Legendre Transformation)
Die Fenchel-Legendre Transformierte einer Abbildung $\Lambda : E^* \to [-\infty, \infty]$ ist definiert als

$$\Lambda^*(x) = \sup_{F\in E^*} [\langle F, x\rangle - \Lambda(F)] \tag{12}$$

Es stellt sich heraus, dass die Existenz des Grenzwertes

$$\Lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \Lambda_n(\gamma_n F) \tag{13}$$

und der Transformierten Λ^* von großer Bedeutung sind. Betrachten wir nur den Limes superior

$$\overline{\Lambda}(F) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \Lambda_n(\gamma_n F) \in (-\infty, \infty],\ \ F \in E^* \tag{14}$$

erhalten wir bereits die obere Schranke im Prinzip großer Abweichungen für kompakte Mengen. Wir zeigen:

Lemma 4.2 *Die Funktion $\overline{\Lambda} : E \to (-\infty, \infty]$ ist konvex und ihre Transformierte $\overline{\Lambda}^*$ ist nicht negativ, unterhalbstetig und konvex. Ferner gilt für jede kompakte Teilmenge $\Gamma \subset E$*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \log \mathbb{P}(X_n \in \Gamma \leq -\inf_{\Gamma} \overline{\Lambda}^* \tag{15}$$

Beweis : Die konvexität der Funktionen Λ_n und damit die der Funktion $\overline{\Lambda}$ folgt aus der Hölderschen Ungleichung. Da $\Lambda_n(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ ist auch $\overline{\Lambda}(0) = 0$ und damit $\overline{\Lambda}^*$ nicht negativ. Die Unterhalbstetigkeit von $\overline{\Lambda}^*$ ist klar, da es ein Supremum stetiger Funktionen ist. Die Konvexität von $\overline{\Lambda}^*$ folgt sehr schnell aus der von $\overline{\Lambda}$ und der Linearität von $F \in E^*$:

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda}^*(\theta x + (1-\theta)y) &= \sup_{F\in E^*} [\langle F, \theta x + (1-\theta)y\rangle - \Lambda(F)] \\
&= \sup_{F\in E^*} [\theta\langle F, x\rangle + (1-\theta)\langle F, y\rangle - \theta\Lambda(F) - (1-\theta)\Lambda(F)] \\
&\leq \theta\overline{\Lambda}^*(x) + (1-\theta)\overline{\Lambda}^*(y)
\end{aligned}$$

Sei nun $\Gamma \subset E$ kompakt und $\delta > 0$. Es sei $I_\delta = \min\{\overline{\Lambda}^* - \delta, \frac{1}{\delta}\}$. Dann folgt $\forall x \in E\ \exists F_x \in E^* : F_x(x) - \overline{\Lambda}(F_x) \geq I_\delta(x)$. Da F_x stetig ist, folgt außerdem: $\exists$ Umgebung A_x von x mit $\inf_{A_x} F_x \geq F_x(x) - \delta$. Aus der Markowungleichung erhalten wir für jedes $g \in E^*$

$$\mathbb{P}(X_n \in A_x) \leq \mathbb{E}[\mathrm{e}^{g(X_n)}]\mathrm{e}^{-\inf_{A_x} g} \tag{16}$$

Angewandt auf $g = \gamma_n F_x$ erhalten wir

$$\frac{1}{\gamma_n} \log \mathbb{P}(X_n \in A_x) \leq \delta - F_x(x) + \frac{1}{\gamma_n}\Lambda_n(\gamma_n F_x) \tag{17}$$

Da Γ kompakt ist und die Mengen A_x mit $x \in \Gamma$ eine Überdeckung sind, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sowie $x_1, ..., x_N \in \Gamma$, sodass $A_{x_1}, ..., A_{x_N}$ ebenfalls Γ überdeckt. Es folgt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \log \mathbb{P}(X_n \in \Gamma \leq \delta - \min_{i=1}^{N}(F_{x_i}(x_i) - \overline{\Lambda}(F_{x_i})) \leq \delta - \min_{i=1}^{N} I_\delta(x_i) \leq \delta - \inf_\Gamma I_\delta \tag{18}$$

Mit dem Grenzübergang $\lim_{\delta\to 0}$ folgt die Aussage.

