Technische Universität Wien

Complex market dynamics in the light of random matrix theory

Autor:
Ewald Aliçka

Betreuer:
Assc. Prof. Dipl.-Ing.
Dr.techn. Stefan Gerhold

Seminararbeit

B.S. Finanz- und Versicherungsmathematik

Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

Einführung

An Informationen oder Daten mangelt es, durch den leichten Zugriff darauf, schon seit längerem nicht mehr. Heutzutage beschäftigt eher die Frage, wie man sich möglichst viele Informationen aus den gegebenen Daten aneignen kann.
Um die Daten besser zu verstehen versucht man so gut wie möglich diese zu verarbeiten um mögliche Strukturen zu erkennen. Mithilfe dieser Strukturen versucht man dann auch Zusammenhänge zu anderen Daten zu erschließen.
Im Bereich Aktienhandel ist das Erkennen dieser Beziehungen von großer Bedeutung.
Ein Beispiel dafür wäre die Diversifikation von Aktiendepots, da Investoren oftmals in verschiedene Aktien investieren um das Risiko zu streuen. Wenn nun jedoch direkte Abhängigkeiten zwischen diesen Aktien bestehen, könnte genau diese Absicherung gefährdet werden. Deswegen versucht man mit verfügbaren Daten diese linearen oder auch nicht linearen Abhängigkeiten zumindest abzuschätzen. Bei diesem Prozess ist die Wahl über den Zeitraum in welchem die Daten verwendet werden ,die Epoche, wichtig. Eine zu kurze oder zu lange Epoche geben dem Ergebnis eine nicht vernachlässigbare zufällige Komponente. Mithilfe der Random Matrix Theory versucht man diese Ergebnisse besser zu verstehen, indem man die Informationen, die dieses Ergebnis verfälschen, die Störgeräusche oder auch im englischen noise, versucht herauszufiltern um schlussendlich die gesuchten Abhängigkeiten zu finden.

Die Random Matrix Theory befasst sich mit der Statistik von Eigenwerten und wurde erstmals von J.Wishart im Jahre 1929 eingeführt. Eigenwerte einer Korrelationsmatrix liefern wichtige Erkenntnisse über deren Abhängigkeitsstruktur. Wishart hatte damals vorgeschlagen Korrelationsmatrizen, durch white noise Prozesse zu konstruieren und deren Eigenwerte zu untersuchen. Matrizen dieser Form werden auch Wishart Matrizen gennant. Das erworbene Wissen dieser Eigenwerte versucht man auf die empirische Korrelationsmatrix, welche durch die gegebenen historischen Daten erfasst wird, zu übertragen, um dadurch mehr über die gesuchten Abhängkeitsstrukturen in Erfahrung zu bringen. Das ist vorteilhaft, da schon einiges über die Eigenwerte von Wishart Matrizen, wie z.B deren Verteilung, bekannt ist.

Die empirische Erfassung

Natürlich muss erstmals die grundlegende Vorarbeit geleistet werden. Basierend auf die gegebenen Daten erstellt man empirische Analysen. Nehmen wir nun an, dass die Daten Informationen über eine oder mehrere Aktien beinhalten. Wir beobachten also gewisse Eigenschaften der Aktien in einem Zeitraum, wie ihr logarithmischer Ertrag in einem beliebigen Zeitintervall, als eine endlich Folge von zeitlich geordneten Messwerten. Weiters betrachten wir den logarithmischen Ertrag als einen stochastischen Prozess welcher genau unsere gegebenen Zeitreihen, also die geordeneten Messwerte, erzeugt. Zu einem Zeitpunkt t, kennen wir den vergangenen Verlauf des Prozesses, also alle früheren Preise, soweit sie natürlich aufgezeichnet sind. Deswegen definieren wir hier diesen Prozess als adaptiert bezüglich der natürlich Filtration.

