

①

STOCHASTISCHE KONTROLLTHEORIE

0.) motivierendes Beispiel

- geg.
- Versicherungsunternehmen (VU)
 - will in Aktienmarkt investieren
 - Ziel: Minimierung der Ruinwahrscheinlichkeit

math. Formulierung : $S_t \dots$ Aktienpreis

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad \mu, \sigma \dots \text{const.} > 0$$

$W_t \dots$ Brownsche Bewegung

hat Lösung : $S_t = S_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$, Ito Formel

"Black-Scholes" - Modell

②

R_t ... Vermögen des VU ohne Investment

$$R_t = x - \sum_{i=1}^{N_t} X_i + ct$$

x ... Anfangsvermögen

X_i ... Einzelschäden (iid)

c ... Prämienrate

N_t ... Anzahl der Schäden bis zum Zeitpunkt t (Poisson verteilt)

Cramer - Lundberg Modell

3

$U_t \dots$ Anzahl der Aktien im Portfolio

Annahme: Zins $r=0$!

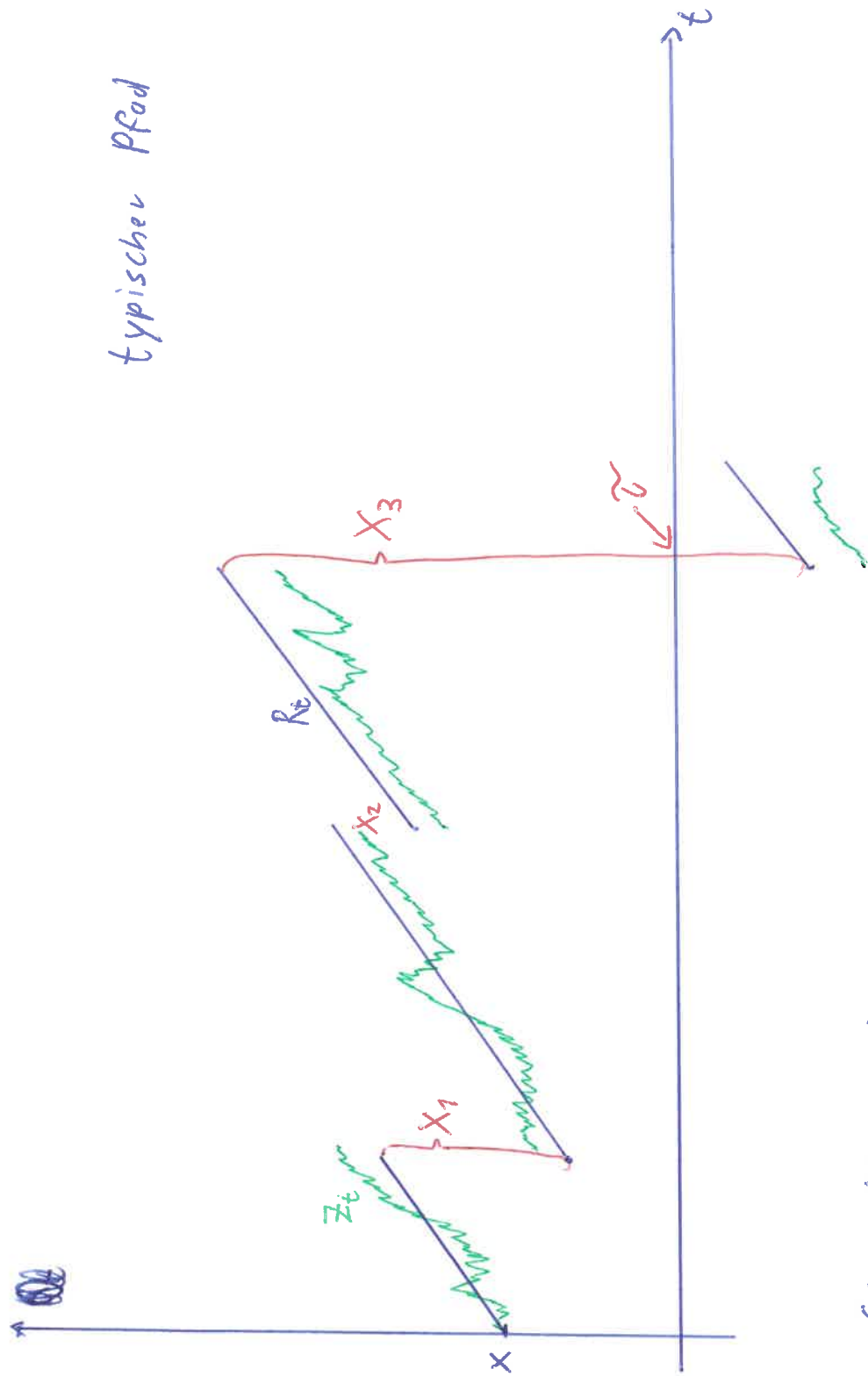
$\Rightarrow Z_t \dots$ Vermögen nach Investment, geg.

$$Z_t = x - \sum_{i=1}^{N_t} X_i + ct + \underbrace{(v \bullet S)_t}_{\text{stoch. Integral bez } S \text{ (sh. später)}}$$

Gewinn aus Aktienhandel !

4

typischer Pfad



$$\tilde{t} = \inf \{ t > 0 \mid Z_t < 0 \}$$

Ziel: Wähle u_t (Strategie) so, dass

$$P(\tilde{t} < \infty) \rightarrow \min$$

5

Ergebnis:

- Kleinschadenfall: d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{E}[e^{\varepsilon X_i}] < \infty$

asymptotisch optimal: investiere festen Betrag in Aktie

- Großschaden (genauer: $X_i \in \mathcal{S}$... subexponentielle Klasse)

asymptotisch optimal: investiere festen Anteil in Aktie

I.) Stochastische Analysis und Martingale (kurze Wdhlg)

I.1) Stochastische Prozesse

Sei I Indexmenge, z.B. $I = \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+$ oder $[0, T]$, $T > 0$ „Zeit“

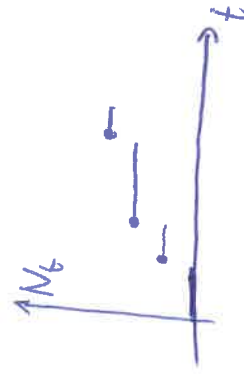
Def. ein stochastischer Prozess X ist Familie von $\mathbb{R}$, bzw $\mathbb{R}^d$ -wertigen ZV

$\{X_t, t \in I\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsrikel

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Def. der Prozess heißt cadlag, falls fast alle Pfade $t \mapsto X_t(\omega)$ rechtsstetig mit $\exists$ Limes von links sind (

Bsp: Poissonprozess:

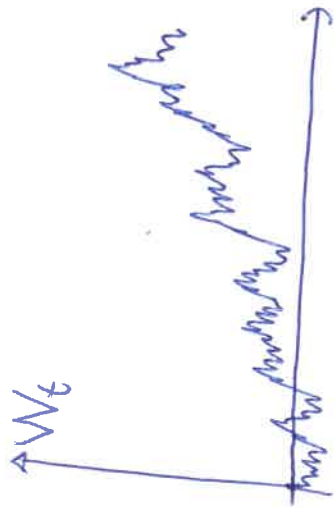


s.h. z.B. SACHVM V_0

7

Def: der Prozess heißt stetig, falls fast alle Pfade stetig sind

Bsp: Brownsche Bewegung



(sh. unten, bzw.
entspr. Vorl.)

I.2) Filtrationen und Stoppzeiten

Filtrationen: • mit der Zeit wachsende Information wird durch

Filtration der Grund σ -Algebra beschrieben, d.h.

$$\mathbb{F} = \{ \mathcal{F}_t, t \in I \}, \quad \text{mit } s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

d.h.: je später, desto mehr Information

$$\text{• techn. Voraussetzungen: } \underline{\text{rechtsstetig:}} \quad \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$$

„infinitesimales Schauen nach rechts“ bringt
keine Zusatzinformation

9

vollständig: $\mathcal{F}_0$ enthält alle $\mathbb{P}$ -Nullmengen von $\mathcal{F}$

" Wenn Ereignis „unmöglich“, dann ist dies schon zum

Zeitpunkt $t=0$ bekannt.

Def.: ein Prozess heißt adaptiert, falls X_t $\mathcal{F}_t$ messbar $\forall t$ gilt!

d.h. Beobachten des Prozesses kann nicht mehr Information liefern als die Filtration

Def.: $\mathcal{F}^X$... natürliche Filtration: kleinste rechtsstetige Filtration,

s.d. X_t $\mathbb{F}$ -adaptiert ist

(oft auch die von X_t erzeugte Filtration)

Stopzeiten:

Def.: eine ZV $\tau : \Omega \rightarrow I \cup \{\infty\}$ heißt Stopzeit,

falls $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t$

Interpretation: zum Zeitpunkt t sollte bekannt sein, ob gestoppt wird oder nicht

• trivialerweise: alle deterministischen Zeiten "s" sind Stopzeiten

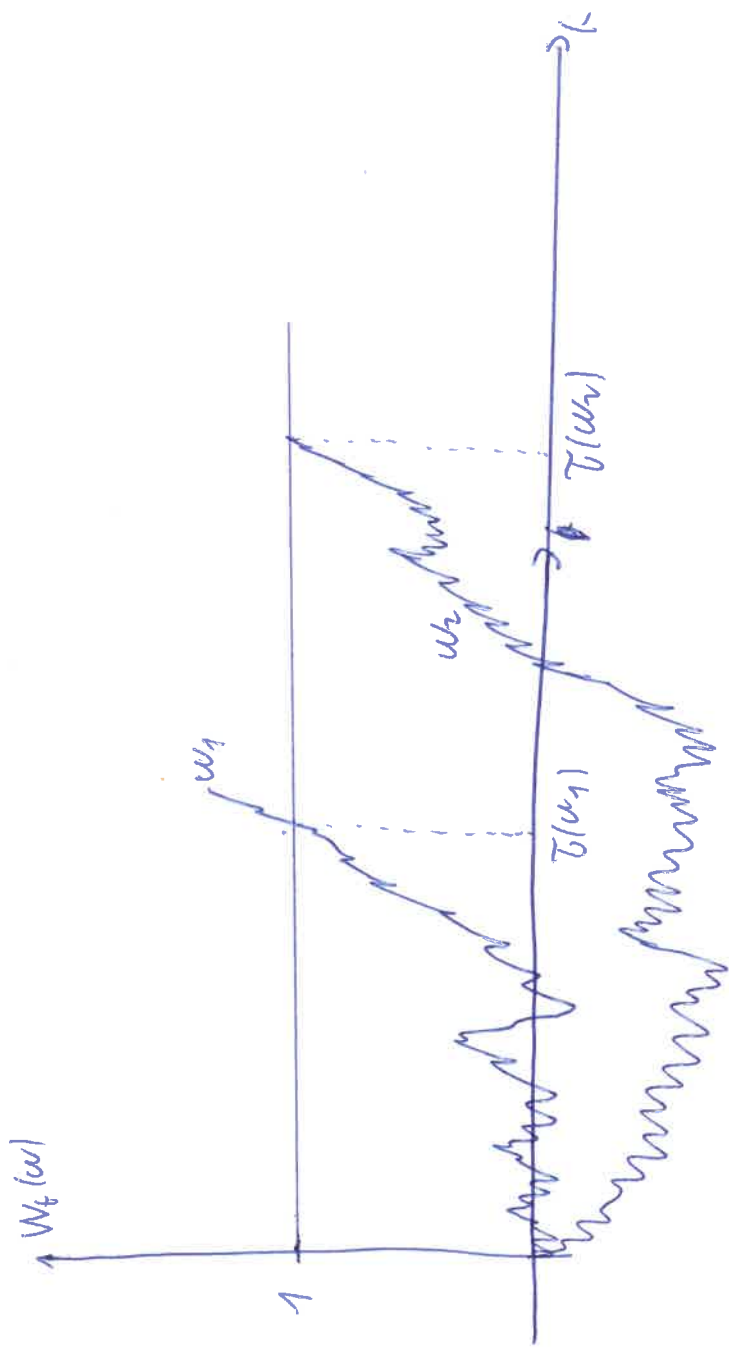
$$\{s \leq t\} \in \{\emptyset, \Omega\}$$

