

# ***Die Rentenversicherungssterbetafel***

## ***AVÖ 2005R***

***Ergebnis der AVÖ-Arbeitsgruppe***

Oberwolfach, 25. Juni 2005



Reinhold Kainhofer, Uwe Schmock

Inst. f. Wirtschaftsmath., FG Finanz- und Versicherungsmath., TU Wien

# Sind neue Tafeln nötig?

Die letzten Rententafeln AVÖ 1996R haben ihr beabsichtigtes Alter erreicht (typischerweise 10 Jahre).

Manche Annahmen der AVÖ 1996R sind nicht eingetroffen:

- Zu wenige Sicherheitsabschläge für Modellrisiko / Parameterunsicherheit.
- Trendabschwächung nicht bemerkbar - im Gegenteil (bei hohen Altern).
- Benutzte Selektionseffekte für Männer scheinen zu gering.

Neue deutsche Tafeln DAV 2004-R im Vergleich (NEP einer 20 Jahre aufgeschobenen Rente, Bezug ab 65 Jahre, 2.75% Zins):

	AVÖ 1996R	DAV 2004-R	AVÖ in % von DAV
Männer	8.282	10.522	78.7%
Frauen	10.188	11.691	87.1%

# Allgemeines zur Tafelerstellung

**Ziel:** Erstellung einer Generationentafel (wie AVÖ 1996-R):

- ähnlicher Aufbau wie AVÖ 1996R hat (damit leicht zu implementieren)
- an aktuelle Daten angepasst
- **langlebig** (damit nicht in 10 Jahren wieder stark nachreserviert werden muss)
- Sicherheitszuschläge (Modellrisiko, Parameterunsicherheit, etc.)

## Allgemeiner Ablauf:

1. Grundlagen 2. Ordnung (Basistafel, Trend):  
Schätzung der **tatsächlichen Sterblichkeit** von Rentenversicherten (aus Daten der Statistik Austria und Selektionseffekten wie in D)
2. Grundlagen 1. Ordnung: zusätzliche Sicherheitsabschläge für **Modellrisiko, Parameterunsicherheit**, etc.

Für das **Schwankungsrisiko** soll auch diesmal kein Effekt eingebaut werden, die Argumentation ist gleich wie bei der AVÖ 1996R.

# Datenmaterial

## Bevölkerungssterblichkeit (Statistik Austria)

- Volkssterbetafeln der **Volkszählungen seit 1870** (Alter bis 90 bzw. 100).
- Jährlich **fortgeschriebene rohe Sterbetafeln** seit 1947 (bis 2002). Altersgrenze 95 Jahre.
- Sterbetafel der **Volkszählung 2000/02** bis zum Alter von **112 Jahren**.

## Rentnerselektionseffekte

- **Keinerlei Aufzeichnungen in Österreich** vorhanden. Auch Daten der gesetzlichen Sozialversicherung standen diesmal nicht zur Verfügung.
- In Deutschland Aufzeichnungen der GenRe und der Münchner Rück über Rentenversicherungen der Jahre 1995 bis 2002. Außerdem Daten der gesetzlichen Rentenversicherung von 1986 bis 2002.
- In der Schweiz Beobachtungsdaten der Rentenversicherungen seit 1937 vorhanden.

# Allgemeine Formel der Rententafel

Formel für Sterbewahrscheinlichkeit  $q_J(x)$  einer  $x$ -jährigen Person im Jahr  $J$ :

$$q_J(x) = \underbrace{f_{Sel}(x) \cdot q_{2001}(x)}_{q_{G|E}^{(2001)}(x) \dots \text{Basistafel 2001}} \cdot e^{-G(J-2001)\lambda_x} [ \cdot f_{SR}(x) ], \quad (1)$$

$q_{2001}(x)$  ... offizielle Sterbetafel 2000/02

$f_{Sel}(x)$  ... Selektionsfaktor für Person im Alter  $x$

$G(J - 2001)$  ... langfristige Trendabschw. (in 100 J. halbiert, Grenzsterbl.)

$\lambda_x$  ... jährliche Verbesserung der Sterblichkeit (aus Trend seit 1972)

$f_{SR}(x)$  ... Abschlag für Schwankungsrisiko, nicht in den Tafeln

Trend ist Modifikation des Mittelfristtrends (seit 1972) der Gesamtbevölkerung, plus Sicherheitszuschläge (Modell-, Parameterunsicherheit) und Selektion.

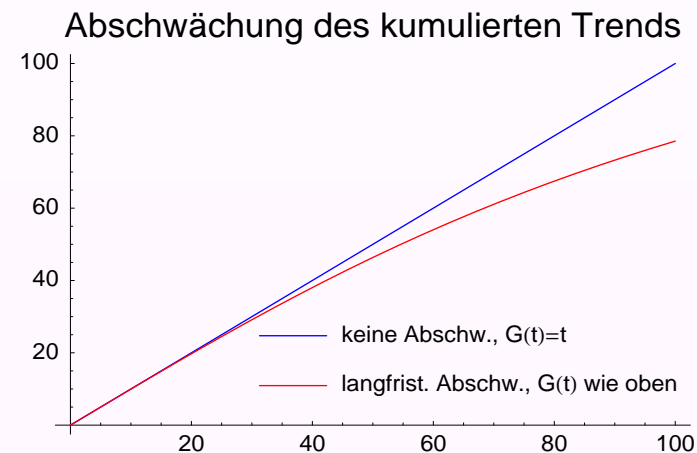
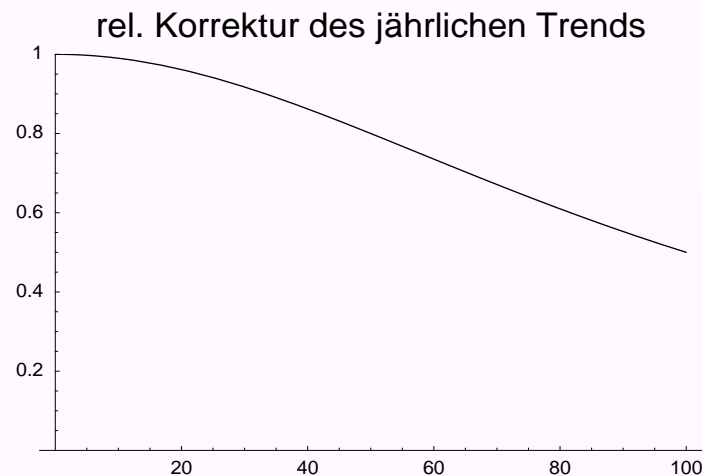
$\lambda_x$  sind konstant und tabelliert, ebenso Basistafel 2001  $q_{G|E}^{(2001)}$ .

# Langfristige Trendabschwächung

- Trend  $\lambda_x$  pro Jahr bleibt nicht zeitlich konstant. Jährliche Verbesserung **nimmt nicht-linear ab** auf  $\lambda_x^{(1)}(t) = \frac{\lambda_x}{1+(t/t_{1/2})^2}$  im Jahr 2001 +  $t$ , mit  $t_{1/2} = 100$ . In  $t_{1/2}$  Jahren nimmt Sterblichkeit nur mehr halb so stark ab.
- Kumulierter (aufintegrierter) Trend von 2001 bis ins Jahr 2001 +  $t$ :