Nehmen wir nun an, dass wir die Kovarianz zwischen zwei Zufallsvariablen wollen. Exakt bestimmen können wir sie natürlich nicht deswegen versuchen wir die Kovarianz mithilfe einer Stichproben Kovarianz zu schätzen. Wir betrachten nun ein Risikoportfolio, mit verschiedenen Aktien, und deren Preiskurse. Die Preise der der i‘ten Aktie zum Zeitpunkt t $S_i(t)$ schreibe ich nun um als den logarithmischen Ertrag, engl. log returns, der Aktie im Zeitraum t bis $t-1$ als $s_i(t) = ln(S_i(t)) - ln(S_i(t-1))$ um.
Nun bestimmen wir den gleitenden Mittelwert, engl. MA oder auch ausgeschrieben moving average, über alle log returns zum Zeitpunkt t in dem wir die Preise der letzten T Tage verwenden.

$$\overline{s_i(t)} = \frac{1}{T} \sum_{\bar{t}=t-T+1}^{t} a(\bar{t})(s_i(\bar{t}) \tag{1}$$

Mit den Gewichtungen $a(\bar{t})$. Damit haben wir einen erwartungstreuen Schätzer für unseren Erwartungswert.
Ein Vorteil des MA ist die Glättung der Zeit bzw. Datenreihe, da man durch die Gewichtung oder Entfernung von Ausreißern diese vernachläßigen kann.
Mithilfe der MA schätzen wir nun die Kovarianz zwischen 2 verschiedenen Aktien zum Zeitpunkt t:

$$C_{r_i r_j}(t) = \frac{1}{T-1} \sum_{1}^{T} (s_i(t) - \overline{s_i(t)}) \, (s_j(t) - \overline{s_j(t)}) \tag{2}$$

und die dazugehörige Korrelation die wir durch die Normierung mittels der Stichproben Varianz der Aktien σ_i erhalten:

$$\overline{C_{r_i r_j}(t)} = \frac{C_{r_i r_j}(t)}{\sigma_i \sigma_j} \tag{3}$$

Auch später wichtig wird die cross-covariance bzw. die cross-correlation Matrix sein. Die einzelnen Einträge der (geschätzten) cross-covariance Matrix betrachten wir hier als die Kovarianz zwischen 2 Aktien zu allen verschiedenen oder auch gleichen Zeitpunkten. Analog für die cross correlation Matrix. Das Verhältnis $Q = \frac{T}{N}$ zwischen der Anzahl der Aktien N und der Länge der Zeitreihe T verwendet man als ein Gütekriterium für die Qualität der Schätzung der cross correlations Matrix. Je größer Q desto besser wird in der Regel die Schätzung.

Was können wir nun jedoch von den ganzen Schätzungen wirklich abgewinnen oder anders gefragt welche Faktoren könnte das Ergebnis überhaupt potentiell verfälschen. Man sieht also, dass die Einträge der geschätzten cross correlations Matrix $\overline{C_{r_i r_j}(t)}$ abhängig von der Länge des Zeitintervalls,engl. epoch, von welchem meine Daten stammen, sind. Bei einer zu kurzen Epoche kann es zu große Schwankungen kommen und die Korrelationsmatrix kann viele Eigenwerte gleich 0 besitzen. Eigenwerte gleich 0 würden uns keine Auskunft über die Abhängigkeitsstruktur liefern. Durch die Auswahl einer größeren epoch schaffen wir es zwar die Schwankungen zu reduzieren, jedoch kann es sein, dass die Zeitreihe nicht stationär ist. Die Nichtstationarität ist ein Problem, da ich dann gewisse Erkenntnisse wie Erwartungswert, Varianz oder Kovarianz, zu einem bestimmten Zeitpunkt bzw. Zeitintervall, nicht auf alle anderen Zeitpunkte oder Zeitintervalle, der selben Länge, übertragen kann. Weiters sichert uns die Stationarität die Endlichkeit der Varianzen und die Existenz der Erwartungswerte. Ein weiteres Problem ist, dass unsere Informationen durch äußere Einflüsse, wie der Marktzustand, beeinflusst werden. Dadurch können Scheinrelationen entstehen die das Ergebnis erheblich verfälschen können.
Also aufgrund der Ungenauigkeiten die durch diese Einflüsse entstehen können sehen wir, dass unsere geschätzte correlations Matrix eine oder mehrere zufällige Komponenten besitzt.
Genau deswegen versucht man die empirischen correlations Matrizen, die wir durch unsere Daten bestimmt haben, mit den Wishart Matrizen zu vergleichen, also correlations Matrizen die durch unkorrelierte Zeitreihen, white noise Prozesse, erzeugt werden.