• X_t adaptiert $\Rightarrow X_{t \wedge \tau}$ adaptiert, falls τ Stopzeit

• typische Stopzeiten: Sei W_t ... Brownsche B. : $\tau := \inf\{t > 0 \mid W_t = 1\}$

Treffzeiten, "hitting times"

11



Def.: $\mathcal{F}_{\tau} = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in I\}$

umfasst alle beobachtbaren Ereignisse bis zum Zeitpunkt τ

I.3) Martingale

Betrachte $\mathbb{R}$ -wertigen stoch. Prozess M_t

Def:

M_t heist Martingale

falls:

- M_t adaptiert

$$\bullet \mathbb{E}[|M_t|] < \infty$$

$$\bullet \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad s \leq t$$

(1)

Interpretation: Gewinnverlauf eines fairen Spieles

falls in (1) $\geq$ Submartingal (im Mittel wachsend) 😊)

$\leq$ Supermartingal (im Mittel fallend) ☹)

Wichtige Sätze

13

Satz 1: (Convergence theorem) X ein L^1 -beschränktes Supermartingal $I = \mathbb{R}_+$

$$\text{d.h.: } \sup_t \mathbb{E}[|X_t|] < \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty \quad \exists \text{ f.s. und ist f.s. endlich}$$

ACHTUNG: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_t]$ L^1 -Sinn

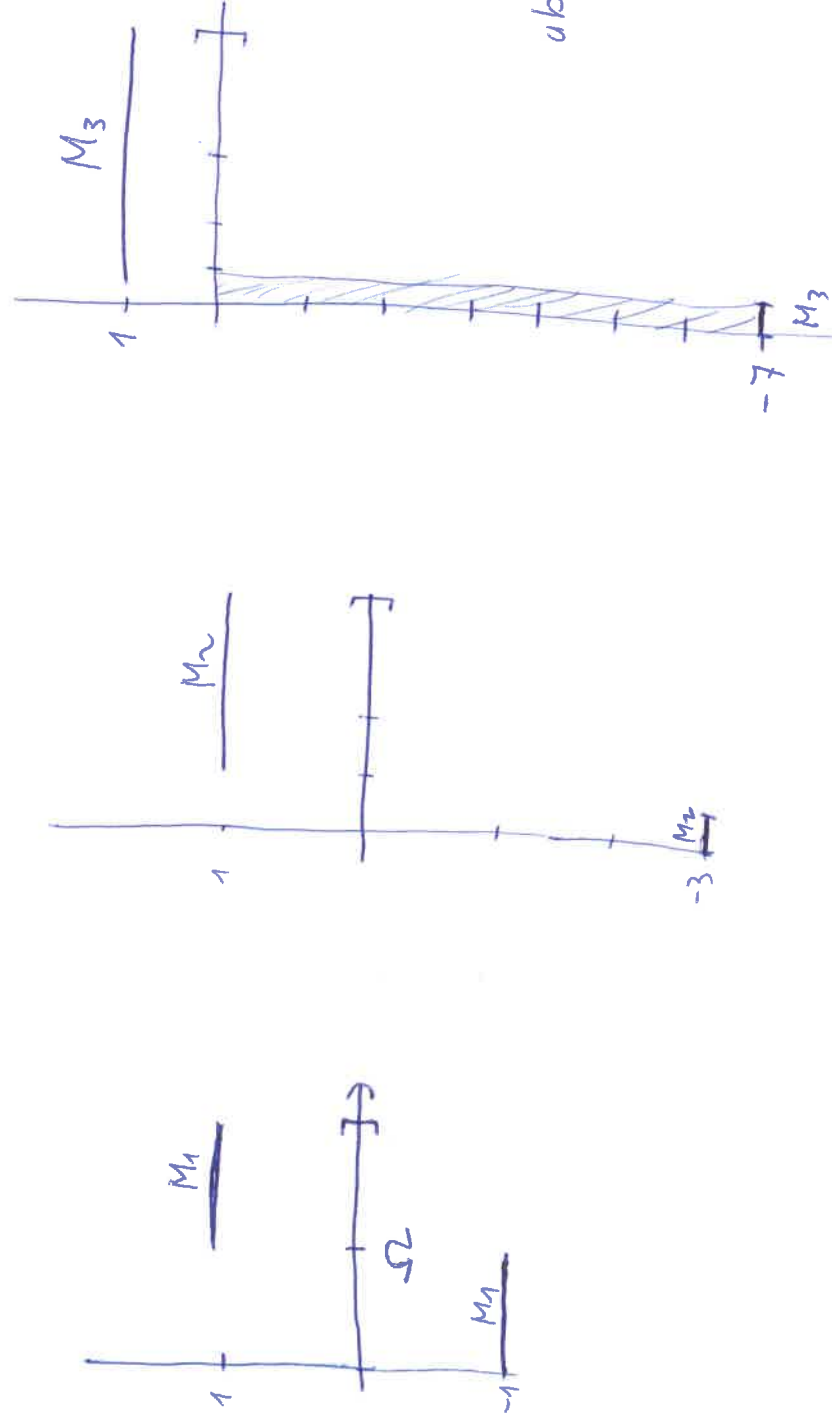
• dafür nötig: stärkere Bedingung: glm. Integrierbarkeit der X_t

$$\text{d.h.: } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sup_t \int_{|X_t| \geq \alpha} |X_t| d\mathbb{P} = 0$$

(wird impliziert durch L^2 -Beschränktheit)

Bsp (für nicht g.m. integrierbares Martingal)

- Münzwurf
- Verdoppelungsstrategie (Stoppe bei Gewinn, sonst verdoppelte Einsatz)
- $M_t \dots$ Gewinn zum Zeitpunkt t



$$M_t \rightarrow 1 \text{ f.s.}$$

über $M_t \neq 1$ im L^1 -Sinn

Korollar zu Satz 1: für ein nichtnegatives Supermartingal gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty \text{ f.s. und } X_\infty \text{ endlich f.s.}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Bw: } E[|X_t|] & = & E[X_t] \leq E[X_0] \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_t \geq 0 & & X_t \text{ Superm.} \end{array}$$

$$\Rightarrow \sup_t E[X_t] \leq E[X_0] \Rightarrow X_t \text{ } L^1\text{-beschränktes Supermart.}$$

$\Rightarrow \square$

Satz 1

Satz 2 : ("stopping theorem") : einfachste Version !

Sei M Martingal, $T_1 \leq T_2$ beschränkte Stoppzeiten

$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_{T_2} | \mathcal{F}_{T_1}] = M_{T_1}$$

Satz 3: $M_{T \wedge t}$ ist Martingal, falls M Martingal, T Stoppzeit

I.4) Brownsche Bewegung

Def : ein Quadrupel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, W_t)$ heißt (Standard) Brownsche Bewegung,

falls gilt :

(i) W_t ist $\mathbb{F}$ adaptiert

(ii) $W_0 = 0$ $\mathbb{P}$ -f.s.

(iii) $W_t - W_s$ ist unabh. von $\mathcal{F}_s$, $s < t$ (Unabh. der Inkremente)

(iv) $W_t - W_s \stackrel{\text{d}}{=} N(0, t-s)$

(v) W_t hat f.s. stetige Pfade

Bemerkungen:

18

- ≈ 1970 erster rigoroser Beweis der Existenz
- frühere Arbeiten von Bachelier (1900), Einstein (1905)
- oft nimmt man als ~~vor~~ Filtration die natürliche Filtration
- W_t ist Martingal (UE)
- W_t hat unendliche Totalvariation auf beschränkten Intervallen, aber ~~erzählt~~ die quadratische Variation ist endlich, d.h.