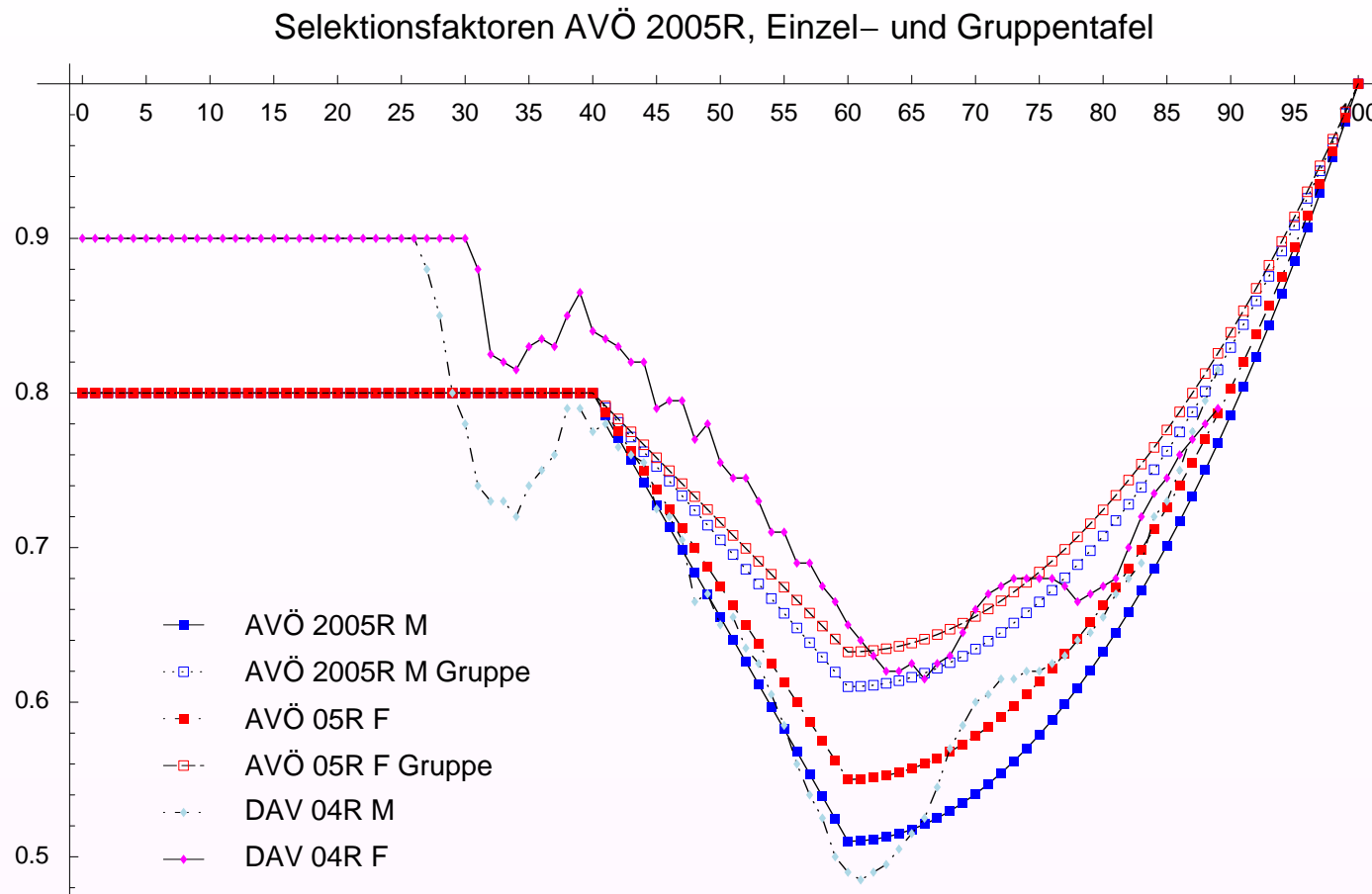
$$\tilde{\lambda}_x = \frac{t_{1/2}}{t} \arctan\left(\frac{t}{t_{1/2}}\right) \lambda_x^{(orig)} \quad \text{bzw.} \quad G(t) = t_{1/2} \arctan\left(\frac{t}{t_{1/2}}\right)$$

- Grenzsterbetafel:  $G(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} t_{1/2}$ ; mittl. Lebenserwartung:  $\approx 102$  Jahre



# Selektionsfaktoren

Daten nur aus Deutschland vorhanden, in der Schweiz keine Untersuchungen.



Form ist 1) **mathematisch einfach**, 2) passt gut zu **deutschen Kurven**, 3) bei AVÖ 1996R als guter Fit der Daten der gesetzlichen SV in Österreich erhalten

# Weitere Bemerkungen zu den Selektionsfaktoren

- **Selektion der Frauen** deutlich geringer als bei M. Mögliche Gründe:
  1. Frauen haben schon eine **geringe Sterblichkeit**, daher keine starke Selektion mehr möglich.
  2. Die Selektion orientiert sich stark am Ehemann, da viele Paare eine Rentenversicherung gemeinsam abschließen. Der Einfluss der Frau ist daher nicht so stark. Dies kann (bzw. wird voraussichtlich) sich in der Zukunft ändern, weshalb für Frauen die Selektionseffekte **zusätzlich erhöht** werden.
- In D zwei Tafeln: Selektionstafel (nur für Bezugszeit), in den ersten 5 Jahren des Bezugs mit zusätzlichem Selektionseffekt <sup>a</sup> aufweist (daher scheinbar geringere Selektionsfaktoren), und Aggregattafel über den ganzen Bestand (Bezug und Aufschub) bestimmt. Letztere wurde für die AVÖ 2005R benutzt (Ansonsten würde für jedes Rentenbeginnalter eine eigene Tafel benötigt).

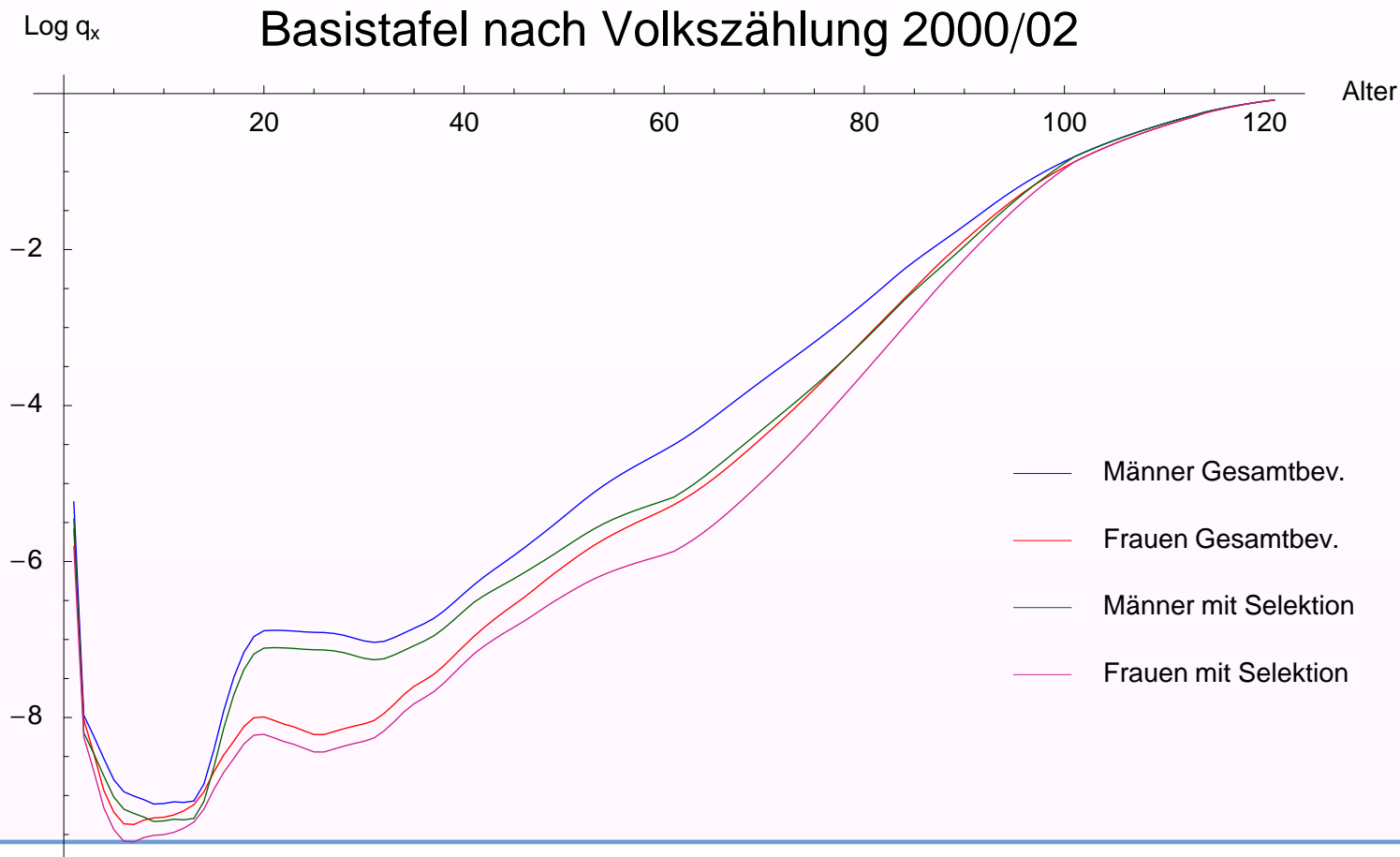
---

<sup>a</sup>Faktor im 1. Jahr 0.67 (M) bzw. 0.71 (F), im 2.-5. Jahr 0.88 (M) und 0.80 (F)