Wishart Matrizen

Um sich das alles nun besser vorstellen zu können konstruieren wie eine Wishart Matrix. Dafür definieren wir erstmals mit B eine $N \times T$ Zufallsmatrix:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1T} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NT} \end{pmatrix}$$

Um den roten Faden beizubehalten, definiere wir die einzelnen Zeilenvektoren b_i als die T lange Zeitreihe des i'ten Assets. Das heißt dass diese Matrix aus N Zeitreihen der Länge T besteht. Wir nehmen weiters an, dass die einzelnen Einträge der Zeitreihen reelle und unabhängigen Zufallsvariablen sind mit der Verteilung:

$$b_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) .$$

Mithilfe von B kontruieren wir die $N \times N$ Wishart Matrix W wie folgt:

$$W := \frac{1}{T} B B^* \tag{4}$$

wobei B^* die Transpornierte von B und T wieder die Länge der Zeitreihen ist. Im Detail sieht die Multiplikation der Matrizen so aus:

$$BB^* = \begin{pmatrix} b_1 b_1^* & b_1 b_2^* & \cdots & b_1 b_N^* \\ b_2 b_1^* & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_N b_1^* & \cdots & \cdots & b_N b_N^* \end{pmatrix}$$

wobei b_i bzw. b_i^* die Zeilenvektoren der entsprechenden Matrizen sind. Da aufgrund der Definition der Zufallsvariablen $\mathbb{E}[b_i] = 0 \ \forall i \in \{1, .., N\}$ gilt, können wir die einzelnen Einträge der Wishart Matrix:

$$W_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} b_{ik} b_{jk} \qquad \forall i, j \in \{1, .., N\} \tag{5}$$

als eine Approximation des Erwartungswertes $\mathbb{E}[b_i b_j]$ sehen. Da:

$$Cov(b_i b_j) = \mathbb{E}[b_i b_j] - \mathbb{E}[b_i]\mathbb{E}[b_j] = \mathbb{E}[b_i b_j] \tag{6}$$

gilt, können wir W als Kovarianzmatrix, welche über N Zeitreihen, mit jeweils T unabhängigen Zufallsvariablen, berechnet wurde, betrachten. Die Annahme, dass die Zeitreihen $b_i \ \ \forall i \in \{1, .., N\}$ unabhängig von einander sind, impliziert, dass alle nicht Diagonaleinträge der Wishart Matrix gleich 0 da gilt:

$$Cov(b_i b_j) = \mathbb{E}[b_i b_j] = \mathbb{E}[b_i]\mathbb{E}[b_j] = 0 \qquad i \neq j \tag{7}$$

Das wäre dann genau die unkorrelierte Wishart Matrix. Mit den selben Notationen und Definitionen definieren wir die korrelierte Wishart Matrix wie folgt:

$$W := \frac{1}{T}GG^* \quad mit \quad G := \zeta^{1/2}B \tag{8}$$

Wobei die $N \times N$ Matrix ζ die genauen Korrelationen der Zeitreihen speichert. Falls ζ die Einheitsmatrix ist, erhalten wir dann unsere unkorrelierte Wishart Matrix.

Durch analytische Verfahren gelingt es uns die Eigenwerte der Wishart Matrix zu bestimmen. Unter der Voraussetzung, dass $N \to \infty$ und $T \to \infty$, mit fixem $Q = \frac{T}{N}$ und $T > N$ ist die Dichtefunktion der Eigenwerte gegeben durch die Marcenko-Pastur Verteilung:

$$\rho(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_{max} - \lambda)(\lambda - \lambda_{min})}}{\lambda} \tag{9}$$

$$mit \quad \lambda_{min} = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{Q}}\right)^2 \quad \lambda_{max} = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}\right)^2 \tag{10}$$

Noch anzumerken ist, dass hier die Dichte $\rho(\lambda)$ auf Q normiert ist.
Für den Fall, dass $Q1$ ist gilt folgendes:

$$\rho(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_{max} - \lambda)(\lambda - \lambda_{min})}}{\lambda}(1 - Q)\delta(\lambda) \tag{11}$$

Das Intervall $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ wird ausschlaggebend dafür sein, wie gewisse Eigenwerte der Kovarianzmatrix verteilt sind. Dadurch können wir den zufälligen Faktor, der empirischen Kovarianzmatrix, herausfiltern. Da die Eigenwerte ,die genau dieser Verteilung genügen genau von zufälliger Natur sind. Mehr dazu später.

Wahl der Epoche

Wie am Anfang erwähnt, kann eine zu lange oder zu kurze Epoche zur Bestimmung der empirischen Korrelationsmatrix zu Verfälschungen des Ergebnisses führen.
Es gibt viele Möglichkeiten, um dieses Problem zu behandeln eine davon ist die Anwendung von power mapping auf correlations Matrizen mit kurzer Epoche.