Sei $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = t \quad \text{in } \mathbb{P}_t$$

↑

Feinheit der Zerlegung, d.h. Maximalabstand

exponentielles Martingal:

sei $X_t := \mu t + \sigma W_t$... B.B. mit pos. Drift u. Volatilität σ

$$M_t := \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} X_t\right) \quad \dots \quad \text{exp. Martingal}$$

Beh: M_t ist Martingal

Bw: 1.) M_t ist adaptiert ✓ (weil X_t adaptiert)

2.) $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ ✓ nachrechnen! Dichte von W_t bekannt!

$$3.) \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \circ$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}(\mu t + \sigma W_t)} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t} \mathbb{E}\left[e^{-\frac{\mu}{\sigma}(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s\right] \cdot e^{-\frac{\mu}{\sigma}W_s}$$

20

$$= e^{-\frac{\nu^2}{\sigma^2} t} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{\nu}{\sigma} (W_t - W_s)} \right] e^{-\frac{\nu}{\sigma} W_s} =$$

UA der Inkv.

$$= e^{-\frac{\nu^2}{\sigma^2} t} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{\nu}{\sigma} (W_{t-s})} \right] \cdot e^{-\frac{\nu}{\sigma} W_s}$$

STAT. der Inkv

$$= e^{-\frac{\nu^2}{\sigma^2} t} \cdot e^{\frac{\nu^2}{\sigma^2} (t-s)} \cdot e^{-\frac{\nu}{\sigma} W_s} = e^{-\frac{\nu^2}{\sigma^2} s - \frac{\nu}{\sigma} W_s}$$

$$= e^{-\frac{\nu^2}{\sigma^2} (\mu_s + \sigma W_s)} = M_s D$$

Anwendung (Berechnung der Ruinwahrsch.)

$$\text{Sei } \tau = \inf \{ t \mid X_t = -x \}, x > 0$$

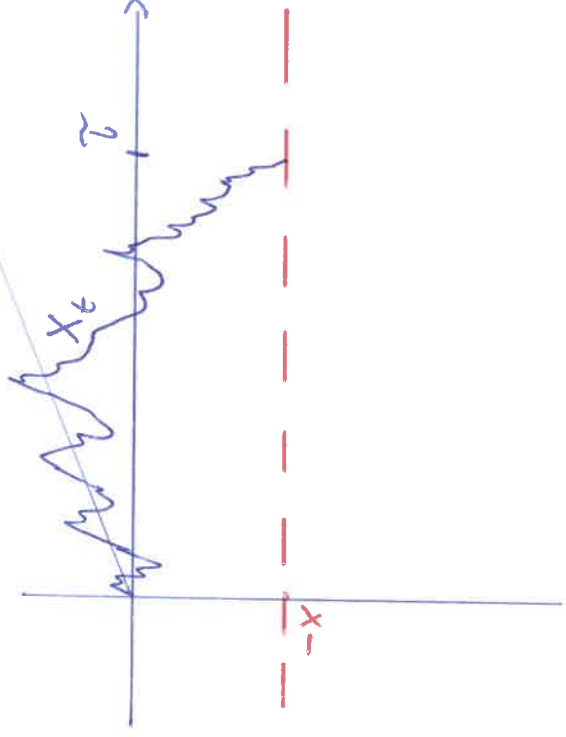
$$\psi(x) = \mathbb{P}(\tau < \infty)$$

Beh: $\psi(x) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2} x}$

Bw: $M_{t \wedge \tau}$ ist beschränktes Martingal (noch unten durch 0, nach oben durch $\frac{\mu}{\sigma^2} x$)

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} M_{t \wedge \tau} = M_\tau \quad \text{f.s.} \quad \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X_{t \wedge \tau} = X_\tau \in \{-x, \infty\}$$

dom. Konvergenz: $\Rightarrow$



22

$$1 = E\left[e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right] = E\left[e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right] =$$

$$= \underbrace{E\left[e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right]}_{0} + E\left[e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right]$$

$t \rightarrow \infty$:

$$1 = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} E\left[e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} P(t < \infty) \Rightarrow$$

$$P(t < \infty) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \Rightarrow$$

I.5) Stochastische Integration bez. Brownscher Bewegung

Problem: W_t ist von unbeschränkter Totalvariation, daher pfadweise Lebes-Stieltjes nicht möglich:

$\Rightarrow$ Ito Integral (≈ 1940)

Schritt 1 : Definiere $\int H_s dW_s$ für einfache Integranden $H \in S_0$

$$S_0 = \{ H \mid H_t(\omega) = \phi_1 \cdot 1_{[0, t_1)}(t) + \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \} \quad \text{wobei}$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T \quad \text{und}$$

$$\phi_i \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t_{i-1}}, \mathbb{P})$$

Def: $\int_0^t H_s dW_s = \sum_{i=1}^n \phi_i (W_{t_i \wedge t} - \cancel{W_{t_{i-1} \wedge t}} W_{t_{i-1} \wedge t}) = (H \bullet W)_t$ für $H \in S_0$

z.B.: $t = t_k : \sum_{i=1}^k \phi_i \cdot (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$

Es gilt: $(H \bullet W)_t$ ist L^2 -beschränktes Martingal

• $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right]$ „Ito Isometrie“

d.h.: Integraloperator ist eine Isometrie von $L^2(ds \times \mathbb{P}) \rightarrow L^2(\mathbb{P})$

Bw: Nachrechnen unter Benutzung der Messbarkeitseigenschaften von ϕ_i und der Martingaleigenschaft von W_t (insbesondere die Orthogonalität der Brownschen Inkremente für disjunkte Intervalle!)

25

Schritt 2: betrachte L^2 -adaptierte Integranden, d.h.

$$\mathcal{H} := \{ H \mid H_t \text{ adaptiert, } \mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^2 dt \right] < \infty \}$$

benutze 2 Fakten: $\forall H \in \mathcal{H} \exists H^{(n)} \in \mathcal{S}_0$ s.d.

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T (H_t - H_t^{(n)})^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

b) ang $X^{(n)}$ sind stetige Martingale, wobei

$$(X_T^{(n)})_{n=1}^{\infty} \text{ eine Cauchy-Folge in } L^2 \text{ ist}$$

$\Rightarrow \exists$ genau ein stetiges Martingal X_t s.d

$$X_t^{(n)} \xrightarrow{L^2} X_t \quad \forall t \in [0, T]$$

Ito Isometrie + a) $\Rightarrow (H^{(n)} \bullet W)_T$ ist Cauchy Folge

Def: für $H \in \mathcal{H}$: unter Benutzung von b)

$$(H \bullet W) := \lim (H_n \bullet W)$$

Eigenschaften des Ito Integrals

$$\bullet \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \tilde{H}_t^2 dt \right] \dots \text{Ito Isometrie für } H \in \mathcal{H}$$

$$\bullet \int_0^T (\lambda H_t + \mu K_t) dW_t = \lambda \int_0^T H_t dW_t + \mu \int_0^T K_t dW_t ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{Linearität}$$

$$\bullet \int_0^t H_s dW_s = \int_0^t H_s \mathbb{1}_{[0, t]}(s) dW_s$$

Schritt 3 Lokalisierung

(27)

$$\tilde{\mathcal{H}} := \{H \mid H_t \text{ adaptiert}, \mathbb{P}\left[\int_0^T H_s^2 ds < \infty\right] = 1\}$$

Definiere: $\bar{t}_n := \inf\{0 \leq t \leq T \mid \int_0^t H_s^2 ds = n\}, \quad \inf \emptyset = T$

Setze $H_t^{(n)} := H_t \mathbb{1}_{[0, \bar{t}_n]}(t)$

Def: $\int_0^t H_s dW_s := \int_0^t H_s^{(n)} dW_s \quad \text{auf } \{t \leq \bar{t}_n\}$

man kann zeigen, dass dies eine konsistente Definition ist!

(d.h. auf $\{t \leq \bar{t}_n\} \cap \{t \leq \bar{t}_k\}$ wohldefiniert

(28)

Bem.: falls $H \in \widetilde{\mathcal{H}}$: $(H \bullet W)_t$ ist nicht notwendigerweise eine Martingale.

(so wie bei $H \in \mathcal{H}$); sondern nur ein lokales Martingale

Def. M_t ist lokales Martingale, falls $\exists$ Folge von Stoppzeiten τ_n

(lokalisierende Folge) s.d. $M_{t \wedge \tau_n}$ Martingale $\forall n$ und $\tau_n \rightarrow \infty$ f.s.,

Bemerkung: • Ausdehnung des Integralbegriffs auf L^2 -beschränkte stetige

Martingale M , d.h.: $\int_0^t H dM_s$:

$$- \text{bracket process } [M]_t = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$$

nicht mehr so einfach wie bei $W : [W]_t = t$

dieser Prozess entscheidend bei Konstruktion des Ito Integrals:

Ito Isometrie gilt auch dort: $dt \mapsto d[W]_t$

$\Rightarrow$ Einschränkung der Integranden auf $\mathcal{H}_t$

Progressiv messbare Prozesse H_t

d.h. Einschränkung von $H(s, \omega)$ auf $[0, t] \times \Omega$

ist $B_t \otimes \mathcal{F}_t$ m.b.

$\downarrow$
Borel-mengen auf $[0, t]$

30

Es gilt : progressiv mb $\Rightarrow$ adaptiert (Fubini!)

- rechts (links) stetig + adaptiert $\Rightarrow$ progressiv mb.

I.6) Ito Formel für Ito prozesse

(31)

Def. ein stoch. Prozess X_t heißt Itoprozess $\Leftrightarrow$

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \quad \text{für } t \in [0, T] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

wobei $\cdot X_0 \dots \bar{\mathcal{F}}_0$ mb.

$\cdot K_t \dots$ adaptiert mit $\mathbb{P}\left[\int_0^T |K_s| ds < \infty\right] = 1$

$\cdot H_t \dots$ adaptiert mit $\mathbb{P}\left[\int_0^T H_s^2 ds < \infty\right] = 1$

Bem: man kann zeigen, dass diese Dst. eindeutig ist, im folgendem Sinn $\circ$

$$\underline{\text{ang.:}} \quad X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s \quad \Rightarrow$$

$$(1) \quad X_0 = X'_0 \quad \text{f.s.}$$

$$(2) \quad H_s(\omega) = H'_s(\omega) \quad ds \otimes P \quad \text{f.s.}$$

$$(3) \quad K_s(\omega) = K'_s(\omega) \quad ds \otimes P \quad \text{f.s.}$$

Bwideo

$$(1): t=0$$

$$(2) + (3): \int_0^t (K_s - K'_s) ds = \int_0^t (H'_s - H_s) dW_s$$

stetiges

verwende lokales Martingal; mit beschränkter Variation

auf endl. Intervallen ist notwendig konstant 0

Satz (Ito Formel): Sei X_t ein Itoprozess wie oben, sei $f \in C^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f(X_t)$ ist auch Itoprozess u. es gilt:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds$$

Bemerkungen: man kann das kürzer schreiben:

$$dX_s := K_s ds + H_s dW_s$$

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds \quad \dots \quad \text{quadratischer Variationsprozess} \quad (\langle W \rangle_t = t)$$

$$\Rightarrow d\langle X \rangle_s = H_s^2 ds$$

$$\Rightarrow f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

34

- M_t ... quadratisch integrierbares ^{stetiges} Martingal $\Rightarrow$

$$M_t^2 - \langle M \rangle_t \text{ ist Martingal}$$

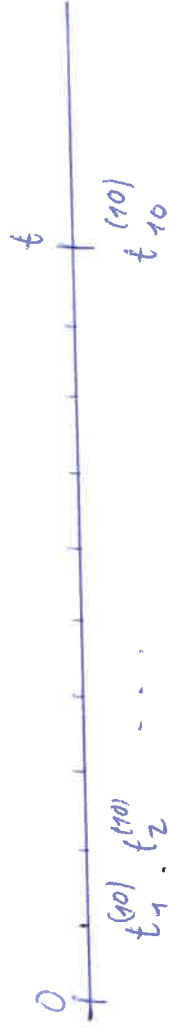
$$\text{Bsp: } W_t^2 - t \text{ ist Martingal (UE)}$$

