Sachversicherungsmathematik

1. Übungsblatt 2024

Man bestimme in 1. - 4. $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $VKO(X)$ durch Summation bzw. Integration:

1. $X \sim P(\lambda)$ - Poissonverteilung mit $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!\,,\quad k \in N_0$.
2. $X \sim B(n,p)$ - Binomialverteilung mit $n \in N,\ p \in (0,1)$:
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,,\quad 0 \le k \le n\,.$$
3. $X \sim Ga(\alpha,\beta)$ Gammaverteilung mit $\alpha,\beta > 0$:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & , \quad x \ge 0 \\ 0 & , \quad x < 0\,. \end{cases}$$
4. $X \sim F(x)\,,$ mit der Verteilungsfunktion
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ x & , \quad \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 1 & , \quad x > 1\,. \end{cases}$$
5. Man berechne $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $SCH(X)$, $M(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ und skizziere die Punktwahrscheinlichkeiten:

x_i	p_i
-1	0.1
0	0.5
2	0.3
3.5	0.1

6. $X \sim Ex(\lambda)$ - Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ und Verteilungsfunktion
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \ge 0 \\ 0 & , \quad x < 0\,. \end{cases}$$
Man berechne $f(x), \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $VKO(X)$, $\mathbb{E}(X^n)$, $SCH(X)$.
7. Für die Kumulantenerzeugende Funktion $L(t) := \ln M(t) = \ln \mathbb{E}(e^{tX})$ zeige man:
$$L^{'}(0) = \mathbb{E}(X), \quad L^{''}(0) = \mathbb{V}(X), \quad L^{'''}(0) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^3.$$
8. Wie Beispiel 6, mit Verwendung der erzeugenden Funktionen $M(t)$ und $L(t)$.

Sachversicherungsmathematik

2. Übungsblatt 2024

9. Sei $f(x)$ die Dichte einer Zufallsvariable X, die ein 3. Moment besitzt. Die Dichte einer Zufallsvariable X_β sei $g_\beta(x) := \beta f(\beta x)$. ($\beta > 0$ wird oft als Skalenparameter bezeichnet.) Zeigen Sie: VKO und Schiefe von X_β sind unabhaengig von β.

10. Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ - Normalverteilung mit Parameter $(\mu, \sigma) \in R \times R^+$ und Dichte
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,.$$
Man berechne $M(t)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $SCH(X)$.

11. Es sei $X \sim Ex(1)$ und $Y = \sqrt{X}$. Berechnen Sie die Dichte von Y, die Verteilungsfunktionen von X und Y, $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 4)$, $\mathbb{P}(1 \leq Y \leq 2)$, und skizzieren Sie die Dichten mit den beiden Wahrscheinlichkeiten.

12. Es sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $Y = e^X$ (Y nennt man dann logarithmisch normalverteilt). Berechnen Sie von Y die Dichte und alle Momente.

Man bestimme in den Beispielen 13 und 14 die Verteilung von
$$S = \sum_{i=1}^{n} R_i \,, \qquad R_i \quad \text{unabhängig}\,.$$

13. $R_i \sim NB(\alpha_i, p)$ - negative Binomialverteilung mit $\alpha_i > 0$, $p \in (0,1)$:
$$\mathbb{P}(R_i = k) = \binom{\alpha_i + k - 1}{k} p^{\alpha_i}(1-p)^k \,, \quad k = 0, 1, \ldots$$

14. $R_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

In den Beispielen 15 und 16 ist die Verteilung von S sowohl direkt über die Faltung als auch mithilfe von erzeugenden Funktionen zu berechnen.

15. $R_i \sim B(n_i, p)$.

16. $R_i \sim Ga(\alpha_i, \beta)$ – Man betrachte auch den Spezialfall $\alpha_i = 1$.

17. Gegeben sei ein großer Versicherungsbestand, mit gleichverteilten, unabhängigen Risiken $R_i, i = 1, \ldots, n$. Die R_i seien normalverteilt mit Parametern $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 0.1$. Pro Risiko wird eine Prämie $c \geq \mathbb{E}(R)$ eingehoben. Der Gesamtschaden sei $S_n = \sum_{i=1}^n R_i$.

    Aus der "Theorie der großen Abweichungen" ist folgendes bekannt. Seien X_i i.i.d. Zufalls variable mit Erwartungswert gleich Null, sei $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und sei $M(t)$ die momentenerzeugende Funktion der X_i. Dann gilt

    $$P[Z_n > na]^{1/n} \to e^{-\Psi(a)} \qquad (n \to \infty),$$

    wobei

    $$\Psi(a) = -\ln\left(\inf_{t>0}\{e^{-at}M(t)\}\right)$$

    (a) Berechnen Sie die Illiquiditätswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_n > nc)$ für "großes" n.

