Handelsstrategie und Vermögensprozesse

27. Oktober 2024

1 Allgemeine Voraussetzungen

Dadurch, dass wir das Itô-Kalkül nun kennen, können wir Wertpapierpreise mit zeitabhängigen Zinsraten und Volatilitäten modellieren. Auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) haben wir eine m-dimentionale Brownsche Bewegung $\{W(t), F_t\}_{t\in[0,\infty)}$ mit der Brownschen Filterung $\{F_t\}_t$. Wir können nun die Bonds und Aktien bezüglich deren Preisverläufen modellieren:

- Bonds: $P_0(t) = p_0 * exp(\int_0^t r(s)ds)$
- Aktie: $P_i(t) = p_i * exp(\int_0^t (b_i(s) - \frac{1}{2} * \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}^2(s))ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s)dW_j(s))$

Dabei ist $t \in [0, T]$, $T > 0$, $i = 1, \ldots, d$ und $r(t), b(t) = (b_1(t), \ldots, b_d(t))^T, \sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{ij}$ alle bezüglich $\{F_t\}_t$ progressiv messbare, gleimäßig in (t, ω) beschränkte Prozesse sind. Zudem soll $\sigma(t)\sigma(t)^T$ gleichmäßig positiv definit sein.

Mit den Voraussetzungen können die folgenden stochastischen Differentialgleichungen eindeutig gelöst werden, wobei die Lösungen die Preise sind. Zudem sind das auch die Darstellungen der Itô-Prozesse.

- Bonds: $dP_0(t) = P_0(t) * r(t)dt$ mit $P_0(0) = p_0$
- Aktie: $dP_i(t) = P_i(t)(b_i(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)dW_j(t)), i = 1, \ldots, d$ mit $P_i(0) = p_i$

Zu guter Letzt sollte noch erwähnt werden, dass der Zinssatz $r(t)$ deterministisch ist, was bedeutet, dass $r(t)$ auch eine Zufallsvariable sein kann. Dadurch ist das Risiko von Bonds, welche nicht mehr risikolos sind, aber dennoch gleichmäßig beschränkt sind, bezüglich des Aktienpreises stark eingeschränkt.

2 Mögliche Handlungen von Investoren

Zum modellieren der Marktteilnehmer geben wir ihnen zwei mögliche Handelsmöglichkeiten:

- Er kann sein Vermögen aufteilen und verteilen, indem er Aktien verkauft und andere erwirbt. Dargestellt wird die durch den Portfolioprozess oder die Handelsstrategie.
- Die ander Möglichkeit ist es, Teile des Vermögens zu konsumieren, wobei dies in dem Konsumprozess dargestellt wird.

3 Forderungen an den Markt

1. Keine Kentnisse über die Zukunft.
2. Individuelle Handlungen eines Marktteilnehmers haben keinen Einfluss auf die Wertpapierpreise.
3. Jeder Marktteilnehmer hat ein festes Startkapital (t=0). Jeder Marktteilnehmer kann ein anders Startkapital haben.
4. Geld, welches nicht in Aktien investiert ist, wird in Bonds angelegt.
5. Jeder Marktteilnehmer ist selbstfinanziert. (Kein Geld kann durch nichts tun verschwinden oder erscheinen.)

6. Wertpapiere sind Beliebig teilbar.
7. Es ist möglich einen negativen Anteil an Wertpapieren zu besitzen. Ist die Anzahl des festverzinsten Wertpapiers negativ, hat man einen Kredit aufgenommmen. Sind hingegen die Anteile an Aktien negativ, hat man Aktienleerverkäufe getätigt. D.h., man hat Aktien verkauft, die man nicht besitzt.
8. Es entstehen keine Kosten durch Vermögensumschlichtung.

Die Forderungen können auch Mathematisch umgestzt werden. Z.B. mit $x > 0$ wird Vorderung 3. erfüllt. Forderung 5. ist die Selbstfinanzierung die in folgendem Beispiel Präsentiert wird:

4 Selbst-finanzierenden Handelsstrategie

Definition Handelsstrategie φ:

- ist ein $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger, bzgl $\{F_t\}_{t\in[0,T)}$ progressiv messbarer Prozess:
- $\varphi(t)$:= (φ_0(t), φ_1(t),... φ_d(t))'
- mit:
- $\int_0^T |\varphi_0(t)|\,dt < \infty$ P-fast sicher
- $\sum_{j=1}^d \int_0^T (\varphi_i(t)P_i(t))^2 dt < \infty$ P-fast sicher, für i = 1,...d

Definition Anfangswert von φ:

- x := $\sum_{i=0}^d \varphi_i(0)P_i$

Definition Vermögensprozess bzgl. φ mit Startvermögen x:

- φ ... Handelsstrategie
- x > 0 ... Anfangswert der Handelsstrategie
- X(t) := $\sum_{i=0}^d \varphi_i(t)P_i(t)$