Buider Ito Formel :

$$\text{Taylor: } f(y) - f(x) = f'(x) \cdot (y-x) + \frac{1}{2} f''(x) (y-x)^2 + R(x, y)$$

$$\text{mit } \lim_{y \rightarrow x} \frac{R(x, y)}{(y-x)^2} = 0$$

Sei jetzt: $t_i^{(n)} := \frac{it}{n}$



$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^n f(X_{t_i^{(n)}}) - f(X_{t_{i-1}^{(n)}}) =$$

$$\underbrace{\sum f'(X_{t_{i-1}^{(n)}}) \cdot (X_{t_i^{(n)}} - X_{t_{i-1}^{(n)}})}_{\downarrow n \rightarrow \infty \int_0^t f'(X_s) dX_s} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum f''(X_{t_{i-1}^{(n)}}) (X_{t_i^{(n)}} - X_{t_{i-1}^{(n)}})^2 + R(X_{t_{i-1}^{(n)}}), X_{t_i^{(n)}})}_{\nearrow n \rightarrow \infty 0} \quad \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

sh. Konstruktion des
stoch. Integrals

Vollg. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^{1,2}$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ stetig

$\Rightarrow$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_{,0}(s, X_s) ds + \int_0^t f_{,1}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{,11}(s, X_s) d\langle X \rangle_s$$

$\downarrow$
 $\frac{\partial f}{\partial t}$

$\downarrow$
 $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\downarrow$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Bem: falls $X_t \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ reicht natürlich $f_{,1}, f_{,11}$ stetig in $\mathcal{O}$

z.B.: geom Brownsche Bewegung $\mathcal{O} = \mathbb{R}^+$

mehrdimensionaler Fall

37

Def: m-dimensionale Brownsche Bewegung

$$W_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^m \end{pmatrix},$$

wobei W^i unabhängige eind. Brownsche Bew.,
adaptiert bez einer Filtration $\mathbb{F}$

stoch Integral: komponentenweise

Sei A_t $n \times m$ Matrix bestehend aus adaptierten Prozessen,

s.d. die folgenden eind. stoch. Integrale Sinn
haben!

38

$$\Rightarrow \int_0^t A_s dW_s \stackrel{\circ}{=} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \int_0^t A_s^{1j} dW_s^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \int_0^t A_s^{nj} dW_s^j \end{pmatrix}$$

Def.: n -dim stoch. Prozess heißt Ito Prozess, falls ^{die} $\forall$ Dst. gilt:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \text{ wobei}$$

$$X_0 = \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n, (\in \mathbb{R}^n)$$

$b_t, \sigma_t \in \mathbb{R}^n$, bzw $\mathbb{R}^{n \times m}$ wertige adaptiert Prozesse sind,

s.d. die eindim Integrale wohldef. sind

(39)

Satz (mehr dim Ito Formel) : Sei X_t Itoprozess wie oben

$$f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_{i0}, f_{ij}, f_{,ijj} \quad i,j=1, \dots, n \quad \text{stetig}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(X_t) = & f(X_0) + \int_0^t f_{i0}(s, X_s) ds + \sum_{i,j=1}^n \int_0^t f_{,ij}(s, X_s) dX_s^i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t f_{,ijj}(s, X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

$$\text{wobei } \langle X^i, X^j \rangle_t = \int_0^t (\sigma_s \sigma_s^*)_{ij} ds \quad \dots \quad \text{quadratische Kovariation}$$

40

$$\Rightarrow X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

mit $\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^X \sigma_s^Y ds$

Bw. (UE)

47

I.7) Stochastische Differenzialgleichungen (SDG)

eine SDG ist geg. durch

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad \text{oder}$$

$$X_t = \left\{ + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \right. \quad (*)$$

wobei: $\{ \dots, F_0 - \text{mb.} \}$

$$b: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\sigma: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \quad \text{Borel mb.}$$

W m -dim Brownsche Bewegung

d.h. (*) besteht aus n gekoppelten Gleichungen

(42)

$$dX_t^j = b_j(t, X_t) dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t, X_t) dW_t^j \quad j=1, \dots, n$$

ein stetiger Prozess X_t heißt Lösung von (*), falls gilt

• erfüllt (*) p-f.s.

• ist $\mathbb{F}$ -adaptiert

$$\bullet \int_0^t |b_j(s, X_s)| ds < \infty, \quad \int_0^t |\sigma_{ij}(s, X_s)|^2 ds < \infty \quad \forall j, i$$

Bemerkung : obiges Konzept heißt starke Lösung, genauer:

zu gegebenen $(\Omega, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}, W_t)$ (Daten des Problems)

kann ein adaptierter Lösungsprozess X_t gefunden werden?

• bei schwacher Lösung : W_t gehört nicht zu den Daten sondern ist Teil

der Lösung!

insbesondere muss X_t nicht $\mathbb{F}^W$ -adaptiert sein!

(44)

Bsp. Tanaka Gleichung : $dX_t = \operatorname{sgn}(X_t) dW_t$ (1)

Starte mit B.B. $(X_t, \mathbb{F}^X)$

Setze : $dW_t = \operatorname{sgn}(X_t) dX_t$

- Levy: W_t ist B.B. (kostenloses, lokales Martingal mit $\langle W \rangle_t = t$)

- erfüllt (1) : Einsetzen? (Assoziativ. des stoch. Integrals!)

- ABER: X_t ist nicht $\mathbb{F}^W$ -adaptiert!

weil $\sigma(W_t) \subset \sigma(|X_t|)$

wegen $|X_t| = \underbrace{\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dX_s}_{W_t} + L_t^X$ Tanaka Formel
 $\nearrow \sigma(|X_t|)$ mb. Lokalzeit von X !
 (sh. später!)

Existenz u. Eindeutigkeit von SDE

Satz (Eindeutigkeit) Seien b, σ , Lipschitz stetig in x , d.h. $\exists K > 0$

$$\text{s.d. } \|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K \cdot \|x - y\|$$

gln. in t ?

$\Rightarrow$ 2 Lösungen $X_t, \tilde{X}_t$ erfüllen

$$P(X_t = \tilde{X}_t) = 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

Bem: • man sagt $X_t, \tilde{X}_t$ sind unterscheidbar (pfadweise gleich)

• im Gegensatz dazu X_t ist Modifikation von $\tilde{X}_t$ falls gilt

$$P(X_t = \tilde{X}_t) = 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

48

• falls $X_t, \tilde{X}$ regulär genug (z.B. rechtsstetig) : X_t ist Modif. von $\tilde{X}_t$

$\Downarrow$

$X_t, \tilde{X}_t$ ununterscheidbar

• immer: $X_t, \tilde{X}_t$ ununterscheidbar $\Rightarrow X_t$ ist Modif. von $\tilde{X}_t$

Bem: Lipschitzstet. reicht nicht aus um Explosion des Prozesses zu verhindern!

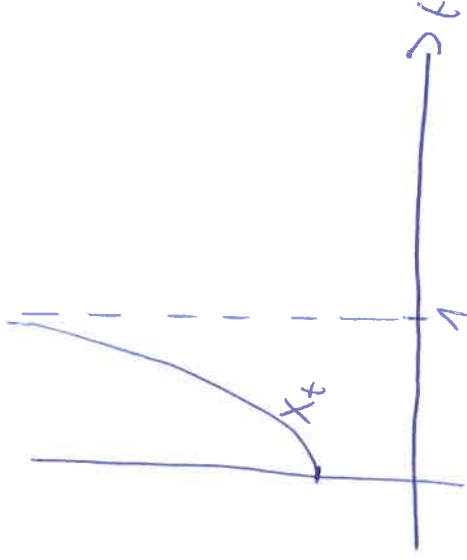
deferm. Bsp:

$$dX_t = X_t^2 dt$$

$$\Rightarrow \frac{dX_t}{X_t^2} = dt \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{X_t} = t + C \Rightarrow X_t = -\frac{1}{t+C}$$

$$\text{z.B.: } X_0 = -1 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow X_t = \frac{1}{1-t}$$



WACHSTUMSBEDINGUNG
an Koeff. nötig!

48

Satz (Existenz u. Eindeutigkeit)

Es gelte: $\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K \|x - y\|, \quad K > 0$

$$\|b(t, x)\| + \|\sigma(t, x)\| \leq K(1 + \|x\|)$$

$$\{ \dots, f_0, m_b, \mathbb{E}[\cdot] \} < \infty \Rightarrow$$

$\exists$ eindeutige, stetige, starke Lösung mit

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \in T} X_t^2 \right] < \infty$$

II.) Stochastische Kontrolltheorie - Einführung und motivierendes Bsp

Stochastisches Kontrollproblem:

geg. Wahrscheinlichkeits^{tripel} $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, $T > 0 \dots$ Endzeitpunkt

$W_t \dots$ m-dim Brownsche Bewegung

$$W_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^m \end{pmatrix}$$

Notation - Bezeichnung: • Kontrollprozess : ein progressiv mb. Prozess u_t

mit Werten in $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$

(auch Steuerungsprozess, z.B. Anzahl der Aktien im Portfolio)

59

- Zustandsprozess X_t : gegeben durch

$$dX_t = b(t, X_t, u_t) dt + \sigma(t, X_t, u_t) dW_t$$

wobei $b: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\sigma: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ Borel mb.

~~wertfunktion~~

- Optimierungskriterium

$$J(t, x, u) = \mathbb{E} \left[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \psi(T, X_T) \mid X_t = x \right] \rightarrow \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}$$

$\varphi \dots$ laufende Kosten

$\psi \dots$ Endkosten

zulässige (admissible) Kontrollprozesse (Strategien) $\mathcal{A}(t, x)$

- Menge aller Strategien, für die eine eindeutige starke Lösung $\checkmark$ der SDG
- Zielfunktional wohldefiniert ist ~~(∞, ∞)~~
- dies sind Minimalbedingungen, oft kommen weitere hinzu, z.B.