    (b) Berechnen Sie für $n = 1000$ die Einzelprämie c so, dass $\mathbb{P}(S_n > nc) = 0.001$.

18. Sei X eine positive Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert $E(X)$. Zeige

    $$E(X) = \int_0^\infty P(X \geq x)\, dx$$

19. Für einen Bestand von vier 1-jährigen Ablebensversicherungen $({}_1A_{x_i}, VS_i)$ gegeben durch

	VS in Mio.		
Alter/Geschlecht	1	2	4
68/w	1	-	1
67/m	-	2	-

berechne man:

(a) die Punktwahrscheinlichkeiten und die Verteilungsfunktion (sowohl durch die Betrachtung aller möglichen Szenarien als auch durch Verwendung der mgf.);

(b) $\mathbb{E}(S)$ und $\mathbb{V}(S)$;

(c) den kleinsten Sicherheitszuschlag für den Gesamtbestand so, dass die Illiquiditätswahrscheinlichkeit unter 10 % (5 %) liegt.

20. Die Struktur eines Bestandes B ($n = 30$) von 1-jährigen Risikoversicherungen sei durch folgende Bestandsmatrix gegeben:

	VS in Mio.				
Alter/Geschlecht	0.5	1	1.25	2	3.75
64/w	-	-	1	-	2
78/w	1	2	-	2	-
90/w	3	-	3	-	2
68/m	-	-	1	2	1
84/m	1	1	1	-	-
93/m	-	2	-	3	2

Man berechne $\mathbb{E}(S)$, $\mathbb{V}(S)$ und schätze mithilfe der Ungleichung von Tschebyscheff die Wahrscheinlichkeit, dass der Gesamtschaden um mindestens 100% von der Nettoprämie des Bestandes abweicht, nach oben ab.

21. Für eine Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ für ein $p > 0$, beweise man:

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p}\,\mathbb{E}(|X|^p) \qquad \text{für} \quad \lambda > 0\,.$$

(Für $p = 2$ ergibt sich die Ungleichung von Chebychev.)
Bewerten Sie für $p = 2$ die Güte dieser oberen Schranke, indem Sie für $\lambda = 1, 2, 3, 4$ und eine Standardnormalverteilung die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|X| \geq \lambda)$ sowohl nach oben abschätzen als auch exakt berechnen.

22. Unter der Voraussetzung, dass $M := \mathbb{E}(e^{k|X|})$ existiert für ein $k > 0$ beweise man:

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq Me^{-k\lambda}\,.$$

23. (a) Ein Bestand sei im 1. Jahr gegeben durch $V_1 = 10$ unabhaengig identisch verteilten Risiken $R_i^{(1)}$ ($i = 1, ..., 10$) mit der Verteilung

$$P(R_1^{(1)} = 1) = 0.1$$
$$P(R_1^{(1)} = 0) = 0.9$$

Im 2. Jahr bestehe er aus $V_2 = 30$ Risiken $R_i^{(2)}$ ($i = 1, ..., 30$), die ebenso verteilt sind. Bekannt seien nur die Werte von

$$Z_j = \frac{S_j}{V_j} = \frac{\sum_{i=1}^{V_j} R_i^{(j)}}{V_j} \qquad j = 1, 2$$

Finden Sie unter allen linearen ($\hat{\mu} = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2$) erwartungstreuen Schaetzern fuer $\mu = E(R_i^{(j)})$ denjenigen mit der kleinsten Varianz, und vergleichen Sie mit der Varianz von $\bar{\mu} = (Z_1 + Z_2)/2$.

(b) Sei X eine Zufallsvariable mit verschobener Standard Normalverteilung, d.h. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2}}$. Bestimmen Sie den maximum likelihood Schaetzer fuer μ und zeigen Sie, dass er die FRC Schranke annimmt.

24. X und Y haben eine gemeinsame Verteilung mit folgender Dichte

$$f(x,y) = axy\mathbf{1}_{\{X>0,Y>0,X+Y\leq 1\}}$$

($\mathbf{1}_A$ bezeichnet die Indikatorfunktion der Menge A)

(a) Bestimmen Sie a.

(b) Bestimmen Sie $E(X), E(Y), E(X|Y)$.

25. X und Y seien unabhaengig voneinander und exponentialverteilt mit Parametern λ und μ. Bestimmen Sie die Verteilung von $\max(X, Y)$ und $\min(X, Y)$.