Eine weitere wesentliche Eigenschaft der Fenchel-Legendre Transformierten stammt aus [5](4.5.8):

Lemma 4.3 (Dualitätsprinzip der Fenchel-Legendre Transformierten)
Sei E ein lokalkonvexer Hausdorff'scher topologischer Vektorraum und $\Omega : E \to (-\infty, \infty]$ unterhalbstetig und konvex mit Fenchel-Legendre-Transformierter $\Lambda = \Omega^* : E^* \to (-\infty, \infty]$. Dann ist Ω die Fenchel-Legendre-Transformierte von Λ, d.h.

$$\Omega(x) = \sup_{F\in E^*}[F(x) - \Lambda(F)] = \Lambda^*(x) = \Omega^{**}(x) \tag{19}$$

Wir haben nun fast alle Vorbereitungen getroffen, um zu einem der wesentlichsten Sätze aus dem Gebiet der großen Abweichungen zu gelangen. Nicht aus diesem Themengebiet, aber im folgenden relevant ist der Begriff der Gâteaux Differenzierbarkeit, die wie folgt definiert ist:

Definition 4.7 (Gâteaux Differenzierbarkeit)
Seien X,Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to Y$, dann nennt man f Gâteaux-differenzierbar an x_0, Falls ein Operator $T(x_o) \in \mathcal{B}(X, Y)$, der Menge aller beschränkten, linearen Abbildungen von X nach Y, existiert, sodass

$$\lim_{t\to 0} \frac{\| f(x_0 + tv) - f(x_0) - tT(x_0)(v) \|_Y}{t} = 0, \quad \forall v \in x : \| v \|_X = 1, t \in \mathbb{R} \tag{20}$$

4.1 Der Satz von Gärtner-Ellis

Satz 4.1 (Satz von Gärtner-Ellis)
Es sei E ein Banachraum. Ferner sei $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver, reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \infty$.$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge E-wertiger Zufallsgrößen mit verteilungen μ_n. Wir setzen voraus, dass $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ exponentiell straff ist. Ferner existiere der Grenzwert $\Lambda(F) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma_n}\Lambda_n(\gamma_n F) \in \mathbb{R}$ für jedes $F \in E^*$ und die Funktion Λ sei Gâteaux-differenzierbar und unterhalbstetig. Dann erfüllt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Prinzip großer Abweichungen auf der Skala γ_n mit Ratenfunktion Λ^*.

Bew. : Die Kompakteit der Niveaumengen und die obere Schranke folgen aus (4.1) und (4.2) zusammen mit der exponentiellen Straffheit. Wir wollen also noch die untere Schranke zeigen. Sei $x \in E$ und $\delta > 0$. Wir wollen zeigen:

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma_n}\log\mathbb{P}(X_n \in B_\delta(x)) \geq -\Lambda^*(x) \tag{21}$$

Dazu stellen wir fest, dass wir die Existenz eines $F \in E^*$ mit

$$F(x) - \Lambda^*(x) = \sup_{z\in E}[F(z) - \Lambda^*(z)] \tag{22}$$

voraussetzen können (das folgt aus [4],Theorem 2). Wenn ein solches F existiert, ist x der einzige Punkt, an dem dieses Supremum angenommen wird - die Rechte Seite von (22) ist gleich Λ^{**}, also nimmt x für dieses F genau das Supremum in der Formel für Λ^{**} an. Nach 4.3 ist das gleich $\Lambda(F)$, wir erhalten also:

$$\sup_{g\in E^*}[g(x) - \Lambda] = F(x) - \Lambda(F) \tag{23}$$

Gehen wir zu von g zu $F + tg$ über, folgt für alle $g \in E$, $t > 0$:
$g(x) \leq \frac{1}{t}[\Lambda(F + tg) - \Lambda(F)]$. Aus der Gâteuxdifferenzierbarkeit folgt für $t \to 0$, dass $g(x) \leq D_g\Lambda(f)$. Aus $D_{-g}\Lambda(F) = -D_g\Lambda(F)$ folgt $g(x) = D_g\Lambda(F) \forall g \in E^*$. Damit ist x eindeutig durch (22) gegeben.
Betrachten wir nun $\hat{X}_n$ mit Verteilung