Wertfunktion : $V(t, x) := \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, u)$

- Ziel: Finde $V(t, x)$, optimale Strategie u^* , d.h.
 $V(t, x) = J(t, x, u^*)$

25

Bsp Merton Problem - einfacher Finanzmarkt

Bond... $dB_t = B_t r dt$, $B_0 = 1 \Rightarrow B_t = e^{rt}$, $r > 0 \dots \text{const.}$

Aktie... $dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t)$, $S_0 = s_0 > 0 \Rightarrow \mu, \sigma \dots \text{const.}$

$$S_t = s_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

Anzahl der Aktien im Portfolio: N_t^S $\Rightarrow$ selbstfinanzierend

— " — Bonds — " — N_t^B

$X_t \dots$ Wert des Portfolios $= N_t^B B_t + N_t^S S_t$

$$dX_t = N_t^B dB_t + N_t^S dS_t$$

$u_t \dots$ Anteil des Vermögens in Aktie : $u_t = \frac{N_t^S \cdot S_t}{X_t}$

unser Kontrollprozess!

$$\Rightarrow N_t^S = \frac{u_t \cdot X_t}{S_t} \quad N_t^B = \frac{(1-u_t) \cdot X_t}{B_t}$$

$$\Rightarrow dX_t = (1-u_t) X_t r dt + u_t X_t (\mu dt + \sigma dW_t) =$$

$$X_t \cdot [r + u_t(\mu - r)] dt + u_t \sigma X_t dW_t$$

$$\text{Ansatz: } X_t = x_0 \cdot e^{\int_0^t g ds + \int_0^t h dW_s} \quad Z_t = x_0 \cdot e$$

54

Ito Formel: $dX_t = X_t dp + \frac{1}{2} X_t^2 d\langle Z \rangle_t$, $dZ_t = g dt + h dW_t$

$\stackrel{III}{=} \int_0^t h^2 ds = \langle Z \rangle_t$

~~X_t~~

$$= X_t \left(g dt + h dW_t \right) + \frac{1}{2} X_t^2 h^2 dt =$$

$$= X_t \left(g + \frac{1}{2} h^2 \right) dt + X_t h dW_t \stackrel{II}{=}$$

$$X_t [r + u_t(\mu - r)] dt + u_t \sigma X_t dW_t$$

$$\Rightarrow h_t = u_t \cdot \sigma$$

$$g_t = r + u_t(\mu - r) - \frac{1}{2} u_t^2 \sigma^2 = r + u_t(\mu - r) - \frac{1}{2} u_t^2 \sigma^2$$

$$\Rightarrow X_t = x_0 \cdot \exp \left(\int_0^t (r + u_s(\mu - r) - \frac{1}{2} u_s^2 \sigma^2) ds + \int_0^t u_s \sigma dW_s \right)$$

Bemerkung: Wann kann X_t in endlicher Zeit gleich Null werden

Setze (der Einfachheit halber): $\mu = r = 0$, $\sigma = 1$, $x_0 = 1$

Beh: ang $\exists A$ mit $P(A) > 0$ s.d.: $\int_0^{t_0} u_s^2 ds = \infty$

$\Rightarrow$ auf A : $X_{t_0} = 0$

$$\text{Es gilt: } X_t = \exp \left(\int_0^t -\frac{1}{2} u_s^2 ds + \int_0^t u_s dW_s \right)$$

$$\text{d.h.: z.z.: } \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\int_0^t -\frac{1}{2} u_s^2 ds + \int_0^t u_s dW_s \right) = -\infty \quad \text{f.s. auf } A \quad (*)$$

$$\text{Betrachte: } M_t := \int_0^t u_s dW_s \quad \Rightarrow \quad \langle M \rangle_t = \int_0^t u_s^2 ds \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \infty$$

Es gilt Dambis, Dubin/Schwarz

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t} \quad \dots \text{time change!}$$

Satz v. iterierten Log. $\Rightarrow$

$$\overline{\lim_{t \rightarrow t_0}} \frac{B_{\langle M \rangle_t}}{\sqrt{2 \langle M \rangle_t \ln \ln \langle M \rangle_t}} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{t \rightarrow t_0}} \frac{M_t}{\sqrt{2 \cdot \int_0^t u_s^2 ds \cdot \ln \ln \int_0^t u_s^2 ds}} = \pm 1$$

$\Rightarrow (*)$

57

Merton Problem: $\varphi \equiv 0$, $\psi(x) = \ln x$

Maximierung des erwarteten $\mathbb{E} \log$ Endnutzens

also (setze jetzt $t=0$!)

$$J(0, x_0, u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \ln X_T \mid X_0 = x_0 \right] \rightarrow \max$$

$\mathcal{A}(0, x) = \{u \mid \exists! \text{ starke Lösung des SDE, Zielfunkt. wohl def}$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T (\sigma u_s)^2 ds \right] < \infty \}$$

$\Rightarrow \int_0^t \sigma u_s dW_s$ ist Martingal?

für $u \in \mathcal{A}$

$$\Rightarrow J(0, x_0, u) = \ln x_0 + \mathbb{E} \left[\int_0^T (u + (u-r)u_t - \frac{1}{2} \sigma^2 u_t^2) dt \right] \rightarrow \max$$

58

Bestimmung: des pfadweisen Max. für festes t :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(r + (u-r)u - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 \right) = u-r - \sigma^2 u \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} () = -\sigma^2 < 0 \Rightarrow \boxed{u^* = \frac{u-r}{\sigma^2}}$$

unv. von t, w

daher Lösung
des Problems!

Strategie ist in $\mathcal{A}$ ✓

$$\underbrace{\text{Berechnung von } V(0, x_0)} = \ln x_0 + T \left(r + \frac{(u-r)^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{(u-r)^2}{\sigma^4} \right) =$$

$$\ln x_0 + T \left(r + \frac{1}{2} \frac{(u-r)^2}{\sigma^2} \right)$$

Diskussion der optimalen Strategie $u^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$

$$\mu \uparrow \Rightarrow u^* \uparrow \quad \checkmark$$

$$r \uparrow \Rightarrow u^* \downarrow \quad \checkmark$$

$$\sigma^2 \uparrow \Rightarrow u^* \downarrow \quad \checkmark$$

$$\underbrace{\text{Bsp : } \left. \begin{array}{l} \mu = 0.05 \\ r = 0.01 \\ \sigma^2 = 0.2 \end{array} \right\}}_{\Rightarrow} u^* = \frac{0.04}{0.2} = 0.2 \Rightarrow 20\% \text{ in Aktien}$$

"Merton Strategie"

60

Bem: • Strategie scheinbar einfach, aber erfordert ~~und~~ ununterbrochener

Handeln, weil Kurse schwanken

Verallg. auf n Aktien: $S_t = \begin{pmatrix} S_t^1 \\ \vdots \\ S_t^n \end{pmatrix}$

$$dS_t = \text{Diag}(S_t) \cdot (\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = s_0$$

$$\text{mit } \text{Diag}(S_t) = \begin{pmatrix} S_t^1 & & 0 \\ & S_t^2 & \\ 0 & & S_t^n \end{pmatrix}$$

, W -ndim $B_0 B.$

$\mu \in \mathbb{R}^n$

$\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$... nicht singular

$\Rightarrow$

67

$$\Rightarrow dS_t^i = S_t^i \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_t^j \right) \quad i=1, \dots, n$$

Kontrollprozess $U = (U^i)_{i=1, \dots, n}$ $\overset{P}{(d.h. \ d=n)}$

wie oben (UE)

$$\Rightarrow U_t^* = (\sigma \sigma^*)^{-1} (\mu - r \cdot \mathbb{1}) \quad t \in [0, T]$$

$$(1, 1, \dots, 1)$$

62

Bsp: $\mu = (0.05, 0.05)$

$$r = 0.07$$

$$\sigma \sigma^* = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.15 \\ 0.15 & 0.2 \end{pmatrix}$$

, d.h. alles wie vor her nur pos. korreliert

$$\dots \Rightarrow U^* = (0.1144, 0.1144)$$

$$\text{d.h. : } 20\% \rightarrow 11.44\%$$

63

III.) Dynamische Optimierung ("dynamic programming")

III.1) Generator - Dynkin Formel

$$\text{Betr. SDE: } dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

$$W_t \dots m\text{-dim } B_0 B_t$$

$b, \sigma \dots$ erfüllen Bed. aus Existenz + Eindeutigkeitsatz

$\mathbb{F}^W \dots$ nat. Filtration

$$a(t, x) = \sigma(t, x) \sigma^*(t, x) \dots \text{Diffusionsmatrix}$$

$$\text{Notation: } \mathbb{E}_{t,x}[Y] := \mathbb{E}[Y | X_t = x] \quad \text{für ZV } Y$$

$$\mathbb{E}_x[Y] := \mathbb{E}_{0,x}[Y]$$

69

Satz: Sei die SDG zeithomogen, d.h. $b = b(x)$, $\sigma = \sigma(x)$;

sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, Borel m.b. $\Rightarrow$

$$(i) \mathbb{E}[f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{X_t}[f(X_s)] \quad b, s \geq 0$$

(ii) τ Stoppzeit $< \infty$ f.s.

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+s}) | \mathcal{F}_{\tau}] = \mathbb{E}_{X_{\tau}}[f(X_s)] \quad s \geq 0$$

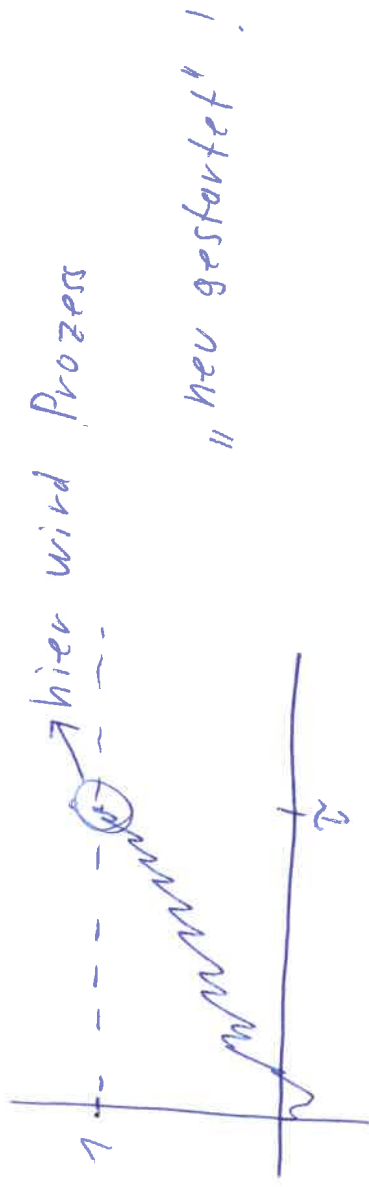
(i) ... Markov Eigenschaft

(ii) ... starke Markov Eigenschaft

65

- Bedeutung: (i) Entwicklung des Prozesses nach t hängt nur von Gegenwart (d.h. Position X_t) und nicht von der gesamten Vergangenheit ab. (durch $\mathcal{F}_t$ beschrieben)
(setze $f = \mathbb{1}_A$)
- (ii) gilt auch falls man t durch Stoppzeit ersetzt;

typisch: Trefferzeiten:



Def: infinitesimaler Generator L von X_t

$$L f(t, x) = \lim_{s \downarrow t} \frac{\mathbb{E}_{t,x} [f(s, X_s)] - f(t, x)}{s - t} \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

$$f \in \mathcal{D}_L = \{f \mid f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ f\"ur die obiger limes } \exists \forall t, x\}$$

$$\text{Sei jetzt: } L := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Operator kann auf Funktionen aus $C^{1,2}$ angewendet werden

$$C^{1,2} = \left\{ g(t, x) \mid \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \text{ stetig} \right\}$$

67

Schreibweisen: $\mathcal{L}f(t, x) = f_{,0}(t, x) + \sum_{i=1}^n f_{,i} b_i(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t, x) f_{,ij}(t, x)$

$$= f_{,0}(t, x) + \underset{\uparrow}{(D_x f) \cdot b} + \frac{1}{2} \underset{\uparrow}{\text{tr}} (D_{xx} f(t, x) a(t, x))$$

Gradient Spur Hesse Matrix

Bem: • Ito Formel: $df(t, X_t) = \mathcal{L}f(t, X_t) dt + D_x f(t, X_t) dW_t$

• einfachster Fall: keine Zeitabh. und eindimensional:

$$\mathcal{L}f(x) = b(x) f'(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2} f''(x)$$

Satz: Sei $f \in C^{1,2}$ und es gelte $\forall v \geq t \geq 0, x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^v |L f(s, X_s)| ds \right] < \infty, \quad \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^v \|D_x f(s, X_s)\|^2 ds \right] < \infty$$

$$\Rightarrow f \in D_L \quad \text{und} \quad L f(t, x) = L f(t, x)$$

Bw: folgt aus Ito Formel + Verschwinden des stoch. Itô-Integrandes
im Erwartungswert!

Bem: Bed. im Satz gelten speziell dann, wenn $f \in C^{1,2}$ mit kompaktem Träger

Satz (Dynkin Formel) $f \in C^{1,2}$ mit komp. Träger, τ Stoppzeit mit $\mathbb{E}[\tau] < \infty$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_x [f(\tau, X_\tau)] = f(0, x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^\tau L f(s, X_s) ds \right]$$

69

Idee: • folgt aus Ito Formel

• z.z.: $\int_0^{T \wedge n} \mathcal{L}F(s, X_s) ds$ bilden glm. intbare Familie, s.d.

$\int$ v. lim vertauschbar

• da $f \in C^{1,2}$ + komp. Träger: dafür hinreichend: $\int_0^{T \wedge n} 1 ds$ glm. intbar

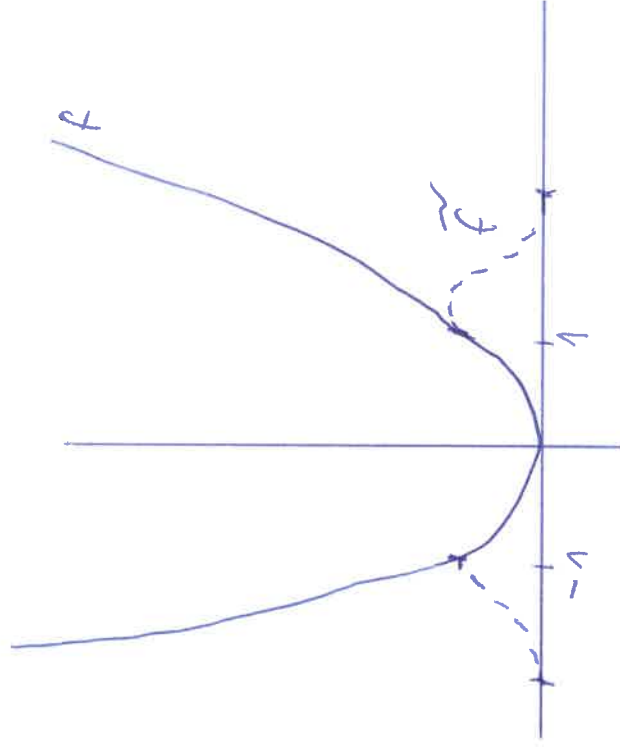
• folgt aus $E[\tau] < \infty$ $\square$

Bem.: falls $\tilde{f}$ Austrittszeit aus einer beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}$,

dann gilt Dynkin Formel $\forall f \in C^1_{12}$:

man kann $f|_A$ glatt fortsetzen, s.d. Fortsetzung $\tilde{f}$
 kompakten Träger hat

Bsp.: $f(x) = x^2$, $A = [-1, 1]$



Bsp.: (Anwendung Dynkin F.)

(71)

W_t 1-dim B.B.

$$X_t = x + W_t$$

$$\tau = \inf \{ t \geq 0 \mid X_t \notin (a, b) \} \quad a \leq x \leq b$$

ges.: $P := P(X_\tau = b)$

1.) Es gilt $P(\tau < \infty) = 1$

Folgt aus Martingalkonvergenzatz für $X_{t \wedge \tau}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[f(X_\tau)] = p \cdot f(b) + (1-p) f(a) \quad (*)$$

2.) Generator von X_t : $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$

27

$$3.) \text{ Löse } \wedge f_0 = 0 \Rightarrow f_0(x) = cx + d$$

$$\text{Dynkin} \Rightarrow \mathbb{E}[f_0(x)] = f_0(x)$$

$$(*) \Rightarrow cx + d \stackrel{!}{=} p(cb + d) + (1-p)(ca + d)$$

$$= c[pb + a(1-p)] + d[p + (1-p)] \quad \forall c, d, 0$$

Koeff. vgl. in c :

$$\Rightarrow x = pb + a(1-p) \Rightarrow$$

$$x = p(b-a) + a \Rightarrow p = \frac{x-a}{b-a}$$

III.2) Dynamic programming principle (DPP) – Motivation der

73

Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)-Gleichung

- DPP (Bellman Prinzip)

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(t_1, X_{t_1}) \right], \quad t < t_1 \leq T$$

Bedeutung: falls man sich nach t_1 optimal verhält und auch

zwischen t und t_1 , so ist das Verhalten insgesamt optimal?

– intuitiv einleuchtend, kann auch bewiesen werden

– unser Zugang: Benutze DPP um Gl. für V zu bekommen (HJB)

74

- Annahme: $V \in C^{1,2}$ und folgende formale Rechnung ist korrekt
(Vertauschung von Limiten, $\mathbb{E}$, sup; Verschwinden von
stoch Integralen im $\mathbb{E}$)

Ito ~~on~~ auf DPP $\Rightarrow$

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E}_{t, x} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(t_1, X_{t_1}^{x''}) + \int_t^{t_1} V_{10}(s, X_s) ds \right]$$

$$+ \int_t^{t_1} D_x V(s, X_s) b(s, X_s, u_s) ds + \frac{1}{2} \int_t^{t_1} \text{tr} \left[D_{xx} V(s, X_s) a(s, X_s, u_s) \right] ds$$

$$+ \int_t^{t_1} D_x V(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s \Big]$$

Falls dW - Integral Martingal $\Rightarrow$

$$\textcircled{2} \quad 0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \int_t^{t_1} V_{10}(s, X_s) ds + \int_t^{t_1} D_x V(s, X_s) b(s, X_s, u_s) ds \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \int_t^{t_1} \text{tr} \left[D_{xx} V(s, X_s) a(s, X_s, u_s) \right] ds$$

• Dividiere durch $(t_1 - t_0)$, $\lim_{t_1 \searrow t}$ + Vertauschungen erlaubt $\Rightarrow$

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \varphi(t, x, u) + V_{10}(t, x) + D_x V(t, x) b(t, x, u) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[D_{xx} V(t, x) a(t, x, u) \right] \right\}$$

$$\widetilde{\text{Def}} : \mathcal{L}^u f := f_{10}(t, x) + D_x f \cdot b + \frac{1}{2} \text{tr} \left[D_{xx} V \cdot a(t, x, u) \right]$$

$$\Rightarrow 0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \varphi(t, x) + \mathcal{L}^u V(t, x) \right\} = 0 \quad \text{HJB-Gl.}$$

Bemerkungen: manchmal wird andere Dst. verwendet:

$$\sup_{u \in U} \{ \varphi(t, x, u) + D_x V(t, x) b(t, x, u) + \frac{1}{2} \text{tr} [D_{xx} V(t, x) a(t, x, u)] \}$$

$$=: H(t, x, D_x V, D_{xx} V)$$

Hamiltonian

$$\Rightarrow \boxed{0 = V_{,0}(t, x) + H(t, x, D_x V, D_{xx} V)}$$

2. Form der HJB-Gl.

- obiges Vorgehen zeigt, dass, unter best. Voraussetzungen, die Wertfunktion die HJB-Gl. löst
- Umgekehrt kann man fragen, ob eine LÖ der HJB-Gl. die Wertfunktion darstellt. (sh unten)

Algorithmus zur Lösung der HJB :

78

- Suche optimales $u = \hat{u}(t, x)$ in HJB

es hängt von $D_x V, D_{xx} V$ ab d.h. $\hat{u}(t, x) = \tilde{u}(t, x, D_x V(t, x), D_{xx} V(t, x))$

- Einsetzen in HJB $\Rightarrow$ (i. A. nichtlineare) partielle Difgl. für V !

- „Lösung“ dieser PDE mit Randbedingung $V(T, x) = \psi(T, x)$?

od „Lösung“ : a) Ansatz (sh. Bsp. unten)

b) im linearen Fall : Fourierreihen, Fouriertransf.

c) numerische Lösung

(nach Existenz und Eindeutigkeitsbeweis?)

• Sei jetzt X_t^* Lösung von

$$dX_t^* = b(t, X_t^*, \hat{u}(t, X_t^*)) + \sigma(t, X_t^*, \hat{u}(t, X_t^*)) dW_t$$

und sei $\hat{u}(t, X_t^*) =: u_t^* \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow u_t^*$ ist optimale Kontrolle und $V(t, x)$ ist

Wertfunktion!