# Basistafel 2000/02

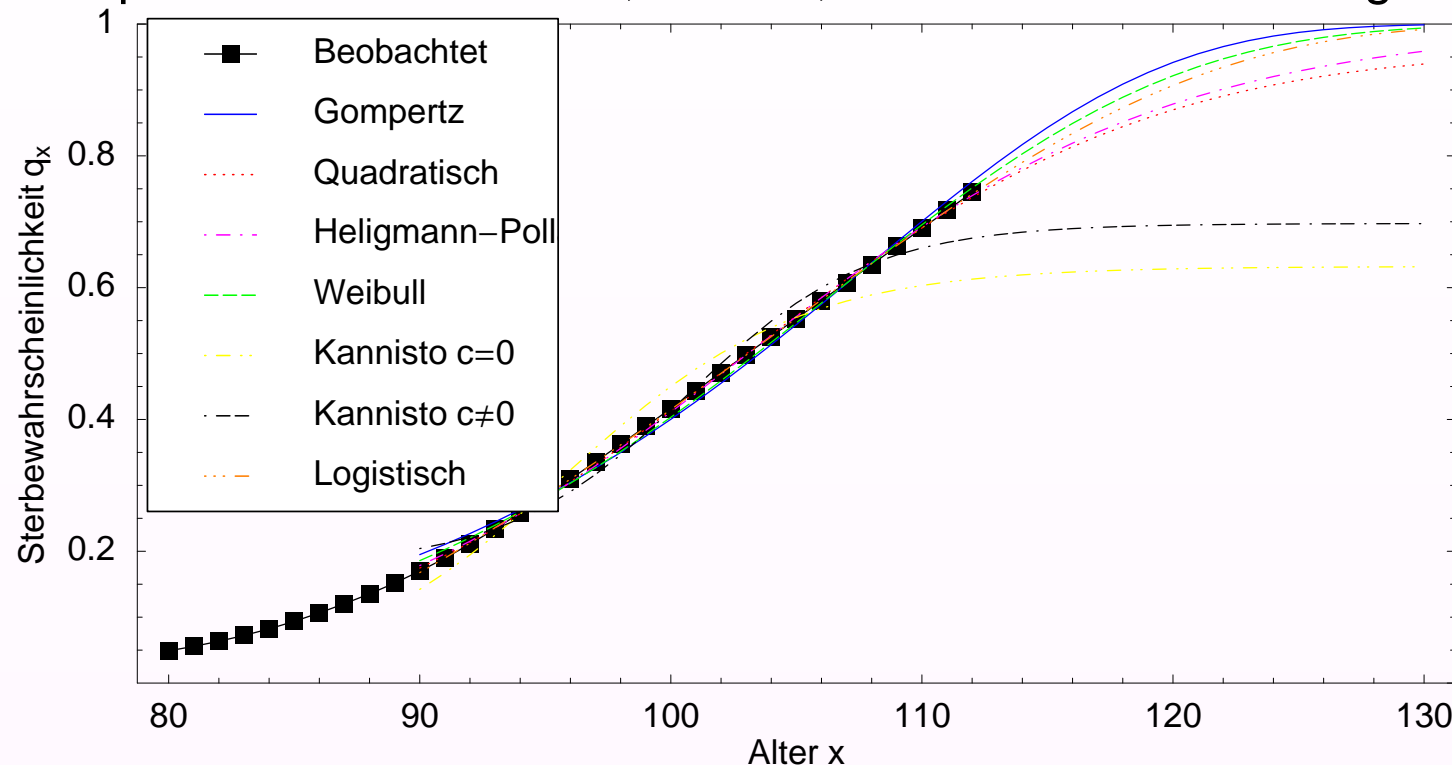
Als Basistafel wird die Sterbetafel  $q_{2001}(x)$  der Volkszählung 2000/02 benutzt, die bis zum Alter 112 Jahre vorliegt. Extrapolation bis 120 Jahre erfolgt mittels fit einer Weibull-Funktion an die Daten. Darauf werden die Selektionsfaktoren angewendet:



# Extrapolation für sehr hohe Alter

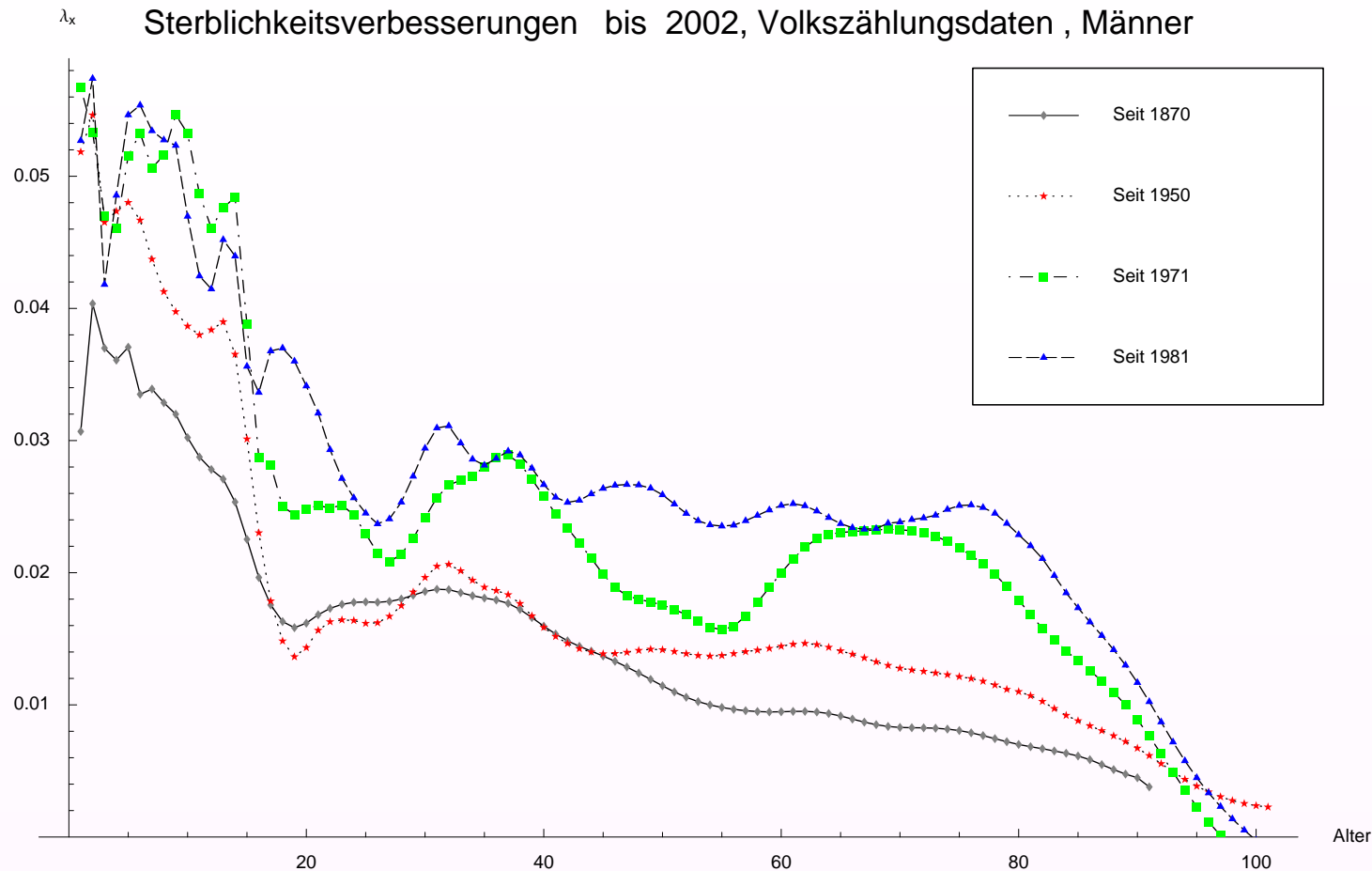
Der Vollständigkeit halber, genaue Wahl hat praktisch keinen Einfluss (außer auf Reserven, wenn jemand über 110 Jahren im Bestand).