Definition Konsumratenprozess (Konsumprozess):

- ein nicht-negativer, bzgl. $\{F_t\}_{t\in[0,T)}$ progressiv messbarer, reellwertiger Prozess c(t), $t \in [0, T]$
- mit:
- $\int_0^T c(t)dt < \infty$ P-fast sicher

Definition selbstfinanzierend:

- ein Paar (φ, c) aus einer Handelsstrategie und einem Konsumratenprozess heißt so, falls für den zugehörigenn Vermögensprozess X(t), $t \in [0, T]$ gilt:
- X(t) = x + $\sum_{i=0}^d \int_0^t \varphi_i(s)dP_i(s) - \int_0^t c(s)df$ P-fast sicher
- aktuelles Vermögen = Startvermögen + Gewinne/Verluste - Konsum

Definition selbst-finanzierender Portfolioprozess zum Paar (φ, c)

- (φ, c) sein selbst-finanzierendes Paar aus Handelsstrategie und einem Konsumprozess X(t) > 0 P-fast sicher für alle $t \in [0, T]$
- der $\mathbb{R}^d$-wertige Prozess heißt dann selbst-finanzierender Portfolioprozess:
- $\pi(t) := (\pi_1(t), ..., \pi_d(t))'$, $t \in [0, T]$
- mit $\pi_i(t) = \frac{\varphi_i(t)P_i(t)}{X(t)}$

Vollständigkeit des Marktes

Isabella Ernst, Varvara Bondarenko

28. Oktober 2024

Voraussetzung: d = m
Die Dimension der Brownschen Bewegung entspricht der Anzahl der Aktien.
Die Menge der mit einem Anfangskapital x erzielbaren Endvermögen wird mit $X(T)$ bezeichnet. Die Grundaussage dieses Abschnittes ist, dass bei geeignetem Anfangsvermögen x jedes Endvermögen $X(T)$ erzielbar ist.

Bezeichnungen

$\gamma(t) := \exp\big(-\int_0^t r(s)ds\big)$
$\theta(t) := \sigma^{-1}(t)\big(b(t) - r(t)\underline{1}\big)$
$Z(t) := \exp\big(-\int_0^t \theta(s)'dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds\big)$
$H(t) := \gamma(t) \cdot Z(t)$

Aus der gleichmäßigen Beschränktheit von b, r und der gleichmäßigen Positiv-Definitheit von $\sigma\sigma'$ folgt die gleichmäßige Beschränktheit von $\|\theta(t)\|^2$. Während $\theta(t)$ als eine Art (relative) Risikoprämie für das Investieren in Aktien angesehen werden kann, spielt der Prozess $H(t)$ in Zusammenhang mit dem Bewerten von Optionen eine entscheidende Rolle. $H(t)$ ist positiv, stetig und progressiv messbar bzgl. $\{F_t\}_t$ und ist eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dH(t) = -H(t)\big(r(t)dt + \sigma(t)'dW(t)\big)$$

$$H(0) = 1$$

Hiermit erhalten wir die Darstellung von $H(t)$ als Itô-Prozess.

Der nachfolgende Satz ist zentrales Ergebnis und beinhaltet die entscheidende Eigenschaft des Marktmodells für den Fall $d = m$.

Satz (Vollständigkeit des Marktes)**.**

a) Das selbst-finanzierende Paar (π, c), bestehend aus einem Portfolioprozess π und einem Konsumprozess c, sei zulässig für das Startvermögen $x > 0$, also $(\pi, c) \in A(x)$. Dann gilt für den zugehörigen Vermögensprozess $X(t)$:

$$\mathbb{E}\left[H(t)X(t) + \int_0^t H(s)c(s)\,ds\right] \leq x \quad \textit{für alle } t \in [0, T].$$

b) Es seien $B \geq 0$ eine F_T-messbare Zufallsvariable und $c(t)$, $t \in [0, T]$, ein Konsumprozess mit

$$x := \mathbb{E}\left[H(T)B + \int_0^T H(s)c(s)\,ds\right] < \infty.$$

Dann gibt es einen Portfolioprozess $\pi(t)$, $t \in [0, T]$, mit $(\pi, c) \in A(x)$, so dass der zugehörige Vermögensprozess $X(t)$

$$X(T) = B \quad \textit{P-fast sicher}$$

erfüllt.

Bedeutung des Satzes

a) $H(t)$ kann als geeigneter Diskontierungsprozess interpretiert werden, der das in $t = 0$ benötigte Mindestvermögen

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H(s) \cdot c(s)\,ds\right] + \mathbb{E}\big(H(t) \cdot B\big)$$

angibt, um Ziele, die in der Zukunft liegen (z.B. leben gemäß einem vorgegebenen Konsumprozess c, erreichen eines Vermögenstands B zur Zeit $t = T$) zu erreichen. Dies setzt dem Wunschdenken bei gegebenem Anfangsvermögen $x > 0$ Grenzen.

b) zeigt, dass die nach a) zulässigen Ziele auch tatsächlich realisierbar sind. Jeder gewünschte Vermögenszustand in $t = T$ kann durch Handeln gemäß eines geeigneten selbst-finanzierenden Paares (π, c) mit einem hinreichendem Anfangsvermögen erreicht werden - **Vollständigkeit des Marktes**.