Bem: Sätze, die unter best. Bedingungen an $V, \varphi, \psi, b, \sigma, \lambda$ garantieren, dass die Lösung der HJB. wirklich das Optimierungsproblem liefert,

heißen Verifikationsätze

III.3) Ein Verifikationssatz

Bem.: - Standard Verifikationssätze (wie unten): starke Annahmen

- im konkreten Problem oft nicht direkt anwendbar

— $\Rightarrow$ — $\circ$ oft eigene Verif. Sätze (aber mit ähnlichem Bwg)

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{\text{Betr.}}: dX_t &= b(t, X_t, u_t) dt + \sigma(t, X_t, u_t) dW_t, \quad X_0 = x \\ J(t, x, u) &= \mathbb{E}_{t,x}^{\left[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \psi(T, X_T) \right]} \\ V(t, x) &= \sup_{u \in \mathcal{U}(t, x)} J(t, x, u) \end{aligned} \right\}$$

Bed. an u : (A1) u_s ist progr. mb. und erfüllt $\mathbb{E} \left[\int_t^T \|u_s\|^2 ds \right] < \infty$

(A2) SDG hat eindeutige, starke Lösung X_t , $X_t = x$

und $\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2 \right] < \infty$

(A3) $J(t, x, u)$ ist wohldefiniert

28

Satz (Verifikation) : $\frac{\text{ang.}}{\| \varphi(t, x, v) \|^2} \leq C_0 (1 + \|x\|^2 + \|v\|^2),$

$C_0 > 0$

$\| \varphi(t, x, v) \|^2 \leq C_0 (1 + \|x\|^2 + \|v\|^2),$

$x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n$

(i) Ang. $\Phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n), \quad |\Phi(t, x)| \leq C_0 (1 + \|x\|^2)$

$\sup_{\text{non}} \{ \varphi(t, x, v) + \mathcal{L}^v \Phi(t, x) \} = 0$

$\Phi(T, x) = \psi(T, x)$

$\Rightarrow \forall x \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n : \Phi(t, x) \geq \psi(t, x)$

83

(ii) Falls weiter gilt: der Maximizer $\hat{U}(t, x)$ von

$$u \mapsto \varphi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \bar{\Phi}(t, x) \in$$

s.d. $u_t^* = \hat{U}(t, X_t^*)$ zulässig

$$\Rightarrow \bar{\Phi}(t, x) = V(t, x)$$

u^* ist optimale Kontrolle, d.h.

$$V(t, x) = J(t, x, u^*)$$

Bw: Sei t, x fix; u beliebig

$$\bar{T}_n : T \wedge \inf\{s \geq t \mid \|X_s - X_t\| \geq n\} \quad n \in \mathbb{N}$$

garantiert beschränkter Prozess bis $\bar{T}_n$ 0

84

Ito Formel:

$$\bar{\Phi}(T_n, X_{T_n}) = \bar{\Phi}(t, x) + \int_t^{T_n} \mathcal{L}^{u_s} \bar{\Phi}(s, X_s) ds + \int_t^{T_n} D_x \bar{\Phi}(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s$$

$$\underbrace{\text{Es gilt}}: \mathbb{E} \left[\int_t^{T_n} \|D_x \bar{\Phi}(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s)\|^2 ds \right] < \infty$$

Verwendet: • Stoppen des Prozesses

• $\bar{\Phi} \in C^{1,2}$

• Wachstumsbed. für σ , $\mathcal{L}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{T_n} D_x \bar{\Phi}(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s \right] = 0$$

85

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tau_n} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \bar{\Phi}(\tau_n, X_{\tau_n}) \right] =$$

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tau_n} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \bar{\Phi}(t, x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}^{u_s} \bar{\Phi}(s, X_s) ds \right] =$$

$$\bar{\Phi}(t, x) + \mathbb{E}_{t,x} \left[\underbrace{\int_t^{\tau_n} (\varphi(s, X_s, u_s) ds + \mathcal{L}^{u_s} \bar{\Phi}(s, X_s) ds)}_{\leq 0 \text{ wegen HJB}} \right] \leq \bar{\Phi}(t, x)$$

(*)

$$\underbrace{n \rightarrow \infty}_{\tau_n \rightarrow T \text{ f.s.}}$$

Wachstums bed. für $\varphi, \bar{\Phi}$ + Adm. bed. von $u \Rightarrow$

88

$$\left| \int_t^{T_n} \varphi(s, X_s, u_s) + \bar{\Phi}(T_n, X_{T_n}) \right| \leq C_\varphi \int_t^T (1 + \|X_s\|^2 + \|u_s\|^2) ds + C_\Phi (1 + \sup_{s \in [t, T]} \|X_s\|)$$

$$\in L^1 \quad \circ$$

dom. Konvergenz + Stetigkeit von $\bar{\Phi} \Rightarrow$

$$\mathbb{E} \left[\int_t^{T_n} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \bar{\Phi}(T_n, X_{T_n}) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \bar{\Phi}(T, X_T) \right]$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \bar{\Phi}(T, X_T) \stackrel{\text{sup}}{=} \int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \bar{\Phi}(T, X_T)$$

$$\checkmark \quad (i) \quad V(t, X) = \bar{\Phi}(t, X) \Rightarrow (ii)$$

ad (ii) : analoger Beweis mit einer Änderung:

Wo HJB verwendet wird: statt beliebiges u : u^*

$$\Rightarrow \leq \rightarrow =$$

$$\Rightarrow V(t, x) = J(t, x, u^*) = \bar{\Phi}(t, x)$$

□

Bemerkungen: (i) Bellmanprinzip gilt auch in der Form:

$\forall$ Stoppzeiten $\tau \in [t, T]$ $(t_1 \rightarrow \tau, 0)$

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[\int_t^T \varphi(s, X_{s|0, x}) + V(\tau, X_\tau) \right]$$

Anwendung: sh. Kap. über Viskositätslösungen

(ii) definitionsgemäß: Wertfunktion eindeutig $\Rightarrow$

obiger Satz $\Rightarrow$ Lösung der HJB-Gl. eindeutig in der

Klasse der C^{α} Fktn. mit quadratischem Wachstum

89

(iii) Existenz einer Lösung i. A schwierig zu zeigen

~~Menge~~ starke hinreichende Bedingungen:

- U ... kompakt
- ψ ... 3 mal stetig diffbar und beschränkt
- $b, \sigma, \varphi \in C^{1,2}$ und beschränkt
- gleichmäßig parabolisches Problem:

$$\text{d.h.: } \gamma \cdot a(t, x, u) \gamma \geq c \| \gamma \|^2$$

$\forall t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^n, u \in U$
 $\Rightarrow$ HJB hat eindeutige Lösung $\in C^{1,2}$

90

Bsp. betr. $dX_t = u dt + dW_t$

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\beta X_T - \alpha \int_t^T u_s^2 ds \right] \quad \alpha, \beta > 0$$

$u, \dots$ prog. mb., $\mathbb{R}$ -wertig, $\mathbb{E} \left[\int_t^T u_s^2 ds \right] < \infty$

Generator: $\mathcal{L}^u = u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}$

HJB: $\sup_{u \in \mathbb{R}} \{ \mathcal{L}^u V - \alpha u^2 \} = 0$

$$\Rightarrow \sup_{u \in \mathbb{R}} \left\{ V_t + u V_x + \frac{1}{2} V_{xx} - \alpha u^2 \right\} \Rightarrow \hat{u} = \frac{V_x}{2\alpha}$$

Einsetzen $\Rightarrow -\alpha \frac{V_x^2}{4\alpha^2} + V_t + \frac{V_x^2}{2\alpha} + \frac{1}{2} V_{xx} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow + \frac{V_x}{4\alpha} + V_6 + \frac{1}{2} V_{xx} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{V_x}{4\alpha}} \right\}$$

Randbed: $V(T, x) = \beta x$

Ansatz: $V(t, x) = at + bx + \gamma$

Einsetzen, Koeff. vgl. $\Rightarrow V(t, x) = \beta x + \frac{\beta^2}{4\alpha} (T-t)$

$$\Rightarrow \bar{V} = \frac{V_x}{2\alpha} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

Bed. des Ver. satzes: $\bullet dX_t^* = \frac{\beta}{2\alpha} dt + dW_t$ hat starke L.ö. mit

$$E[\sup X_t^{*2}] < \infty$$

• $V \dots \text{const}$ ✓

• $J \dots \text{wohl def.}$ ✓

- Wachstumsbed: $\varphi(t, x, u) = -\alpha u^2$ ✓

$$\sigma \equiv \text{const} \quad \checkmark$$

- $\tilde{\Phi} \in C^{1,2}$ ✓

- $\tilde{\Phi}(t, x) \leq c_{\tilde{\Phi}} (1 + \|x\|^2)$ ✓

$$\Rightarrow \text{Vist wirklich Wertfunktion} \quad \left. \begin{array}{l} \tilde{U} = \frac{V_x}{2\alpha} = \frac{\beta}{2\alpha} = u^* \text{ optimal} \end{array} \right\}$$

Interpretation: $\beta \nearrow \Rightarrow \tilde{U} \nearrow$

$$\alpha \nearrow \Rightarrow \tilde{U} \searrow \quad \checkmark$$

III.4) optimales Investment mit Potenznutzenfunktion

Modell wie oben: $dB_t = B_t \cdot r dt$, $B_0 = 1$ $r > 0$ const $\Rightarrow B_t = e^{rt}$

Aktie: $dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t)$, $S_0 = s_0$

Kontrolle: $U = (\pi, c)$

π ... Anteil des Vermögens in Aktie

c ... Konsumrate

$$\Rightarrow dX_t = X_t \cdot \pi_t \cdot \frac{dS_t}{S_t} + X_t (1 - \pi_t) \cdot \frac{dB_t}{B_t} - c dt =$$

$$\underline{[(r + \pi_t(\mu - r))X_t - c_t] dt + X_t \pi_t \sigma dW_t}$$

Vermögensgl.!