Extrapolation für hohe Alter, Frauen, Daten der Volkszählung 2000/02



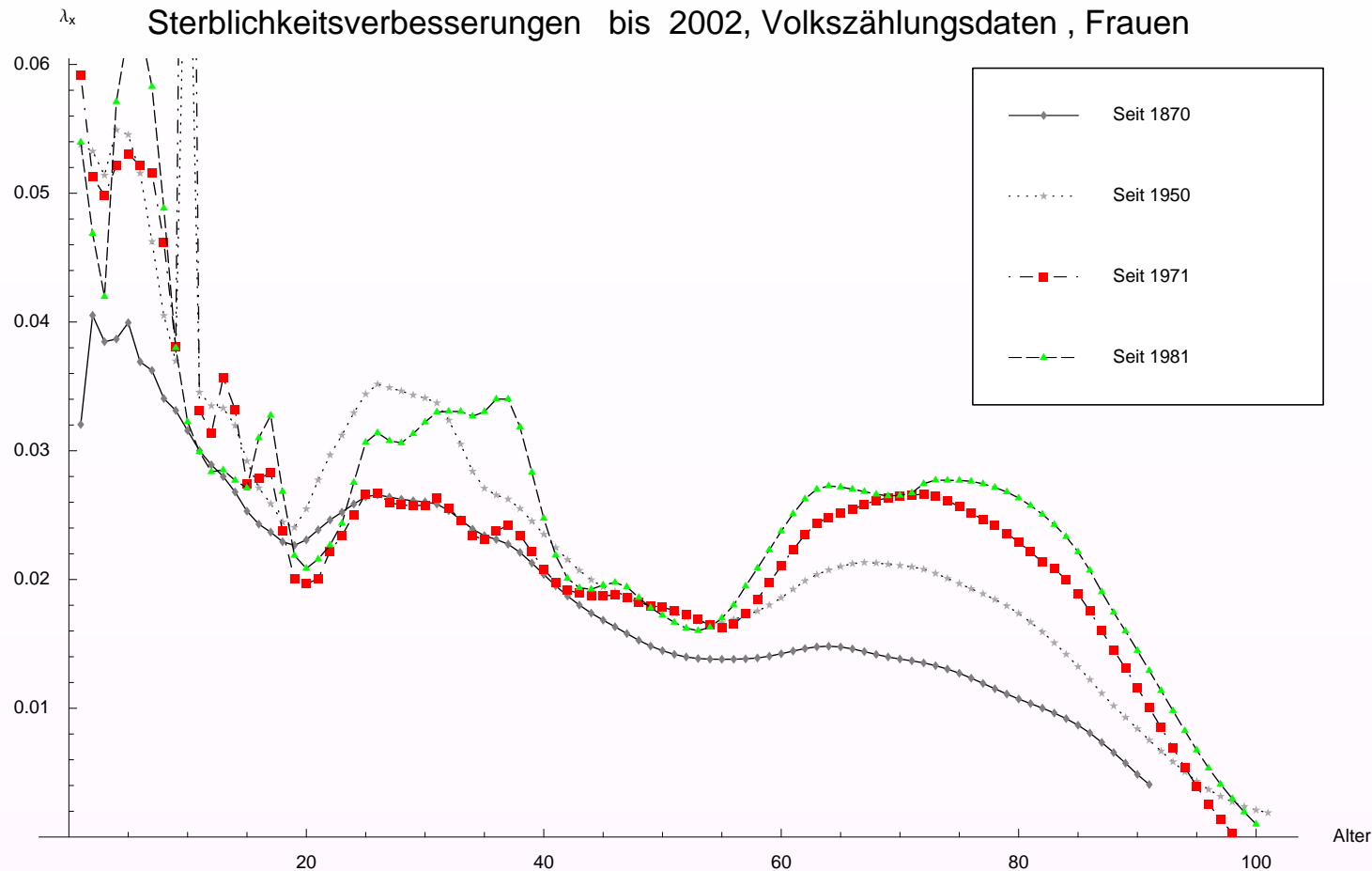
Bemerkung: Die Sterbewahrscheinlichkeiten für hohe Alter sind nach der neuen Volkszählung sogar gestiegen!

# Trendentwicklung (Volkszählungen), Männer



- "Mulde" bei 40-60 Jahren nur im Mittelfristtrend
- kein Trendrückgang

# Trendentwicklung (Volkszählungen), Frauen



- "Mulde" bei 40-60 Jahren, entspricht fast Langzeittrend!
- starke Ausprägung des "Buckels" für hohe Alter!

# Rohtrend seit 1972: Lee-Carter Methode

Rohdaten: **jährlich fortgeschriebene Sterbetafeln** bis 95 Jahre der Statistik Austria, 1972 bis 2002. (Daten seit 1947 vorhanden)

**Bi-lineare Zerlegung** der Sterbewahrscheinlichkeit in der Form:

$$\log q_x^{(t)} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_x^{(t)}$$

$\alpha_x$  ... allgemeine Form der Sterblichkeitskurve

$\kappa_t$  ... Zeittrend, als Zeitreihe angesehen

$\beta_x$  ... altersabhängiger Einfluss des Trends

$\varepsilon_x^{(t)}$  ... normalverteilter Fehlerterm

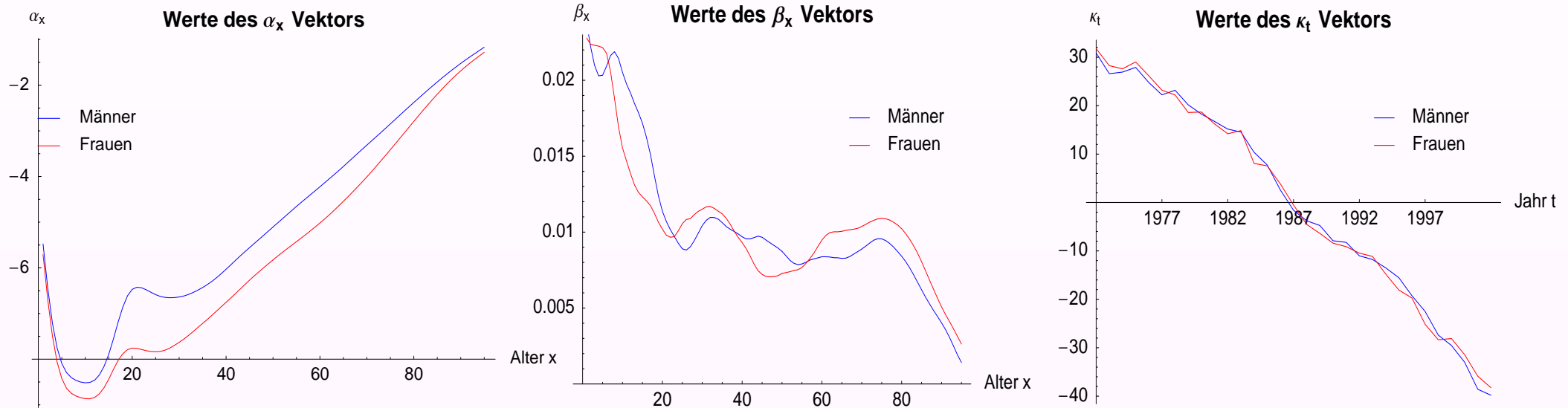
- Bestimmung der  $\alpha_x$  **als Mittelwert** über den Betrachtungszeitraum.
- $Z_x^{(t)} = \log q_x^{(t)} - \alpha_x$  als Matrix aufgefasst, **Singulärwertzerlegung** ( $Z = L \cdot S \cdot R$ ), deren erster Term genau die Zerlegung in  $\beta_x \kappa_t$  liefert. Entspricht "ordinary least-squares" Fit an die Matrix (bei vorheriger Normierung durch  $\sigma_x$ ).
- $\kappa_t$  als **Zeitreihe** angesehen (Random Walk mit Drift), die linear **extrapoliert**