Da für lange Zeitintervalle die Stationarität der Zeitreihe nicht angenommen werden kann, können wir hier unser Intervall in kurzen Epochen aufteilen. Dadurch verbessert sich die Annahme der Stationarität für die aufgeteilten Intervalle, jedoch impliziert das Verhältnis zwischen Länge der Zeitreihe und Anzahl der Zeitreihen, dass es nun viele Eigenwerte gleich 0 gibt. Genau das wollen wir ja vermeiden, da dies uns weniger Auskunft über die Abhängigkeitsstruktur gibt. Auf die Einträge der Wishart Matrix bzw. auf die Einträge der cross-correlation Matrix für diese kurzen Intervalle können wir nun power mapping anwenden. Hier wird eine nicht lineare Verzerrung, engl. distortion, auf die einzelnen Matrixeinträge angewendet. Durch dieses Verfahren gelingt es uns nicht nur den Entartungsgrad des Eigenwertes gleich 0 zu reduzieren, sondern auch um Schwankungen, die sich aufgrund der kurzen Epoche bilden, zu reduzieren:

$$W_{ij} \rightarrow sign(W_{ij})|W_{ij}|^{1+\epsilon} \tag{12}$$

Wobei wir betrachten wie die Wahl des Verzerrungs-Parameters ϵ sich auf die Matrix einwirkt.

Analyse des Eigenwertspektrums

Hier kommen wir nun endlich dazu warum und wie man Random Matrix Theory, also die Analyse der Eigenwerte einer Zufallsmatrix, überhaupt anwendet.
Also wollen wir von unseren geschätzten Relationen, die wir durch die empirischen Erfassungen erhalten haben, die gesuchten Relationen erhalten indem wir die Faktoren, welche zur Verfälschung des Ergebnisses beitragen, herausfiltern. Wir nehmen wieder an, dass die gesuchten Korrelationen wieder die logarithmischen Erträge verschiedener Aktien sind. Natürlich ist es wichtig zu berücksichtigen ob die Aktien im selben wirtschaftlichen Bereich etabliert sind. Das kann zu Scheinrelationen führen, da der logarithmischer Ertrag, von verschiedenen Aktien, durch den selben äußeren Faktor beeinflusst werden kann. Im späteren Verlauf reden wir hier von den sektoriellen Relationen. Äußere Faktoren, z.B. Extremzustände wie Kriege, können natürlich den ganzen Markt, unabhängig vom Sektor beeinflussen. Die Relationen, die sich über den ganzen Markt erstrecken defineiren wir als die marktlichen Relationen. Für diese Art von Anaylsen werden Aktien, so weit es geht, sektroriell zusammengefasst und es wird untersucht Änderungen innerhalb eines Sektors Auswirkungen auf andere Sektoren hat.

Wir erinnern uns, dass alle reelen symmetrische Matrizen diagonalisierbar sind. Angesichts der Diagonalisierbarkeit der Korrelationsmatrix, können wir durch die Spektralzerlegung, engl. Eigendecomposition, diese Matrix in eine Normalform faktorisieren. Die Korrelationsmatrix wird hier bzgl. ihrer Eigenwerte und Eigenvektoren dargestellt. Genauer gesagt können wir die Eigenvektoren so wählen, dass sie orthogal zueinander sind. Daduruch kann ich die Korrelationsmatrix $\overline{C}$ folgendermaßen anschreiben:

$$\overline{C} = Q\Lambda Q^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i a_i^* \tag{13}$$

wobei nach der ersten Gleichheit Q eine orthogonale Matrix, dessen Spalten genau die Eigenvektoren sind und Λ eine Diagonalmatrix, die die Eigenwerte speichert. Bei der letzten Gleichheit multiplizieren wir genau die Eigenwerte λ_i mit den entsprechenden Eigenvektoren a_i. Natürlich sind hier Q^* und a_i^* wieder die entsprechenden Transponierten.
Diese Aufteilung versuchen wir abermals aufzuspalten, in dem wir die Eigenwerte, welche wir durch analytische Verfahren bestimmen, der Größe nach ordnen.

$$\overline{C} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i a_i^* = \lambda_1 a_1 a_1^* + \sum_{i=2}^{M} \lambda_i a_i a_i^* + \sum_{i=M+1}^{N} \lambda_i a_i a_i^* \tag{14}$$

Hier gibt M an welche Daten wir noch als relevant betrachten. Die restlichen $N-M$ Daten die in der Summe ganz am Ende aufgefasst werden, sind Mercenko-Pastur verteilt und damit zufälliger Natur.
Hier sieht man auch nochmal gut, wie hilfreich die non linear distortion und damit die verbundene Reduzierung der Vielfachheit des Eigenwertes gleich 0 ist. Es ist

noch anzumerken, dass eine leichte Abweichung von M keinen erheblichen Unterschied auf unsere Datenanaylse ausmacht.