99

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T e^{-\beta s} U(c_s) ds + e^{-\beta T} U(X_T) \right] \rightarrow \max$$

$$\text{mit } U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\rightarrow \text{Generator: } \mathcal{L}^{(\pi, c)} V(t, x) = V_t + [(v + \pi(\mu - v))x - c] V_x + \frac{1}{2} \pi^2 x^2 \sigma^2 V_{xx}$$

$$\Rightarrow \text{HJB: } \sup_{\pi, c} \left\{ e^{-\beta t} \frac{c^\alpha}{\alpha} + \mathcal{L}^{(\pi, c)} V(t, x) \right\} = 0$$

$$\text{Schritt 1: } \frac{\partial}{\partial c} (\quad) = e^{-\beta t} c^{\alpha-1} - V_x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$$

$$c = \left(e^{\beta t} V_x \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\mathcal{L}^{(\pi,c)} = V_t + \left\{ r_x + \pi x \mu - r \pi x - c \right\} V_x + \frac{1}{2} \pi^2 x^2 \sigma^2 V_{xx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}^{(\pi,c)}}{\partial \pi} = (\mu x - r x) V_x + \pi x^2 \sigma^2 V_{xx} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} = - \frac{(\mu - r) V_x}{\sigma^2 x V_{xx}}$$

(wir werden später sehen, dass $V_{xx} < 0$

und X_t bleibt positiv) $\Rightarrow$ Nenner $\neq 0$)

Schritt 2: Einsetzen in HJB:

$$e^{-\beta t} \frac{(e^{\beta t} V_x)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha} + V_t + r x V_x - \frac{(\mu-r) V_x}{\sigma^2 x} \cdot \frac{V_x}{V_{xx}} - (e^{\beta t} V_x)^{\frac{1}{\alpha-1}} V_x$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(\mu-r)^2 V_x^2}{\sigma^2 x^2 V_{xx}^2} \cdot x^2 \sigma^2 V_{xx} = 0$$

96

$$\Rightarrow V_x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{e^{-\beta t + \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}t}}{\alpha} - e^{-\frac{\beta t}{1-\alpha}} \right) + V_t + \nu x V_x - \frac{1}{2} \frac{(\mu-\nu)^2}{\sigma^2} \frac{V_x^2}{V_{xx}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} e^{-\frac{\beta t}{1-\alpha}} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) + V_t + \nu x V_x - \frac{1}{2} \frac{(\mu-\nu)^2}{\sigma^2} \frac{V_x^2}{V_{xx}} = 0} \quad (1)$$

Randbed.: $V(T, x) = e^{-\beta T} x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$

Ansatz: $V(t, x) = h(t) x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$

$$\Rightarrow h(T) x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = e^{-\beta T} x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(T) = e^{-\frac{\beta T}{1-\alpha}}} \quad (2)$$

Einssetzen: $V_x = h(t)^{1-\alpha} x^{\alpha-1}$

$$V_{xx} = h(t)^{1-\alpha} (\alpha-1) x^{\alpha-2}$$

$$V_t = (1-\alpha) h'(t) h(t)^{-\alpha} x \frac{x}{\alpha}$$

(1) $\Rightarrow$

$$(h(t)^{1-\alpha} x^{\alpha-1})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} e^{-\frac{\beta t}{1-\alpha}} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) + (1-\alpha) h(t)^{-\alpha} h'(t) \frac{x}{\alpha} + v x h(t)^{1-\alpha} x^{\alpha-1}$$

$$- \lambda \frac{(h(t)^{1-\alpha} x^{\alpha-1})^2}{h(t)^{1-\alpha} (\alpha-1) x^{\alpha-2}} = 0 \quad | : x^{\alpha}$$

$$h(t)^{-\alpha} e^{-\frac{\beta t}{1-\alpha}} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) h(t)^{-\alpha} h'(t) + v h(t)^{1-\alpha} - \lambda \frac{h(t)^{1-\alpha}}{\alpha-1} = 0$$

$$| 0 \cdot h(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\alpha}{(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \left[h'(t) + h(t) \cdot \left[v \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} + \lambda \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \right] + e^{-\frac{\beta t}{1-\alpha}} \right] = 0 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=: c} \quad (3)$$

98

+R.B. (2)

lineare gew. Diffgl : Lösung mit Standard meth.

$$h(t) = e^{-\frac{\beta c}{1-\alpha} t} e^{-c(T-t)} + \frac{(1-\alpha)e^{-ct}}{\beta - (1-\alpha)c} \left\{ e^{-\frac{\beta - (1-\alpha)c}{1-\alpha} t} - e^{-\frac{\beta - (1-\alpha)}{1-\alpha} T} \right\}$$

für $\beta - (1-\alpha)c \neq 0$

$$h(t) = e^{-ct} (1+T-t) \quad \dots \quad \text{für } \beta - (1-\alpha)c = 0$$

Schritt 3: $h(t)$ ist strikt positiv $\Rightarrow$ Wertfunktion ist strikt positiv (falls $x > 0$)

$$\bullet \quad V < C^{1/2} \quad \text{und} \quad V_{xx} < 0$$

Weiters: $\hat{c} = (e^{\beta t} V_x)^{\frac{1}{\alpha-1}} = (e^{\beta t} h(t)^{1-\alpha} x^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha-1}} = e^{\frac{-\beta t}{1-\alpha}} \cdot x$

$$\frac{1}{h}(t, x) = - \frac{(\mu-\nu)}{\sigma^2} \cdot \frac{V_x}{x \cdot V_{xx}} = - \frac{(\mu-\nu)}{\sigma^2} \cdot \frac{h(t)^{1-\alpha} x^{\alpha-1}}{h(t)^{1-\alpha} (\alpha-1) x^{\alpha-1}}$$

$$= + \frac{(\mu-\nu)}{\sigma^2(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow c_t^*(t, X_t^*) = e^{\frac{-\beta t}{1-\alpha}} \frac{X_t^*}{h(t)}$$

$$\pi_t^*(t, X_t^*) = \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{(\mu-\nu)}{\sigma^2}$$

f...determin.
 $c > 0$ const.

Wobei: $dX_t^* = X_t^* f(t)dt + X_t^* c dW_t$

100

diese SDG hat eindeutige starke Lösung: Ansatz: $e_t^r = \int_t^T g_s^r ds + \int_t^T k_s^r dW_s$

g_s^r ... determ., stetig
(sh. Martingalproblem)

✓

$$X_T^* > 0$$

Bed. des Verif. satzes: $(A_1) \mathbb{E} \left[\int_t^T \|U_s^*\|^2 ds \right] \leq \text{const.} + \text{const.} \mathbb{E} \left[\int_t^T (X_s^*)^2 \right] < \text{const.}$

(X_t^* hat log normale Verteilung!)

(104)

$$\begin{aligned}
 (A2) \quad \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} X_s^{* \sim} \right] &= x_0^{\sim} \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} e^{2 \int_t^s g_r dr + 2 \int_t^s k_r dW_r} \right] \\
 &\leq \text{const.} \cdot \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} e^{2 \int_t^s k_r dW_r} \right] = \\
 &= \text{const.} \cdot \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} e^{2 \int_t^s k_r dW_r - 2 \int_t^s k_r^2 dr + 2 \int_t^s k_r^2 dr} \right] \\
 &\leq \text{const.} \cdot \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} e^{2 \int_t^s k_r dW_r - 2 \int_t^s k_r^2 dr} \right] \\
 &\stackrel{\text{Doob'sche Ungl.}}{\leq} \text{const.} \cdot \mathbb{E} \left[e^{2 \int_t^T k_r dW_r - 2 \int_t^T k_r^2 dr} \right] < \infty
 \end{aligned}$$

lognormale Verteilung

(A3) alles positiv ✓

$$|\varphi(t, x, u)| = \frac{c^\alpha}{\alpha} e^{-\beta t} \leq \text{const.} (1 + |c|^2) \checkmark$$

$$\|\varphi(t, x, u)\|^2 = \|\pi \times \varphi\|^2 = \text{const.} \pi^2 x^2 \neq \text{const.} (1 + \| \pi \|^2 + \| u \|^2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{auch } \tilde{\Phi} \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_0^+ \equiv \\ \text{nicht erfüllt} \end{array} \right\} \quad \text{red. } \varnothing$$

ABER: brauche im Beweis $\mathbb{E} \left[\int_t^{\tau_n} \| D\tilde{\Phi} \cdot \varphi(s, X_s, u_s) \|^2 ds \right] < \infty$

ersetze im Beweis dort: $\tau_n = \tau_n^{\text{alt}} \wedge \{s > t \mid X_t = \frac{1}{n}\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\leq \text{const.} \mathbb{E} \left[\int_t^{\tau_n} \| \varphi \|^2 ds \right] = \text{const.} \mathbb{E} \left[\int_t^{\tau_n} \pi^2 x^2 ds \right] \\ &\stackrel{(A1)}{\leq} \text{const.} (n) \mathbb{E} \left[\int_t^{\tau_n} \pi^2 ds \right] < \infty \Rightarrow \end{aligned}$$

V ist Wertfunktion, u^* optimal $\varnothing$

III.5] lineares Regulatorproblem

$$dX_s = u_s ds + \sigma dW_s$$

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T a u_s^2 + b (X_s - x_1)^2 ds \right] \rightarrow \min_{u} \quad a, b > 0$$

Bedeutung: Ziel: X_s soll in der Nähe von x_1 gehalten werden,

wobei "quadratische Kosten" anfallen!

Gewichtung über $a \leq b$!

$$V(k, x) = \min_{u \text{ gut}} J(k, x, u)$$

$$\text{HJB: } \left\{ \min_{v \in \mathbb{R}} \left\{ V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{xx} + v V_x + a v^2 + b (x - x_1)^2 \right\} = 0 \right. \\ \left. V(T, x) = 0 \quad (\text{nur laufende Kosten!}) \right.$$

$$\text{Minimizer: } V_x + 2a v = 0 \Rightarrow v = - \frac{V_x}{2a}$$

$$\Rightarrow V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{xx} - \frac{V_x^2}{2a} + a \frac{V_x^2}{4a^2} + b (x - x_1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{xx} - \frac{V_x^2}{4a} + b (x - x_1)^2 = 0}$$

$$\text{Ansatz: } V(t, x) = P(t) (x - x_1)^2 + Q(t) \Rightarrow$$

$$P'(t) (x - x_1)^2 + Q'(t) + \frac{P^2(t) \cancel{4} (x - x_1)^4}{\cancel{4a}} - \frac{P^2(t) \cancel{4} (x - x_1)^4}{\cancel{4a}} + b (x - x_1)^2 = 0$$

Koeffizienten: $\underbrace{p'(x-x_1)^2}_{=0} \quad \circ \quad p'(t) - \frac{p''(t)}{a} + b = 0$

$1 \quad \circ \quad Q'(t) + \sigma^2 p(t) = 0$

Randbed: $V(T, x) = 0 \Rightarrow p(T) = Q(T) = 0$

1. Gl.: Riccati Gleichung (Lösung bekannt) $\Rightarrow$

$$p(t) = \sqrt{ab} \tanh \left((T-t) \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \Rightarrow$$

$$Q(t) = \sigma^2 b \ln \left[\cosh \left((T-t) \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right]$$

Kontrollfunktion: $u(t, x) = -\frac{1}{2a} V_x = -\frac{1}{2a} \left(2(x-x_1) p(t) \right) = -\frac{(x-x_1)}{a} p(t)$

d.h.: "Kraft" prop. zur Distanz von (und in Richtung von) x_1
(abh. von t_0)

III. 6) Kontrolltypen

906

i.A.: Kontrolle zum Zeitpunkt t : $U_t(\omega)$

det.
↓

speziell: • deterministische Kontrolle : $U_t(\omega) = f(t)$

• feedback Kontrolle: u_t adaptiert bez

Filtration des Kontrollierten

Prozesses, d.h.

U_t ist $\sigma(X_s, s \leq t)$

mb.

• speziell: Markov Kontrolle

$U_t(\omega) = f(t, X_t(\omega))$