werden kann:  $\kappa_{2001+n} = \kappa_{2001} + n\Delta\kappa$

# Lee-Carter Zerlegung

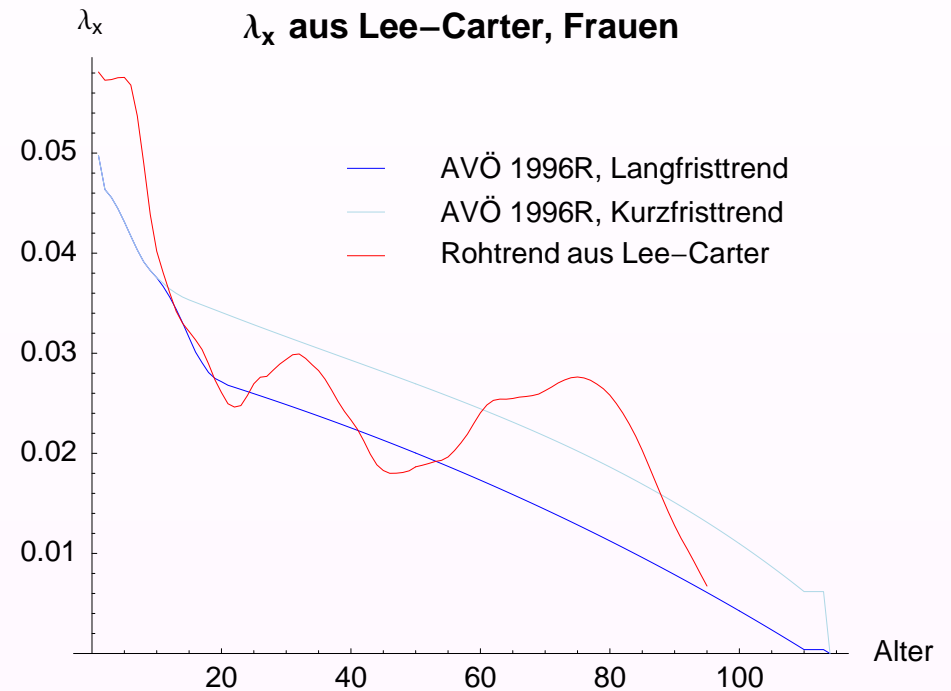
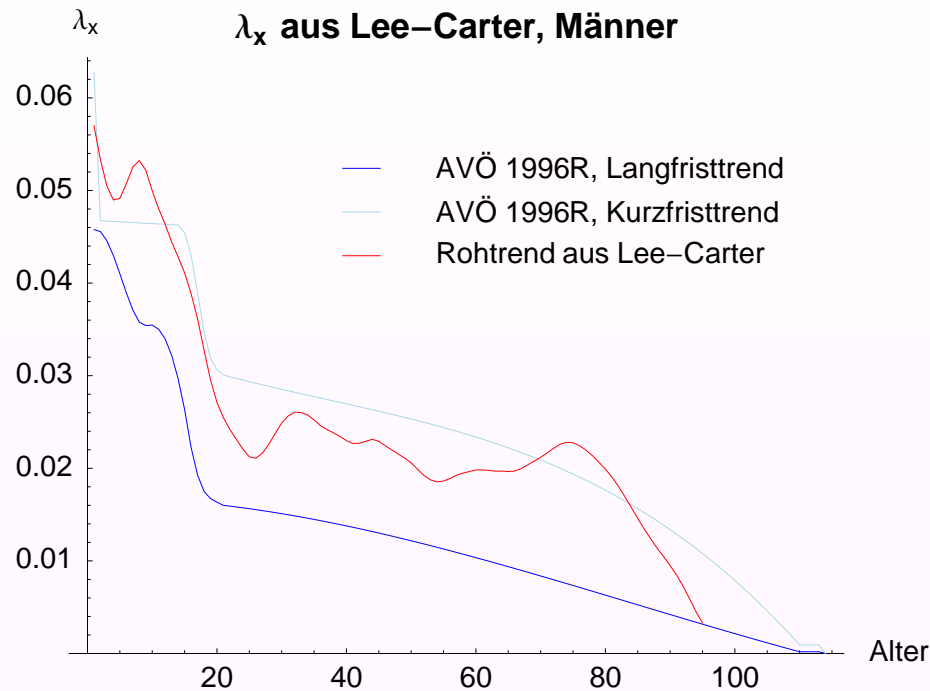
- Lee-Carter Methode vor allem in den USA und in GB standardmäßig.
- Lineare Extrapolation (ARIMA(0,1,0) Zeitreihe) entspricht dem Modell der AVÖ 1996R und der DAV 2004-R für Jahr  $J$ :

$$\begin{aligned}\hat{q}_x^{(J)} &= \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) = \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_{2001} + \beta_x \Delta \kappa \{J - 2001\}) \\ &= q_x^{(2001)} \exp(\lambda_x \{J - 2001\})\end{aligned}$$



# Extrapolationsparameter $\lambda_x$ aus Lee-Carter

Aus der Lee-Carter Zerlegung ergeben sich folgende Parameter für die Gesamtbevölkerung, die noch an die Menge der Rentenversicherten angepasst werden müssen. Zum Vergleich sind hier schon die Parameter der AVÖ 1996R angegeben:



## Trend 2. Ordnung: tatsächlicher Versichertentrend

- **Rentenversicherte haben höheren Trend als Gesamtbevölkerung!**
- In CH (aus Daten seit 1958): Männer doppelt so starke Verbesserung, Frauen nur etwa 1.12 mal so starke Verbesserung. Z.B. für 70-jährige Männer:

Gesamtbevölkerung  $\lambda_{70} = 1.33\%$

Rentenversicherte  $\lambda_{70} = 2.41\%$

- In D: Vergleich Arbeiter vs. Angestellte (gesetzliche Rentenversicherung): Zuschlag von 0.2% auf Trend der Gesamtbevölkerung.



# Versichertentrend $\lambda_x$

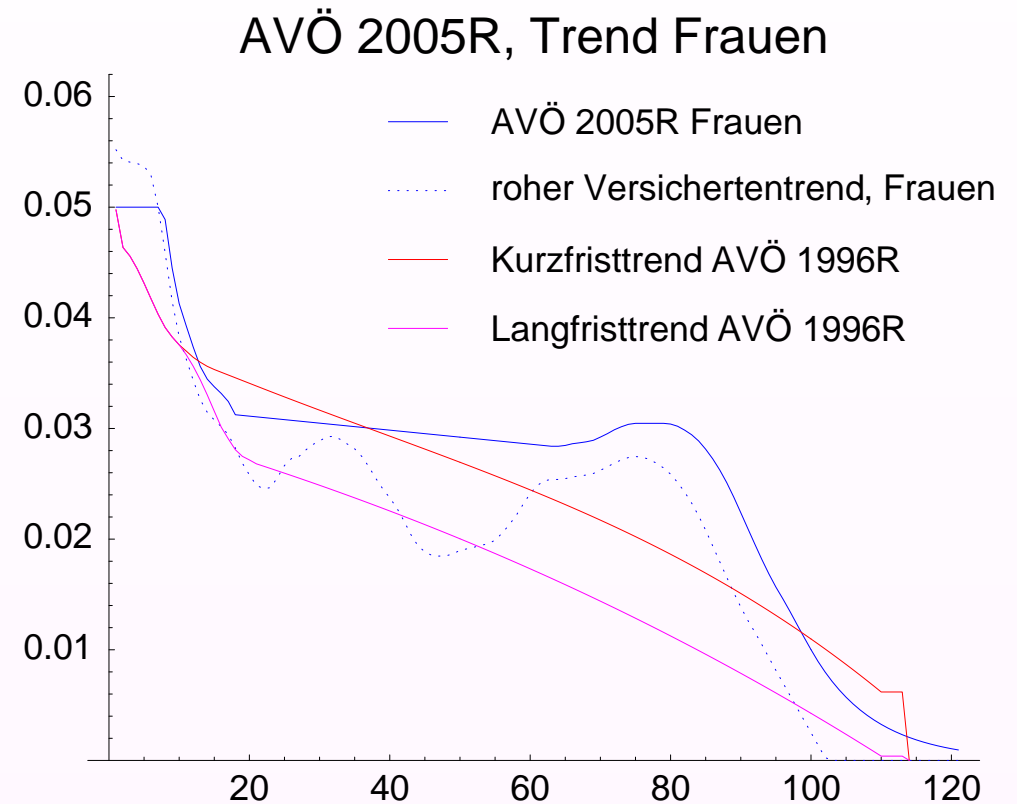
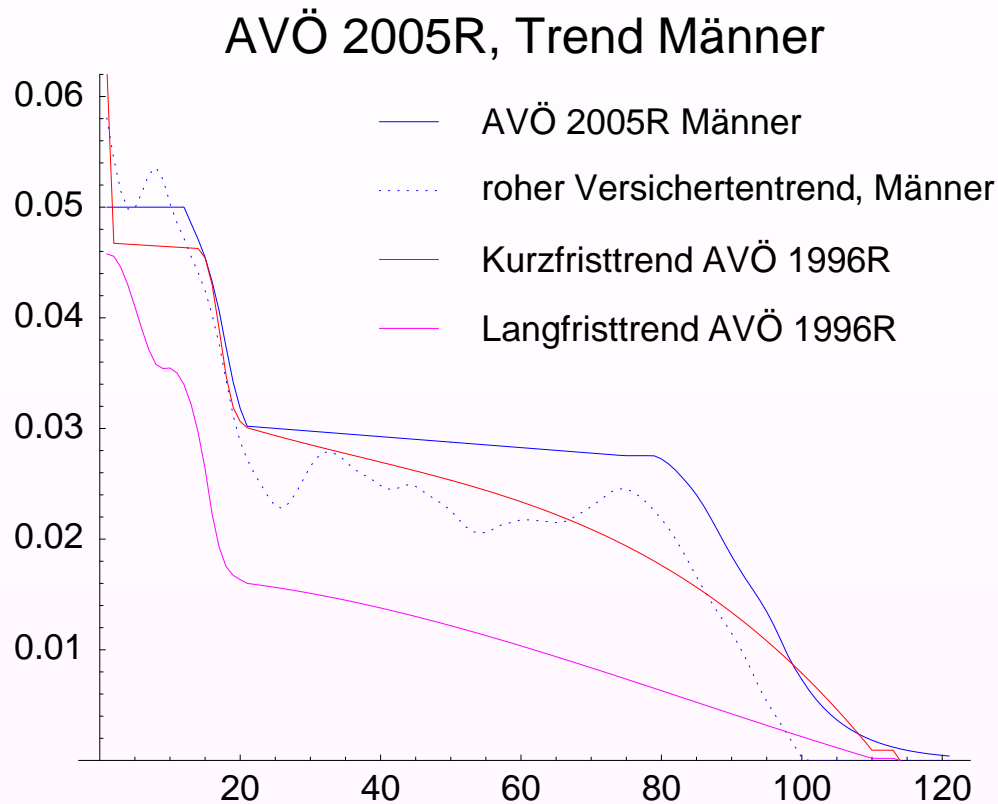
- Trend für **Gesamtbevölkerung** aus Rohdaten seit 1972
- Um **0.2% additiv** nach oben verschoben (soziale Selektion): roher Versichertentrend
- **Keine kurzfrist. Trendabschwächung**. Langfristig abschwächen des Trends (in 100 Jahren halbiert), dadurch erhält man Grenzsterbetafel. Geringer Einfluss auf Renten in der Lebensdauer der AVÖ 2005R.
- **Buckel bei hohen Altern** um 5 Jahre nach oben verschoben (medizinischer Fortschritt, bessere Altenversorgung)
- **Mulde** in den Trends linearisiert (Monotonie!)
- Für **Modellrisiko** (Bestimmungsfehler, bzw. Verstärkung): 0.3% additiver Aufschlag <sup>a</sup>, dafür kein zusätzlicher Abschlag auf Basistafel. (Verlegt die Sicherheit in die Zukunft.)
- Keine Beschränkung nach unten (in D: 1%, führt zu Problemen ab 90 J.)