$$\mathbb{P}(\hat{X}_n \in A) = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\gamma_n F(X_n) - \Lambda_n(\gamma_n F)}\mathbf{1}_{\{X_n\in A\}}\big],\ A \subset E \text{ mb.} \tag{24}$$

Sei $t > 0$ aber klein. Aus der Stetigkeit von F folg die Existenz von $\delta' \in (0, \delta)$ mit

$\sup_{B_{\delta'}(x)} F - F(x) < t$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n \in B_\delta(x)) &= \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-\gamma_n F(\hat{X}_n)+\Lambda_n(\gamma_n F)}\mathbf{1}_{\{\hat{X}_n \in B_\delta(x)\}}\big] \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma_n F(x)+\Lambda_n(\gamma_n F)}\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-\gamma_n F(\hat{X}_n - x)}\mathbf{1}_{\{\hat{X}_n \in B_\delta(x)\}}\big] \\ &\geq \mathrm{e}^{-\gamma_n F(x)+\Lambda_n(\gamma_n F)}\mathrm{e}^{-\gamma_n t}\mathbb{P}\big(\hat{X}_n \in B_{\delta'}(x)\big)\end{aligned}$$

Daraus und aus der Annahme, dass der Grenzwert $\Lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n}\Lambda_n(\gamma_n F)$ existiert, folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \log \mathbb{P}(X_n \in B_\delta(x)) \geq -[F(x) - \Lambda(F)] - t + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} \log \mathbb{P}(\hat{X}_n \in B_{\delta'}(x))$$

Wir haben im Anschluss an (22) festgestellt, dass $F(x) - \Lambda(F) = \Lambda^*(x)$. Da $t > 0$ beliebig ist, folgt (21), wenn wir zeigen können, dass $\lim_{n\to\ infty} \mathbb{P}(\hat{X}_n^* \notin B_{\delta'}(x)) = 0$ ist. Das zeigen wir, indem wir die exponentielle Abschätzung nach oben für die transformierten Verteilungen verwenden, also wenden wir den ersten Beweisteil auf $\hat{X}_n$ an. $\hat{\Lambda}_n$, die Kulmulantenerzeugende von $\hat{X}_n$ ist dann gegeben durch $\hat{\Lambda}_n(g) = \Lambda_n(\gamma_n F + g) - \Lambda_n(\gamma_n(F)\ \forall g \in E^*$. Also existiert $\hat{\Lambda}(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n}\hat{\Lambda}_n(\gamma_n g) = \Lambda(F+g) - \Lambda(F)$ für jedes $g \in E^*$. $\hat{\Lambda}$ ist Gâteauxdifferenzierbar mit Fenchel-Legendre Transformierter $\hat{\Lambda}^*(y) = \sup_{g\in E*}[g(y) - \Lambda(F+g) + \Lambda(F)]$.
Wenden wir die obere Schranke auf die Menge $B_{\delta'}(x)^c$ an, müssen wir nur noch $\inf_{B_{\delta'}(x)^c} \hat{\Lambda}^* > 0$ zeigen. Die kompaktheit der Niveaumengen sichert, dass dieses Infimum in einem $y \in B_{\delta'}(x)^c$ angenommen wird. Wäre der Wert dieses Infimums gleich Null, würde für alle $g \in E^*$ gelten $g(y) - \Lambda(F+g) \leq -\Lambda(F)$. Substituieren wir h mit $F+g$ folgt, dass $h(y) - \Lambda(h) \leq F(y) - \Lambda(F)$ für alle $h \in E^*$. Gehen wir zum Supremum über alle $h \in E^*$ über, impliziert das $\Lambda^*(y) \leq F(y) - \Lambda(F)$. Also erfüllt y (22) im Widerspruch dazu, dass x der einzige Punkt ist, der das erfüllen kann. $\square$