26. Gegeben seien 2 Zufallsvariable N und K. N sei poissonverteilt mit Parameter λ. Weiters sei die Verteilung von K bedingt auf N gegeben durch

$$f_{K|N}(k|n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bestimmen Sie $E(K|N), E(K)$ und $E(N|K)$.

27. Eine Versicherung habe einen homogenen Bestand von 100 5-jaehrigen Ablebensversicherungen von 65-jaehrigen Frauen mit identischer Versicherungssumme. Geben Sie die Verteilung der Schadenzahl N im kollektiven Modell an.

28. Eine Versicherung habe einen Bestand von 100 1-jaehrigen Ablebensversicherungen von 65-jaehrigen Frauen mit Versicherungssumme $VS = 700.000$ sowie 100 1-jaehrigen Ablebensversicherungen von 50-jaehrigen Maennern mit Versicherungssumme $VS = 1.000.000$. Modellieren Sie diesen Sachverhalt im kollektiven Modell, indem sie jeweils eine Frau und einen Mann zu einem Einzelschaden zusammenfassen.

29. Die Schadenhöhe X sei Pareto verteilt ($X \sim Pa(\alpha, \beta)$), mit den Parametern $\alpha > 0, \beta > 0$ und der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha} \quad , & x \geq 0\,, \\ 0 \quad , & x < 0\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$ für jene Parameterwerte, für die sie definiert sind. Schätzen Sie mit der Momentenmethode den Parameter (α, β) für die gegebenen Daten.

30. Es sei $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ der MLE für den Parameter (α, β) aus Bsp. 29.

    (a) Zeigen Sie

$$\hat{\alpha} \;=\; f_1(\hat{\beta}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\hat{\beta}+x_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\hat{\beta}(\hat{\beta}+x_i)}}\,,$$

$$\hat{\alpha} \quad = \quad f_2(\hat{\beta}) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{x_i}{\hat{\beta}})} \, .$$

(b) Benützen Sie die Beziehung $f(\hat{\beta}) := f_1(\hat{\beta}) - f_2(\hat{\beta}) = 0$, um für die gegebenen Daten $\hat{\beta}$ auf 4 führende Stellen zu berechnen (zum Beispiel Intervallschachtelung mit Startintervall $[2000, 4394]$). Schätzen Sie dann $\hat{\alpha}$ mithilfe von (a). Computerunterstützung ist zu empfehlen!

31. Es sei $X \sim LogN(\mu, \sigma^2)$ (Lognormalverteilung, siehe Bsp. 12).

   (a) Beweisen Sie, dass die Verteilungsfunktion von X durch $\Phi(\frac{\ln x - \mu}{\sigma})$ gegeben ist, wobei $\Phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion einer $N(0, 1)$ Zufallsvariablen sei.

   (b) Schätzen Sie für die gegebenen Daten den Parameter (μ, σ^2), indem Sie die ML-Methode für die Zufallsvariable $\ln X$ anwenden.

32. Gegeben sei eine kontinuierliche Zufallsvariable X mit einer Dichte $f(x; \theta)$. Weiters sei $Y = h(X)$, wobei $h(\cdot)$ eine strikt monotone differenzierbare Funktion ist. Zeigen Sie, daß die ML-Methode für eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_N$ denselben Schätzer liefert wie die ML-Methode für die transformierten Daten $h(x_1), \ldots, h(x_N)$.

33. Führen Sie den χ^2 - Test für die begleitenden Daten mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art von 0.05 für die folgenden Verteilungsmodelle durch. Verwenden Sie dabei immer die empfohlene Klasseneinteilung :
    (a) $X \sim Pa(\alpha, \beta)$ mit Schätzwert $(2.470, 4394)$ für (α, β).
    (b) $X \sim Pa(\alpha, \beta)$ mit Schätzwert $(1.909, 2704)$ für (α, β).
    (c) $X \sim LogN(\mu, \sigma^2)$ mit Schätzwert $(7.021, 1.977)$ für (μ, σ^2).

34. Es sei $N|(\Lambda = \lambda) \sim P(\lambda)$, und Λ habe eine Strukturverteilung $Ga(\alpha, \beta)$. Zeigen Sie, dass $N \sim NB(\alpha, p)$ mit $p = \frac{\beta}{\beta+1}$ gilt. Verwenden Sie diese Beziehung, um

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\alpha(1-p)}{p}, \quad \mathbb{V}(N) = \frac{\alpha(1-p)}{p^2}$$

für eine negative Binomialverteilung herzuleiten.