---

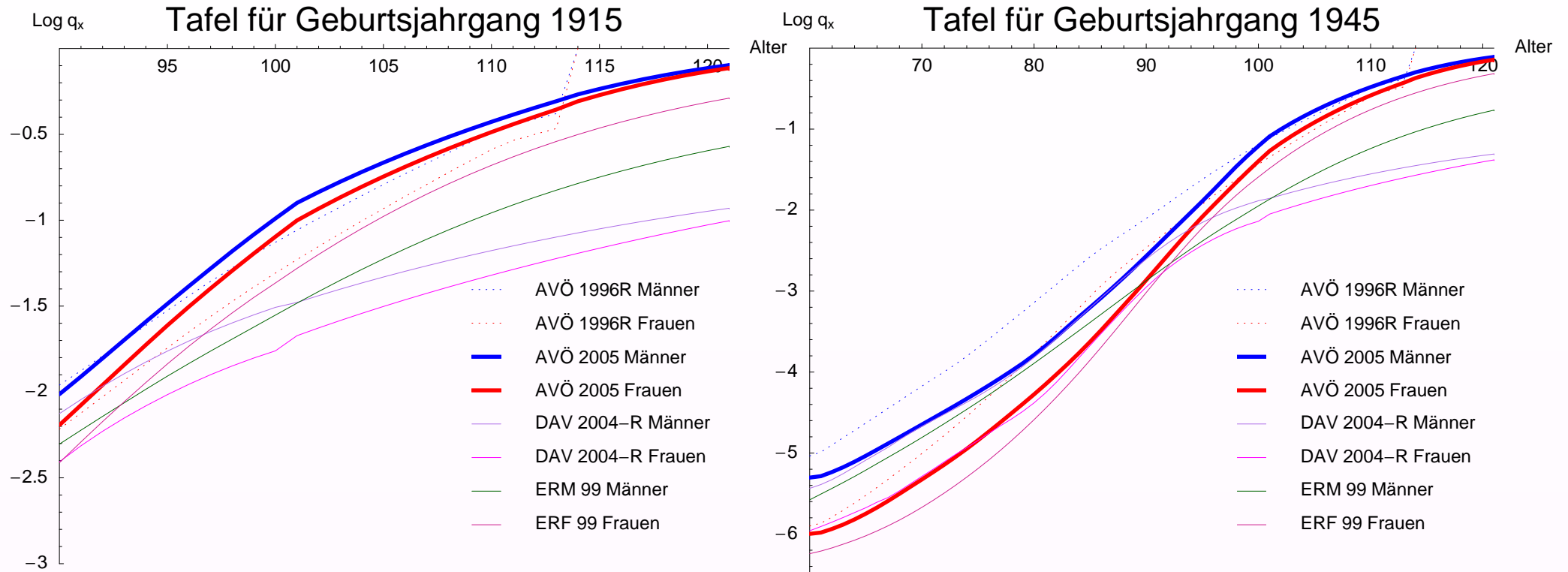
<sup>a</sup>In D: Bestimmt durch einen Knick in den kommenden 50 Jahren.

# Trendvergleich AVÖ 2005R mit AVÖ 1996R

- Starke Trendzunahme (vor allem im Altersbereich 60 bis 90 Jahre) gegenüber der AVÖ 1996R.
- Für Einzel- und Gruppentafel wird derselbe Trend benutzt.

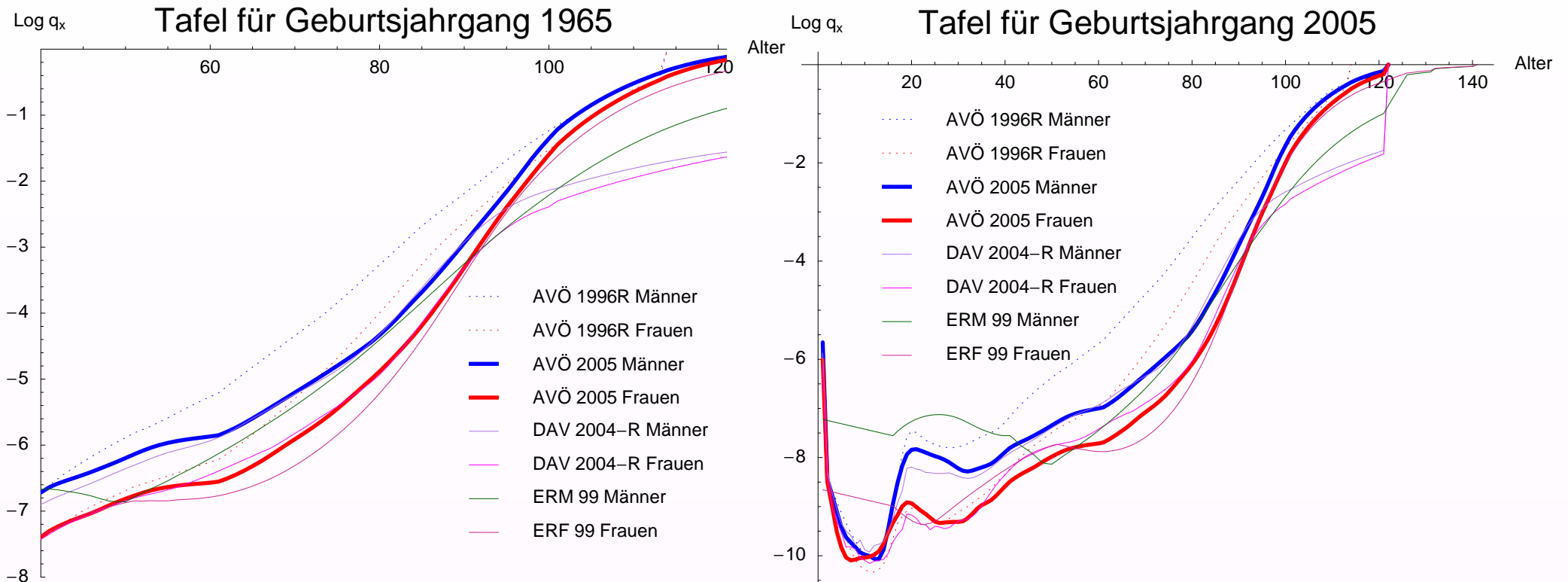


# Generationenenersterbetafeln 1915 und 1945



- Sterbewahrscheinlichkeiten nehmen tw. im Vergleich zur AVÖ 1996R sogar zu. Dies ist auch auf die Steigung (in den Altern über 100 Jahren) in den offiziellen Sterbetafeln zurückzuführen.
- Sterbewahrscheinlichkeiten fast ausschließlich über deutschen Werten