5 Der Ausgleich im Kollektiv für das Markowmodell

Wir wollen uns nun Überlegen, welche Anforderungen man an einen Bestand von Versicherungsverträgen im Markowmodell stellen muss, damit sowohl das Starke Gesetz der großen Zahlen als auch die Voraussetzungen vom Satz von Gärtner-Ellis erfüllt sind und was diese in der Praxis bedeuten würden.
Es sei dazu für $k \in \mathbb{N}$ ein Markowmodell gegeben mit

- Zustandsraum S^k
- Markowkette $(X_t^k)_{t \in \mathbb{N}_0}$
- Auszahlungsfunktionen $a_i^k,\ a_{ij}^k,\ \ i,j \in S^k$

δ sowie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ seien unabhängig von k. $V^k(t)$ und $V_i^k(t)$ seien die Barwerte, wobei die Auszahlungsfunktionen sowohl Leistungen als auch Prämien (letztere mit negativem Vorzeichen) enthalten sollen, sodass $V^k(t)$ den Verlust aus dem k-ten Vertrag darstellt. Zusätzlich gelten folgende Annahmen:

(i) Die Mächtigkeit der Zustandsräume ist beschränkt, es gibt also $s_{\max}$ mit $|S^k| < s_{\max}$ für $k \in \mathbb{N}$,

(ii) Es gibt $t_{\max} \in \mathbb{N}$ und $a_{\max} > 0$, von k unabhängig, mit

$$a_i^k(t) = a_{ij}^k(t) = 0, \quad t \geq t_{\max},\ k \in \mathbb{N},$$

und

$$|a_i^k(t)| \vee |a_{ij}^k(t)| \leq a_{\max}, \quad k \in \mathbb{N},\ i,j \in S^k,\ t \in \mathbb{N}_0.$$

(iii) Die Markowketten X^k, $k \in \mathbb{N}$, sind unabhängig.

(iv) $\exists p \in \mathbb{N}, N_1, N_2, ..., N_p \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} = N_1 \dot{\cup} N_2 \dot{\cup} ... \dot{\cup} N_p$ und $i,j \in N_r \ \Rightarrow\ V^i(t) \sim V^j(t) \sim V_r,\ 1 \leq r \leq p$

(v) Für $1 \leq r \leq p$ existiere $\lim_{n \to \infty} a_{r_n} =: a_r$, wobei $(a_{r_n})_{n \in \mathbb{N}} = \#\frac{1}{n}\{k \leq n : k \in \mathbb{N}\}$ mit $\sum_{r=1}^{p} a_r = 1$

Annahmen (i) und (ii) sind in der Praxis unproblematisch. Annahme (iii) ist zwar wie schon erwähnt nicht immer garantiert, praktisch wird meist dennoch davon ausgegangen. Annahme (iv) besagt, dass es zwar viele verschiedene Verträge geben kann (Vertragsart, Dauer, Versicherungssumme,...) , die Anzahl der unterschiedlichen Verträge aber dennoch endlich ist. Praktisch wird es oft reichen, wenn Risiken zumindest annähernd gleich verteilt sind, was beispielsweise innerhalb von Berufs- und Altersgruppen der Fall sein könnte.

Aus (i), (ii) und (iv) folgt, dass für alle $1 \leq r \leq p$ V_r einen endlichen Wertebereich $\{V_r(\omega_1), \ldots, V_r(\omega_{n_r})\}$ mit $n_r \in \mathbb{N}$ hat. Es ist

$$\mathrm{Var}[V_r] \leq (a_{max} t_{max})^2 \quad \forall 1 \leq r \leq p$$

und deshalb

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}[V^n] < \infty.$$

Es sind also die Voraussetzungen für das Gesetz der großen Zahlen erfüllt. Wir zeigen als nächstes, dass auch die Voraussetzungen für den Satz von Gärtner-Ellis erfüllt sind. Unser Banachraum ist $\mathbb{R}$, als Skala wählen wir $\gamma_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Betrachten wir zuerst die exponentielle Straffheit von S_n.
Es seien l_r,$u_r$$\in \mathbb{R}$ mit

$$l_r := \min_{i \in \{1,2,\ldots,n_r\}} V_r(\omega_i)$$
$$u_r := \max_{i \in \{1,2,\ldots,n_r\}} V_r(\omega_i)$$