35. Es sei $X|(\Lambda = \lambda) \sim Ga(k, \lambda)$ und Λ habe eine Strukturverteilung $Ga(\alpha, \beta)$. Für $k = 1$ wurde in der VO gezeigt, dass X eine Paretoverteilung besitzt. Für beliebige k ergibt sich die verallgemeinerte Paretoverteilung. Berechnen Sie für diese Verteilung die Dichte sowie den Erwartungswert.

36. Für den Bestand einer Haftpflichtversicherung von 10^5 Policen ist in folgender Tabelle die Anzahl der Polizen gegeben, die 0, 1 ,2, 3, 4 , oder 5 Schadensfälle in einem Jahr gemeldet haben. Die Zufallsvariable N_p sei die Schadenzahl einer durchschnittlichen Police pro Jahr.

Anzahl der Schadensfälle	Anzahl der Polizen
0	81056
1	16174
2	2435
3	295
4	36
5	4

    (a) Modellieren Sie N_p mithilfe einer Poissonverteilung $P(\lambda)$ (ML- Schätzer für λ verwenden).

(b) Modellieren Sie N_p mithilfe einer negativen Binomialverteilung $NB(\alpha, p)$ (Momentenschätzer für (α, p) verwenden).

(c) Führen Sie für beide Schadenszahlmodelle den χ^2-Test mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit 1.Art von 0.05 durch.

37. N ist die Anzahl der Waldbrände im Monat Juli. Diese Schadenzahl ist Poissonverteilt, wobei der Parameter λ von den Wetterbedingungen abhängt:

Wetterbedg.	Poissonparameter	$\mathbb{P}$(Wetterbedg.)
sehr trocken	300	0.05
trocken	175	0.20
normal	80	0.40
feucht	60	0.25
sehr feucht	30	0.10

Um ein Modell für N über längere Zeiträume zu bekommen, berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und die Verteilungsfunktion (ausgewertet an 50, 70, 100, 150, 200 und 300) der zu obiger Tabelle gehörenden mixed-Poisson Verteilung. Vergleichen Sie dies mit der Verteilung von $P(100)$.

38. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von N, X und S, sowie die Punktwahrscheinlichkeiten und die Verteilungsfunktion von S.

n	$P(N = n)$
0	0.3
1	0.4
2	0.2
3	0.1

x	$P(X = x)$
1	0.6
2	0.3
3	0.1

39. Zeigen Sie für $S \sim CP(\lambda; X)$ mit $E(X^3) > 0$ gilt $SCH(S) > 0$. (Leiten Sie mithilfe der kumulantenerzeugenden Funktion $\mathbb{E}(S - \mathbb{E}(S))^3 = \lambda\, \mathbb{E}(X^3)$ her.)

40. $S \sim CP(\lambda; X)$, $\quad X \sim LogN(3.91202, 1.3862943)$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(S)$, $\mathbb{V}(S)$ und $SCH(S)$ für $\lambda = 100$ bzw. 1000.

Sachversicherungsmathematik

6. Übungsblatt 2024

41. $S_i \sim CNB(\alpha_i, p; X) \quad i = 1, \ldots, n$; Setzen Sie voraus, dass die S_i unabhängig sind, und bestimmen Sie die Verteilung von $S = \sum_{i=1}^n S_i$.

42. Zeigen Sie, dass für folgende Verteilungen die Rekursion

$$g_k = (a + \frac{b}{k})g_{k-1}, \qquad \text{mit } g_k = P(N = k)$$

gilt, und berechnen Sie die Koeffizienten a und b.

(a) $N \sim P(\lambda)$,

(b) $N \sim B(n, p)$,

(c) $N \sim NB(\alpha, p)$.

43. Es sei $S \sim CP(\lambda = 3; X)$ mit $P(X = k) = p_k = 0.1k$ für $k = 1, 2, 3$ und 4. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S = k) \quad k = 0, \ldots, 6$ für S, indem Sie S in eine Linearkombination von Poissonverteilungen zerlegen und dann falten.

44. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S = k) \quad k = 0, \ldots, 8$ für S aus dem vorigen Bsp. mit der Rekursionsformel von Panjer.

45. Es sei $S \sim CP(\lambda; X)$ mit $\lambda = 10, (50)$ und $X \sim Pa(4, 3)$. Approximieren Sie S durch eine Normalverteilung, und berechnen Sie damit näherungsweise die 0.95 und 0.99 -Fraktile von S.

(Zur Erinnerung: $E(X) = \frac{\beta}{\alpha-1}$, $\qquad V(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$)

46. Die Einzelschäden X seien Pareto verteilt. Berechnen Sie für eine Quoten RV und eine XL-RV

(a) die mittlere Einzelschadenhöhe des Erstversicherers;

(b) die Einzelschadenverteilung für den Rückversicherer (bei der XL-RV ist die bedingte Sichtweise gemeint, d.h. die Verteilung der Variablen Z_R aus der Vorlesung).