Optimale Portfolios

Zu einem gegebenen festen Anfangskapital $x > 0$ soll ein zulässiges, selbstfinanzierendes Paar aus Portfolio- und Konsumprozess $(\pi, c) \in A(x)$ gefunden werden, das einen möglichst vorteilhaften Zahlungsstrom liefert.

Allgemeines

Definition 1. Nutzenfunktion
Die Funktion U heißt Nutzenfunktion, wenn

a) $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ strikt konkav, stetig differenzierbar und

$$U'(0) := \lim_{x \downarrow 0} U'(x) = +\infty, \qquad U'(\infty) := \lim_{x \to \infty} U'(x) = 0.$$

b) $U : [0, T] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist, so dass für alle $t \in [0, T]$ die Funktion $U(t, .)$ Nutzenfunktion nach Definition a) ist.

Mithilfe dieser Nutzenfunktion, können wir ein Funktional J definieren, das den Nutzen des Zahlungsstromes objektiv misst.

$$J(x; \pi, c) := \mathbb{E}\left(\int_0^T U_1(t, c(t))dt + U_2(X(T)) \right)$$

Wobei $X(T)$ den zu x und (π, c) gehörenden Vermögensprozess beschreibt und U_1, U_2 Nutzenfunktionen sind.
Um einen möglichst guten Zahlungsstrom zu erhalten muss J maximiert werden.

Definition 2. (zeitstetiges) Portfolioproblem
Das Problem

$$\max_{(\pi,c) \in A'(x)} J(x; \pi, c)$$

mit

$$A'(x) = \left\{ (\pi, c) \in A(x) \middle| \mathbb{E}\left(\int_0^T U_1(t, c(t))^- dt + U_2(X(T))^- \right) < \infty \right\}$$

heißt das (zeitstetige) Portfolioproblem.

Die Martingalmethode

Die Idee der Martingalmethode ist es, das soeben vorgestellte zeitstetige Portfolioproblem in ein statisches Optimierungsproblem ("Bestimmung des optimalen Auszahlungsprofils") und in ein Darstellungsproblem ("Berechne zugehörigen Portfolioprozess") zu zerlegen.

Betrachten wir das Problem erst einmal ohne Konsum ($c \equiv 0,\ U_1 \equiv 0$), wobei das selbstfinanzierende Paar $(\pi, 0)$ für das Startvermögen x > 0 zulässig sei.

Mithilfe des Satzes über die Vollständigkeit des Marktes (2. Vortrag) erhält man für den zugehörigen Vermögensprozess $X^\pi(T)$ die Bedingung:

$$\mathbb{E}\Big[H(T)X^\pi(T)\Big] \leq x \text{ für } T \geq 0$$

und für eine F_T-messbare Endzahlung $B \geq 0$ mit $\mathbb{E}\Big[H(T)B\Big] = x$ erhält man die Existenz eines Portfolioprozesses $(\pi, 0) \in A(x)$ mit $B = X^\pi(T)$ P-f.s.
Mit

$$B(x) := \{B \geq 0 | B \ F_T - m.b., \mathbb{E}\Big[H(T)B\Big] \leq x, \mathbb{E}\Big[U_2(B)^-\Big] < \infty\}$$

ist es nun ausreichend

$$\max_{B \in B(x)} \mathbb{E}\Big[U_2(B)\Big]$$

zu lösen.

Hierfür bedienen wir uns der Lagrange-Methode und erhalten mit der Lagrange-Funktion:

$$L(B, y) := \mathbb{E}\Big[U_2(B) - y\Big(H(T)B - x\Big)\Big] \ mit \ y \geq 0$$

unter Berücksichtigung der Eigenschaften einer Nutzenfunktion und der damit einhergehenden Invertierbarkeit der Ableitung, die Bedingung

$$B = \Big(U_2'\Big)^{-1}\Big(yH(T)\Big) \tag{1}$$

und in weiterer Folge

$$0 = x - \mathbb{E}\Big[H(T)\Big(U_2'\Big)^{-1}\Big(yH(T)\Big)\Big].$$

Kann man die soeben bestimmte Gleichung eindeutig nach y lösen, so hat man mit (1) einen möglichen Kandidaten für das optimale Endvermögen.
Um die Optimalität der Lösung beweisen zu können, müssen folgende Begriffe definiert werden.