Mit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} V^k = \sum_{r=1}^{p} a_{r_n} V_r$$

gilt:

$$\sum_{r=1}^{p} a_{r_n} l_r \leq S_n \leq \sum_{r=1}^{p} a_{r_n} u_r$$

Sei nun $K_n = \left[\sum_{r=1}^{p} a_{r_n} l_r, \sum_{r=1}^{p} a_{r_n} u_r \right]$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}[S_n \in K_n^C] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Longleftrightarrow \ln \mathbb{P}[S_n \in K_n^C] = -\infty < -ns \quad \forall s > 0, n \in \mathbb{N}$$

woraus für $K = \lim_{n\to\infty} K_n = \left[\sum_{r=1}^{p} a_r l_r, \sum_{r=1}^{p} a_r u_r \right]$
$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \in K^C] \leq -s$ folgt.

Betrachten wir als nächstes die Konvergenz von $\frac{1}{\gamma_n} \Lambda_n(\gamma_n F)$ mit

$$\Lambda_n(F) = \Lambda_n(u) = \ln \mathbb{E}[\mathrm{e}^{uS_n}] = \ln \phi_{S_n}(u), \quad u \in \mathbb{R}$$

wobei ϕ_{S_n} die Momentenerzeugende Funktion von S_n bezeichnet.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_n}\Lambda_n(\gamma_n F) &= \frac{1}{n}\ln \mathbb{E}[\mathrm{e}^{unS_n}] = \frac{1}{n}\ln \mathbb{E}[\mathrm{e}^{u\sum_{k=1}^{n} V^k}] \\
&=^{\text{(iii)}} \frac{1}{n}\ln \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{uV^k}] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \phi_{V^k}(u) \\
&= \sum_{r=1}^{p} a_{r_n} \ln \phi_{V_r}(u)
\end{aligned}
$$

$$
\Lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n}\Lambda_n(\gamma_n F) = \sum_{r=1}^{p} a_r \ln \phi_{V_r}(u)
$$

Da die Funktionen $\phi_{V_r}(u) = \sum_{i=1}^{n_r} \mathrm{e}^{uV_r(\omega_i)}\mathbb{P}[\omega_i]$ differenzierbar sind mit

$$
\frac{\partial}{\partial u} \ln \phi_{V_r}(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} V_r(\omega_i)\mathrm{e}^{uV_r(\omega_i)}\mathbb{P}[\omega_i]}{\sum_{i=1}^{n_r} \mathrm{e}^{uV_r(\omega_i)}\mathbb{P}[\omega_i]}
$$

,ist $\Lambda(F)$ als Linearkombination differenzierbarer Funktionen ebenfalls differenzierbar (insbesondere Gâteaux-differenzierbar) und als Komposition stetiger Funktionen stetig (insbesondere unterhalbstetig). Wir haben also gezeigt, dass S_n unter diesen Voraussetzungen ein Prinzip großer Abweichungen erfüllt.

Literatur

[1] Wolfgang König: *Große Abweichungen, Techniken und Anwendungen*, 2006.

[2] Stefan Gerhold: *Skriptum Personenversicherungsmathematik*, 2019.

[3] Friedrich Wittmann: *Versicherungswirtschaftslehre auf Basis der Skripten von Prof. Leopold Mayer*, 2018.

[4] A. Brønsted und R.T. Rockafellar *On the subdifferentiability of convex functions*, 1965

[5] A. Dembo und O. Zeitouni *Large Deviations Techniques and Applications, 2nd edition*, 1998

[6] Maren Urner: *Eine Einführung in die Theorie der großen Abweichungen und ihre Anwendung im Kreditrisikomanagement*, Bachelorarbeit 2012.