Im Falle einer XL-RV modellieren Sie X mit einer $Pa(1.909, 2704)$-Verteilung und berechnen für einen Selbstbehalt von 25000 die mittlere Einzelschadenhöhe des Erstversicherers. Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die mittlere Einzelschadenhöhe direkt aus den Daten (sh. Extrablatt) schätzen.

47. Für eine XL-RV mit einem Selbstbehalt M habe man lognormalverteilte Einzelschäden.

   (a) Berechnen Sie die mittlere Einzelschadenhöhe des Erstversicherers;

   (b) wie (a) für $M = 30000$, $\mathbb{E}\,X = 10000$ und $\mathbb{V}\,X = 6000$.

48. Ein VU kennt die Daten der letzten 10 Schäden:

$$1330,\ 201,\ 111,\ 2368,\ 617,\ 309,\ 35,\ 4685,\ 442,\ 843\ .$$

   Verwenden Sie die Momentenmethode um eine Exponentialverteilung und eine Paretoverteilung an die Daten anzupassen. Mit diesen Modellen für die Schadenhöhe X berechnen Sie

   (a) den Prozentsatz, um den die Nettoprämie für den VN reduziert wird, wenn ein Selbstbehalt von 1000 vereinbart ist;

   (b) $\mathbb{P}(X < 1000)$, $\quad \mathbb{P}(X > 5000)$.

49. Für eine XL-RV mit einem Selbstbehalt von 50000 nimmt der RV an, dass die Einzelschadenhöhe (vor der RV-Vereinbarung) X Weibull verteilt ist:

$$F(x) = 1 - \exp(-\theta x^{\frac{1}{3}}), \qquad x,\, \theta > 0.$$

Im letzten Jahr haben $n = 50$ Schäden den Selbstbehalt überschritten. Für diese kennt man $\sum_{i=1}^{50} x_i^{\frac{1}{3}} = 2600$. Verwenden Sie diese Information um den MLE $\hat{\theta} = 0.06596$ von θ zu berechnen.

50. N sei die Schadenzahl eines Bestandes. Es wird eine XL-RV vereinbart mit $\mathbb{P}(X > M) = p$. Zeigen Sie, dass für die Schadenzahl des Rückversicherers N_R folgendes gilt:

    (a) $N \sim P(\lambda) \Rightarrow N_R \sim P(\lambda p)$,

    (b) $N \sim B(\bar{n}, \bar{p}) \Rightarrow N_R \sim B(\bar{n}, \bar{p}p)$.

    Anregung für (b): Benützen Sie $\mathbb{E}(e^{tN_R}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{tN_R|N}))$.

51. Ein Rückversicherer zahlt 80% des Gesamtschadens der den Selbstbehalt des Erstversicherers d übersteigt, höchstens aber M. Drücken Sie die Nettoprämie für diese Rückversicherung in SL- Nettoprämien aus.

52. Der Gesamtschaden S sei auf $0, 1, 2, \ldots$ diskret verteilt. Für die Netto- SL- Rückversicherungsprämie mit stop loss point d zeige man die Rekursion

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, S_Z(0) &= \mathbb{E}\, S\ ; \\ \mathbb{E}\, S_Z(d+1) &= \mathbb{E}\, S_Z(d) - (1 - F_S(d)). \end{aligned}$$

53. Unter den Annahmen von Beispiel 52 zeigen Sie die Rekursion

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, S_Z^2(0) &= \mathbb{E}\, S^2\ ; \\ \mathbb{E}\, S_Z^2(d+1) &= \mathbb{E}\, S_Z^2(d) - 2\,\mathbb{E}\, S_Z(d) + 1 - F_S(d). \end{aligned}$$

54. (a) Zeigen Sie, dass die die Netto- SL-Rückversicherungsprämie für $S \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $d \geq \mu$ durch

$$\mathbb{E}\, S_Z(d) = (\mu - d)(1 - \Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

gegeben ist.

(b) Es sei $S \sim N(100, 10^2)$ und $d = 115$. Berechnen Sie die Nettoprämie für den Rückversicherer.

(c) Wir erwarten für die nächste Periode eine Inflation von 10 %, das heißt die Schadensvariable S aus (b) wird mit dem Faktor 1.1 multipliziert. Berechnen Sie erneut für $d = 115$ die Nettoprämie für den Rückversicherer.