Definition 3.

$$\begin{aligned}
I_2(y) &:= (U_2')^{-1}(y) && \text{für } y \in (0, \infty) \\
I_1(t, y) &:= (U_1')^{-1}(t, y) && \text{für } y \in (0, \infty), t \text{ fest} \\
\chi(y) &:= \mathbb{E}\left(\int_0^T H(t) I_1\left(t, y \cdot H(t)\right) dt + H(T) I_2\left(y \cdot H(T)\right)\right)
\end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften von χ können wir die optimalen Prozesse nun folgendermaßen bestimmen.

Satz 1. Optimaler Konsum und optimales Endvermögen
Gegeben sei das Portfolioproblem aus Definition 2. Es sei $x > 0$ und $\chi(y) < \infty$ für alle $y > 0$. Setze $Y(x) := \chi^{-1}(x)$. Dann existiert zu

$$\begin{aligned}
B^* &:= I_2(Y(x) \cdot H(T)), && \textbf{„optimales Endvermögen"} \\
c^* &:= I_1(t, Y(x) \cdot H(t)), && \textbf{„optimaler Konsum"}
\end{aligned}$$

ein selbst-finanzierender Portfolioprozess $\pi^*(t), t \in [0,T]$, so dass

$$(\pi^*, c^*) \in A'(x), X^{x,\pi^*,c^*}(T) = B^* \text{ P-fast sicher}$$

gelten und (π^*, c^*) das Portfolioproblem löst. Dabei sei $X^{x,\pi^*,c^*}(t)$ der zu (π^*, c^*) mit Anfangsvermögen x gehörende Vermögensprozess.

Beispiel anhand der logarithmischen Nutzenfunktion

Wählt man $U_1(t,x) = U_2(x) = ln(x)$, so erhält man durch Einsetzen in Definition 3

$$I_1(t,y) = I_2(y) = \frac{1}{y}$$
$$\chi(y) = (T+1)$$
$$Y(x) = \frac{1}{x}(T+1)$$

und folglich:

$$\text{optimales Endvermögen: } B^* = \frac{x}{T+1}\frac{1}{H(T)}$$
$$\text{optimaler Konsum: } c^*(t) = \frac{x}{T+1}\frac{1}{H(t)}$$

Satz 2. Lösung des Darstellungsproblems

Gegeben sei das Portfolioproblem nach Definition 2. Es seinen $x > 0$, $\chi(y) < \infty$, c^* & b^* wie im Satz 1. Außerdem gelte für ein $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ mit $f(0,0,...,0) = x$ die Beziehung

$$\frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[\int_t^T H(s)c^*(s)ds + H(T)B^*|F_t\right] = f\Big(t, W_1(t), ..., W_d(t)\Big)$$

Dann folgt für $t \in [0,T]$:

$$\pi^*(t) = \frac{1}{X^{x,\pi^*,c^*}(t)}\sigma^{-1}(t)\nabla_x f\Big(t, W_1(t), ..., W_d(t)\Big)$$

wobei $\nabla_x f$ den Gradienten von $f(t, x_1, ..., x_d)$ bezüglich der x-Koordinaten bezeichnet.

Korollar 1.

a) Das optimale Endvermögen B^* im Problem

$$\max_{(\pi,0)\in A'(x)} \mathbb{E}\Big[U_2\Big(X^{x,\pi}(T)\Big)\Big]$$

ist durch

$$B^* := I_2\Big(Y(x)H(T)\Big)$$

gegeben, wobei in der Definition von $\chi(y)$ dann $I_1(t,y) \equiv 0$ zu setzen ist.

b) Der optimale Konsumprozess $c^*(t)$ im Problem

$$\max_{(\pi,c)\in A'(x)} \mathbb{E}\left[\int_0^T U_1\Big(t, c(t)\Big)dt\right]$$

ist durch

$$c^*(t) := I_1\Big(t, Y(x)H(t)\Big)$$

gegeben, wobei in der Definition von $\chi(y)$ dann $I_2(y) \equiv 0$ zu setzen ist.

Optimale Portfolios aus Optionen

Felix Neuwirth, Lana Popovic

Allgemeine Voraussetzungen dieses Abschnitts:
Wir gehen von konstanten Marktkoeffizienten r, b, σ aus. Außerdem sind γ, θ, $Z(t)$ und $H(t)$ wie zuvor definiert. Es gilt auch weiterhin $d = m$.