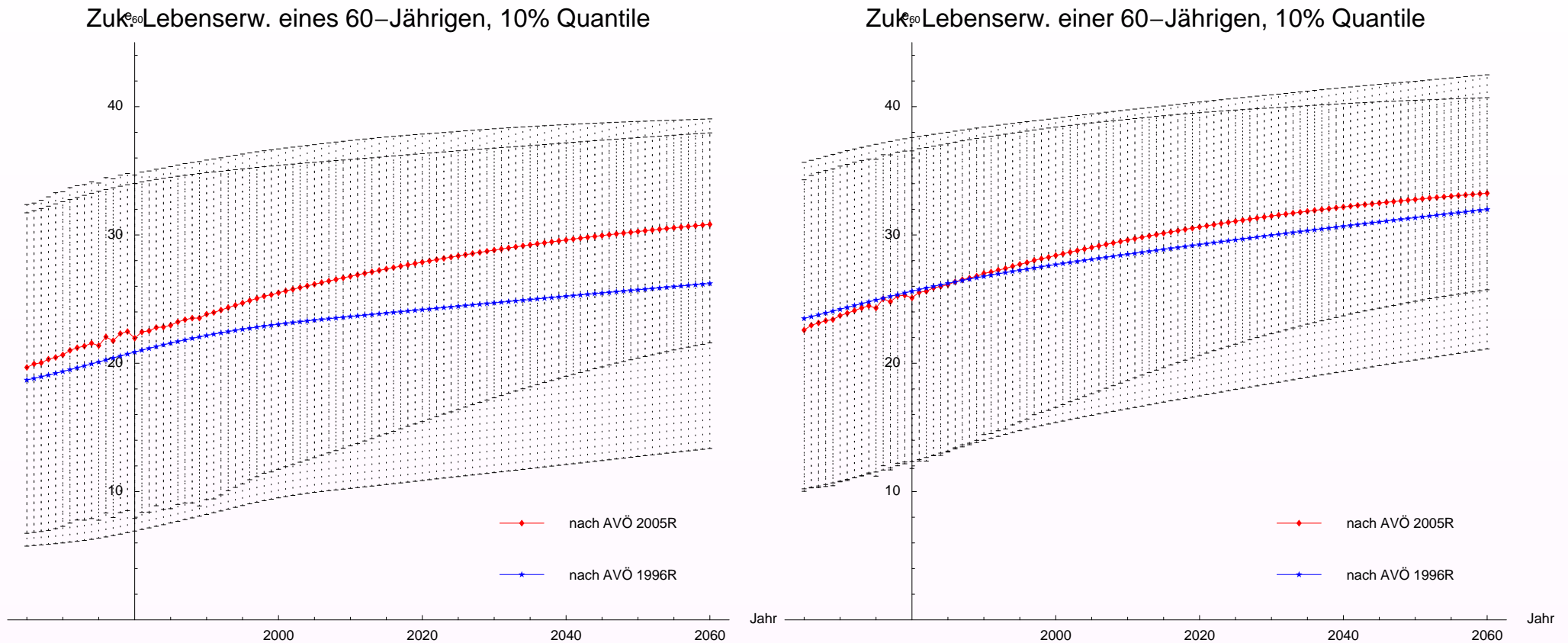
# Generationenenebensterbetafeln 1965 und 2005



- Logarithmen der Sterbewahrscheinlichkeiten **nicht mehr linear** (im Bereich 30 bis 80/90 Jahre). Diese Eigenschaft wäre für Altersverschiebung erwünscht...

# Entwicklung der Lebenserwartung

Lebenserwartung von Rentenversicherten (Basistafel und Trend 2. Ordnung):



- Unterschied im Trend stark bemerkbar
- Bei Männern Unterschied in den Selektionsfaktoren

# Schwankungsrisiko?

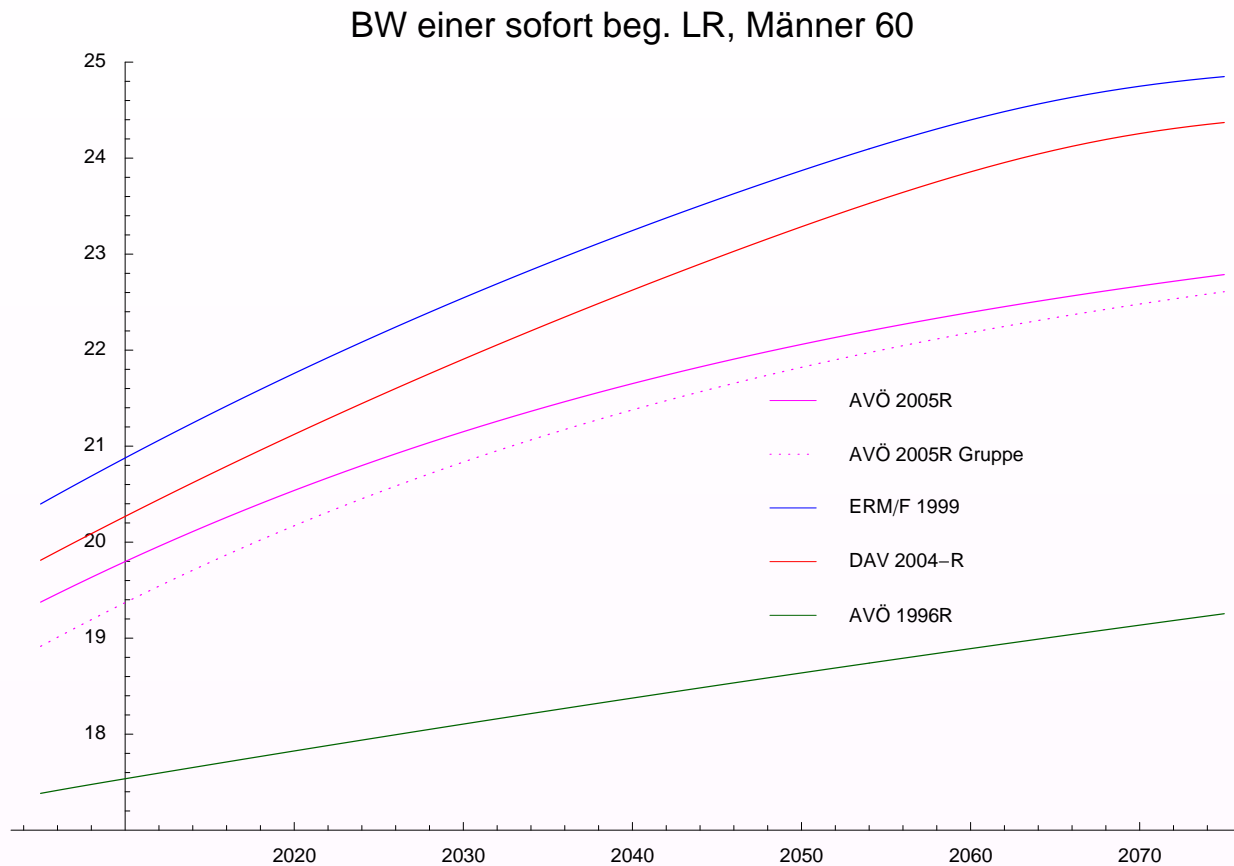
- Das Schwankungsrisiko ist in den Tafeln **nicht berücksichtigt**.  
Argumentation dafür wie bei AVÖ 1996R.
- Gründe:
  - Keine Daten in Österreich vorhanden, **geringe Bestände**
  - Statistischer Schwankungszuschlag wäre **zu groß!**
  - Wegen geringer Bestände hängt Zuschlag stark von der **Größe des Unternehmens** ab  $\Rightarrow$  Kleine Unternehmen würden benachteiligt.
  - Die Schadensverteilung ist sehr schief, das **Risikokapital** ist (im Vergleich zu Ablebensversicherungen) **relativ gering**.
  - Geringer Einfluss auf die Barwerte
- Berücksichtigung des SR in entsprechender Höhe ist Aufgabe des **jeweiligen Aktuars** (wie bei AVÖ 1996R).