55. Ein Bestand habe die Einzelschadenhöhe $X \sim f(x)$. Es wird eine XL-RV mit der Priorität M vereinbart. Weiters wird für die kommende Periode eine Inflationsrate von r angenommen. Berechnen Sie allgemein die erwartete mittlere Einzelschadenhöhe unter Berücksichtigung der Inflation. Zeigen Sie, dass für $X \sim Ex(\lambda)$ das Ergebnis durch $(1+r)\frac{1-e^{-\lambda M/(1+r)}}{\lambda}$ gegeben ist.

56. Ein Bestand eines VU wird durch die Schadenzahl $N \sim P(100)$ und der Einzelschadenhöhe $X \sim Ex(\frac{1}{500})$ beschrieben. Es wird eine Quoten-RV mit einem Selbstbehalt $\alpha = 0.8$ vereinbart. Bestimmen Sie die Verteilungen der Gesamtschäden für das VU und den Rückversicherer, sowie deren Erwartungswerte und Varianzen. Gilt $\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(S_Y) + \mathbb{V}(S_Z)$? Begründen Sie das Ergebnis.

57. Ein Bestand eines VU wird durch die Schadenzahl $N \sim P(10)$ und die Einzelschadenhöhe $X \sim U([0, 2000])$ (- Gleichverteilung) beschrieben. Das VU schließt eine XL-RV mit einem Selbstbehalt $M = 1600$ ab. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Gesamtschadens für das VU und den RV. Für den Rückversicherer tun Sie dies auf 2 Arten, indem Sie die Darstellungen $S_Z = \sum_{i=1}^{N} Z_i$ und $S_Z = \sum_{i=1}^{N_R} Z_{Ri}$ verwenden.

58. Approximieren Sie den Gesamtschaden des folgenden Bestandes durch ein CP Modell. (Ersetzen Sie BN- Verteilungen laut VO durch eine geeignete Poisson Verteilung, und berechnen Sie die Verteilung der Einzelschadenhöhe X.)

VS	Anzahl der Policen	Schadenswahrscheinlichkeit
10000	1000	0.004
20000	1500	0.0035
100000	2500	0.003

Für das CP-Modell bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Schiefe.

59. Von S kennt man $\mathbb{E}(S) = 895 \cdot 10^3$, $\mathbb{V}(S) = 775 \cdot 10^8$ und $SCH(S) = 0.3498$.

    (a) Schätzen Sie mithilfe eines Ga^T - Modelles für S die Wahrscheinlichkeit, dass S die Gesamtprämieneinnahmen von 1135000 überschreitet.
    Verwenden Sie $P(\chi^2_{60} > 75) \approx 0.1$ und $P(\chi^2_{70} > 75) \approx 0.3$.

    (b) wie (a) unter Annahme einer Normalverteilung für S.

60. Für den Bestand in Bsp. 58 wird eine XL-RV mit $20000 \leq M \leq 100000$ vereinbart. Die Gesamtprämieneinnahmen betragen $P = 1135000$.

    (a) Verwenden Sie für den Gesamtschaden des VU S_Y wieder ein CP-Modell und zeigen Sie $\mathbb{E}(S_Y) = 145000 + 7.5M$, $\mathbb{V}(S_Y) = 25 \cdot 10^8 + 7.5M^2$.

    (b) Die Gesamtprämie des RV P_R ist 130% seiner Nettoprämie . Unter der Annahme, dass S_Y normalverteilt ist, bestimmen Sie M so, dass $\mathbb{P}(S_Y + P_R > P)$ minimiert wird.

61. Für eine Haftpflichtversicherung ist die Schadenanzahl eines Versicherungsnehmers in einem Jahr durch eine Poissonverteilung mit $\lambda = 0.3$ und die Verteilung der Schadenhöhe durch $Pa(4, 1500)$ gegeben. Das VU nimmt an, dass nur Schäden über 210 gemeldet werden. Jeder gemeldete Schaden wird voll übernommen. Zusätzlich entstehen durch jeden gemeldeten Schaden Bearbeitungskosten der Höhe 100. Berechnen Sie die Nettoprämie des VN.

62. Die Schadenzahl N sei Poissonverteilt mit $\lambda = 1$. Die Schadenhöhe sei durch $Pa(3, 2)$ gegeben. Berechnen Sie $VKO(S)$ sowie $VKO(\underline{S})$ ($\underline{S}$ bezeichnet den Gesamtschaden des Erstversicherers) für die Prioritäten $M = 0.1, 0.5, 1, 2, 5$

63. Sei $N(t)$ ein inhomogener Poissonprozeß mit $\lambda(t)$ gegeben durch $\lambda(t) = 2$ für $t \in [0, 1[$, $\lambda(t) = 1 + t$ für $t \in [1, 2[$ und $\lambda(t) = 5$ für $t \geq 2$. Die Mittelwertfunktion sei $\mu(t)$

    (a) Ueberprüfen Sie, ob μ^{-1} existiert und falls ja, berechnen Sie diese Funktion.