Beschreibung des Marktmodells
In unserem Markt gibt es einen Bond, d Aktien und d Optionen auf diese Aktien. In unserem Portfolio dürfen keine Aktien enthalten sein. Der Preisverlauf der Optionen hat die Form

$$f^{(i)}(t, P_1(t), \ldots, P_d(t)), \quad i = 1, \ldots, d, \quad f \in C^{1,2}.$$

Weiters sei

$$\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t))$$

eine zulässige Handelsstrategie in Bond und Optionen. Der zugehörige Vermögensprozess $X(t)$ wird beschrieben durch

$$X(t) = \varphi_0(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(t) f^{(i)}(t, P_1(t), \ldots, P_d(t)).$$

Sei U die Nutzenfunktion. Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\max_{\varphi} E(U(X(T))).$$

Satz 8
Die Delta-Matrix $\Psi(t) = (\Psi_{ij}(t))_{ij}$, für $i, j = 1, ..., d$ mit

$$\Psi_{ij} := f_{p_j}^{(i)}(t, P_1(t), ..., P_d(t))$$

sei für alle $t \in [0, T)$ regulär. Dann besitzt das Options-Portfolioproblem (OP) die folgende explizite Lösung:

a) Das optimale Endvermögen B^* stimmt mit dem optimalen Endvermögen im zugehorigen Aktien-Portfoliosproblem (P) überein.

b) Sei $\xi(t) = (\xi_0(t), ..., \xi_d(t))$ die optimale Handelsstrategie des zugehörigen Aktien-Portfoliosproblems (P). Dann ist die Optimale Handelsstrategie $\varphi(t) := (\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_d(t))$ gegeben durch:

$$\bar{\varphi}(t) = (\Psi(t)')^{-1} \cdot \bar{\xi}(t)$$

$$\varphi_0(t) = \frac{\left(X(t) - \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(t) f^{(i)}(t, P_1(t), ..., P_d(t))\right)}{P_0(t)}$$

mit $\bar{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_d(t))$ und $\bar{\xi}(t) = (\xi_1(t), ..., \xi_d(t))$

Beispiel- Logaritmischer Nutzen
-Nutzenfunktion: $U(x) = \ln(x)$
-d=1, Black-Scholes Modell
Daraus folgt:
-Optimale Handelsstrategie in Bond und Option in Abhängigkeit von der Delta-Matrix:
$\varphi_1(t) = \frac{b-r}{\sigma^2} \cdot \frac{X(t)}{\Psi_1(t) \cdot P_1(t)}$
-Beziehung zwischen dem optimalen Portfolio in (OP) von dem in (P):
$\pi_{\text{opt}}(t) = \pi_{\text{Akt}}(t) \cdot \frac{f^{(1)}(t, P_1(t))}{f^{(1)}_{P_1}(t, P_1(t)) \cdot P_1(t)}$

Proposition 9
Im Black-Scholes-Modell mit $d = 1$ gilt: mit der Wahl $U(x) = \ln(x)$:

a) $\pi_{\text{opt}}(t) = \pi_{\text{Akt}}(t)$, für alle $t \in [0, T]$

$$\Leftrightarrow \pi_{\text{opt}}(t) = k \cdot P_1(t)$$

mit einer Konstante $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Im Fall einer europäischen Call-Option gilt

$$\pi_{\text{opt}}(t) < \pi_{\text{Akt}}(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Teil (a) folgt direkt aus den vorherigen Ergebnissen für den Zusammenhang zwischen π_{opt} und π_{Akt}. Für (b) gilt

$$f^{(1)}(t, P_1(t)) = \Phi(d_1(t)) \cdot P_1(t) - \Phi(d_2(t)) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot K < \Phi(d_1(t)) \cdot P_1(t) = f^{(1)}_{P_1}(t, P_1(t)) \cdot P_1(t).$$

Daraus folgt wieder mit den vorherigen Ergebnissen für π_{opt} und π_{Akt} die Behauptung, da

$$\frac{f^{(1)}(t, P_1(t))}{f^{(1)}_{P_1}(t, P_1(t)) \cdot P_1(t)} < 1.$$

Asymptotische Ruinwahrscheinlichkeiten und optimale Investition

Dominik Gadinger, Johannes Vogel

November 2024

1 Einführung

Die Arbeit untersucht Strategien zur Minimierung der Ruinwahrscheinlichkeit von Versicherern unter Berücksichtigung von Investitionen in risikoreiche Anlagen, wie z. B. Aktien. Während klassische Modelle zeigen, dass die Ruinwahrscheinlichkeit bei exponentiellen Schadensgrößen durch Investitionen in risikofreie Anleihen exponentiell mit dem Anfangsvermögen abnimmt, zeigen neuere Ansätze, dass gezielte Investitionen in risikoreiche Assets diese Wahrscheinlichkeit weiter verringern können.
Die optimale Strategie besteht darin, einen konstanten Anteil des Vermögens in risikoreiche Anlagen zu investieren, was zu einer schnelleren exponentiellen Abnahme der Ruinwahrscheinlichkeit führt. Diese Strategie ist asymptotisch optimal, da alternative Ansätze langfristig weniger effektiv sind. Erstaunlicherweise kann das Hinzufügen von Risiko durch Investitionen die Ruinwahrscheinlichkeit erheblich senken, was die Bedeutung eines strategischen Asset-Liability-Managements für Versicherer unterstreicht.