# Vergleich ausgewählter Barwerte und Prämien

---

- Zinssatz: 2.75% (wie auch in der Publikation zur DAV 2004-R angenommen)
- Achtung: DAV 2004-R und ERM/F 1999 beinhalten jeweils einen Zuschlag für das **statistische Schwankungsrisiko**, die AVÖ 2005R nicht!
- Durch Rückgewähr ist Sterblichkeit in Aufschubzeit fast irrelevant  $\Rightarrow$  Prämien proportional zu BW von sofort beginnender Leibrente

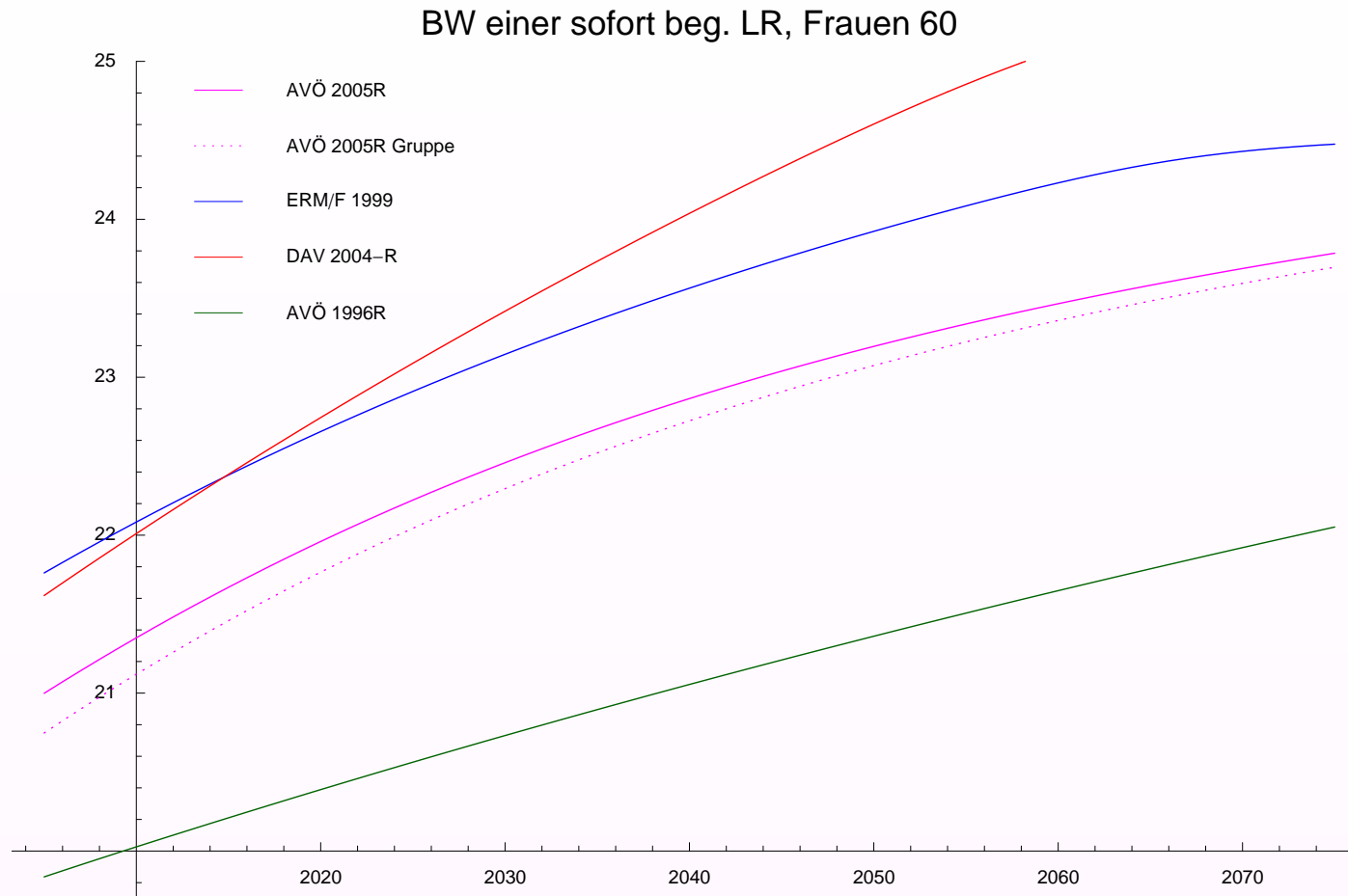
# Sofort beginnende LR an 60-jährigen Mann



- BW steigen gegenüber AVÖ 1996R stark an, liegen stark unter DAV 2004-R und ERM 1999.
- DAV 2004-R hat einen noch stärkeren Trend als AVÖ 2005R



# Sofort beginnende LR an 60-jährige Frau



- BW steigen gegenüber AVÖ 1996R stark an, liegen stark unter DAV 2004-R und ERF 1999.
- DAV 2004-R hat einen noch stärkeren Trend als AVÖ 2005R

# Änderungen zu AVÖ 1996R, Sicherheitszuschläge

In AVÖ 2005R eingebaute (oder im Vergleich zu DAV 2004-R nicht eingebaute) Effekte und Sicherheitszu- bzw. abschläge im Vergleich zur AVÖ 1996R:

Effekt	2. Ord. (tats.)	1. Ord. (Sich.)
Keine kurzfrist. <b>Trendabschwächung</b>	+	
<b>Selektionsfaktoren</b> korrigiert	+	
Höhere <b>Selektion für F</b>	(+)	+
Kein Sicherheitsabschlag auf Selektion <sup>a</sup>		-
0.2% <b>Selektionsaufschlag auf Trend</b> <sup>b</sup>	+	
0.3% <b>Sicherheitszuschlag auf Trend</b>		+
Verschiebung des Buckels bei <b>hohen Altern</b>	+	+
Monotonisierung des Trends		(+) <sup>c</sup>

<sup>a</sup>DAV 2004-R hat zusätzlichen Sicherheitsabschlag von 7% auf Wahrscheinlichkeiten

<sup>b</sup>Nur soziale Selektion, keine persönliche Selektion miteinbezogen.

<sup>c</sup>Praktisch wenig Einfluss, da fast nur in Aufschubzeit.

# Diverses

- Einfluss der Trendabschwächung nur maximal 1-2% auf die Barwerte (im relev. Zeitbereich).
- Barwerte / Prämien in Gruppentafel etwa 2-3.5% niedriger als in Einzeltafel für Männer und etwa 1-2.5% niedriger für Frauen.
- In D festgestellt:
  - Sehr starker Einfluss eines **Gesundheitschecks** auf die Sterblichkeit
  - Einfluss der **Rentenhöhe** auf die Sterblichkeit
- Barwerte für **hohe Alter** sind gesunken, weil  $q$  in den Volkssterbetafeln gesunken ist. BW bei hohen Altern liegen teilweise 30% unter den Barwerten nach DAV 2004-R. Zu geringe  $q$  in deutscher Tafeln für hohe Alter!
- Keine allzu vorsichtigen Annahmen in die Tafel eingebaut (um möglichst viel Sicherheit und lange Lebensdauer der Tafel zu gewährleisten). Gründe dafür:
  - Sicherheitszuschläge der DAV 2004-R sind noch höher, Werte in D und CH deutlich über unseren
  - Momentan noch **geringe Bestände**. In 10 Jahren wäre der Nachreservierungs-Bedarf sonst um ein Vielfaches höher.
  - Falls Annahmen wider Erwarten zu stark waren, kann über die **Gewinnbeteiligung** ein Teil wieder rückerstattet werden.

# Mitwirkende

---

In der Arbeitsgruppe:

- Martin Gaal
- Reinhold Kainhofer
- Franz Liebmann
- Martin Predota
- Adolf Schmid
- Uwe Schmock
- Michael Willomitzer
  
- Christina Ambach
- Alois Pichler

---

---

**Vielen Dank für Ihre  
Aufmerksamkeit!**