    (b) Sei $\hat{N}(t) := N(\mu^{-1}(t))$. Geben Sie $E[N(4)]$ bzw. $E[\hat{N}(4)]$ an.

64. Beweisen Sie, dass für ein Nullnutzenprinzip immer $P = H(S) \geq \mathbb{E}(S)$ erfüllt ist.

    Hinweis: Für konkave Funktionen $u(\cdot)$ gilt die Ungleichung von Jensen

$$\mathbb{E}(u(X)) \leq u(\mathbb{E}(X)).$$

65. Berechnen Sie für das Nullnutzenprinzip

$$u(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{a}$$

das zugehörige Prämienkalkulationsprinzip und wenden es auf ein Risiko $S \sim N(\mu, \sigma^2)$ an. Interpretieren Sie das Ergebnis.

66. Für das Exponentialprinzip $P(a) = \frac{1}{a} \ln M_S(a)$ zeigen Sie $\lim_{a \to 0} P(a) = \mathbb{E}(S)$. Welche der folgenden Eigenschaften erfüllt das Exponentialprinzip?

   (a) $H(S) \leq S_{max}$.

   (b) $H(S) \geq \mathbb{E}(S)$;

67. Welche der folgenden Eigenschaften erfüllt das Exponentialprinzip?

   (d) $H(S + c) = H(S) + c$;

   (e) $H(cS) = cH(S) \qquad \forall c > 0$;

   (f) $H(S_1 + S_2) = H(S_1) + H(S_2)$ für $S_1,\ S_2$ ua.

   (h) $H(H(S|X)) = H(S)$;

68. Man zeige das Maximalschadenprinzip erfüllt die Eigenschaften (a)-(g).

69. Welche der Eigenschaften (a)-(g) werden vom Standardabweichungsprinzip erfüllt? Hinweis: Schwarzsche Ungleichung $\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)}$.

70. Anhand einer 1-jährigen Ablebensversicherung mit $q_x < \varepsilon$ weise man nach, dass das Perzentilprinzip die Eigenschaft (b) nicht generell erfüllt (Skizze!).

71. Für die Verlustfunktion $L(s, p) = (e^{as} - e^{ap})^2$ bestimme man das zugehörige Prämienkalkulationsprinzip.

72. Für die Verlustfunktion $L(s, p) = s(s - p)^2$ bestimme man das zugehörige Prämienkalkulationsprinzip. Interpretieren Sie.

In den Beispielen 73 - 76 berechnen Sie die exakte Credibility Schätzfunktion $\bar{e}(x_1, \ldots, x_n)$. Hat $\bar{e}$ die Gestalt einer Credibilityformel? Wenn ja, interpretieren Sie das Ergebnis für den Credibilityfaktor z.

73. Poisson-Gamma-Modell:

$$X|(\Lambda = \lambda) \sim P(\lambda)\,, \qquad \Lambda \sim Ga(\alpha, \beta)\,.$$

74. Exponential-Exponential-Modell:

$$X|(\Theta = \theta) \sim Ex(\theta)\,, \qquad \Theta \sim Ex(\alpha)\,.$$

75. Normal-Normal-Modell:

$$X|(\Theta = \theta) \sim N(\theta, \sigma_1^2)\,, \qquad \Theta \sim N(\mu, \sigma_2^2)\,.$$

76. Alternativ-Beta-Modell:

$$X|(\Theta = \theta) \sim A(\theta)\,, \qquad \Theta \sim Be(\alpha, \beta)\,.$$

77. Berechnen Sie für jedes Risiko der folgenden Tabelle die exakte Credibility Prämie für das 11. Jahr unter der Annahme $(X|(\Theta = \theta) \sim A(\theta))$, und der a-priori Verteilung:

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 0.40 & \theta = 0.0, \\ 0.25 & \theta = 0.1, \\ 0.15 & \theta = 0.2, \\ 0.05 & \theta \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}\,. \end{cases}$$

X_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
14	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
18	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

78. Approximieren Sie die a-priori Verteilung von Bsp 77 durch eine Betaverteilung, und berechnen Sie mit Hilfe eines Alternativ-Beta-Modelles (siehe Bsp. 76) die Credibility Prämie für das 11. Jahr.

79. Berechnen Sie die Individualprämien, die Kollektivprämie sowie die Credibility Prämien (Bühlmann Modell) für das 11. Jahr für die Daten von Bsp. 77.
Berechnen Sie auch die durchschnittliche Credibilityprämie. Vergleichen Sie die empirischen Credibilityprämien mit denen der Beispiele 77 und 78.