2 Das Modell

Wir modellieren den Risikoprozess einer Versicherungsgesellschaft auf klassische Weise: Der Überschussprozess R wird durch einen Poisson-Prozess $N = (N(t))_{t\geq 0}$ mit Intensität $\lambda > 0$, und durch eine positive Zufallsvariable X beschrieben, die unabhängig vom Prozess N ist und eine Verteilungsfunktion F besitzt, wie folgt:

$$R(t, x) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

wobei $x \geq 0$ der Anfangsreserve der Versicherungsgesellschaft entspricht, $c \in \mathbb{R}$ die konstante Prämienrate über die Zeit darstellt und X_i eine i.i.d.-Sequenz von Kopien von X ist, welche die Höhe des i-ten Schadens modelliert, der vom Versicherer geltend gemacht wird.
Wir nehmen an, dass die Versicherung auch in eine Aktie oder einen Marktindex investieren kann, der durch eine geometrische Brownsche Bewegung beschrieben wird:

$$dS(t) = S(t)(adt + bdW(t))$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ feste Konstansten sind und W eine Standard-Brownsche Bewegung ist, die unabhängig vom Prozess R ist.
Wenn die Verischerungsgesellschaft zu einem Zeitpunkt t über ein Vermögen $Y(t)$ verfügt

und einen Betrag $K(t)$ in die Aktie investiert, wobei der verbleibende Betrag $Y(t) - K(t)$ in die Anleihe investiert wird, kann der Vermögensprozess wie folgt geschreiben werden:

$$Y(t,x,K) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + (\frac{K}{S} \cdot S)(t) = R(t,x) + (K \cdot W_{a,b})(t)$$

wobei $W_{a,b}(t)$ den verallgemeinerten Wiener-Prozess $W_{a,b}(t) = at + bW(t)$ mit einem Drift a und Volatilität b bezeichnet und $(K \cdot W_{a,b})$ das stochastische Integral des Prozesses K in Bezug auf den Prozess $W_{a,b}(t)$ darstellt.
Wir sind an der Ruinwahrscheinlichkeit der Versicherungsgeselschaft über unendlicher Zeit interessiert, die definiert ist als

$$\Psi(x,K) := \mathbb{P}[Y(t,x,K) < 0 \text{ für } t \geq 0]$$

abhängig vom anfänglichen Vermögen x und der Investitionsstrategie K des Versicherers.
Wir definieren weiter die Ruinzeit:

$$\tau(x,K) := inf\{t : Y(t,x,K) < 0\}$$

Weiters definieren wir:

$$\Psi^*(x) := inf_{K \in \mathcal{K}} \Psi(x,K)$$

Wenn das Infimum für eine bestimme Startegie K^* erreicht wird, nennen wir diese Strategie eine optimale Strategie in Bezug auf die Anfangsreserve x.
Wir bezeichnen $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ als die momenterzeugende Funktion der Schadenshöhe X, so verschoben, dass $h(0) = 0$

$$h(r) := \mathbb{E}[e^{rX}] - 1$$

Wir treffen die klassische Annahme, dass es ein $r_\infty \in (0,\infty]$ gibt, sodass $h(r) < \infty$ für $r < r_\infty$ und $h(r) \to \infty$ für $r \uparrow r_\infty$. Die Funktion h ist wachsen, konvex und stetig auf $[0, r_\infty)$.

3 Eine Asymptotische Ungleichung

Das klassische Cramér-Lundberg-Modell ohne Investitionsmöglichkeit ist natürlich ein Spezialfall des beschriebenen Modells, nämlich wenn $a = b = 0$. In diesem Fall nimmt man üblicherweise an, dass $c > \lambda\mathbb{E}[X]$, da andernfalls die Ruinwahrscheinlichkeit einfach gleich 1 wäre. Unter dieser Annahme kann die Ruinwahrscheinlichkeit, die dann unabhängig von der Investitionsstrategie K ist – nach oben hin durch $e^{-\nu x}$ begrenzt werden, wobei ν die positive Lösung der Gleichung ist:

$$\lambda h(r) = cr$$

Dies ist die Lunberg-Ungleichung und der Exponent ν wird als Lundberg- oder Anpassungskoeffizient bezeichnet.
Theorem 1 (Haupttheorem): Für das beschriebene Modell nehmen wir an, dass $b \neq 0$ gilt. Dann kann die minimale Ruinwahrscheinlichkeit $\Psi^*(x)$ eines Versicherers, der in den Aktienmarkt investiert, durch folgende Ungleichung nach oben abgeschätzt werden:

$$\Psi^*(x) \leq e^{-\hat{r}x},$$

wobei $0 < \hat{r} < r_\infty$ die positive Lösung der Gleichung ist:

$$\lambda h(r) = cr + \frac{a^2}{2b^2}.$$

Falls $\mathbb{E}[X] < c/\lambda$, das heißt, wenn der Lundberg-Koeffizient $\nu > 0$ existiert, dann gilt $\hat{r} > \nu$, falls $a \neq 0$, wodurch man eine schärfere Abschätzung für $\Psi^*(x)$ erhält. Lässt man die Annahme $\mathbb{E}[X] < c/\lambda$ fallen, so erhält man dennoch $\hat{r} > 0$, was auf einen exponentielles Abklingen der minimalen Ruinwahrscheinlichkeit hinweist.