Der größte Eigenwert und der dazugehörige Eigenvektor gibt uns die Richtung der maximalen Änderung an. Wir ordnen genau diesen dominanten Eigenwert dem Marktbetrieb zu. Das heißt dieser Teil der Linearkombination entspricht der Korrelation des gesamten Markts. Die nächst größten Eigenwerte entsprechen dann dem Sektorbetrieb, der genau die Abhängigkeiten innerhalb eines Sektors festhält. Die restlichen, kleinen, Eigenwerte werden dem zufälligen Betrieb zugeordnet und sind somit nicht Teil unser gesuchten Korrelation. Genau diesen Faktor wollten wir aus unserer Statistik fernhalten.
Alle Eigenwerte des Markt oder Sektorbetriebs übersteigen den Maximalwert λ_{max} der Marcenko-Pastur Verteilung.
Aufgrund der Relevanz der größten Eigenwerte, mit deren entsprechenden Eigenvektoren, können wir die ursprüngliche Korrelation allein durch diese und ohne den zufälligen Faktoren rekonstruieren.

Anwendungen der Random Matrix Theory

Hier gehen wir auf einige Anwendungen genauer ein, wobei bei einigen Beispielen ein gewisses Vorwissen in data science bzw. machine learning vorausgesetzt wird.

Charakterisierung katastrophalen Unbeständigkeiten

Extremzustände wie z.B Markteinenbrüche Erdbeben Flutung kommen in der Regel zwar nicht alltäglich vor, haben jedoch langfristige Auswirkungen. Deswegen ist die Untersuchung der Komplexität der zugrundeliegenden Dynamiken und der charakteristischen Muster die nach so einem Ereignis entstehen von großer Bedeutung. In einer Studie, siehe [4] im Literaturverzeichnis, wurde die Entwicklung der cross-correlation Strukturen von Aktienerträgen und dessen Eigenwertspektrum über verschiedenen Zeitepochen untersucht. In dieser Studie wurde spezifisch der US und der japanische Markt untersucht.
Durch die Verwendung von power mapping wurde, wie schon öfters angeschnitten, eine non linear distortion, auf die Korrelationsmatrizen mit verschiedenen Epochen angewendet, um die Analyse der Eigenwerte zu verbessern. Hierbei wird ein kleiner Paramter für ϵ angewendet.
Die statischen Eigenschaften des Eigenwertspektrums haben folgende Erkenntnisse eingebracht:

- Die Form des Spektrums reflektiert die Marktinstabilität der beiden Märkte
- Der kleinste Eigenwert, weist auf Turbulenzen, speziell ab dem Jahr 2001, hin. Im Vergleich haben wir vorher gesehen, dass der größte Eigenwert auf die Marktänderungen hinweist
- Der kleinste Eigenwert, kann statistisch zwischen einfachen Turbulenzen und richtigen Ausnahmezuständen, im Markt, unterscheiden. Im englischen auch eine Unterscheidung zwischen internal instability oder external shock.

Bei bestimmten Instabilitäten war der kleinste Eigenwert mit dem größten Eigenwert positiv korreliert und dadurch mit der Marktkorrelation. Wiederum gab es bei anderen Fällen eine anti korrelation. Dies weist auf einen Zusammenhang zwischen einem crash eines Marktes und deren intrinsischen Zustand, z.B. einer Finanzblase, im englischen bubble, oder externen Ereignissen, wie die Nuklearkatastrophe in Fukushima, hin.