80. Es sind die inflationsbereinigten Schadenhöhen eines Bestandes von 5 Risken der letzten 6 Jahre gegeben. Berechnen Sie die Individualprämien, die Kollektivprämie sowie die Credibility Prämien (Bühlmann Modell) für das kommende Jahr.
Berechnen Sie auch die durchschnittliche Credibilityprämie.

X_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	103	73	32	102	78	87
2	112	138	29	93	104	71
3	135	155	121	123	77	139
4	91	106	109	111	116	81
5	67	133	65	93	118	89

81. Zeigen Sie: Die Endenverteilung der Paretoverteilung $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa+x}\right)^\alpha$, $\alpha, \kappa > 0$, ist von regulärer Variation.

82. Zeigen Sie: Die Dichte der Loggammaverteilung $f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \ln(x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$, $\alpha, \beta > 0$, ist von regulärer Variation.

83. Sei $f(x) = x^{-2}/\ln(x)$ für $x > 1$. Zeigen Sie: f ist von regulärer Variation mit Index 2 (i.e. $f \in \mathcal{R}_2$) und $\overline{F}(x) \in \mathcal{R}_1$ (direkt, ohne Verwendung des Satzes von Karamata !).

84. Sei F die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X. Zeigen Sie: Falls $\overline{F}(x) \in \mathcal{R}_\alpha$, so gilt $E[X^\delta] < \infty$ für $0 < \delta < \alpha$

85. Überprüfen Sie die Bedingung " $\exists z > 1, \text{sodass } E[z^N] < \infty$" für die Poissonverteilung, die Binomialverteilung und die negative Binomialverteilung.

86. Zeigen Sie, dass die Paretoverteilung in der Klasse der subexponentiellen Verteilungen $\mathcal{S}$ liegt.

87. Zeigen Sie, dass die Weibullverteilung mit $\overline{F}(x) = \exp(-cx^\beta)$, $c > 0, 0 < \beta < 1$ in $\mathcal{S}$ liegt.

88. Zeigen Sie, dass für die geometrische Verteilung, i.e. $P(X = k) = p(1-p)^k$, $k \in N_0$, $0 < p < 1$, keine nichttriviale Grenzverteilung ihrer Maxima M_n existiert.

Sachversicherungsmathematik

12. Übungsblatt 2024

89. Für einen nicht-homogenen Poissonprozeß $N(t)$ mit Intensität $\lambda(t)$, sei T die Zeit bis zur ersten Ankunft.

    (a) Berechnen Sie die Dichtefunktion für die Zufallsvariable T, falls $\lambda(t) = a/(1+t)$.

    (b) Bestimmen Sie a so, dass $P(T > 10) = 0.95$

90. Zeigen Sie

    (a) $M_n = n^{1/\alpha}X$ in Verteilung, falls X Frechet verteilt ist.

    (b) $M_n = \ln(n) + X$ in Verteilung, falls X Gumbel verteilt ist.

91. Zeigen Sie $\frac{xf(x)}{\overline{F}(x)} \to \alpha > 0$ für $x \to \infty$ impliziert $F \in MDA(\Phi_\alpha)$.

92. Für eine positive Zufallsvariable X mit endlichem Erwartungswert sei $e(u) = \frac{\int_u^{x_F} x-u\, dF(x)}{\overline{F}(u)}$, $(0 \le u < x_F)$ die mittlere Überschussfunktion. Zeigen Sie

$$\overline{F}(x) = \frac{e(0)}{e(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{e(u)}\, du\right), \qquad x \ge 0.$$

In der folgenden Tabelle ist das Abwicklungsdreieck (in Mio. Euro, noncumulative values) für einen Bestand gegeben. Ergänzen Sie in den Bsp. 93,94 mittels der angegebenen IBNR Methode das run off triangle, und schätzen Sie die Reserven, die für die zukünftige Abwicklung der Schäden aus den Jahren 2011-2017 zu bilden sind.

Schaden-	Abwicklungsjahr						
jahr	1	2	3	4	5	6	7
2011	4124	3258	1166	842	682	552	456
2012	4062	3412	1286	896	770	614	
2013	4328	3774	1334	908	738		
2014	4640	3720	1342	926			
2015	4924	3818	1472				
2016	5302	4316					
2017	6168						

93. Klassisches Chain Ladder Verfahren ($\hat{c}_s$ Werte angeben) .

94. D-Chain Ladder Verfahren ($\hat{D}_{ik}$ angeben).