$$M(t, x, K, r) := e^{-rY(t,x,K)}$$

Lemma 2: Sei $x \geq 0, a \neq 0$ und $b \neq 0$. Dann existiert ein eindeutiges $0 < \hat{r} < r_\infty$, das die folgende Gleichung erfüllt:

$$\lambda h(\hat{r}) = \frac{a^2}{2b^2} + cr$$

Für dieses $\hat{r}$ und den konstanten Prozess $\hat{K}(t) \equiv a/\hat{r}b^2$ ist der Prozess $M(t, x, \hat{K}, \hat{r})$ ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}$.
Von nun an betrachten wir die Prozess M und Y gestoppt an der Ruinzeit. Dafür defenieren wir

$$\tilde{M}(t, x, K, r) := M(t \wedge \tau(x, K), x, K, r)$$

und

$$\tilde{Y}(t, x, K) := Y(t \wedge \tau(x, K), x, K).$$

Theorem 3: Sei $a \neq 0, b \neq 0$. Für die konstante Investitionsstrategie $\hat{K}(t) \equiv a/\hat{r}b^2$ kann die Ruinwahrscheinlichkeit nach oben abgeschätzt werden durch (für alle $x \in \mathbb{R}_+$)

$$\Psi(x, \hat{K}) \leq e^{-\hat{r}x}.$$

Das Haupttheorem folgt nun aus Theorem 3.
Beispiel: Betrachte das klassische Modell, wobei die Schadenhöhen exponentialverteilt sind mit Parameter θ. In diesem Fall gilt $h(r) = \theta r/(1-\theta r), r \in [0, 1/\theta)$. Die Gleichung $h(r) = c/\lambda r$ hat zwei Lösungen, nämlich 0 und $\nu = \rho/(\rho+1)\theta$, wobei $\rho = c/\lambda\theta - 1$. Der Koeffizient $\hat{r}$ ist gleich

$$\nu + \left(\sqrt{\left(\frac{\nu + a^2/2b^2c}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2b^2c}\left(\frac{1}{\theta} - \nu\right)} - \frac{\nu + a^2/2b^2c}{2}\right).$$

Asymptotische Optimalität und Eindeutigkeit der konstanten Investmentstrategie

Um die asymptotische Optimalität und Eindeutigkeit der konstanten Investmentstrategie zu zeigen, benötigen wir folgende Annahme.

Definition 1. Sei $0 < r < r_\infty$ gegeben. Wir sagen, X hat ein gleichmäßiges exponentielles Moment in der Endverteilung für r, wenn gilt:

$$\sup_{y \geq 0} \mathbb{E}[e^{-r(y-X)} | X > y] < \infty$$

Von nun an nehmen wir an, dass die Zufallsvariable X (Schadenshöhe), ein gleichmäßiges exponentielles Moment in der Endverteilung für $\hat{r}$ hat.
Mit dieser Definition kann folgendes Theorem bewiesen werden.

Theorem 1. Hat X ein gleichmäßiges exponentielles Moment in der Endverteilung von $\hat{r}$, dann ist für jedes $K \in \mathcal{K}$ der Prozess $\widetilde{M}(t, x, k, \hat{r})$ ein gleichmäßig integrierbares Submartingal.

Im Beweis verwenden wir folgendes Lemma.

Lemma 1. Sei $0 \leq r < \infty$ und $K \in \mathcal{K}$. Die Differenz der Prozesse

$$\lambda \mathbb{E}[e^X - 1] \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, r) ds \text{ und } \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, r)(e^{r X_{N(s)}} - 1) dN(s)$$

ist ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}$

Lemma 2. Wenn X ein gleichmäßiges exponentielles Moment in der Endverteilung von $\hat{r}$ besitzt, dann konvergiert für beliebige $K \in \mathcal{K}$ und $x \in \mathbb{R}_+$ der gestoppte Vermögensprozess $(\tilde{Y}(t, x, K))_{t \geq 0}$ fast sicher auf der Menge $\{\tau = \infty\}$ gegen ∞, wenn $t \to \infty$.
Mit anderen Worten: Entweder tritt Ruin ein, oder der Versicherer wird unedlich reich.