Erkennen von Marktzustände

Die Untersuchungen zu kritischen Dynamiken in komplexen Systemen sind zwar interessant, sie können jedoch sehr anspruchsvoll werden. Dies dient vorallem der Untersuchung von Markzuständen und deren Übergänge. Dadurch können unter anderem Finanzkrisen vorhergesagt werden. Es gibt aktuelle Studien, die Analysen erstellt haben welche sich auf Korrelationsstrukturen von hunderten Daten mit kurzer Epoche basieren. Der Marktzustand lässt sich als cluster von ähnlichen Korrelationsstrukturen, welche öfter als durch zufällige Simulationen auftauchten , erkennen. Es wurde auch hier power mapping angewendet, um die Schwankungen der singulären Korrelationsmatrix zu reduzieren und um auch eindeutigere und dichtere cluster zu erhalten. Die Auswirkungen, durch das power mapping, sind nicht nur für Korrelationsmatrizen einer beliebigen Epoche sondern auch für ähnlichen Matrizen, welche für die verschiedenen Korrelationsmatrizen zu verschiedenen kurzen Zeitepochen bestimmt werden, vorteilhaft. Durch die Benutzung von 3D-multidimensional scaling maps wurde k-Means-clustering angewendet, um die clusters mit ähnlichen Korrelationsmustern in k Gruppen bzw. Marktzustände zu unterteilen. Ein Problem welches sich für diese clustering Methode ergibt ist, dass wir den optimalen Parameter k nicht kennen. Es gibt verschiedene Methoden um k zu bestimmen oftmals wird jedoch erstmals ein willkürlicher Wert angenommen. Eine weitere clustering Methode, welche sich auf den cluster Radius und auf die optimale Wahl des Geräuscheunterdruckungs-Paramters, das optimale ϵ welches wir bei der non linear distortion bestimmen, basiert. Hier ist die Bestimmung der optimalen Zahl für das clustering leichter und genauer durchzuführen. Bei diesem Verfahren wird der Mittelwert und die Standardabweichung der intra-cluster Abständen, bestimmt. Das gelingt uns durch die Verwendung von hunderten verschiedenen initial conditions, z.B. die Wahl für die k-centroids cluster Analyse. Die Änderung der Ausgangsbedingungen resultieren in verschiedene clusterings der n Objekte in Form von verschiedenen Korrelationsmatrizen. Falls die clusters der Punkte im Koordinatenraum ganz verschieden sind, dann impliziert die Änderung der initial conditions keine anderen Resultate bei der k-means clustering Methode. Hier entsteht nur eine kleine Varainz der intra-cluster Abstände. Die Allokation der Matrizen in die verschiedenen clusters wird problematisch, falls die clusters nahe beieinander sind oder sogar überlappen, da die Ausgangsbedinungen wieder das clustering an verschiedenen Punkten beeinflussen kann. Dadurch ensteht eine größere Varianz der instra-cluster Abstände. Deswegen impliziert eine minmale Varianz bzw. Standardabweichung eine Robustheit des clusterings. Um die optimale Anzahl an clusters zu finden, kann man das maximale k betrachten, welches uns die kleinste Varianz bzw. Standardabweichung bei den instra-cluster Abständen, mit verschiedenen initial conditions, liefert.

Anwendung im Portfoliomanagement

Markowitz Portfolio Theory ist einer der relevantesten Themen in quantitative finance. Sie beschäftigt sich mit der Bestimmung der optimalen Portfoliogewichtungen, also in welchem Ausmaß ich in gewisse Portfolios investiere. Optimal im Sinne von, dass entweder der Ertrag für einen gewisses Risikolevel maximiert wird oder das Risiko für ein gewissen Ertrag minimiert. Also wird hier entweder das Risiko oder der Ertrag fixiert.
Markowitz hat für diese Optimierungsaufgabe unteranderem folgende Annahmen für den Markt gestellt:

- Investoren handeln rational
- Investoren würden nur ein höheres Risiko annehmen, falls der Ertrag dementsprechend höher ist
- Investoren können unbeschränkte Menge an Kapital ausleihen bzw. verleihen und das ohne Zinsen
- Der Markt ist effizient und sie fordert keine Transaktionskosten

Markowitz Portfolio Theory wird basierend auf die empirischen Daten durch die ersten und zweiten sample moments konstruiert. Durch die Random Matrix Theroy gefilterte geschätzten Korrelationen werden die Vorhersagen von Korrelationen stark verbessert. Dies wird dann bei der Erstellung des Portfolios genutzt.

Literaturverzeichnis

[1] Complex market dynamics in the light of random matrix theory (Hirdesh K. Pharasi, Kiran Sharma, Anirban Chakraborti and Thomas H. Seligman)

[2] Multivariate analysis of short time series in terms of ensembles of correlation matrices (Manan Vyas, T. Guhr,T. H. Seligman)

[3] `https://stackoverflow.com/questions/31884985/what-does-selecting-the-largest-eigenvalues-and-eigenvectors-in-the-covariance-m`

[4] Characterization of catastrophic instabilities: Market crashes as paradigm (Chakraborti, A., Sharma, K., Pharasi, H.K., Das, S., Chatterjee, R., Seligman)