Theorem 2. Angenommen, X besitzt ein gleichmäßiges exponentielles Moment in der Endverteilung von $\hat{r}$. Dann erfüllt die Ruinwahrscheinlichekit für jeden zulässigen Prozess $K \in \mathcal{K}$:

$$\Psi(x, K) \geq C e^{-\hat{r} x}, \text{ wobei } C = inf_{y \geq 0} \frac{\int_y^\infty dF(u)}{\int_y^\infty e^{-\hat{r}(y-z)} dF(z)} = \frac{1}{sup_{y \geq 0} \mathbb{E}[e^{-\hat{r}(y-X)} | X > y]} > 0$$

Viskositätslösungen

Beispiel für eine nicht glatte Wertfunktion

Deterministisches Beispiel:

- Sei $dX_t = u_t$, U = [-1, 1], A(t,x) .. messbare Funktionen mit Werten in U
- also $X_s = x + \int_t^s u_r\, dr$, $J(t,x,u) := (x + \int_t^T u_s\, ds)^2$, $V(t,x) = \sup_A J(t,x,u)$
- klarerweise gilt: $\hat{u}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0 \\ -1, & \text{otherwise} \end{cases}$
- daher $V(t,x) = \begin{cases} (x+T-t)^2, & \text{if } x \geq 0 \\ (x+t-T)^2, & \text{otherwise} \end{cases}$
- also $V_x(t,x) = \begin{cases} 2(x+T-t), & \text{if } x \geq 0 \\ 2(x+t-T), & \text{otherwise} \end{cases}$
- daher: $V_x(t, 0+) = 2(T-t) > 0$ and $V_x(t, 0-) = 2(-T+t) < 0$ daraus folgt: V nicht differenzierbar von x = 0

Intuition und Definition von Viskositätslösungen

Betrachte nichtlineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung:

- (E): $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0, x \in O, O$ offene Menge $\subset R^d$
- F stetige Abbildung: OxRxR^dx$S_d -> R$, S_d... symmetrische Matrizen

- Definition: F erfüllt Elliptizitätsbedingung falls gilt: $F(x,r,p,A) \leq F(x,r,p,B)$ falls $A \geq B$ für alle (x,r,p) wobei $A \geq B \leftrightarrow A - B \in S_d^+$ ... positiv semidefinite Matrizen
- Definition: $u : O \to R$ heißt klassische Oberlösung (bzw. klassische Unterlösung) von (E) falls gilt:
  - $u \in C^2(O)$
  - $F(x, u, Du, D^2u) \geq 0$ (bzw. ≤ 0), für alle $x \in O$

- Theorie der Viskositätslösungen wird motiviert durch folgendes Lemma:
- Sei u eine klassische Ober(Unter)Lösung von (E): Für alle $(x_0, \varphi) \in O$ x $C^2(O)$, wobei x_0 ein Minimizer (Maximizer) von $u - \varphi$ auf O ist, gilt: $F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$ (≤ 0)

- Definition: Sei $u : O -> R$ lokal beschränkt, $u_*(x) := \lim_{x' \to x} \inf u(x')$, $u^*(x) := \lim_{x' \to x} \sup u(x')$
  - u_* ... unterhalbstetige Einhüllende von u
  - u^* ... oberhalbstetige Einhüllende von u
- Definition: Sei F elliptisch, $u : O -> R$ lokal beschränkt
  - Wir nennen u eine Viskositätsober(unter)lösung von (E), falls gilt: $F(x_0, u_*(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq (\leq) 0$
  - für alle $(x_0, \varphi) \in C^2(O)$, wobei x_0 ein Minimzer (Maximizer) von $u_* - \varphi$ auf O ist.
  - u heißt Viskositätslösung von (E) falls es Viskositätsober- und unterlösung ist

HJB-Gleichung und Viskositätslösungen

- Setting wie im regulären Kontrollproblem:
  - $dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, x_t, u_t)dW_t$ mit eindeutiger starken Lösung
  - $J(t, x, u) = E_{t,x}[\int_t^T f(s, X_s, u_s)\, ds + \Phi(T, X_T)] \to max$
  - $V(t, x) = \sup\limits_{u \in A} J(t, x, u)$
- Proposition 1: angenommen $F(t, x, u)$ ist stetig in (t, x) für jedes $u \in U \to$ V ist Viskositätsoberlösung der HJB-Gleichung: $-V_t - H(t, x, DV, D^2V) = 0$ mit $H(...) = \sup\limits_{u \in U}\{b * DV + 1/2tv(D^2V * a) + f(t, x, u)\}$
- negatives Vorzeichen wegen Elliptizitätsbedingung
- Proposition 2: Annahmen wie in Prop.1; V ist Viskositätsunterlösung von: $-V_t - H(t, x, DV(t, x), D^2V(t, x)) = 0$
- Satz: Die Wertfunktion V ist eine Viskositätslösung der HJB Gleichung.
- Satz: Sei U (bzw. V) Viskositätsunterlösung (bzw. Oberlösung) mit polynomialen Wachstum. Falls $U(T, x) \leq V(T, x)$ auf R^n: $U \leq V$ auf $[0, T] \times R^n$
- Korrolar: Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes ist die Viskositätslösung, die die Endbedingung $V(T, x) = g(x)$ erfüllt, eindeutig.